

***Eureka! Trasformare il
problem solving
matematico con la
Thinking Classroom
attivando il corpo e la
collaborazione***

Maria Mellone – maria.mellone@unina.it



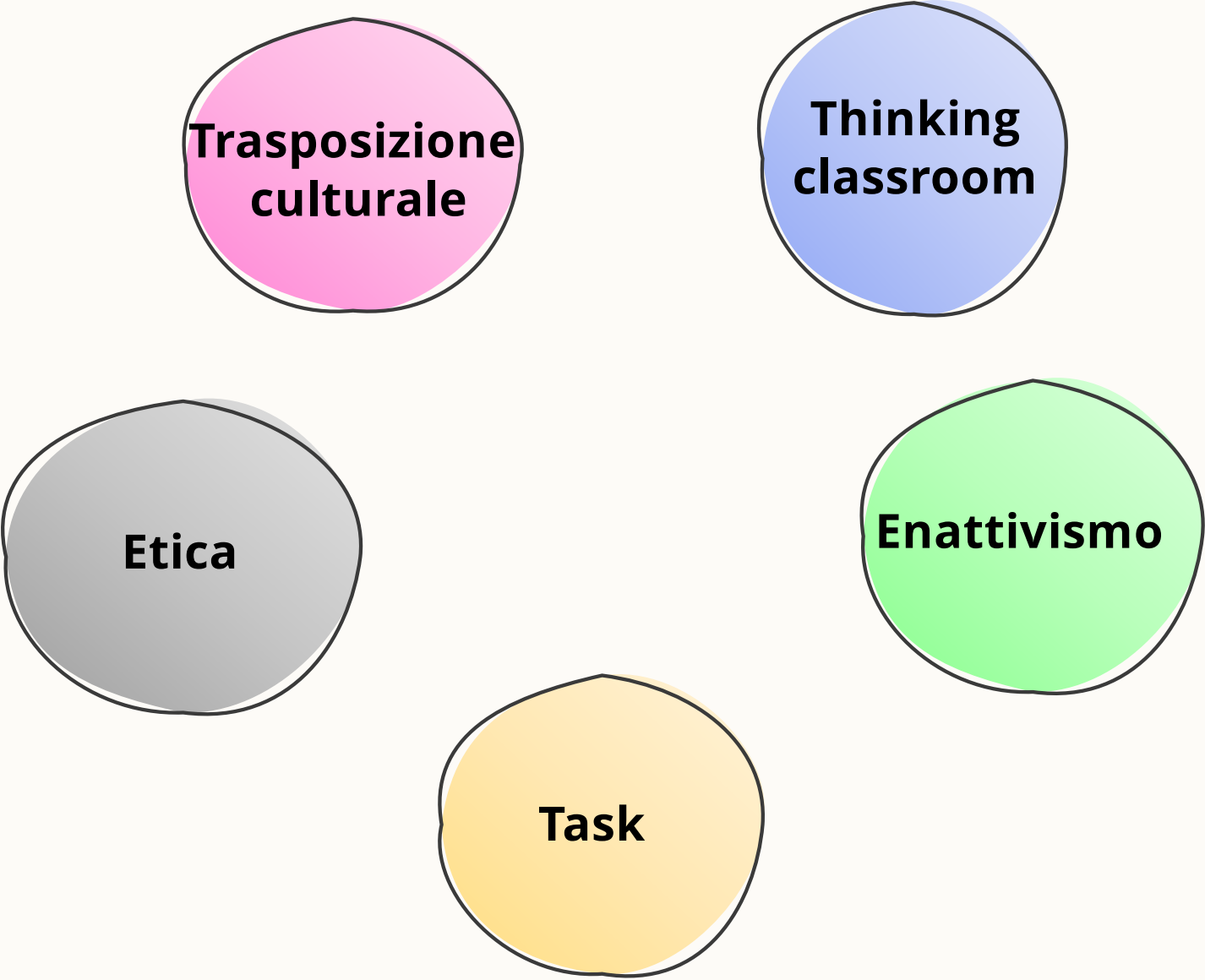
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II

XXXVIII Convegno UMI-CIIM

**La matematica
serve ancora?**

**L'EDUCAZIONE MATEMATICA
PER UNA CITTADINANZA ATTIVA,
CONSAPEVOLE E CRITICA**





**Trasposizione
culturale**

**Thinking
classroom**

Etica

Enattivismo

Task

Trasposizione culturale

25 OTTOBRE 2022 • COSTUME E SOCIETÀ

A scuola il metodo finlandese funziona anche in Italia, ecco perché

Materie accorpate, didattica cooperativa, lunghe pause, tanta natura e zero stress: una rete di scuole italiane ha adottato il metodo finlandese. I risultati? Ottimi, come ci racconta chi lo sperimenta tutti i giorni

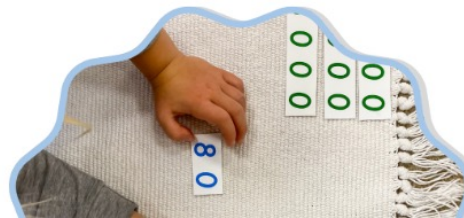
■ CULTURA

I migliori studenti di matematica: il metodo Singapore

5 FEBBRAIO 2013

Metodo Singapore ovvero come cambia la matematica

Luglio 25, 2018



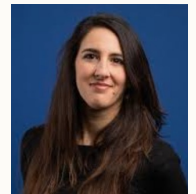
Il **metodo Singapore** è un metodo per l'insegnamento della matematica sviluppato da un team di studiosi alla fine degli anni ottanta a Singapore per migliorare la qualità dell'insegnamento.

Trasposizione culturale

Trasposizione Culturale

La Trasposizione Culturale è una prospettiva che inquadra l'uso di pratiche educative matematiche adottate in altri contesti culturali come opportunità per mettere in discussione le pratiche didattiche del proprio contesto culturale, al fine di riconsiderare l'intenzionalità educativa alla base di ogni prassi didattica.

(cfr. ad esempio Mellone, Ramploud, Carotenuto, 2021)



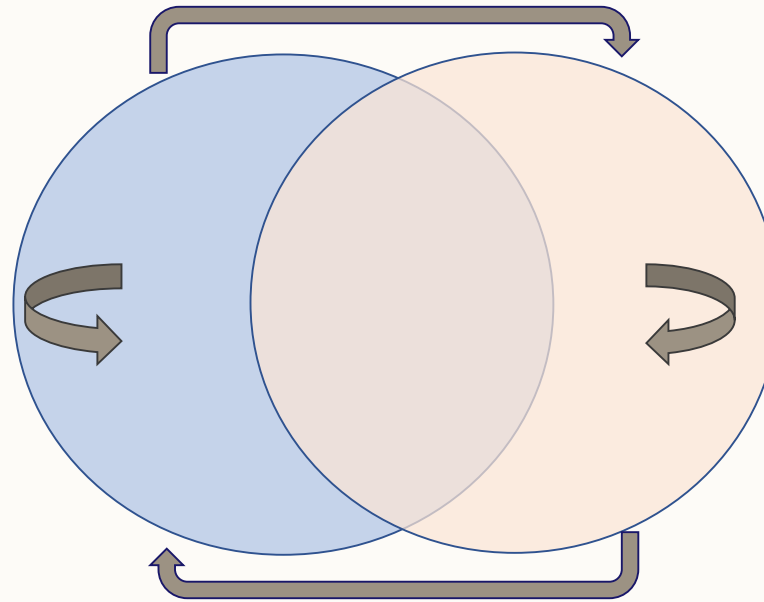
.... e ancora altri

**Trasposizione
culturale**

Trasposizione Culturale (TC)

Incontro con pratiche educative
provenienti da altri contesti culturali

Sviluppo di
consapevolezza rispetto
alla propria intenzionalità
educativa e conseguente
innovazione didattica



Decostruzione,
impensati culturali

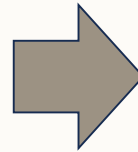
Formazioni insegnanti alla
luce dell'esperienza di
decostruzione

Trasposizione culturale

Elementi Fondamentali della Trasposizione Culturale

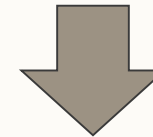
Incontro Interculturale

Esplorazione di pratiche educative provenienti da diversi contesti culturali, con particolare attenzione alle differenze nelle intenzionalità educative delle metodologie didattiche.



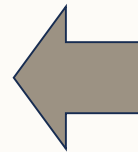
Decostruzione

Processo di analisi critica delle pratiche date per scontate, rivelando gli **"impensati"** culturali che influenzano inconsapevolmente il nostro approccio all'insegnamento.



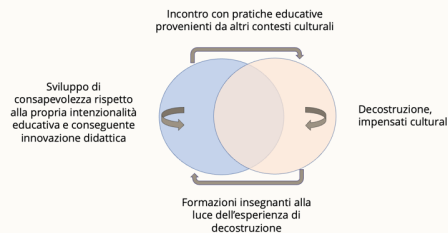
Sviluppo di Consapevolezza

Riflessione critica sulla propria intenzionalità educativa attraverso il confronto con l'alterità, portando a possibili innovazioni nelle pratiche d'insegnamento.



Formazione Docenti

Applicazione delle esperienze di decostruzione nei percorsi formativi degli insegnanti per promuovere una maggiore consapevolezza delle scelte didattiche.



Trasposizione culturale

L'impensato culturale e la Trasposizione



Impensato si riferisce ai diversi livelli in cui le culture sono stratificate. Ogni paradigma culturale è situato su una serie di implicazioni, in questo senso ripensare il proprio impensato significa entrare in un paradigma diverso per **decostruire** ciò che è dato come assolutamente **ovvio, naturale e autoevidente**, ma che in realtà deriva da una configurazione culturalmente situata di paradigmi. (Jullien, 2006)

Nella Trasposizione Culturale, le pratiche educative non vengono importate acriticamente, ma reinterpretate alla luce dei significati della cultura di arrivo.

Questo processo rende pensabile «l'impensato», decostruisce ciò che appariva ovvio e apre un dialogo autentico tra tradizioni pedagogiche, mostrando come ciò che sembrava universale sia in realtà contingente e culturalmente situato.

Trasposizione culturale

La trasposizione culturale per un'educazione matematica critica



Ole Skovsmose

Chi apprende non viene visto come ricettore/recipiente passivo per la «conoscenza istituzionalizzata» (la matematica da insegnare), ma piuttosto è riconosciuto come parte attiva dei processi educativi in cui domanda, sfida e forma la natura del proprio processo di apprendimento.

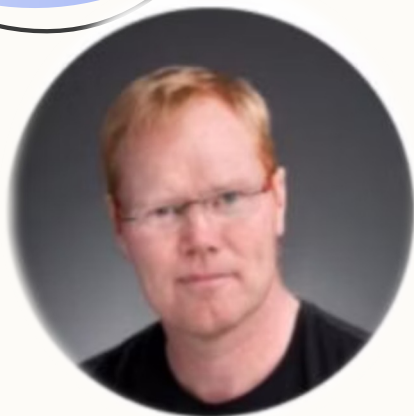
(Skovsmose, 1994)

Allo stesso modo, all'interno della prospettiva della **trasposizione culturale** e non solo, l'insegnante non è più visto soltanto come sorgente «passiva» di conoscenze istituzionalizzate, ma piuttosto come colui che determina la natura dell'esperienza di apprendimento che offre. In altre parole, il contatto con pratiche educative diverse da quelle del proprio contesto culturale può aumentare la consapevolezza degli insegnanti nel definire la natura della propria proposta educativa.

(Ramploud, Mellone, Di Paola, Martignone, 2018).

Peter Liljedahl

Professore di Educazione Matematica presso la Simon Fraser University in **Canada**.



Peter Liljedahl

- Si è occupato del ruolo delle emozioni nelle pratiche di pensiero matematico e nei processi di problem solving, in particolare dei momenti di illuminazione: l'“Eureka!”;
- In oltre 15 anni di ricerca ha ideato e sviluppato la metodologia della Mathematical Thinking Classroom, dove l'“Eureka” torna a essere centrale;
- Tra gli obiettivi c'è proprio quello di far vivere agli studenti l'esperienza autentica del problem solving matematico, in cui si alternano frustrazione e illuminazione come parte integrante del processo di scoperta (Liljedahl, 2016).

Thinking classroom

La ricerca di Peter Liljedahl



20% degli studenti trascorrevano **meno**
del 20% del tempo in classe a pensare

80% non pensava quasi mai!!!



La Thinking Classroom di Peter Liljedahl

Obiettivo Principale

Aumentare significativamente il tempo in cui gli studenti pensano attivamente, stimolando il coinvolgimento intellettuale e la costruzione autonoma del sapere matematico.

L'Esperienza "AHA!", L'Eureka!

Creare una metodologia di lavoro con il problem solving matematico che induca momenti di illuminazione improvvisa dopo situazioni di apparente blocco cognitivo, portando a una comprensione profonda e memorabile dei concetti matematici (Liljedahl, 2005, 2008)

**"Andare piano per andare veloci!"
Aumentare il tempo in cui
gli studenti pensano**

Thinking
classroom

Thinking Classroom



UNA CLASSE CHE NON SOLO
CONDUCA AL PENSIERO, MA CHE SIA
ANCHE OCCASIONE DI PENSIERO



UNO SPAZIO CHE SIA ABITATO DA
INDIVIDUI CHE PENSANO
INDIVIDUALMENTE E
COLLETTIVAMENTE



UN AMBIENTE CHE PERMETTA DI
COSTRUIRE CONOSCENZE E
COMPRENSIONI ATTRAVERSO
ATTIVITÀ E DISCUSSIONE

Il nostro incontro con la Thinking Classroom

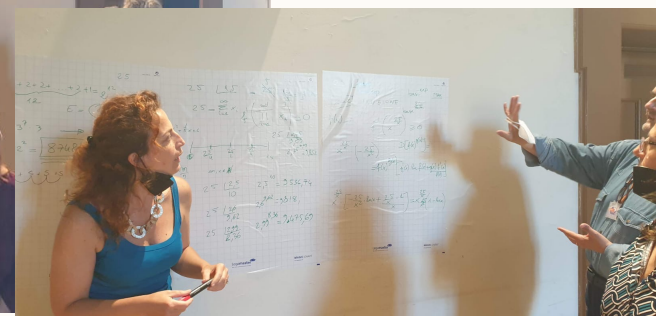
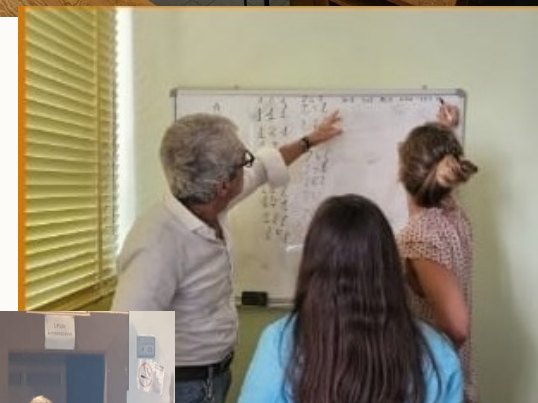
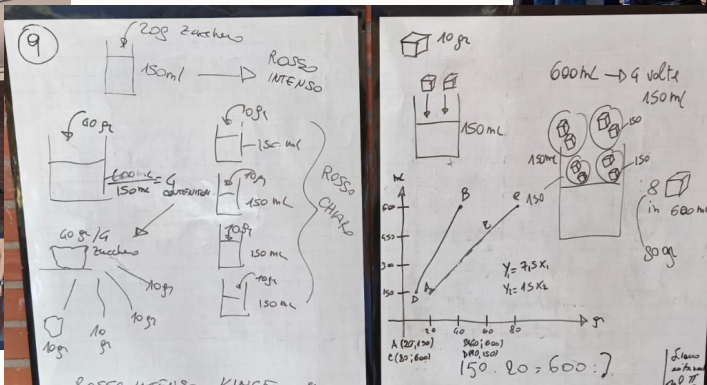
- **Contesto:** Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli», Corso di Laurea Magistrale in Matematica a indirizzo didattico
- **Formazione di futuri insegnanti di Matematica:** 4 workshop condotti da P. Liljedahl
- **Decostruzione** della metodologia da un punto di vista culturale
- **Progettazione e implementazione** di una Thinking Classroom da parte dei futuri insegnanti.



Thinking classroom

Quando è stata utilizzata questa metodologia?

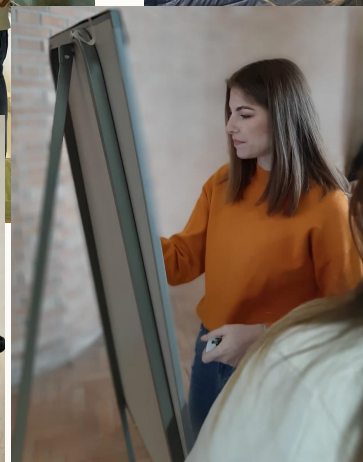
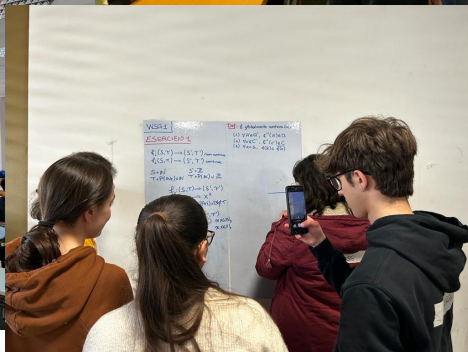
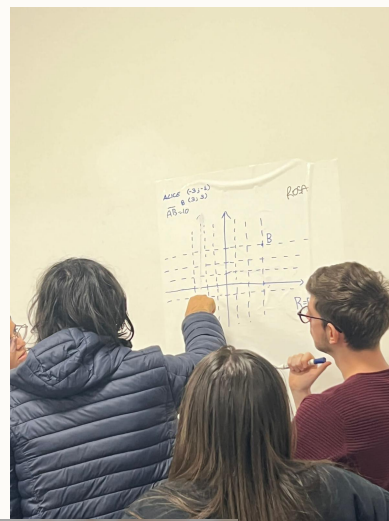
- Per la formazione dei futuri insegnanti
- Per la formazione di insegnanti in servizio
- Durante i percorsi di abilitazione all'insegnamento



Thinking classroom

Quando è stata utilizzata questa metodologia?

- Con gli studenti universitari
- Con gli studenti di scuola
- In eventi di divulgazione



Thinking classroom

Alcuni Punti Chiave della Thinking Classroom

Task Coinvolgenti

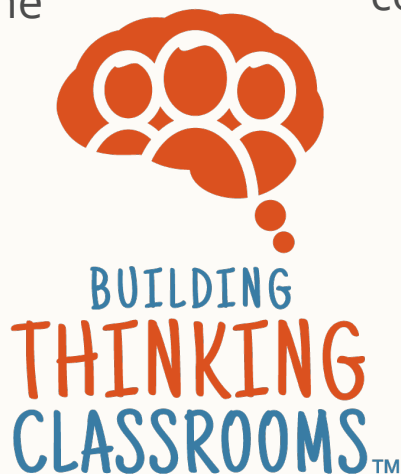
Problemi matematicamente ricchi che stimolano la discussione e la collaborazione

Proposta Narrativa

Presentazione orale dei problemi attraverso lo storytelling per supportare il coinvolgimento

Feedback Costruttivo

Risposte alle domande che stimolano ulteriore riflessione ("continua a pensare")



Gruppi Casuali

Formazioni visibilmente casuale dei gruppi di lavoro per rimuovere barriere sociali e favorire la mobilità della conoscenza

Spazio Flessibile

Organizzazione dell'aula che permette all'insegnante di muoversi e interagire da punti diversi

Lavoro in piedi

Utilizzo di superfici verticali non permanenti con un solo pennarello per gruppo

**Thinking
classroom**

Spazi di Lavoro e Formazione dei Gruppi

Lavagne Verticali

Gli studenti in piedi davanti a lavagne verticali iniziano a lavorare più velocemente, discutono di più e partecipano tutti attivamente.

Gruppi visibilmente casuali

Eliminano le barriere sociali, incrementano la dinamicità della conoscenza e riducono lo stress sociale di chi è più timido o si sente meno preparato.

Risultati Osservati

Maggiore persistenza nel risolvere problemi, mobilità della conoscenza e approccio non lineare al lavoro matematico.



Da aule tradizionali... ... a spazi di pensiero collaborativo

L'utilizzo di superfici verticali non permanenti trasforma il modo in cui gli studenti affrontano i problemi matematici.

Spazi di lavoro verticali

- Lavagne mobili, vetri, pareti cancellabili
- Avvio rapido del lavoro (20 sec vs 3 min su carta)
- Maggiore disponibilità a rischiare di commettere errori
- Promozione della mobilità cognitiva
- Facilitazione della discussione collettiva

Aula defrontalizzata

- Eliminazione della zona frontale tradizionale
- Dispersione della focalizzazione sul docente
- Studenti che lavorano in tutto lo spazio disponibile
- Maggiore mobilità fisica
- Collaborazione più fluida tra gruppi

La ri-organizzazione degli spazi



Franco Lorenzoni

«La disattenzione allo spazio da parte di noi insegnanti, la maggioranza di noi insegnanti, è dovuta ad un analfabetismo è legata ad una disattenzione al corpo. Un corpo statico, fermo a cui si richiede una attenzione passiva è un corpo seduto. Un corpo in movimento è più difficile da gestire ovviamente però offre enormi possibilità nell'apprendimento e nella relazione reciproca che sono le due grandi chiavi dell'educazione.»

«I mobili sono mobili perché sono mobili... Muovere le cose è importantissimo. Per organizzare il lavoro bisogna spostare i banchi! Si può lavorare ad isole ed è molto interessante, o a ferro di cavallo, oppure spostando tutti i banchi e sedendosi a terra in cerchio.»

Enattivismo

- Il pensiero matematico non è un processo puramente astratto e mentale
- La cognizione è incorporata nelle interazioni fisiche con il mondo
- L'apprendimento emerge dalla relazione strutturale tra organismo e ambiente
- La conoscenza è una forma di azione situata piuttosto che una mera rappresentazione mentale

La prospettiva enattivista in didattica della matematica riconosce il ruolo fondamentale delle esperienze corporee e sensoriali nello sviluppo del pensiero matematico (Varela, 1999).

L'idea di *embodied action* nell'Enattivismo



Luis Radford

"Il pensiero non avviene solo *all'interno* della testa, ma anche *all'interno* e *attraverso* una sofisticata coordinazione semiotica di dialogo, corpo, gesti, simboli e strumenti"

(Radford, 2009)

Nella thinking classroom non c'è un metaforizzazione dei concetti matematici con il corpo, o l'esplorazione fisica di fenomeni che poi possono essere modellizzati dalla matematica.

La richiesta di attivazione della thinking classroom è molto più semplice, è solo richiesto di stare in piedi, ma già solo questa attivazione cambia notevolmente l'esperienza di risoluzione di problem solving...



Tipologia di Task: Stimolare il Pensiero

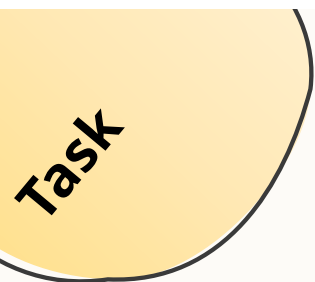
Se si vuole che gli studenti pensino bisogna dar loro qualcosa a cui pensare ("Good Problems" , <http://www.peterliljedahl.com/teachers/good-problem>)

Caratteristiche del task ideale

- Altamente coinvolgente e intrigante
- Stimola passione e riflessione
- Equilibrio tra sfida e abilità
- Evita frustrazione o noia

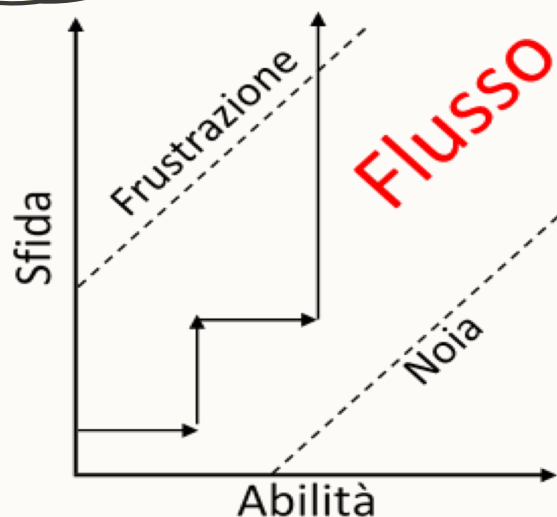
Tasks curriculari rimodulati in modo da evitare di innescare processi imitativi

Tasks non curriculari



Il "Flusso" nel Problem Solving

(Liljedahl, 2016)

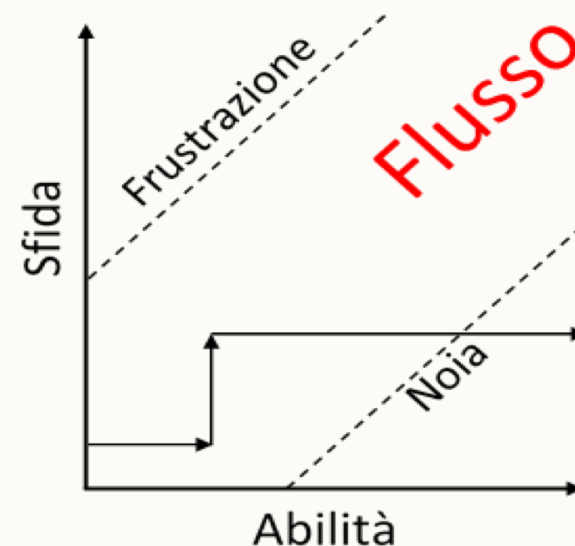


Fattore influente: il **TEMPO**

Se si aumenta la sfida di un compito **prima** che gli studenti abbiano avuto la possibilità di far crescere completamente la loro abilità



si spinge gli studenti nella **frustrazione**



Troppo tempo **prima** di aumentare la sfida



si spinge gli studenti alla **noia**

Il "Flusso" nel Problem Solving

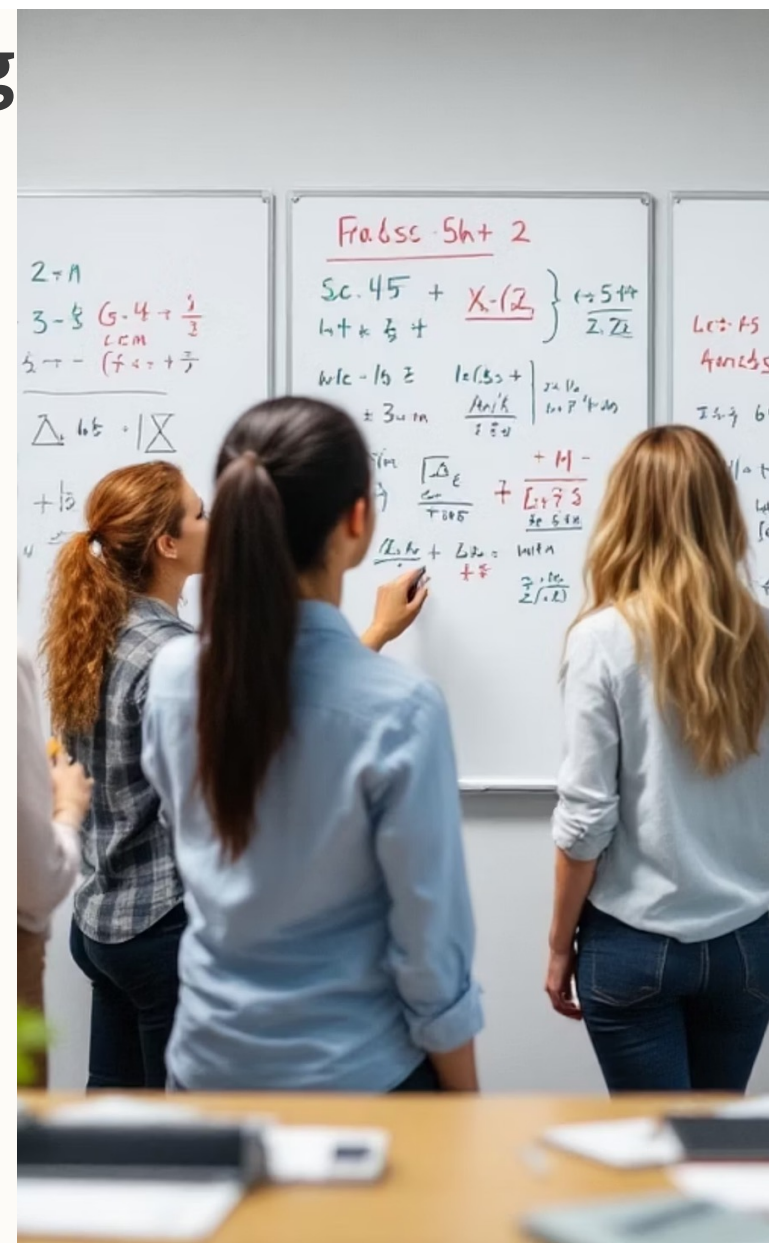
(Liljedahl, 2016)

Task



Condizione ottimale di impegno e attivazione del pensiero, dove gli studenti sono completamente immersi nell'attività matematica

Come sosteneva Emma Castelnuovo, è fondamentale concedere agli studenti il tempo di "perdere tempo" per costruire soluzioni proprie anziché usare soluzioni preconfezionate, permettendo loro di riflettere e costruire conoscenze significative.



Problemi "low floor - high ceiling"

Utilizzo di problemi con bassa soglia di accesso ma alto potenziale di esplorazione matematica.

Low floor (accesso facile) – High ceiling (complessità in evoluzione)

Si tratta di task facilmente accessibili a tutti, ma che offrono anche l'opportunità di esplorare sfide più profonde e complesse e sviluppare progressivamente livelli più sofisticati di comprensione matematica

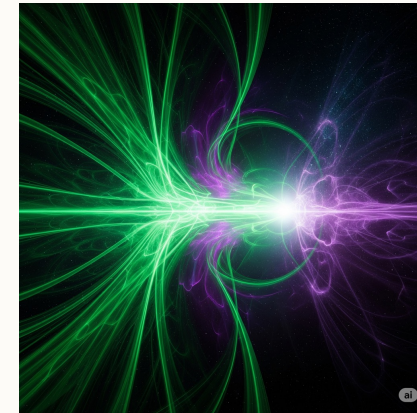
Task

L'energia del cristallo solare arturiano

Il cristallo solare arturiano ha al suo interno **25 piccole masse energetiche** che **si raggruppano in maniera casuale**. A ogni configurazione, **l'energia** corrispondente si calcola moltiplicando le masse agglomerate.



$$\begin{aligned}25 &= 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \\25 &= 10 + 10 + 5 \\25 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 10 + 10\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}5 * 5 * 5 * 5 * 5 &= 3125 \\10 * 10 * 5 &= 500 \\1 * 1 * 1 * 1 * 1 * 10 * 10 &= 100\end{aligned}$$

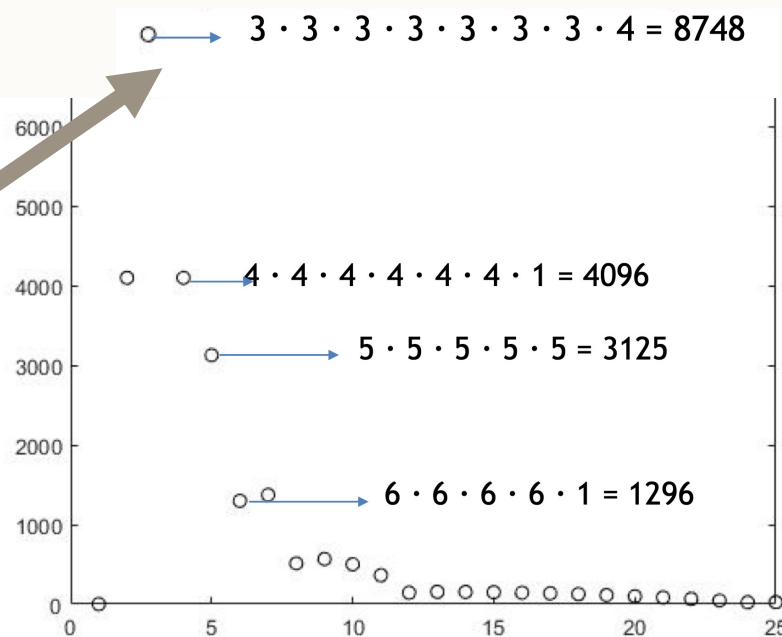
Quale configurazione genera la massima energia?

Task

Matematicamente: alcune strategie risolutive

Scomposizione del 25 tramite esclusivo utilizzo di numeri interi, procedendo per tentativi

$$25 = (3 \times 7) + 2^2 \longrightarrow 3^7 \times 2^2 = 8748$$



Le masse possono anche dividersi a loro volta, pensiamole fatte di un materiale continuo...

Alcune strategie risolutive

$$25 = 2,5 + \underbrace{\dots + 2,5}_{10\text{-volte}}$$

$$(2,5)^{10} = 9536,74$$

$$25 = 1,6 + \underbrace{2,6 + \dots + 2,6}_{9\text{-volte}}$$

$$(2,6)^9 \cdot 1,6 = 8687,20$$

$$25 = 3,4 + \underbrace{2,7 + \dots + 2,7}_{8\text{-volte}}$$

$$(2,7)^8 \cdot 3,4 = 9602,6$$

$$25 = 2,6 + \underbrace{2,8 + \dots + 2,8}_{8\text{-volte}}$$

$$(2,8)^8 \cdot 2,6 = 9822,85$$

$$25 = 1,8 + \underbrace{2,9 + \dots + 2,9}_{8\text{-volte}}$$

$$(2,9)^8 \cdot 1,8 = 9004,44$$

Task

Eureka!

$$f(x) = x^{\frac{25}{x}}$$

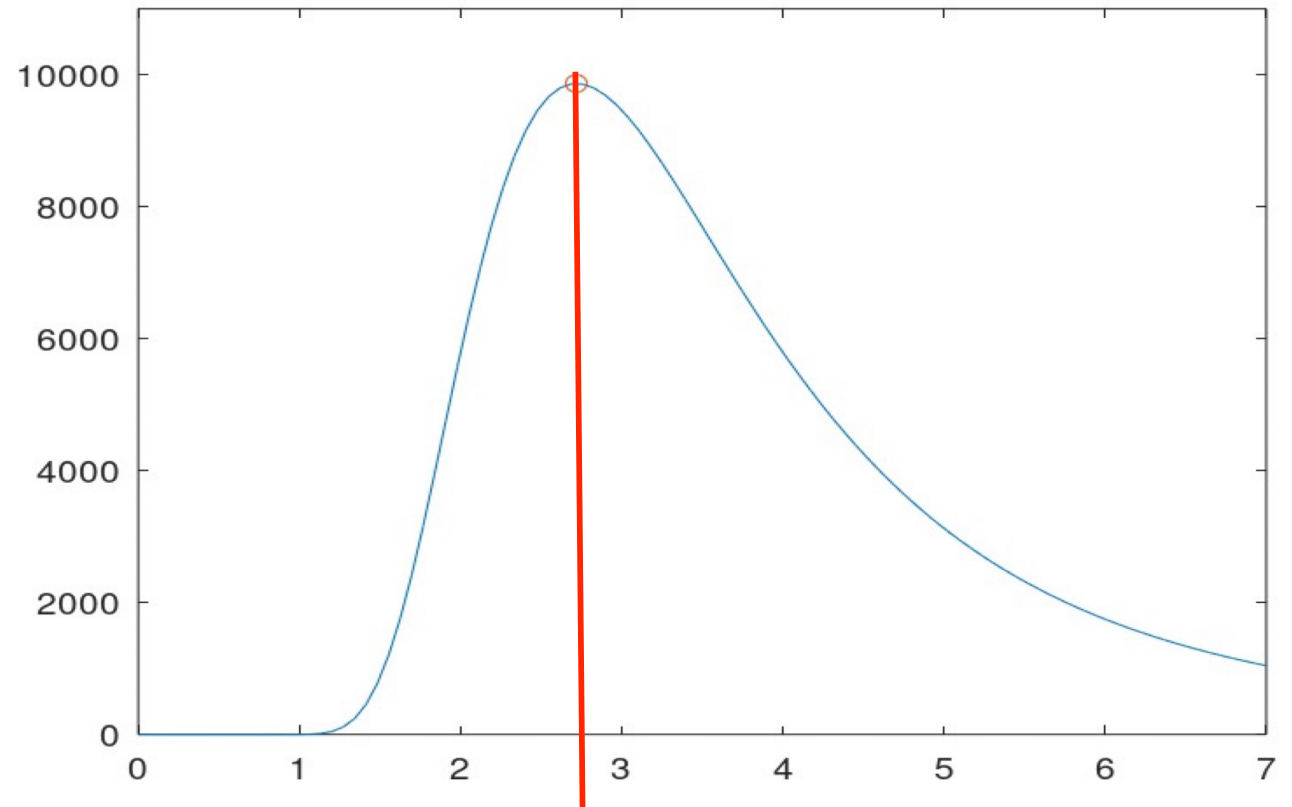


Task

$$f(x) = x^{\frac{25}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{25}{x^2} \cdot x^{\frac{25}{x}} (1 - \ln x) = 0$$

$$\rightarrow x = e$$



Task

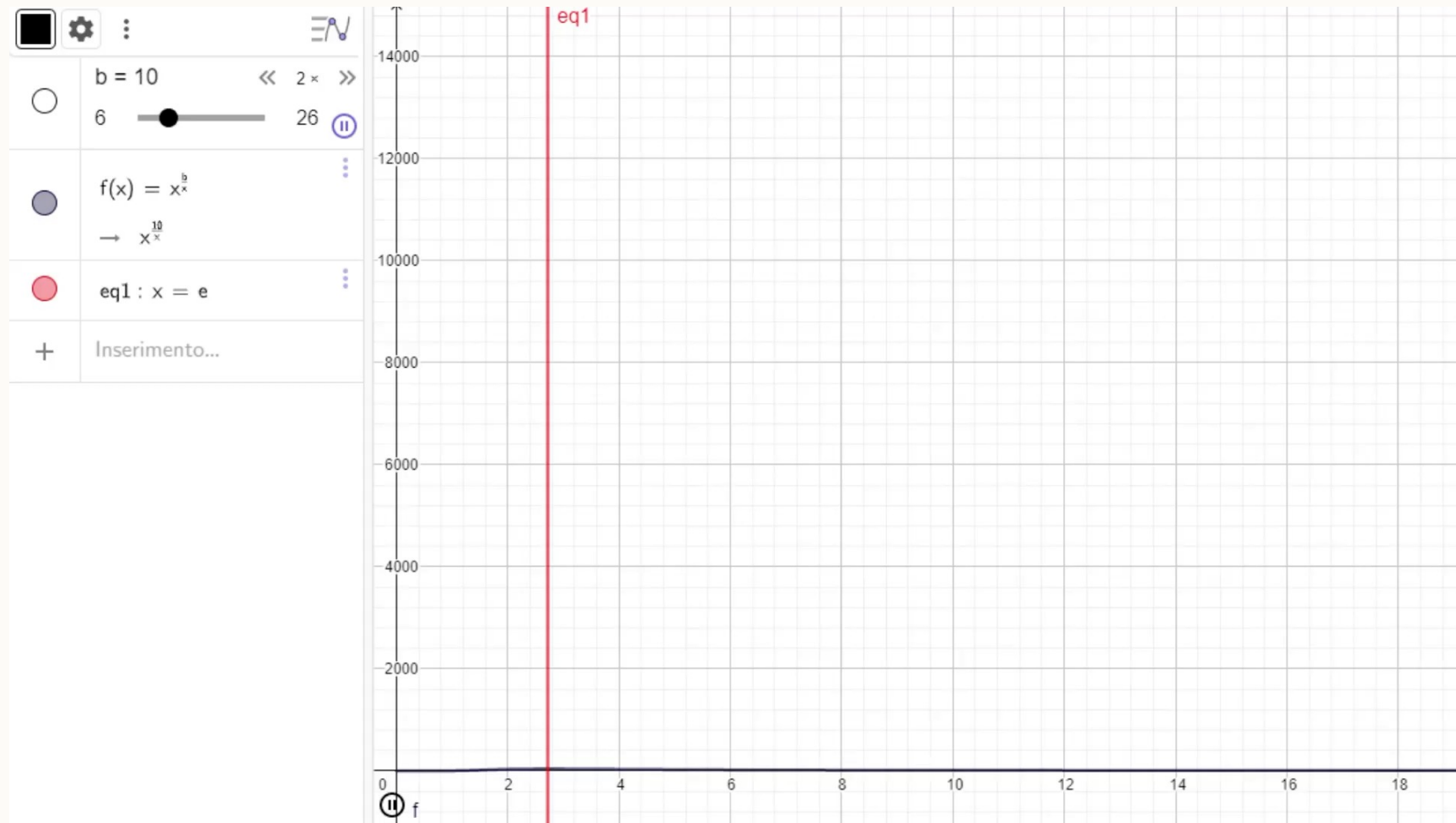
Verso l' high ceiling:

e se le masse non fossero 25, ma 6, 18, 26...?

$$f(x) = x^{\frac{b}{x}}$$

$$\frac{b}{x^2} \cdot x^{\frac{b}{x}} (1 - \ln x) = 0$$

$$\rightarrow x = e$$



Task

Verso l' high ceiling: altre possibili aperture matematiche

$$25 = 1,6 + \underbrace{2,6 + \dots + 2,6}_{9\text{-volte}}$$

9-volte

$$(2,6)^9 \cdot 1,6 = 8687,20$$

$$25 = 3,4 + \underbrace{2,7 + \dots + 2,7}_{8\text{-volte}}$$

8-volte

$$(2,7)^8 \cdot 3,4 = 9602,6$$

$$25 = 2,5 + \dots + 2,5$$

$$(2,5)^{10} = 9536,74$$

.....

....

$$f(x, y) = x^n y \quad x, y > 0$$

con il vincolo $nx + y = 25$

$$f(x) = x^{\frac{25}{x}}$$

$$g(x) = \left(\frac{25}{x}\right)^x$$

Gli "impensati"

Credenze culturali "invisibili" sull'insegnamento/apprendimento che vengono assorbite inconsciamente dalla propria cultura e date per scontate fino all'incontro con una cultura diversa.

- **Perché lavorare su un contenuto disciplinare seguendo esclusivamente il percorso proposto dal libro di testo?**

Quando affronto un argomento disciplinare (ad esempio la derivata di funzioni composte), posso invece proporre un'attività di *problem solving* e organizzare una *thinking classroom* per introdurlo e/o consolidarne la comprensione.

- **Perché nelle mie classi si respira un clima così competitivo (centrato sulla performance, sul voto e sulla demonizzazione dell'errore)? Come posso stemperarlo?**

Potrei progettare lezioni incentrate sul *problem solving collaborativo*, così da lasciare sullo sfondo la competizione dell'"essere i primi a risolvere", potrei valorizzare invece uno spirito di classe orientato alla costruzione di una soluzione condivisa o, ancora meglio, di un repertorio il più possibile ricco di soluzioni e di sfumature matematiche.

- **La mia lezione deve sempre svolgersi con l'aula organizzata in modo frontale (cattedra e banchi)?**

Per alcune attività potrei invece sperimentare l'organizzazione tipica della *thinking classroom*, banchi disposti a isole, costruzione ed esplorazione di artefatti, oppure lezioni all'aria aperta. Quali vantaggi e quali possibili svantaggi possono derivarne?

Trasposizione culturale

Gli “impensati”

V: E' cambiata la convinzione che l'unico modo in cui potevo insegnare era quello di spiegare come funziona qualcosa, quando invece posso usare un metodo per portarli alla soluzione.

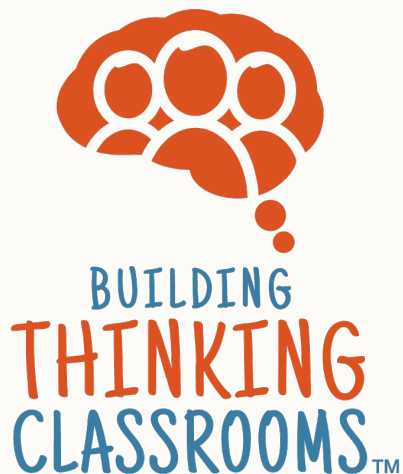
M: Ho scoperto che il modo in cui mi è stata insegnata la matematica durante la mia vita è completamente migliorabile. Un problema si può esplorare...

“La lavagna smette di essere lo spazio dell'insegnante e diventa uno spazio di pensiero comune”

L'incontro con pratiche educative che provengono da culture diverse, se gestito adeguatamente, può creare spazi di riflessione e sviluppo di consapevolezza per ricercatori, educatori e insegnanti, portando a un arricchimento reciproco delle tradizioni pedagogiche e a una maggiore efficacia dell'insegnamento matematico.

(Mellone, Pacelli, Liljedahl, 2021)

Thinking
classroom



Contributo della Thinking Classroom all'educazione alla cittadinanza

Intenzionalità critica: Non si limita a insegnare procedimenti, ma mira a far *pensare* e a smuovere domande, formando una mentalità critica verso i problemi.

Collaborazione reale: Il lavoro a gruppi casuali insegna a negoziare, ascoltare e condividere soluzioni: abilità civiche cruciali.

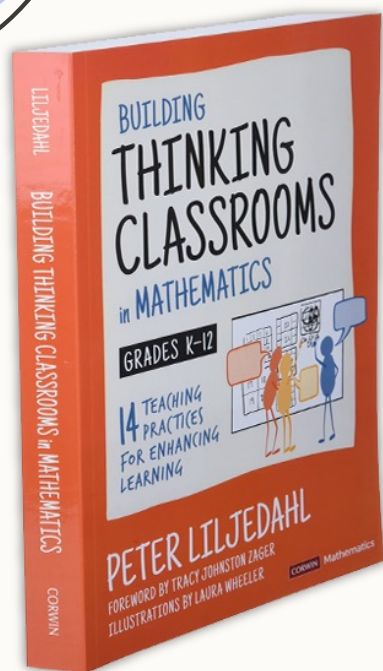
Autonomia e fiducia: La responsabilità nel risolvere problemi senza dipendere dal docente rafforza il senso di autonomia e fiducia

Inclusività: Le pratiche favoriscono un coinvolgimento equo dei partecipanti, anche di chi in genere resta in disparte.

Nella **Thinking Classroom** si attivano processi di risoluzioni di problemi in cui viene molto valorizzato il lavoro collaborativo (la possibilità di guardare le soluzioni degli altri gruppi), il piacere del processo risolutivo più che della soluzione in quanto tale.

Da questo punto di vista non è solo una metodologia per insegnare matematica in modo più efficace, ma un vero e proprio **laboratorio di cittadinanza attiva**: insegna a pensare, partecipare, collaborare, gestire fallimenti e analizzare criticamente.

**Thinking
classroom**



Building Thinking classrooms... in italiano!

È in cantiere la versione in italiano del libro che probabilmente sarà pubblicata la prossima primavera

Identità Etica nell'Educazione Matematica



Rochelle Gutiérrez

Quando parliamo di identità etica, non intendiamo una visione universale o valutativa, ma piuttosto un insieme di pratiche locali e relazionali connesse all'interdipendenza, alla reciprocità e all'umiltà — che si sviluppano nel tempo e nello spazio.

Political Conoscimento (Gutiérrez, et al. 2024)

Insegnanti diversi possono incarnare diverse identità etiche:

- Alcuni potrebbero seguire fedelmente le direttive scolastiche per essere visti come "professionali"
- Altri potrebbero decidere di sfidare coraggiosamente il sistema per dare, ad esempio, più attenzione agli studenti marginalizzati per realizzare la propria visione etica (**Vedi prospettiva psicoanalitica**).

Equità e Matematica: La Visione di D'Ambrosio

Ripensare l'Equità nell'Educazione Matematica



Ubiratan D'Ambrosio

Per D'Ambrosio, l'equità non si limita al principio che "la matematica può essere appresa da tutti" (che incorpora la figura dell'**escluso**), ma aspira all'**assenza dell'escluso**.

«La globalizzazione oggi è inevitabile dato che viviamo in una civiltà dominata dal mercato del capitale. L'obiettivo dei sistemi educativi dovrebbe essere coerente con la ricerca di alternative, non con la riproduzione del modello attuale.»

Etnomatemática: Decolonizzare l'Educazione Matematica

L'Etnomatemática nasce dal riconoscimento dell'inciviltà del processo di colonizzazione sud-americana attraverso le «spedizioni scientifiche» del XVIII e XIX secolo, durante le quali:

Sottomissione Culturale

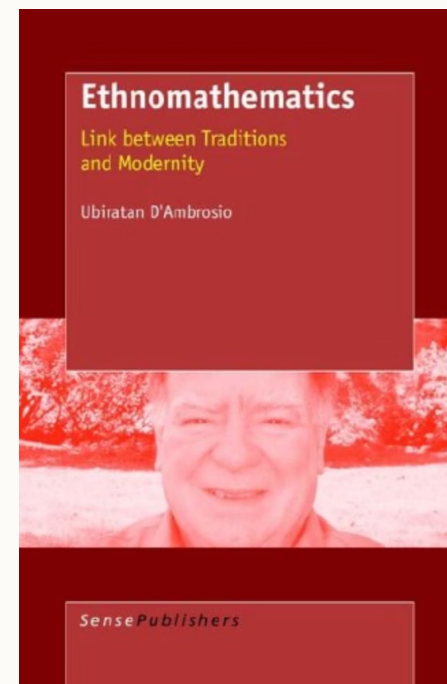
Le terre colonizzate furono soggiate anche culturalmente con opere di "rieducazione" linguistica e scientifica

Decolonizzazione

Non intesa come rifiuto della "Matematica Accademica", ma come un suo affinamento attraverso i valori dell'umanità

Valori Fondamentali

Rispetto, solidarietà, cooperazione ed educazione alla PACE come principi guida



The absolute priority of our mission as educators is to obtain PEACE in future generations. We cannot forget that these generations will live in a multicultural environment, that their relations will be intercultural and that their education will be

L'Educatore come Agente di Cambiamento



Da «Dialoghi con Paulo Freire» (1989)

Non posso intendere la pratica educativa se non come una totalità complessa e contraddittoria. Io penso all'importanza di tutti i componenti di questa pratica, ma riconosco, perché la pratica educativa è esclusivamente umana, che l'importanza dell'educatore è straordinaria.

Ed è per questo che un educatore creatore, un educatore liberato o in processo di liberazione, un educatore che si mette in gioco, si avventura, che non ha paura della libertà, un educatore capace di amare, di amare anche lo stesso processo di educazione, di amare la propria pratica, un educatore così inventa e reinventa ogni giorno i metodi, le tecniche, è capace di creare dove apparentemente non esisteva nulla.

Questo è il tipo di educatore che dovremmo aiutare ad esistere!



Ennio De Giorgi

*“Un bel problema, anche se non lo risolvi,
ti fa compagnia se ci pensi ogni tanto”.*



Riferimenti bibliografici

D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics: Link between Traditions and Modernity*. Rotterdam: Sense Publishers.

Gutiérrez, R., Kokka, K., & Myers, M. (2024). Political conocimiento in teaching mathematics: Mathematics teacher candidates enacting their ethical identities. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27(5), 755–781.

Jullien, F. (2008). *Parlare senza parole. Logos e Tao* (A. De Michele & B. Piccioli Fioroni, Traduttori). Laterza.

Liljedahl, P. (2016a). Flow: A framework for discussing teaching. *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*, pp. 203-210, Szeged, Hungary.

Liljedahl, P. (2016b). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pekhonen (eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. (pp. 361-386). New York, NY: Springer.

Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on under-graduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2–3), 219–236.

Liljedahl, P. (2008). *The AHA! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*. Saarbrücken, Germany: VDM Verlag.

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.

Mellone, M., Pacelli, T., & Liljedahl, P. (2021). *Cultural transposition of a thinking classroom: To conceive possible unthoughts in mathematical problem solving activity*. *ZDM – Mathematics Education*, 53(4), 785–798.

Mellone, M., Ramploud, A., & Carotenuto, G. (2021). *An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum*. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 379–396

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., Martignone, F. (2018). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by chinese and russian perspectives on whole number arithmetic. *Zdm – The International Journal On Mathematics Education*, 1-14.

Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 35–57.

Santi Strati, (1993). *Dialoghi con Paulo Freire*, 1989. Bologna.

Varela, F.J. (1999) *Ethical Know-how: Action, Wisdom, and Cognition*. Stanford CA: Stanford University Press.