Come visualizzare la moltiplicazione fra numeri naturali
Costruiamo grafi e gioielli

Alessandro Zaccagnini

Università di Parma
Comitato editoriale di MaddMaths!

Genova, 4 settembre 2025

I laboratori

Si tratta di vari laboratori tenuti negli ultimi dieci o dodici anni in due Licei di Parma (“A. Bertolucci” 2013–2014, G. Fiorini; “G.B. Romagnosi” 2022–2023, C. Cozzani & R. Sandri)

I laboratori

Si tratta di vari laboratori tenuti negli ultimi dieci o dodici anni in due Licei di Parma ("A. Bertolucci" 2013–2014, G. Fiorini; "G.B. Romagnosi" 2022–2023, C. Cozzani & R. Sandri)

L'obiettivo comune è la visualizzazione delle proprietà della moltiplicazione

I laboratori

Si tratta di vari laboratori tenuti negli ultimi dieci o dodici anni in due Licei di Parma (“A. Bertolucci” 2013–2014, G. Fiorini; “G.B. Romagnosi” 2022–2023, C. Cozzani & R. Sandri)

L’obiettivo comune è la visualizzazione delle proprietà della moltiplicazione

Questo obiettivo è realizzato mediante la costruzione di oggetti fisici: questi devono essere progettati, poi costruiti e infine analizzati a posteriori

I laboratori

Si tratta di vari laboratori tenuti negli ultimi dieci o dodici anni in due Licei di Parma (“A. Bertolucci” 2013–2014, G. Fiorini; “G.B. Romagnosi” 2022–2023, C. Cozzani & R. Sandri)

L’obiettivo comune è la visualizzazione delle proprietà della moltiplicazione

Questo obiettivo è realizzato mediante la costruzione di oggetti fisici: questi devono essere progettati, poi costruiti e infine analizzati a posteriori

La documentazione completa (articoli a stampa, su rete, video su YouTube, descrizione dei materiali necessari, . . .) è disponibile ai link forniti alla fine della conferenza

La moltiplicazione fra interi e le sue proprietà

La moltiplicazione è un'operazione molto interessante

La moltiplicazione fra interi e le sue proprietà

La moltiplicazione è un'operazione molto interessante

1. Algoritmi per il calcolo del prodotto fra due interi: storia e collocazione geografica

La moltiplicazione fra interi e le sue proprietà

La moltiplicazione è un'operazione molto interessante

1. Algoritmi per il calcolo del prodotto fra due interi: storia e collocazione geografica
2. Scribi egizi (contadini russi), persiana o gelosia, con l'abaco, algoritmo di Karatsuba, Trasformata di Fourier Discreta, ...

La moltiplicazione fra interi e le sue proprietà

La moltiplicazione è un'operazione molto interessante

1. Algoritmi per il calcolo del prodotto fra due interi: storia e collocazione geografica
2. Scribi egizi (contadini russi), persiana o gelosia, con l'abaco, algoritmo di Karatsuba, Trasformata di Fourier Discreta, ...
3. La moltiplicazione "in colonna" e sua connessione con il prodotto fra polinomi

La moltiplicazione fra interi e le sue proprietà

La moltiplicazione è un'operazione molto interessante

1. Algoritmi per il calcolo del prodotto fra due interi: storia e collocazione geografica
2. Scribi egizi (contadini russi), persiana o gelosia, con l'abaco, algoritmo di Karatsuba, Trasformata di Fourier Discreta, ...
3. La moltiplicazione "in colonna" e sua connessione con il prodotto fra polinomi
4. Algoritmi diversi illustrano proprietà diverse della moltiplicazione e della sua interazione con l'addizione

La moltiplicazione fra interi e le sue proprietà

La moltiplicazione è un'operazione molto interessante

1. Algoritmi per il calcolo del prodotto fra due interi: storia e collocazione geografica
2. Scribi egizi (contadini russi), persiana o gelosia, con l'abaco, algoritmo di Karatsuba, Trasformata di Fourier Discreta, ...
3. La moltiplicazione "in colonna" e sua connessione con il prodotto fra polinomi
4. Algoritmi diversi illustrano proprietà diverse della moltiplicazione e della sua interazione con l'addizione
5. Applicazioni: crittografia, immagini digitali, TV ad alta definizione, ...

3 Il laboratorio dei grafi

Il grafo associato all'addizione

$$\boxed{0} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{3} \to \boxed{4} \to \boxed{5} \to \boxed{6} \to \boxed{7} \to \boxed{8} \to \boxed{9} \to \boxed{\cdots}$$

Il grafo associato all'addizione

$$\boxed{0} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{3} \to \boxed{4} \to \boxed{5} \to \boxed{6} \to \boxed{7} \to \boxed{8} \to \boxed{9} \to \boxed{\cdots}$$

Indichiamo solo gli archi che vanno da ciascun intero al suo successore immediato

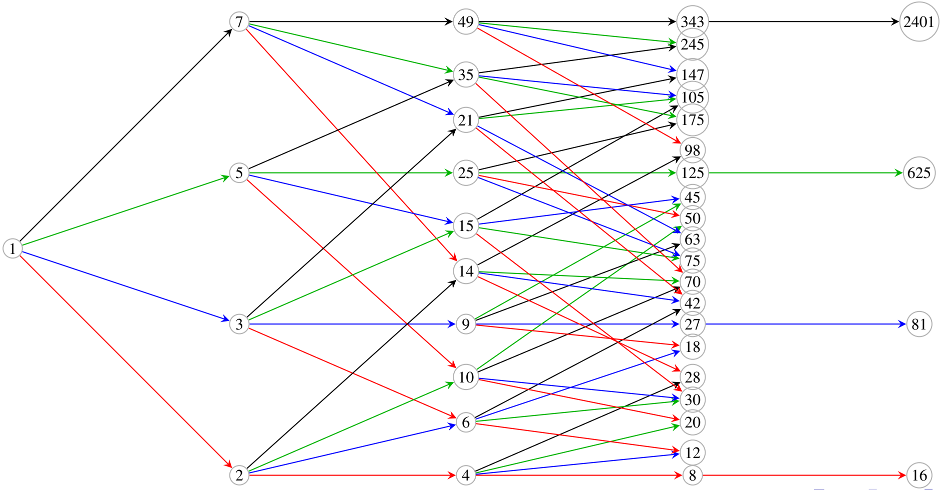
Il grafo associato all'addizione

$$\boxed{0} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{3} \to \boxed{4} \to \boxed{5} \to \boxed{6} \to \boxed{7} \to \boxed{8} \to \boxed{9} \to \boxed{\cdots}$$

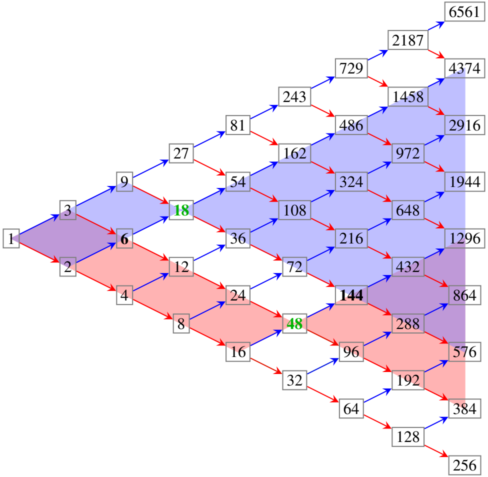
Indichiamo solo gli archi che vanno da ciascun intero al suo successore immediato

Stiamo mettendo una relazione di ordine *totale* sui numeri naturali

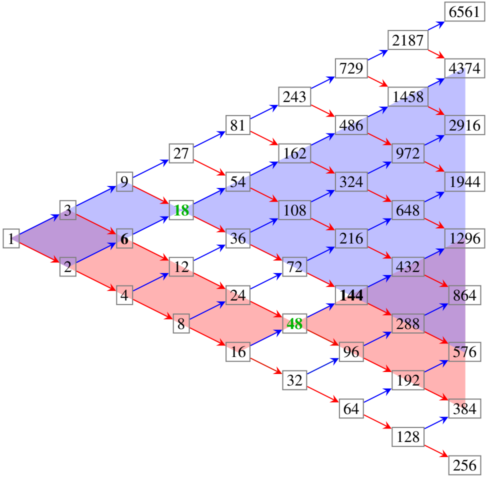
Il grafo della moltiplicazione



Il grafo bidimensionale

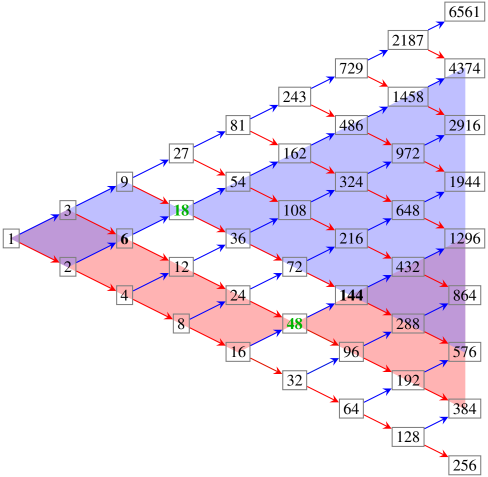


Il grafo bidimensionale



I retini colorati indicano *divisori* e *multipli*

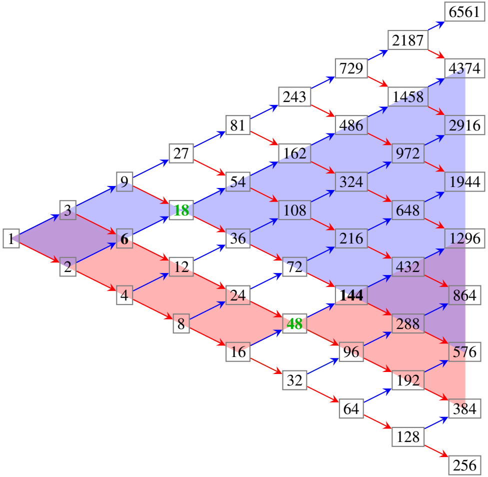
Il grafo bidimensionale



I retini colorati indicano *divisori* e *multipli*

Possiamo facilmente individuare mcd e mcm

Il grafo bidimensionale

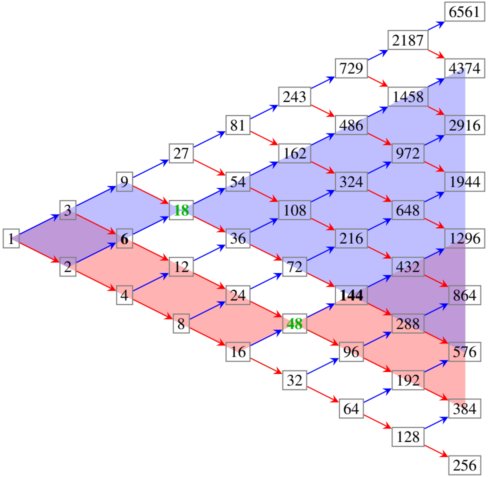


I retini colorati indicano *divisori* e *multipli*

Possiamo facilmente individuare mcd e mcm

Possiamo vedere l'unicità della fattorizzazione

Il grafo bidimensionale



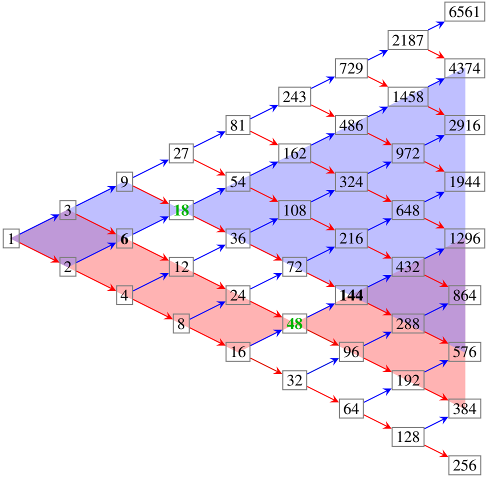
I retini colorati indicano *divisori* e *multipli*

Possiamo facilmente individuare mcd e mcm

Possiamo vedere l'unicità della fattorizzazione

Possiamo vedere la proprietà commutativa

Il grafo bidimensionale



I retini colorati indicano *divisori* e *multipli*

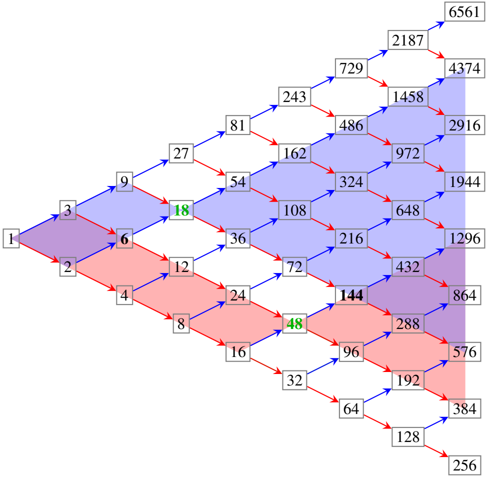
Possiamo facilmente individuare mcd e mcm

Possiamo vedere l'unicità della fattorizzazione

Possiamo vedere la proprietà commutativa

Possiamo contare il numero dei divisori di un intero

Il grafo bidimensionale



I retini colorati indicano *divisori* e *multipli*

Possiamo facilmente individuare mcd e mcm

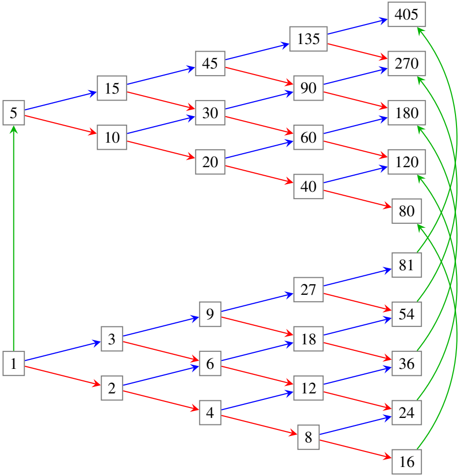
Possiamo vedere l'unicità della fattorizzazione

Possiamo vedere la proprietà commutativa

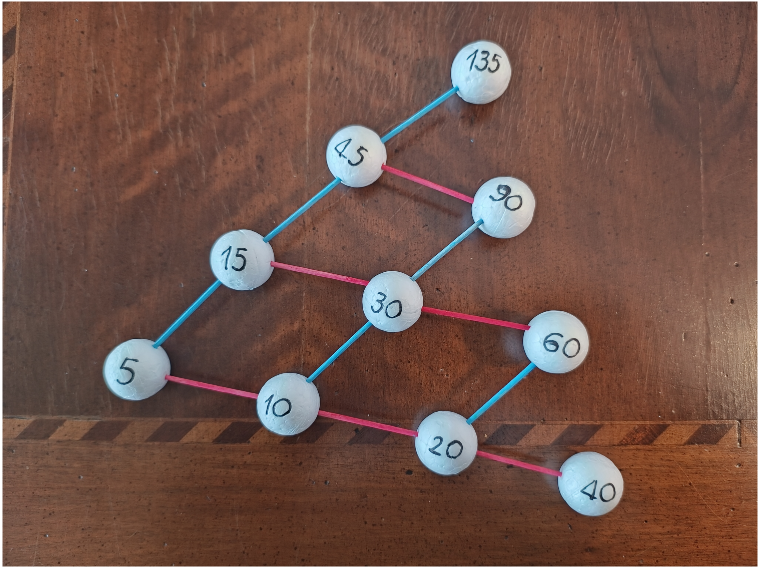
Possiamo contare il numero dei divisori di un intero

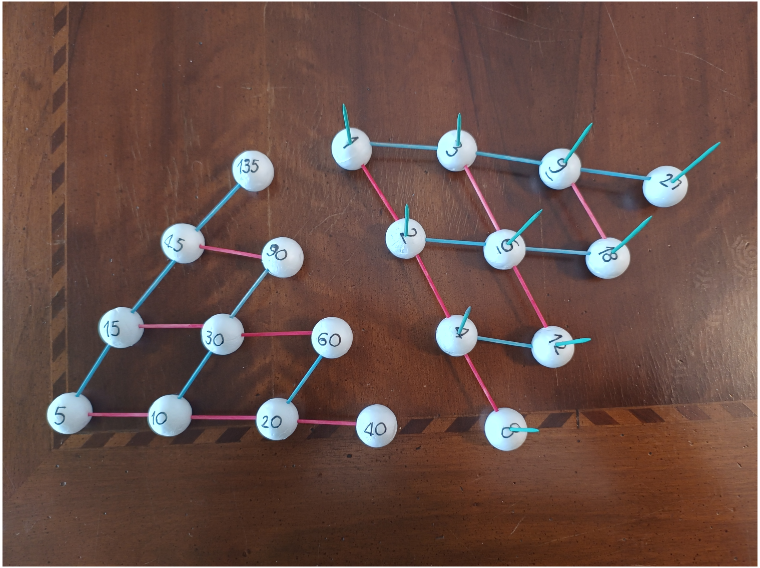
Possiamo contare il numero dei fattori primi di un intero

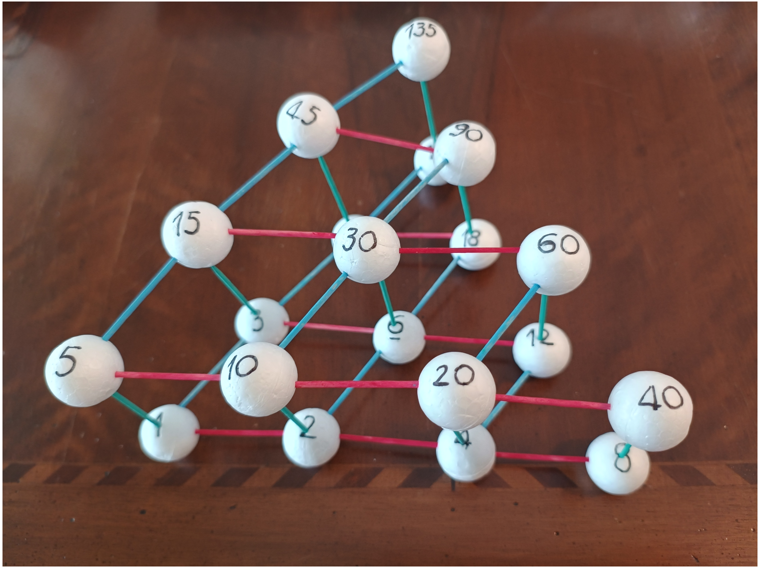
Il grafo tridimensionale

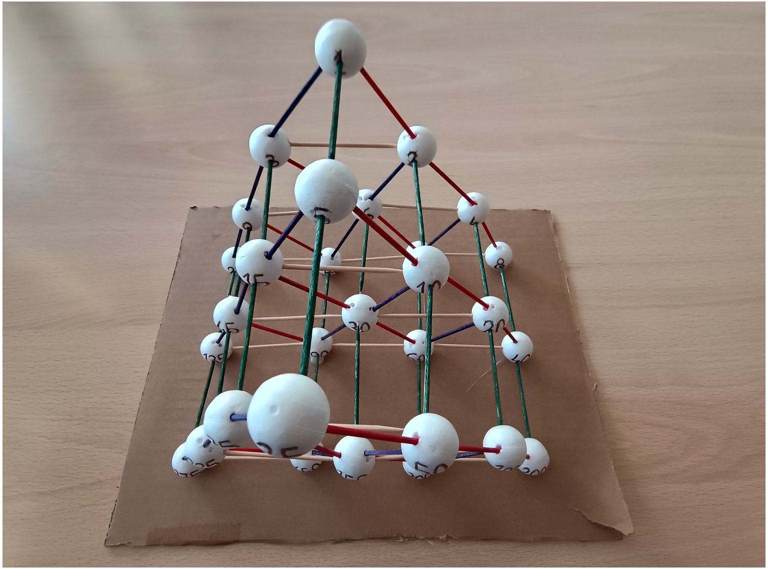


Omettiamo le altre frecce verdi verso l'alto


135
45
90
15
30
60
5
10
20
40


135
45
90
15
30
60
5
10
20
40


135
45
90
15
30
18
60
3
9
12
5
10
20
40
1
2
4
8



Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm

Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm
2. un pennarello nero

Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm
2. un pennarello nero
3. 100 stuzzicadenti

Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm
2. un pennarello nero
3. 100 stuzzicadenti
4. 3 colori a tempera (rosso, blu e verde nei nostri esempi)

Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm
2. un pennarello nero
3. 100 stuzzicadenti
4. 3 colori a tempera (rosso, blu e verde nei nostri esempi)
5. colla a caldo o vinavil

Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm
2. un pennarello nero
3. 100 stuzzicadenti
4. 3 colori a tempera (rosso, blu e verde nei nostri esempi)
5. colla a caldo o vinavil
6. due quadrati di cartone robusto sufficientemente grandi

Il materiale per realizzare il laboratorio

1. 100 palline di polistirolo del diametro di 2cm
2. un pennarello nero
3. 100 stuzzicadenti
4. 3 colori a tempera (rosso, blu e verde nei nostri esempi)
5. colla a caldo o vinavil
6. due quadrati di cartone robusto sufficientemente grandi

Gli stuzzicadenti devono essere colorati in anticipo; è utile avere altri stuzzicadenti grezzi di scorta per rendere piú robusta la struttura

Altri oggetti: porzioni del grafo iniziale su un toro con uno o due fori

Il Piccolo Teorema di Fermat

Teorema (Fermat)

Se a è un numero intero e p è un numero primo allora

$$a^p \equiv a \mod p$$

Il Piccolo Teorema di Fermat

Teorema (Fermat)

Se a è un numero intero e p è un numero primo allora

$$a^p \equiv a \mod p$$

Applicazioni: periodicità dei numeri decimali $1/p$ quando $p \notin \{2, 5\}$ è un numero primo; crittografia

Il Piccolo Teorema di Fermat

Teorema (Fermat)

Se a è un numero intero e p è un numero primo allora

$$a^p \equiv a \mod p$$

Applicazioni: periodicità dei numeri decimali $1/p$ quando $p \notin \{2, 5\}$ è un numero primo; crittografia

L'attività proposta permette anche di studiare sistemi di numerazione in base diversa da 10

Il Piccolo Teorema di Fermat

Teorema (Fermat)

Se a è un numero intero e p è un numero primo allora

$$a^p \equiv a \mod p$$

Applicazioni: periodicità dei numeri decimali $1/p$ quando $p \notin \{2, 5\}$ è un numero primo; crittografia

L'attività proposta permette anche di studiare sistemi di numerazione in base diversa da 10

Illustriamo la dimostrazione combinatoria costruendo a^p spillette ciascuna delle quali ha esattamente p perline scelte fra a colori diversi

L'attività proposta, 1. Il conteggio delle collane/spillette

Prima fase: attività "astratta" (secondaria di primo grado)

L'attività proposta, 1. Il conteggio delle collane/spillette

Prima fase: attività "astratta" (secondaria di primo grado)

L’attività proposta, 1. Il conteggio delle collane/spillette

Prima fase: attività “astratta” (secondaria di primo grado)

La griglia nella quale riportare le disposizioni trovate, colorando i pallini vuoti

L'attività proposta, 1. Il conteggio delle collane/spillette

Prima fase: attività "astratta" (secondaria di primo grado)

La griglia nella quale riportare le disposizioni trovate, colorando i pallini vuoti

Ogni gruppo di due/quattro studenti ha a disposizione un foglio con alcune decine di righe come quella in alto, qualche decina di cartoncini colorati (due–quattro colori) e pennarelli degli stessi colori

L'attività proposta, 1. Il conteggio delle collane/spillette

Prima fase: attività "astratta" (secondaria di primo grado)

La griglia nella quale riportare le disposizioni trovate, colorando i pallini vuoti

Ogni gruppo di due/quattro studenti ha a disposizione un foglio con alcune decine di righe come quella in alto, qualche decina di cartoncini colorati (due–quattro colori) e pennarelli degli stessi colori

L'attività proposta, 1. Il conteggio delle collane/spillette

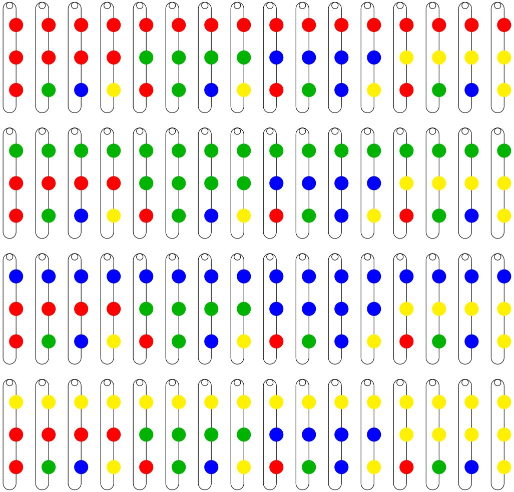
Prima fase: attività “astratta” (secondaria di primo grado)

La griglia nella quale riportare le disposizioni trovate, colorando i pallini vuoti

Ogni gruppo di due/quattro studenti ha a disposizione un foglio con alcune decine di righe come quella in alto, qualche decina di cartoncini colorati (due–quattro colori) e pennarelli degli stessi colori

Alcune possibili colorazioni, corrispondenti ad alcune spillette della prossima immagine

Le spillette: tre posizioni, quattro colori



Il conteggio delle spillette

Le spillette con 3 perline di quattro colori diversi corrispondono ai numeri interi tra 0 e $63 = 4^3 - 1$ scritti in base 4 se interpretiamo il colore rosso con la cifra 0 e il colore verde con la cifra 1, il colore blu con la cifra 2 e il colore giallo con la cifra 3

Il conteggio delle spillette

Le spillette con 3 perline di quattro colori diversi corrispondono ai numeri interi tra 0 e $63 = 4^3 - 1$ scritti in base 4 se interpretiamo il colore rosso con la cifra 0 e il colore verde con la cifra 1, il colore blu con la cifra 2 e il colore giallo con la cifra 3

Queste spillette si suddividono in modo naturale in 4 gruppi da 16, guardando il colore della sola prima perlina, oppure in otto gruppi da 8, guardando alla prima e alla seconda (che può essere di due colori diversi in ciascun gruppo)

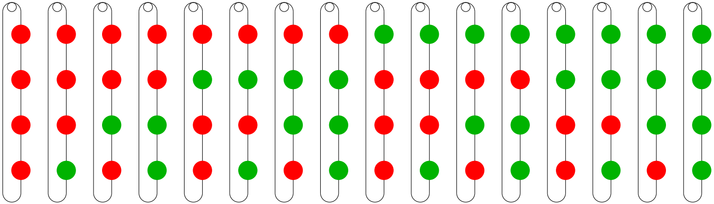
Il conteggio delle spillette

Le spillette con 3 perline di quattro colori diversi corrispondono ai numeri interi tra 0 e $63 = 4^3 - 1$ scritti in base 4 se interpretiamo il colore rosso con la cifra 0 e il colore verde con la cifra 1, il colore blu con la cifra 2 e il colore giallo con la cifra 3

Queste spillette si suddividono in modo naturale in 4 gruppi da 16, guardando il colore della sola prima perlina, oppure in otto gruppi da 8, guardando alla prima e alla seconda (che può essere di due colori diversi in ciascun gruppo)

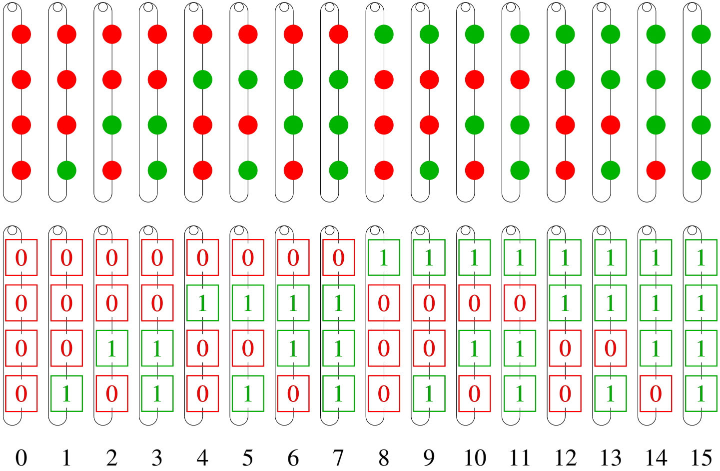
Possiamo usare l'interpretazione delle spillette come "numeri scritti in base 4" per suddividerle in modo efficiente e a prova di errore, assegnando a ciascun gruppo di studenti le spillette che "cominciano" con un dato colore

Applicazione: numerazione in basi diverse da 10



Le spillette con 4 perline di due colori diversi corrispondono ai numeri interi tra 0 e $15 = 2^4 - 1$ scritti in base 2 se interpretiamo il colore rosso con la cifra 0 e il colore verde con la cifra 1

Applicazione: numerazione in basi diverse da 10



Le spillette con 4 perline di due colori diversi corrispondono ai numeri interi tra 0 e $15 = 2^4 - 1$ scritti in base 2 se interpretiamo il colore rosso con la cifra 0 e il colore verde con la cifra 1

La seconda spilletta a sinistra corrisponde a 0001, cioè 1, la penultima a 1110, cioè 14, scritti in base 2

L'attività proposta, 2. La realizzazione delle collane/spillette

Materiali: spille da balia e perline da bigiotteria

L'attività proposta, 2. La realizzazione delle collane/spillette

Materiali: spille da balia e perline da bigiotteria

Le spillette devono essere disposte su due pannelli di sughero o cartoncino con un filo passante per l'anellino e poi fissate con nastro adesivo

L'attività proposta, 2. La realizzazione delle collane/spillette

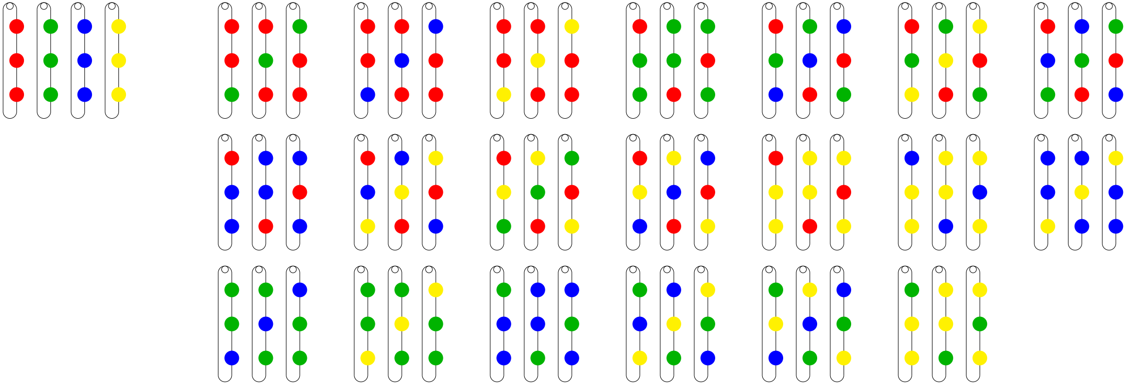
Materiali: spille da balia e perline da bigiotteria

Le spillette devono essere disposte su due pannelli di sughero o cartoncino con un filo passante per l'anellino e poi fissate con nastro adesivo

In definitiva, per realizzare i due pannelli servono

1. circa 150 spille da balia
2. circa 150 perline di ciascun colore
3. nastro adesivo trasparente
4. filo robusto e sottile
5. forbici
6. due quadrati di cartone 50x50

L'attività proposta, 3. La dimostrazione



Le spillette suddivise nelle classi che dimostrano il Teorema di Fermat

La realizzazione pratica

Abbiamo assegnato a ciascun gruppo di 3 o 4 studenti un insieme di spillette, proiettando su uno schermo la prima figura qui sopra ed evidenziando la suddivisione in gruppi

La realizzazione pratica

Abbiamo assegnato a ciascun gruppo di 3 o 4 studenti un insieme di spillette, proiettando su uno schermo la prima figura qui sopra ed evidenziando la suddivisione in gruppi

Ciascun gruppo ha realizzato due copie delle spillette assegnate

La realizzazione pratica

Abbiamo assegnato a ciascun gruppo di 3 o 4 studenti un insieme di spillette, proiettando su uno schermo la prima figura qui sopra ed evidenziando la suddivisione in gruppi

Ciascun gruppo ha realizzato due copie delle spillette assegnate

Abbiamo fatto un primo pannello con la prima copia delle spillette

La realizzazione pratica

Abbiamo assegnato a ciascun gruppo di 3 o 4 studenti un insieme di spillette, proiettando su uno schermo la prima figura qui sopra ed evidenziando la suddivisione in gruppi

Ciascun gruppo ha realizzato due copie delle spillette assegnate

Abbiamo fatto un primo pannello con la prima copia delle spillette

Abbiamo fatto un secondo pannello con la seconda copia, proiettando l'ultima figura che abbiamo visto prima

La realizzazione pratica

Abbiamo assegnato a ciascun gruppo di 3 o 4 studenti un insieme di spillette, proiettando su uno schermo la prima figura qui sopra ed evidenziando la suddivisione in gruppi

Ciascun gruppo ha realizzato due copie delle spillette assegnate

Abbiamo fatto un primo pannello con la prima copia delle spillette

Abbiamo fatto un secondo pannello con la seconda copia, proiettando l'ultima figura che abbiamo visto prima

Questa seconda attività è stata molto piú caotica perché, nonostante la figura fosse visibile sullo schermo, la "chiamata" delle spillette è stata impegnativa

Le spillette: $p = 3$, $a = 5$

Il Teorema di Wilson

Teorema (Wilson)

L'intero $n \geq 2$ *è un numero primo se e solo se* $(n-1)! - (n-1)$ *è divisibile per* n

Il Teorema di Wilson

Teorema (Wilson)

L'intero $n \geq 2$ è un numero primo se e solo se $(n-1)! - (n-1)$ è divisibile per n

Esistono molte dimostrazioni "tradizionali" del Teorema di Wilson

Il Teorema di Wilson

Teorema (Wilson)

L'intero $n \geq 2$ *è un numero primo se e solo se* $(n-1)! - (n-1)$ *è divisibile per* n

Esistono molte dimostrazioni "tradizionali" del Teorema di Wilson

Spesso viene dimostrato insieme al Teorema di Fermat, usando proprietà algebriche dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$

Il Teorema di Wilson

Teorema (Wilson)

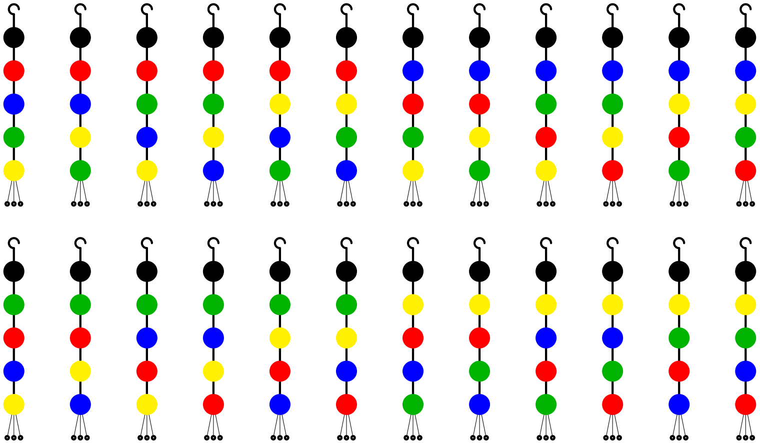
L'intero $n \geq 2$ è un numero primo se e solo se $(n-1)! - (n-1)$ è divisibile per n

Esistono molte dimostrazioni "tradizionali" del Teorema di Wilson

Spesso viene dimostrato insieme al Teorema di Fermat, usando proprietà algebriche dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$

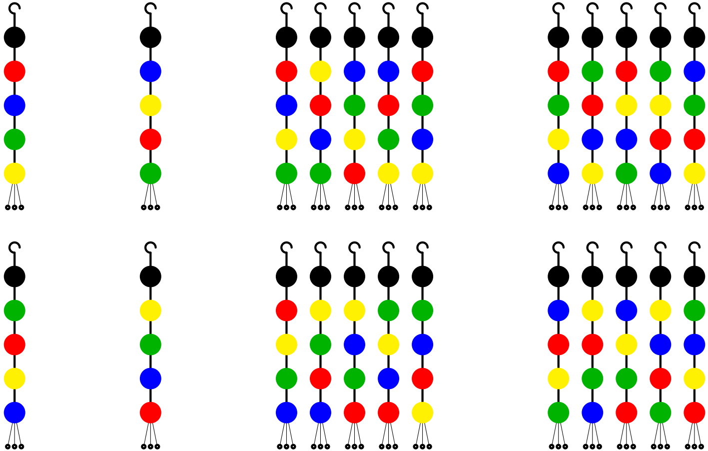
In questo laboratorio abbiamo dato una dimostrazione "combinatoria" di una delle due implicazioni (quella interessante: se n è primo allora . . .)

Gli orecchini

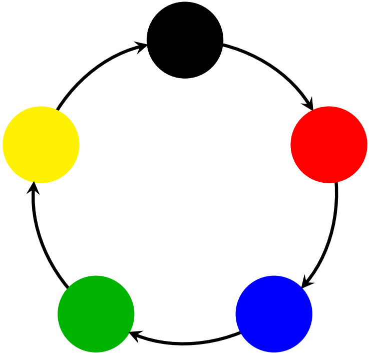


Gli orecchini che si possono realizzare con 5 perline colorate sono $4! = 24$

Gli orecchini suddivisi in classi di equivalenza



La sequenza dei colori



Come trasformare un orecchino in un altro

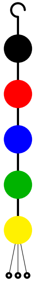
- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)

Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\to$ R $\to$ B $\to$ V $\to$ G $\to$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori

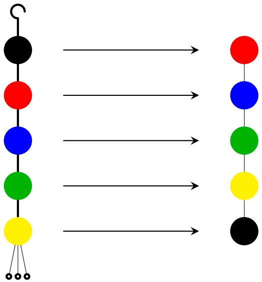
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



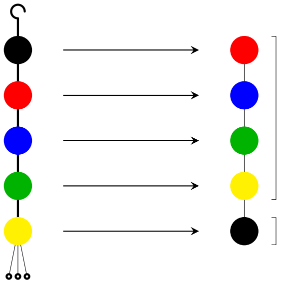
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



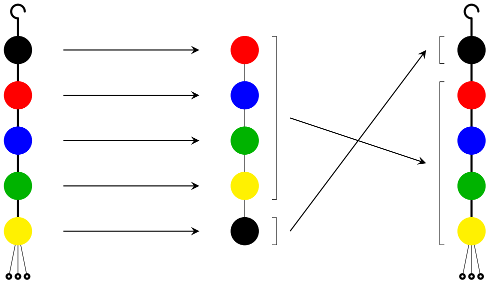
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



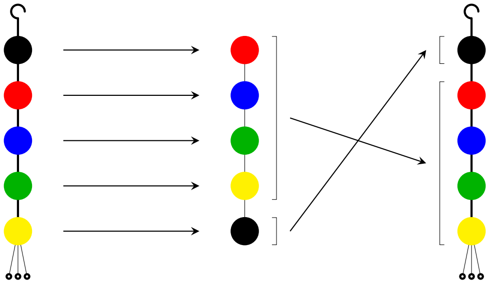
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N → R → B → V → G → N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



Siamo tornati subito all'orecchino iniziale, al primo passo

Come trasformare un orecchino in un altro

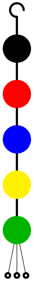
- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\to$ R $\to$ B $\to$ V $\to$ G $\to$ N)

Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B $\rightarrow$ V $\rightarrow$ G $\rightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori

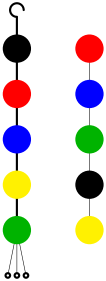
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



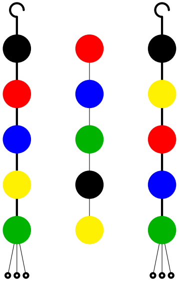
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



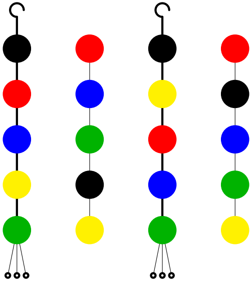
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N → R → B → V → G → N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



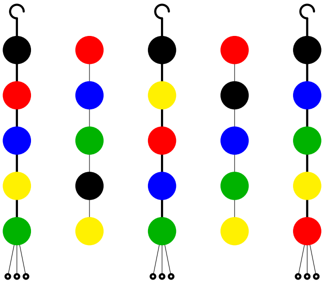
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B $\rightarrow$ V $\rightarrow$ G $\rightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



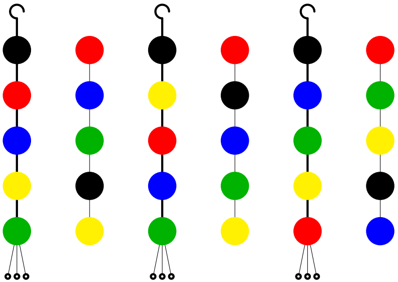
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B $\rightarrow$ V $\rightarrow$ G $\rightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



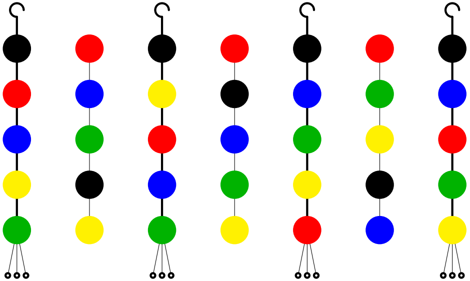
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



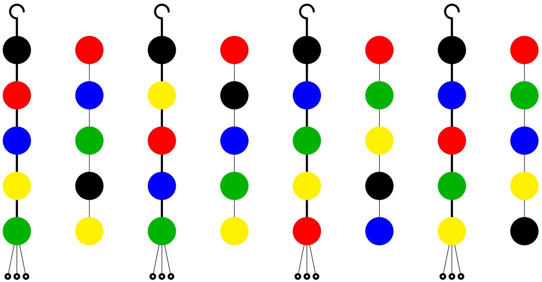
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N → R → B → V → G → N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



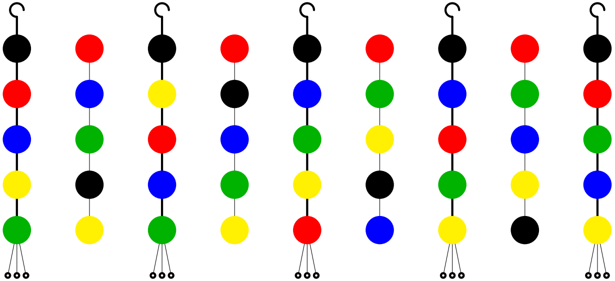
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



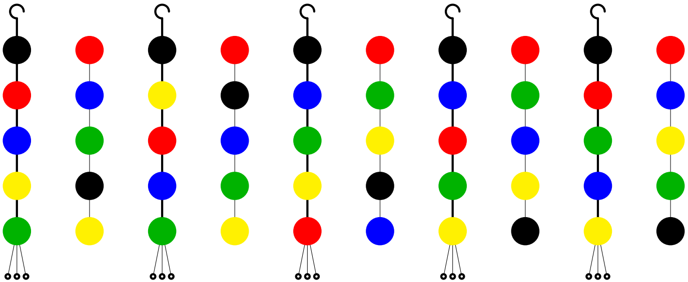
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B $\rightarrow$ V $\rightarrow$ G $\rightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



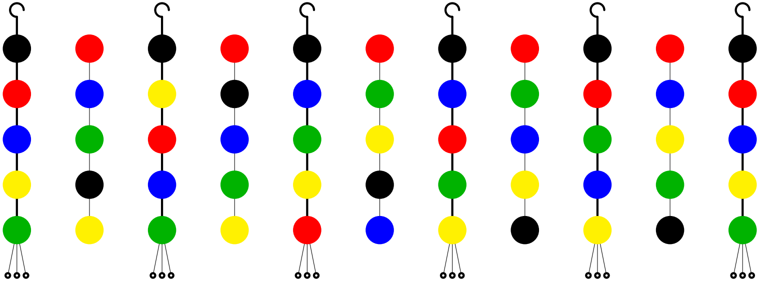
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



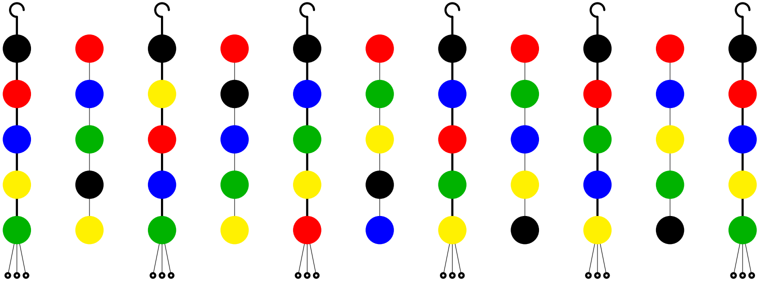
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B $\rightarrow$ V $\rightarrow$ G $\rightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



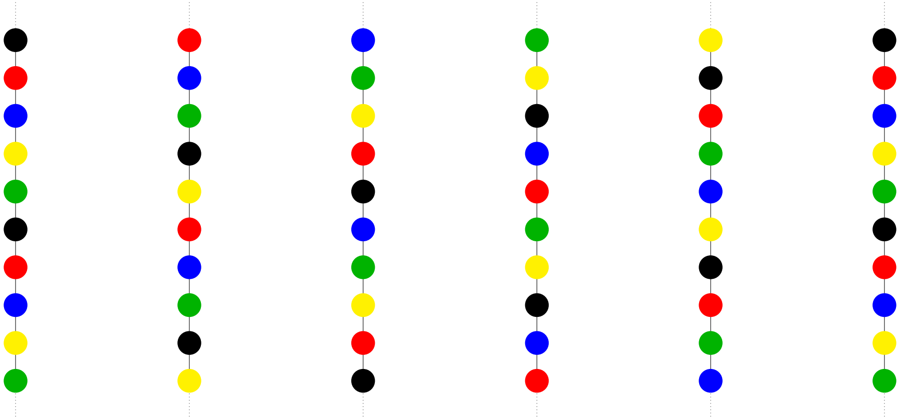
Come trasformare un orecchino in un altro

- Mandiamo ogni colore nel successivo (N $\longrightarrow$ R $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ V $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ N)
- Riportiamo il nero in cima senza cambiare la sequenza dei colori



Torniamo all'orecchino iniziale dopo cinque passi

La dimostrazione della periodicità della trasformazione



La dimostrazione della periodicità della trasformazione

Il periodo è $p = 5$ o un suo divisore

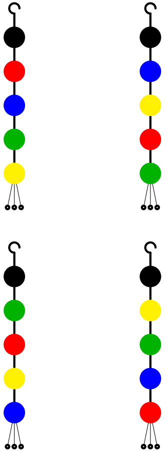
A sinistra replichiamo l'orecchino di partenza due volte

In orizzontale eseguiamo la trasformazione ciclica dei colori seguendo la sequenza scelta prima

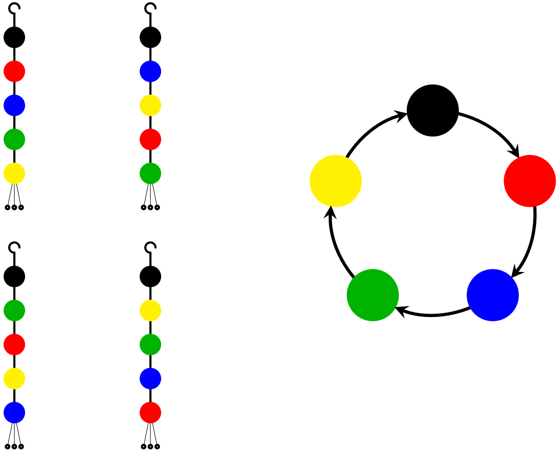
L'immagine del primo orecchino si legge nella seconda colonna prendendo 5 perline consecutive partendo da una perlina nera

Siccome la sequenza si ripete dopo 5 passi, il periodo è un divisore di 5

Quali sono gli orecchini solitari?



Quali sono gli orecchini solitari?



Orecchini

La presentazione di $\mathbb{Z}_n^*$

Il primo laboratorio che ho realizzato in una scuola, nel 2013–2014, ha riguardato la "presentazione" dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$ per diversi valori di n

La presentazione di $\mathbb{Z}_n^*$

Il primo laboratorio che ho realizzato in una scuola, nel 2013–2014, ha riguardato la "presentazione" dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$ per diversi valori di n

Quando n è un numero primo si tratta di gruppi ciclici: il caso piú interessante è quando n ha vari fattori primi distinti

La presentazione di $\mathbb{Z}_n^*$

Il primo laboratorio che ho realizzato in una scuola, nel 2013–2014, ha riguardato la "presentazione" dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$ per diversi valori di n

Quando n è un numero primo si tratta di gruppi ciclici: il caso piú interessante è quando n ha vari fattori primi distinti

A ciascun gruppo possiamo associare un grafo calcolando le potenze successive degli elementi

La presentazione di $\mathbb{Z}_n^*$

Il primo laboratorio che ho realizzato in una scuola, nel 2013–2014, ha riguardato la "presentazione" dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$ per diversi valori di n

Quando n è un numero primo si tratta di gruppi ciclici: il caso piú interessante è quando n ha vari fattori primi distinti

A ciascun gruppo possiamo associare un grafo calcolando le potenze successive degli elementi

Nella prossima immagine vedremo due "gioielli" che rappresentano due di questi grafi, che in questi casi sono planari (Liceo Classico "G.B. Romagnosi," 2023)

La presentazione di $\mathbb{Z}_n^*$

Il primo laboratorio che ho realizzato in una scuola, nel 2013–2014, ha riguardato la "presentazione" dei gruppi $\mathbb{Z}_n^*$ per diversi valori di n

Quando n è un numero primo si tratta di gruppi ciclici: il caso piú interessante è quando n ha vari fattori primi distinti

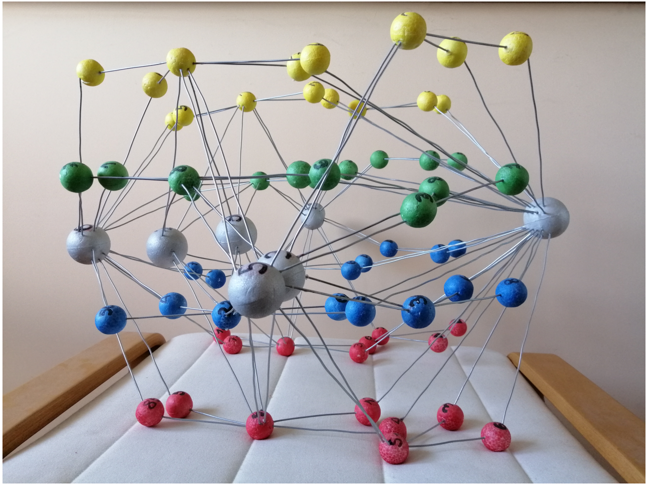
A ciascun gruppo possiamo associare un grafo calcolando le potenze successive degli elementi

Nella prossima immagine vedremo due "gioielli" che rappresentano due di questi grafi, che in questi casi sono planari (Liceo Classico "G.B. Romagnosi," 2023)

Nell'ultima immagine vedremo il grafo non planare realizzato nel primo laboratorio (Liceo Scientifico "A. Bertolucci," 2014)

Altri oggetti: presentazione di $\mathbb{Z}_{15}^*$ e di $\mathbb{Z}_{35}^*$


Altri oggetti: presentazione di $\mathbb{Z}_{91}^*$



5 La documentazione

- QR-codes
- Grafi: articoli e video
- Gioielli: articoli e video

Pagina web e canale YouTube

MaddMaths! e MaddLetter

Il materiale sul laboratorio dei grafi: articoli e video

1. Fiorini & Zaccagnini 2018, [2]

Il materiale sul laboratorio dei grafi: articoli e video

1. Fiorini & Zaccagnini 2018, [2]
2. Z., MaddMaths! 2020, [4]

Il materiale sul laboratorio dei grafi: articoli e video

1. Fiorini & Zaccagnini 2018, [2]
2. Z., MaddMaths! 2020, [4]
3. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]

Il materiale sul laboratorio dei grafi: articoli e video

1. Fiorini & Zaccagnini 2018, [2]
2. Z., MaddMaths! 2020, [4]
3. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
4. Z., MaddMaths! 2024, [8]

Il materiale sul laboratorio dei grafi: articoli e video

1. Fiorini & Zaccagnini 2018, [2]
2. Z., MaddMaths! 2020, [4]
3. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
4. Z., MaddMaths! 2024, [8]
5. Video su YouTube 2025, [10]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
2. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2020 [3]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
2. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2020 [3]
3. Video su YouTube, Piccolo Teorema di Fermat, 2021, [5]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
2. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2020 [3]
3. Video su YouTube, Piccolo Teorema di Fermat, 2021, [5]
4. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2022 [7]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
2. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2020 [3]
3. Video su YouTube, Piccolo Teorema di Fermat, 2021, [5]
4. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2022 [7]
5. Z., MaddMaths! 2022, [6]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
2. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2020 [3]
3. Video su YouTube, Piccolo Teorema di Fermat, 2021, [5]
4. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2022 [7]
5. Z., MaddMaths! 2022, [6]
6. Z., MaddMaths! 2024, [9]

Il materiale sul laboratorio dei gioielli: articoli e video

1. Cozzani, Sandri & Zaccagnini, Archimede 2024, [1]
2. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2020 [3]
3. Video su YouTube, Piccolo Teorema di Fermat, 2021, [5]
4. Video su YouTube, Teorema di Wilson, 2022 [7]
5. Z., MaddMaths! 2022, [6]
6. Z., MaddMaths! 2024, [9]
7. Video su YouTube 2025, [11]

Bibliografia e riferimenti I

[1] Caterina Cozzani, Roberta Sandri, & Alessandro Zaccagnini, *Collane, orecchini e scatolette — Costruzione di oggetti matematici con materiali della vita quotidiana*, Archimede **1** (2024), 2–19, Disponibile all'indirizzo `http://riviste.mondadorieducation.it/archimede/wp-content/uploads/sites/2/2024/06/0020.ARCH1_24_Cozzani_Sandri_Zaccagnini_2_19_compressed.pdf`.

[2] G. Fiorini & A. Zaccagnini, *Costruzione dei grafi di $\mathbb{Z}_n^*$. Un laboratorio PLS in una classe terza del Liceo Scientifico*, A spasso per la Matematica — PLS 2014–2018 (A. Saracco e A. Zaccagnini, ed.), CLEUP, Padova, 2018, Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma, pp. 51–73 & 97–102. Versione integrale. Online dal 9.10.2018. `https://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/papers/fz-integrale.pdf`.

[3] A. Zaccagnini, *Come riconoscere i numeri primi? Il teorema di Wilson*, 2020, Video-pillola su YouTube. `https://youtu.be/mubwg24FJzE`.

[4] ______, *Operazioni: elementari, ma non troppo!*, Sito web MaddMaths! (2020), Online dal 19.1.2020. `https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/operazioni-elementari/`.

[5] ______, *Il piccolo Teorema di Fermat*, 2021, Video-pillola su YouTube. `https://youtu.be/Zd0BG9ccAN8`.

Bibliografia e riferimenti II

[6] ______, *Collane, orecchini e . . . numeri*, Sito web MaddMaths! (2022), Online dal 16.4.2022. https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/collane-e-orecchini/.

[7] ______, *La dimostrazione combinatoria del Teorema di Wilson*, 2022, Video-pillola su YouTube. https://youtu.be/ctJcNeeEHpY.

[8] ______, *Come visualizzare la moltiplicazione dei numeri naturali? Costruiamo un grafo!*, Sito web MaddMaths! (2024), Online dal 10.12.2024. https://maddmaths.simai.eu/didattica/moltiplicazione-grafo/.

[9] ______, *I gioielli della matematica*, Sito web MaddMaths! (2024), Online dal 9.5.2024. https://maddmaths.simai.eu/didattica/i-gioielli-della-matematica/.

[10] ______, *Laboratorio "Costruzione di grafi"*, 2025, Video su YouTube. https://youtu.be/s64I9NCoYzo.

[11] ______, *Laboratorio "I gioielli della matematica"*, 2025, Video su YouTube. https://youtu.be/WHv-BnD3tW0.

Grazie!

Alessandro Zaccagnini

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università di Parma
Parco Area delle Scienze, 53a
Campus Universitario
43124 Parma

alessandro.zaccagnini@unipr.it
https://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/
https://www.youtube.com/c/AlessandroZaccagnini
https://twitter.com/AleZaccagnini66
https://instagram.com/alessandrozaccagnini66