XXXVIII Convegno UMI-CIIM

La matematica serve ancora?

L'EDUCAZIONE MATEMATICA
PER UNA CITTADINANZA ATTIVA,
CONSAPEVOLE E CRITICA

4-6 SETTEMBRE 2025

Genova

Albergo dei Poveri Piazzale Brignole 2

Risolvere problemi di secondo grado nella scuola del primo ciclo: una proposta didattica laboratoriale

Daniele Pasquazi - Università Lumsa (Roma) - LSS B. Touschek (Roma)

Risolvere problemi di secondo grado nella scuola del primo ciclo

Obiettivi generali e specifici

Competenze Curricolari: Conoscere le origini di un problema di secondo grado; Comprendere gli sforzi più significativi fatti nel tempo per passare da strategie risolutive particolari ad una formula risolutiva generale; saper impostare e risolvere un problema di secondo grado.

Nodi concettuali:

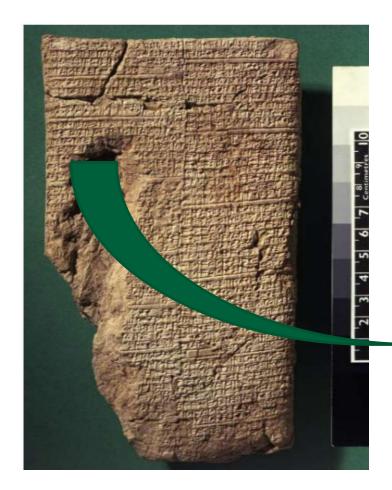
- Obiettivo 1: Conoscere i primi problemi matematici di secondo grado;
- Obiettivo 2: Studiare le metodologie risolutive di tali problemi, fare confronti tra quelle che via via storicamente sono state adottate;
- Obiettivo 3: Scoprire come da tale risoluzioni di casi particolari si è potuti arrivare alla formula canonica solitamente utilizzata oggi a scuola per la risoluzione di una qualsiasi equazione di secondo grado.
-

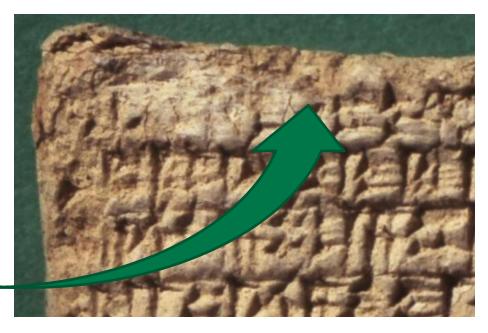
Obiettivi generali: sollecitare aspetti motivanti; sviluppare pensiero critico e razionale,

Modalità: laboratoriale

Discipline coinvolte: matematica, inglese, tecnologia, storia

Tavoletta con 24 problemi





https://www.britishmuseum.org/collection/object/W_1896-0402-1

 metodo della semisomma e della semidifferenza (sistemi)
 metodo del "completamento dei quadrati" (equazione quadratica)

2) metodo del "completamento dei quadrati" (equazione quadratica)

a-šà^{[[am]} ù mi-it-har-ti ak-m[ur-m]a 45-e 1 wa-si-tam*

The surfa[ce] and my confrontation I have accu[mulated]: 45' is it. 1, the projection,

ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-he-pe [3]0 ù 30 tu-uš-ta-kal

you posit. The moiety of 1 you break, [3]0' and 30' you make hold.

15 a-na 45 tu-sa-ab-ma 1-[e] 1 íb-si8 30 ša tu-uš-ta-ki-lu

15' to 45' you append: 1 [makes] 1 equilateral. 30' which you have made hold

lìb-ba 1 ta-na-sà-ah-ma 30 mi-it-har-tum

in the inside of 1 you tear out: 30' the confrontation

<u>Jens Egede Høyrup</u> **The old Babylonian square texts BM 13901 and YBC 4714. Retranslation and analysis** https://www.researchgate.net/publication/290981831

Attività 1: metodo del "completamento dei quadrati" (equazione quadratica)

Risolvi il seguente problema: "La superficie e il lato del quadrato ho sommato e fa ¾".

La seguente è la soluzione presente sulla tavoletta:

"Prendi il coefficiente 1 [numero dei lati considerato]. Prendi la metà di 1. Tu hai 1/2.

Moltiplica (1/2) con 1/2 (fa 1/4). Congiungi 1/4 con 3/4 e (fa) 1 che ha 1 come radice
quadrata. 1/2, che tu hai moltiplicato per se stesso, sottrai da 1 e (fa) 1/2 (che) è il (lato del) quadrato."

TRADUCIAMO IN UNA FORMULA TALE TESTO

Seguendo Le parole dello scriba egiziano

si arriva alla soluzione:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$$

2) Attività 1: metodo del "completamento dei quadrati" (equazione quadratica)

I babilonesi non avevano una formula risolutiva applicabile a qualsiasi caso.

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \quad (*)$$

Tuttavia la soluzione trovata è perfettamente riconducibile alla formula che abitualmente usiamo per risolvere le equazioni di secondo grado.

Infatti, in termini "moderni" il problema è modellizzato da: $x^2 + x = \frac{3}{4}$

che permette di determinare $x = \frac{-1 + \sqrt{1+3}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$

evidenziando la perfetta analogia con (*)

2) Attività 1: metodo del "completamento dei quadrati" (equazione quadratica)

Ipotesi di come lo scriba possa essere arrivato alla soluzione.

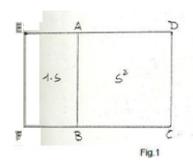
"La superficie e il lato del quadrato ho sommato e fa ¾."

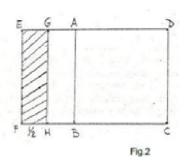
Vedendo il problema da un punto di vista geometrico, di fatto, si vuole sommare l'area di una superficie alla lunghezza di un segmento. Ciò è possibile se per x² s'intenda l'area di un quadrato (di lato x) che deve essere sommato all'area di un rettangolo di lato x e 1.

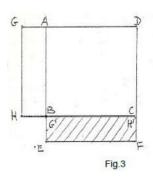
Attività 1: La soluzione geometrica: il metodo del "completamento dei quadrati".

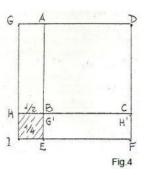
La superficie e il lato del quadrato ho sommato e fa 3/4. Prendi il coefficiente 1 [numero dei lati considerato]. Prendi la metà di 1. Tu hai 1/2. Moltiplica (1/2) con 1/2 (fa 1/4). Congiungi 1/4 con 3/4 e (fa) 1 che ha 1 come radice quadrata. 1/2, che tu hai moltiplicato per se stesso, sottrai da 1 e (fa) 1/2 (che) è il (lato del) quadrato.

Si dividano ora a metà il segmento AE, lungo 1, per mezzo del punto G e il rettangolo EFBA mediante il segmento GH (Fig. 2). Si trasporti tale rettangolo in modo che GH vada a coincidere con BC come in Fig. 3. Per completare il quadrato basterà aggiungere alla figura esagonale ottenuta, il quadrato di lato BH = AG = 1/2. Tale quadrato ha area ¼ e il quadrato GIFD ottenuto, avrà area ¾ + ¼ = 1 (Fig.4). Quindi, la radice quadrata di questo numero, misura del segmento GD, è 1 e si ha s = GD-GA = 1-1/2 = 1/2



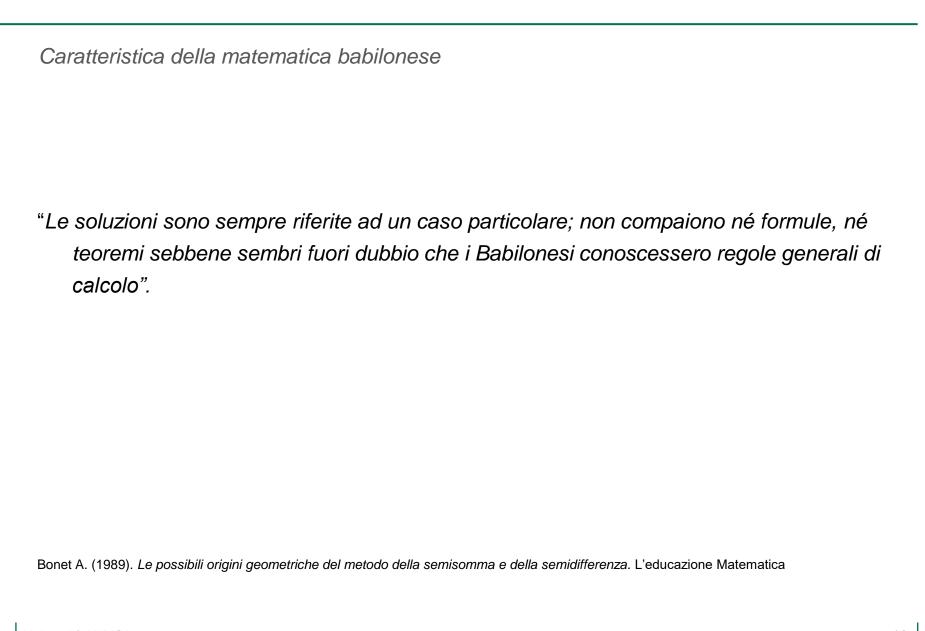






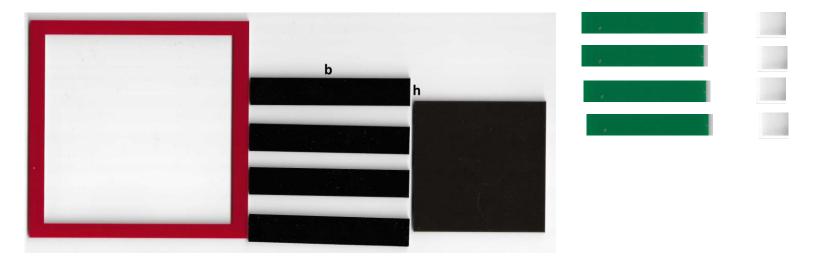
$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$$

https://mathbox.latteseditori.it/divulgazione-scientifica/le-equazioni-di-secondo-grado-e-i-babilonesi



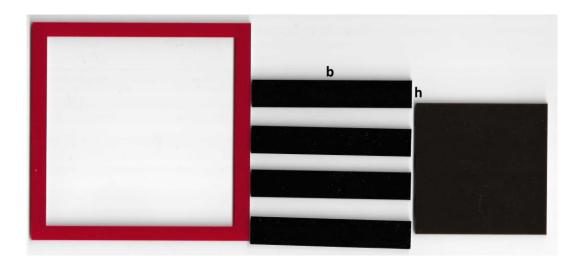
Attività 2: Scoprire la Proposizione II.8 degli Elementi di Euclide

Inventario.



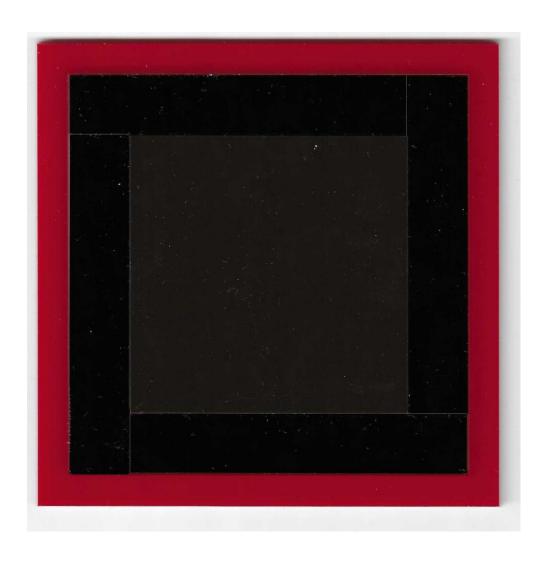
Attività 2: Scoprire la Proposizione II.8

- Obiettivi: <u>scoprire</u> una proprietà euclidea
- Strumenti: specifici manipolativi con basi (una cornice rossa) e figure mobili (4 rettangoli neri e un quadrato marrone).



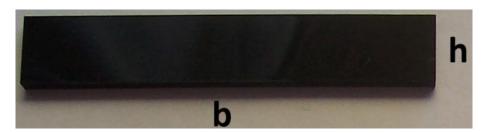
Istruzione di partenza: inserire i 4 rettangoli neri e il quadrato marrone all'interno della base rossa senza lasciare spazi liberi e senza sovrapposizioni.

L'unica soluzione !!!



Attività 3: Formalizzazione della Proposizione II.8

- Obiettivi: trasformazione di significati da una rappresentazione concreta ad un linguaggio formale
- Cosa fanno gli studenti: interagendo con i manipolativi debbono tradurre in un linguaggio formale la relazione tra le aree che si formano mediante i manipolativi consegnati:
 - Area vuota della cornice = ?
 - Area rettangoli di plastica neri =?
 - Area quadrato di plastica marrone =?
- Si potrebbe partire definendo: b base e h altezza dei rettangoli neri da cui dedurre le lunghezze dei lati degli altri poligoni coinvolti nello studio.

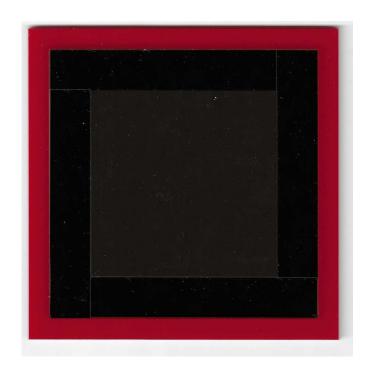


Attività 3: La Proposizione II.8

- Area vuota della cornice = $(b+h)^2$
- Area rettangoli di plastica neri = 4bh
- Area quadrato di plastica marrone = $(b h)^2$

In definitiva:
$$(b+h)^2 = (b-h)^2 + 4bh$$

 $(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh$



Attività 3: La Proposizione II.8 (strategie risolutive più semplici)

- Obiettivi: <u>scoprire</u> una proprietà euclidea
- Strumenti: specifici manipolativi con basi (cornice rossa) e figure mobili (4 rettangoli verdi, 4 quadrati bianchi e un quadrato marrone).
- 1) <u>Scoprire</u> la relazione tra i lati dei poligoni rappresentati dai manipolativi



2) Istruzione di partenza: inserire i 4 rettangoli verdi, i 4 quadrati bianchi e il quadrato marrone all'interno della base rossa senza lasciare spazi liberi e senza sovrapposizioni.

Alcune soluzioni

- Area bianca = $(b + h)^2$
- Area rettangoli verde = (b h)h
- Area quadrati bianchi = h^2
- Area quadrato marrone = $(b h)^2$

In definitiva:

$$(b+h)^2 = (b-h)^2 + 4(b-h)h + 4h^2$$

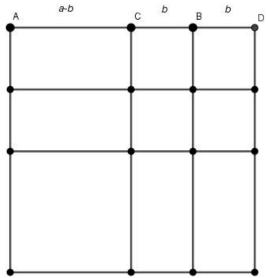
riconducibile a (anche mediante uso e confronto con i rettangoli neri)

$$(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh$$



La proposizione euclidea: II.8

Se si divide a caso una linea retta, il quadruplo del rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti, insieme col quadrato della parte rimanente, è uguale al quadrato descritto, come su una sola linea retta, sulla somma di tutta la retta iniziale e della detta parte.



Sostanzialmente la proposizione afferma che: 4r(AB, CB) + q(AC) = q(AD)

o analogamente

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

Applicazioni della II.8

Prerequisito

I problemi cosiddetti di somma e differenza. (o semisoma e semidifferenza).

Determina due numeri b ed h conoscendo la loro somma e la loro differenza.

$$b + h = 100$$

$$b - h = 40$$

$$b = (b + h) + (b - h) = (100 + 40) : 2 = 70$$

$$h = (b + h) - (b - h) = (100 - 40) : 2 = 30$$

Applicazioni della II.8

Passaggio da un problema di secondo grado ad un problema di primo grado

Problema 1: si vogliono determinare i lati $b \in h$ di un rettangolo essendo noto il suo perimetro s = 48 e la sua area p = 80.

Detti b ed h i lati del rettangolo e ricordando che $(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh$

si ha che
$$(b-h)^2 = 24^2 - 320 = 256$$

si passa al problema di determinare b ed h sapendo che

$$b + h = 24$$

$$b - h = 16$$

ossia

$$b = [(b + h) + (b - h)] : 2 = 20$$
 e

$$h = [(b + h) - (b - h)] : 2 = 4.$$

Problema 2: si vogliono determinare i lati b e h di un rettangolo essendo noto il suo perimetro s = 62 e la sua area p = 84

Applicazioni della II.8

Osservazione

Questa proposizione non viene mai applicata nel seguito degli Elementi; tuttavia Frajese (1970) congettura che fosse utilizzata da Euclide per risolvere problemi di secondo grado (come probabilmente ereditato dalla matematica babilonese dell'epoca risalente ad Hammurabi, circa 1700 a.C.). Ecco un esempio:

Problema: si vogliono determinare i lati *b* e *h* di un rettangolo essendo noto il suo perimetro *s* e la sua area *p*.

Tale problema è modellizzato dal seguente sistema di secondo grado: $\begin{cases} b+h=s \\ bh=p \end{cases}$

Poiché $(b+h)^2 - 4bh = s^2 - 4p$ segue che dalla II.8 $((b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh$) che $\begin{cases} b+h = s \\ b-h = \sqrt{s^2 - 4p} \end{cases}$

naturalmente nelle ipotesi che $s \ge 2\sqrt{p}$ riconducendosi, quindi, ad un problema di primo grado detto di <u>somma e differenza</u>. I lati del rettangolo saranno:

$$b = \frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \qquad \qquad h = \frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

Frajese A. Maccioni L. (a cura di), (1970). Gli Elementi di Euclide, Utet.

Risolvere una equazione di secondo grado particolare

Indicando le due soluzioni con l'incognita x

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$x - \frac{s}{2} = \pm \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - p$$

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$x = \frac{s}{2} \pm \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$
$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2 - 4p}{4}$$
$$x^2 + \frac{s^2}{4} - sx - \frac{s^2}{4} + p = 0$$

Essendo s e p rispettivamente la somma e la differenza delle soluzioni.

si arriva ad una equazione di secondo grado (particolare perché coefficiente direttore è uguale a 1). "Ripercorrendo" all'indietro il precedente procedimento si ottiene la nota strategia risolutiva del "completamento dei quadrati"

Risolvere una equazione di secondo grado particolare

Il completamento dei quadrati

$x^2 - sx + p = 0$	Per completare il quadrato bisogna aggiungere un quadrato tale per cui –s sia il doppio del prodotto delle basi dei quadrati
$x^2 + \frac{s^2}{4} - sx - \frac{s^2}{4} + p = 0$	Quindi il semiprodotto è -s/2 pertanto poiché il coefficiente della x² è uguale a 1 vuol dire che le basi dei due quadrati sono 1 e -s/2. Quindi il secondo quadrato è s²/4. Pertanto va aggiunto e sottratto
$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2 - 4p}{4}$	Isolo il quadrato dal resto
$x - \frac{s}{2} = \pm \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$	Estraggo la radice quadrata ambo i membri
$x = \frac{s}{2} \pm \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$	Ottengo le due soluzioni

Risolvere una equazione di secondo grado particolare

Soluzione problema babilonese

Evidenziare la praticità della strategia risolutiva ma con conseguente perdita dei significati geometrici.

$$x^{2} + x - \frac{3}{4} = 0$$

$$x^{2} + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2} - 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2} = 1$$

$$x_{1} = -\frac{1}{2} - 1$$

$$x_{1} = -\frac{1}{2} + 1$$

Risolvere una equazione di secondo grado

Caso generale

Più in generale

$$ax^{2} + bx + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a\left(x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(x^{2} + \frac{b^{2}}{4a^{2}} - \frac{b^{2}}{4a^{2}} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a\left(x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{2}}{4a^{2}} - \frac{b^{2}}{4a^{2}} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} - \frac{b^{2}}{4a^{2}} + \frac{c}{a}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Poiché necessariamente } a \neq 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} - \frac{b^{2}}{4a^{2}} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x^{2} + \frac{b}{2a}\right)^{2} = \frac{b^{2}}{4a^{2}} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} = \frac{b^{2} - 4ac}{4a^{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-b \pm\sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac \ge 0$ si hanno due soluzioni (distinte o coincidenti). In caso contrario non si hanno soluzioni reali.

Risolvere una equazione di secondo grado

Se b pari

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

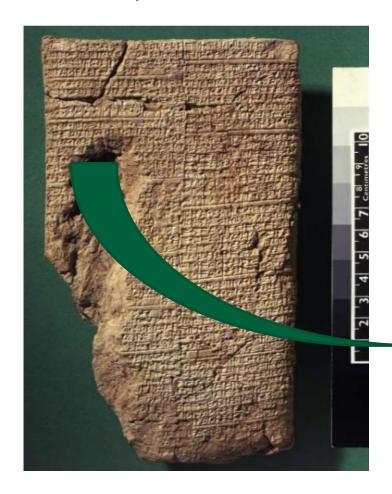
$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)}}{2}}{a}$$

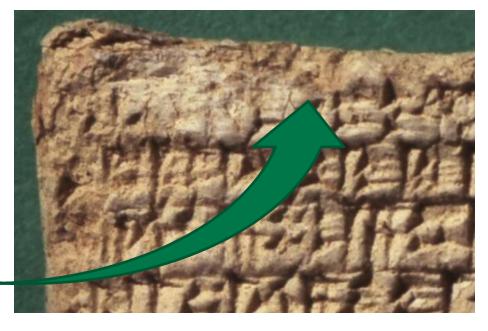
$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)}}{a}$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}}{a}$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{2\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)}}{2}}{a}$$

Tavoletta con 24 problemi





https://www.britishmuseum.org/collection/object/W_1896-0402-1

 metodo della semisomma e della semidifferenza (sistemi)
 metodo del "completamento dei quadrati" (equazione quadratica)

1) Metodo della semisomma e della semidifferenza

Non riportato in alcun documento ma che probabilmente stava alla base della teoria delle equazioni algebriche.

Una grandezza generica può essere sempre rappresentata da un segmento AB di lunghezza nota.

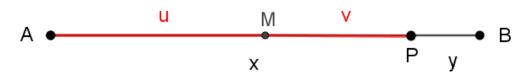
Lo scopo è determinare le due grandezze **incognite** x e y (con riga e compasso) tali che x + y = |AB|



A tal fine si introducono due incognite ausiliarie (sottoradici) u e v tali che

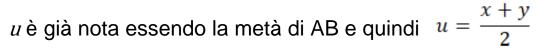


1) Metodo della semisomma e della semidifferenza



$$x = u + v$$

$$y = u - v$$

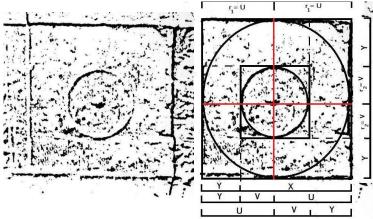


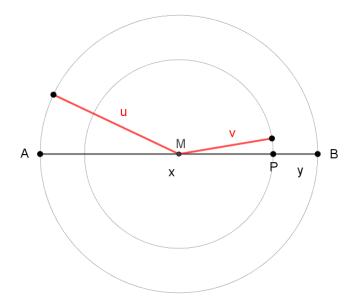
Per trovare v.....

Primo e secondo anello di argento (Boyer, 1976)

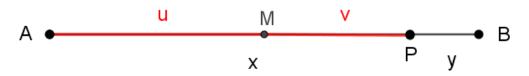
$$v = \frac{x - y}{2}$$

Pertanto, per determinare x e y occorre che sia nota, oltre che la loro somma, anche la loro differenza.





1) Metodo della semisomma e della semidifferenza



In sostanza (tipica proposizione del problema):

se sono note x+y e x-y

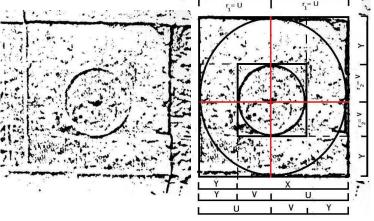
siano
$$x = u + v$$
 e $y = u - v$

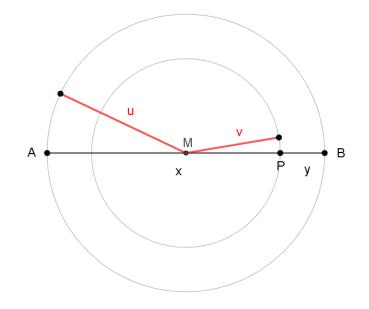
allora
$$x + y = 2u$$

$$x - y = 2v$$

pertanto
$$u = \frac{x+y}{2}$$
 $v = \frac{x-y}{2}$

Che permettono di trovare x ed y.





1) Metodo della semisomma e della semidifferenza

Quale metodo didattico?

1) grafico

x + y è il diametro della circonferenza maggiore

x - y è il diametro della circonferenza minore

$$(x + y) - (x - y) = 2y$$

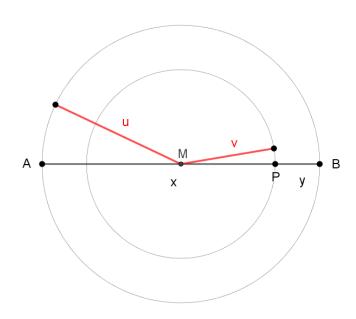
da cui x

2) Le strisce

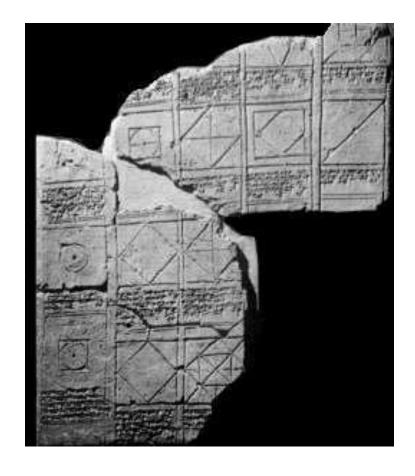


3) Le pedine





B.M.15285 del 1800 a.C.



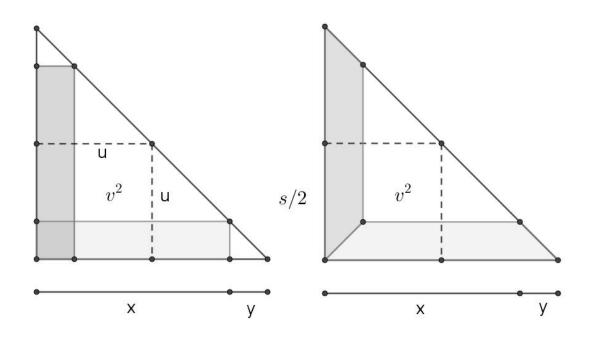
si propongono dei problemi sul quadrato

https://www.storiologia.it/grecia/grek015.htm

Problema III del testo IX delle tavolette di Susa (1800 a. C.)

Applicazione: equazioni quadratiche (Bonet, 19..)

Porta al sistema della forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ ed è rappresentabile mediante le seguenti figure, tipicamente ricondotto al caso precedente per mezzo delle seguenti sostituzioni



$$x = u + v$$

$$y = u - v$$

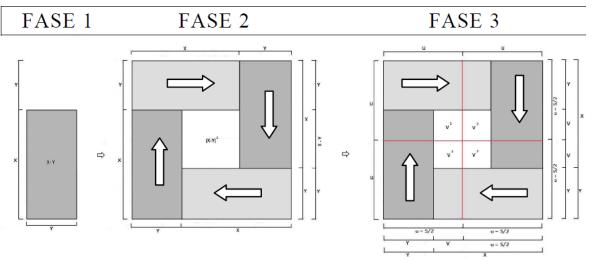
$$u = \frac{x + y}{2} = \frac{s}{2}$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^{2} = p + v^{2}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^{2} - p} = \frac{x - y}{2}$$

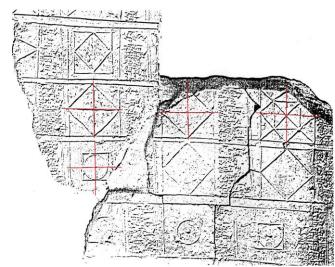
Problema III del testo IX delle tavolette di Susa (1800 a. C.)

1) Metodo della semisomma e semidifferenza. Diagramma geometrico: paradigma di base per problemi di secondo grado.



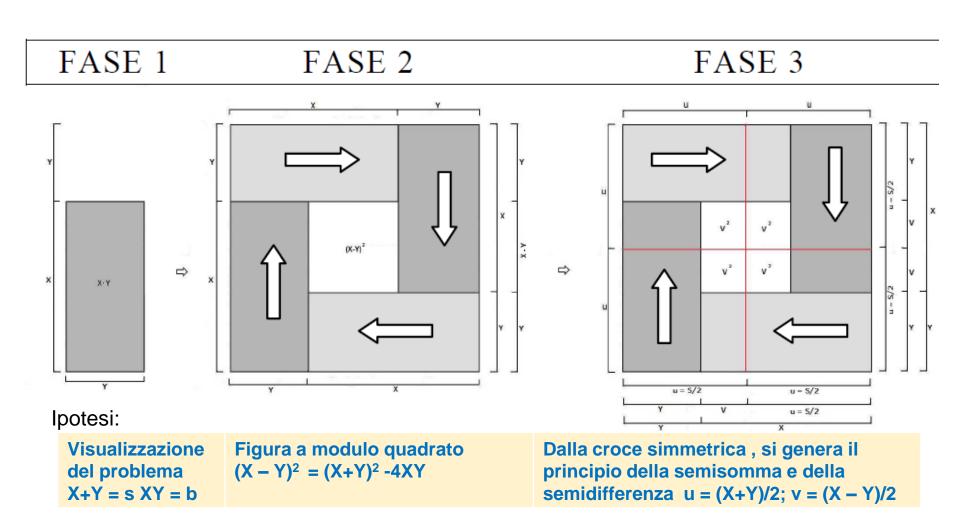
B.M.15285 del 1800 a.C.

Croci grafiche in posizione simmetrica e perpendicolare ai lati delle figure geometriche Babilonesi: strumento algoritmico per risolvere problemi geometrici (analogo all'abaco per i calcoli aritmetici)



Problema III del testo IX delle tavolette di Susa (1800 a. C.)

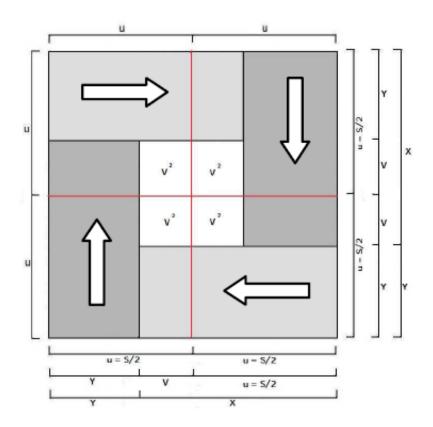
1) Metodo della semisomma e semidifferenza. Diagramma geometrico: paradigma di base per problemi di secondo grado.



Bonet, A. (2009). Il diagramma d'argilla, geometrico risolvente a modulo quadrato, che governava l'intera arte algebrica degli antichi scribi: un paradigma che ha aperto le porte alla cultura matematica delle civiltà arcaiche. Mathesis.

Problema III del testo IX delle tavolette di Susa (2000 a.C.)

1) Metodo della semisomma e semidifferenza. Diagramma geometrico: paradigma di base per problemi di secondo grado.



$$x = u + v$$

$$y = u - v$$

$$u = \frac{x + y}{2} = \frac{s}{2}$$

$$s^2 = 4p + 4v^2$$

$$v^2 = \frac{s^2 - 4p}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = \frac{x - y}{2}$$

Bonet, A. (2009). Il diagramma d'argilla, geometrico risolvente a modulo quadrato, che governava l'intera arte algebrica degli antichi scribi: un paradigma che ha aperto le porte alla cultura matematica delle civiltà arcaiche. Mathesis.

Controllo apprendimento

Verifica del raggiungimento obiettivi

Quale numero moltiplicato con sé stesso e con la radice di 10 dà 9 volte il numero stesso? (Fibonacci)

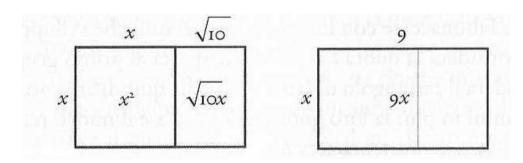
$$x^2 + \sqrt{10}x = 9x$$

Si deve costruire un rettangolo di lati x e x + $\sqrt{10}$

ed un altro rettangolo di lati x e 9.

I due rettangoli devono avere la stessa area, va da se

dunque che $x + \sqrt{10} = 9$ da cui la soluzione.



Controllo apprendimento

Verifica del raggiungimento obiettivi

Quale numero moltiplicato con sé stesso e con la radice di 10 dà 9 volte il numero stesso? (Fibonacci)

$$x^2 + \sqrt{10}x = 9x$$

Con passaggi algebrici "moderni"

$$x^2 + \sqrt{10}x - 9x = 0$$

$$x^2 + x(\sqrt{10} - 9) = 0$$

$$x + (\sqrt{10} - 9) = 0$$

da cui la soluzione.

Si può prendere spunto per descrivere, a partire dal problema dato, equazione di secondo grado particolari ossia incomplete.

Grazie per la vostra cortese attenzione e partecipazione!

danielepasquazi@yahoo.it

