

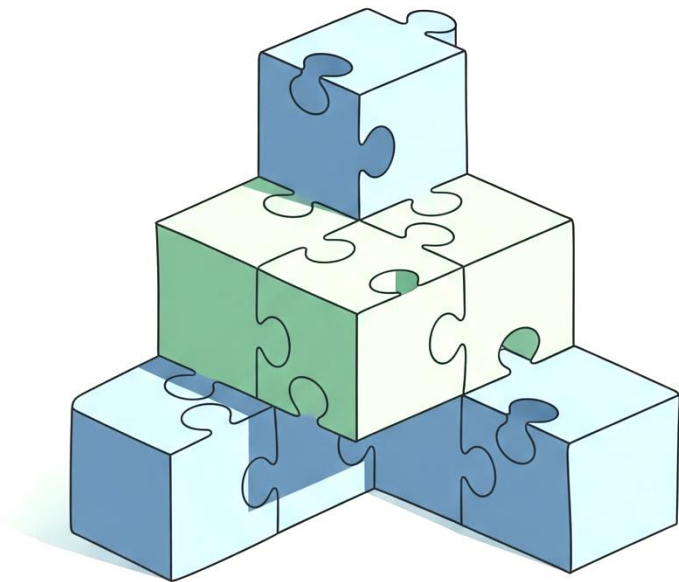
LABORATORIO

Oltre il calcolo simbolico:
*il ruolo della valutazione formativa
nello sviluppo del symbol sense*

Genova, 4- 6 settembre 2025
Albergo dei Poveri – Piazzale Brignole 2

Simone Quartara
simonequartara@gmail.com

Andrea Ottonello
andreaottonello1996@gmail.com



I PARTE

Alla scoperta del symbol sense



Introduzione

Riflessioni e spiegazioni



Attività di problem solving

II PARTE

Dalla teoria alla pratica d'aula



Analisi di protocolli



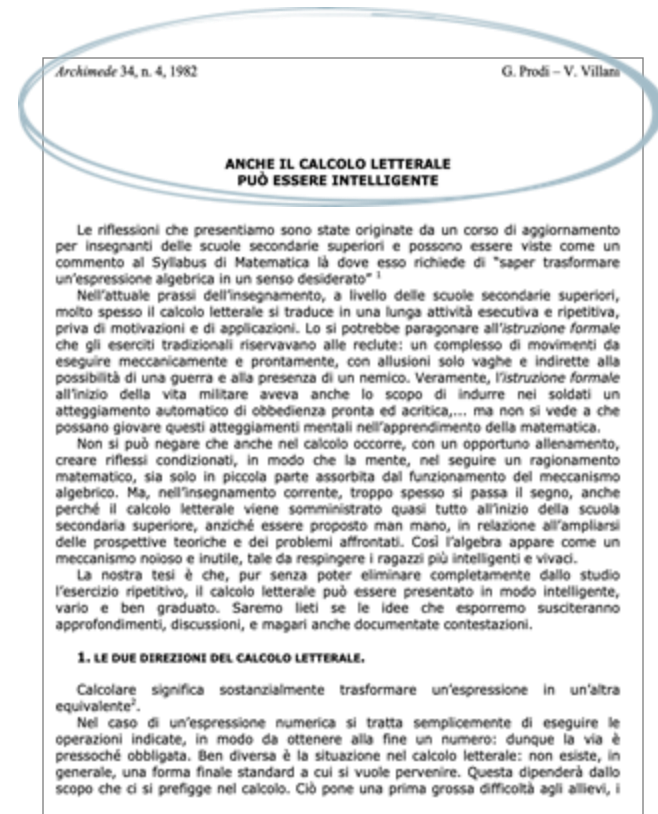
Esempi d'aula

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

È **scarsamente formativo** fare eseguire “in serie” grandi quantità di esercizi basati su schemi di calcolo prefissati e catalogati.

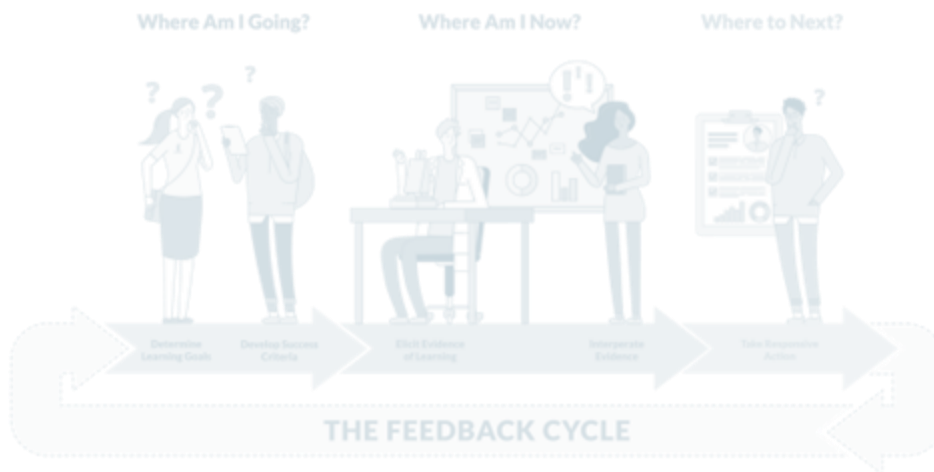
Infatti, l’interesse e la difficoltà stanno ben più nella scelta della direzione da imprimere al calcolo che non nella sua esecuzione.

È **opportuno** sviluppare man mano l’abilità nel calcolo e continuare ad inframmezzare esercizi di vario tipo, in modo che sia sempre preminente la strategia rispetto alla manualità e al piccolo artificio.



VALUTAZIONE FORMATIVA

“Le evidenze sui risultati degli studenti sono raccolte, interpretate e utilizzate da insegnanti, studenti o loro pari per prendere decisioni sulle fasi successive dell’attività che saranno migliori o più fondate rispetto alle decisioni che si sarebbero prese in assenza delle evidenze raccolte”.



Educ Asse Eval Acc (2009) 21:5–31
DOI 10.1007/s11092-008-9068-5

Developing the theory of formative assessment

Paul Black · Dylan William

Received: 18 September 2008 / Accepted: 30 December 2008 /
Published online: 23 January 2009
© Springer Science + Business Media, LLC 2009

Abstract Whilst many definitions of formative assessment have been offered, there is no clear rationale to define and delimit it within broader theories of pedagogy. This paper aims to offer such a rationale, within a framework which can also unify the diverse set of practices which have been described as formative. The analysis is used to relate formative assessment both to other pedagogic initiatives, notably cognitive acceleration and dynamic assessment, and to some of the existing literature on models of self-regulated learning and on classroom discourse. This framework should indicate potentially fruitful lines for further enquiry, whilst at the same time opening up new ways of helping teachers to implement formative practices more effectively.

Keywords Formative assessment · Assessment for learning · Dynamic assessment · Self-regulation · Instruction · Pedagogy · Cognitive acceleration · Dialogue

1 Introduction

The purpose of this paper is to develop the theory of formative assessment beyond the stage reached in our earlier writing, drawing on a variety of sources in the literature that have addressed this issue, whether directly or obliquely. Our earliest work on formative assessment (Black and William 1998a, b) did not start from any pre-defined theoretical base but instead drew together a wide range of research findings relevant to the notion of formative assessment. Work with teachers to explore the practical applications of lessons distilled therefrom (Black et al. 2002,

P. Black (✉)
Department of Education and Professional Studies, King's College London,
Franklin-Wilkins Building, 150 Stamford Street, London SE1 9NH, UK
e-mail: paul.black@kcl.ac.uk

D. William
Institute of Education, University of London, London, UK

STRATEGIE VALUTAZIONE FORMATIVA

- S1.** Chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di valutazione;
- S2.** Progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti;
- S3.** Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare;
- S4.** Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri;
- S5.** Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.

Developing the theory of formative assessment

Paul Black, King's College London,
and
Dylan Wiliam, Institute of Education, University of London

To appear in *Educational Assessment, Evaluation and Accountability* (formerly the *Journal of Personnel Evaluation in Education*), 1(1) (2009).

Abstract

Whilst many definitions of formative assessment have been offered, there is no clear rationale to define and delimit it within broader theories of pedagogy. This paper aims to offer such a rationale, within a framework which can also unify the diverse set of practices which have been described as formative. The analysis is used to relate formative assessment both to other pedagogic initiatives, notably cognitive acceleration and dynamic assessment, and to some of the existing literature on models of self-regulated learning and on classroom discourse. This framework should indicate potentially fruitful lines for further enquiry, whilst at the same time opening up new ways of helping teachers to implement formative practices more effectively.

1. Introduction

The purpose of this paper is to develop the theory of formative assessment beyond the stage reached in our earlier writing, drawing on a variety of sources in the literature that have addressed this issue, whether directly or obliquely. Our earliest work on formative assessment (Black & Wiliam 1998a; 1998b) did not start from any pre-defined theoretical base but instead drew together a wide range of research findings relevant to the notion of formative assessment. Work with teachers to explore the practical applications of lessons distilled therefrom (Black et al., 2002; 2003) led to a set of advisory practices that were presented on a pragmatic basis, with a nascent but only vaguely outlined underlying unity. So our **first** aim in this paper is to provide a unifying basis for the diverse practices which are said to be formative.

Subsequently, (Black & Wiliam, 2006) we explored the changes that occurred in the classrooms of teachers developing formative assessment, and proposed a theoretical frame for the study of such classrooms. However, this theoretical frame was grounded in the data



COMPORTAMENTI CARATTERIZZANTI IL SYMBOL SENSE:

#1 fare amicizia con i simboli;

#2 manipolare ed oltre: leggere attraverso i simboli;

#3 costruire espressioni simboliche;

#4 espressioni equivalenti, significati non equivalenti;

#5 scelta dei simboli;

#6 flessibilità nelle manipolazioni;

#7 symbols in retrospect;

#8 symbols in context.



Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics

ABRAHAM ARCAVI

Prologue

Simon Funes, the "memorist", was created from Borges's fantastic palette. He had an extraordinarily retentive memory, he was able to remember everything, he is the shapes of the southern clouds on the dawn of April 10th, 1882, or all the words in English, French, Portuguese and Latin. Each one of his experiences was fully and accurately registered in his infinite memory. On one occasion he thought of "reducing" each past day of his life to seventy thousand remembrances to be referred to by numbers. Two considerations dissuaded him: the task was interminable and futile. Towards the end of the story, the real tragedy of Funes is revealed: He was incapable of general "platonic" ideas. For example, it was hard for him to understand that the generic name dog included to many individuals of diverse sizes and shapes. Moreover, he was also disturbed that the dog seen, and accurately memorized, at three fourteen in the afternoon from a side view was the same dog he saw at three-fifteen from a front view. Precisely because Funes had such a monumental memory, he was unable to think, because, says Borges, "Funes es olvidador de diferencias, es generalizador, abstracto" [1989]—as thick as to forget differences, to generalize, to abstract.

The argument

It is widely accepted that correct performance of arithmetical operations should not be the sole focus of arithmetic teaching and learning. The knowledge of when to use an operation, and themes like "number sense" are nowadays receiving increasing attention. In general terms, "number sense" [NCTM, 1989; Sowder and Schappelle, 1989; Sowder, 1992] can be described as a "non-algorithmic" feel for numbers, a sound understanding of their nature and the nature of the operations, a need to examine reasonableness of results, a sense of the relative effects of operating with numbers, a feel for orders of magnitude, and the freedom to reinvent ways of operating with numbers differently from the mechanical repetition of what was taught and memorized.

Is there a parallel situation with algebra? Does the mathematics education community no longer consider symbolic manipulations as the central issue in algebra instruction? The answer seems to be affirmative especially in the light of the emergence of symbolic manipulators and, in part, because many high school students make little sense of literal symbols, even after years of algebra instruction. Even those students who manage to handle the algebraic techniques successfully, often fail to see algebra as a tool for understanding, expressing, and communicating generalizations, for revealing structure, and for establishing connec-

tions and formulating mathematical arguments (proofs). Instruction does not always provide opportunities not only not to memorize, but also to "forget" rules and details and to be able to see through them in order to think, abstract, generalize, and plan solution strategies. Therefore, it would seem reasonable to attempt a description of a parallel notion to that of "number sense" in arithmetic: the idea of "symbol sense" [1].

What is symbol sense? A first round

Compared to the attention which has been given to "number sense", there is very little in the literature on "symbol sense". One welcome exception is Fey [1990]. He does not define symbol sense directly, but he lists "a reasonable set of goals for teaching" it, which include the "following basic themes":

- Ability to scan an algebraic expression to make rough estimates of the patterns that would emerge in numeric or graphic representation.
- Ability to make informed comparisons of orders of magnitude for functions with rules of the form $a, a^2, a^3, \dots$ and a^x .
- Ability to scan a table of function values or a graph or to interpret verbally stated conditions, to identify the likely form of an algebraic rule that expresses the appropriate pattern.
- Ability to inspect algebraic operations and predict the form of the result or, as in arithmetic estimation, to inspect the result and judge the likelihood that it has been performed correctly.
- Ability to determine which of several equivalent forms might be most appropriate for answering particular questions.

In this paper we attempt to extend the above situations both in number and content. Like Fey, we do not attempt to define "symbol sense"—the task is too complicated. We think that "number sense" has been more widely discussed (e.g. Sowder and Schappelle, 1989), and yet a definition has proved to be extremely elusive. Therefore we will concentrate on describing and discussing behaviors which illustrate what we claim are examples of symbol sense.

A methodological aside: Since we do not claim, either here or in the rest of this paper, to describe research on students' cognition and ways of learning, we can afford to be indulgent with the interpretations of the anecdotal data we provide. Thus we propose to dismiss the risks of misinterpreting (either by overcrediting or undercrediting) students' comments. We bring the examples as mere illustrations of instances of what, in our view, symbol sense is.

Comportamento #1 | Fare amicizia con i simboli

*Si consideri un rettangolo qualunque.
Cosa succede alla sua area, se una
delle sue dimensioni è diminuita del
10% e l'altra è aumentata del 10%?*

Chiamiamo a e b le dimensioni iniziali.

*La nuova area sarà:
 $0,9b \cdot 1,1a$ oppure $0,9a \cdot 1,1b$*

Quindi: $0,99ab$

Spiegazione

Soluzione



Fa parte del symbol sense il fatto di apprezzare l'**eleganza**, **concisione**, **comunicabilità** e potere dei simboli, che permettono di mostrare e provare delle relazioni in modi che l'aritmetica non ha disposizione.

Comportamento #1 | Fare amicizia con i simboli

Si risolva la disequazione:

$$|x - 2| > |x - 6|$$

Approccio algebrico è altamente tecnico!

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases} \quad |x - 6| = \begin{cases} x - 6 & x \geq 6 \\ -x + 6 & x < 6 \end{cases}$$

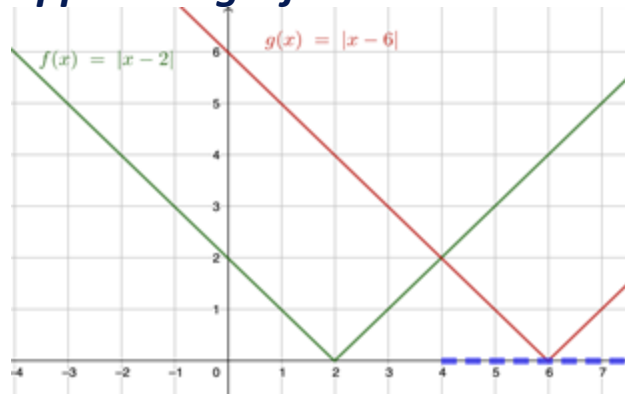
$$\begin{cases} x \leq 2 \\ -x + 2 > x + 6 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 < x \leq 6 \\ x - 2 > -x + 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 6 \\ x - 2 > x - 6 \end{cases}$$

.....

Approccio numerico



Approccio grafico



È parte del symbol sense non solo ricorrere ai simboli nei casi opportuni, ma anche **abbandonare la via algebrica** quando si rischia di “affogare” nelle manipolazioni.

Comportamento #4 | Espressioni equivalenti, significati non equivalenti

Prendi un numero dispari, elevalo al quadrato e sottrai 1.
Cosa puoi dire del numero risultante?

Sia $2n-1$ il generico numero dispari

$$(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n =$$

multiplo di 4

$$= 4n(n - 1) = 8 \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]$$

multiplo di 8

Particolare multiplo di 8



Fanno parte del symbol sense il **feeling coi simboli** e la **fiducia nei simboli**, atteggiamenti che portano a ricercare nelle espressioni algebriche (mediante la manipolazione che porta ad espressioni equivalenti) nuovi significati.

Comportamento #5 | Scelta dei simboli

*Prendi un numero dispari, elevalo al quadrato e sottrai 1.
Cosa puoi dire del numero risultante?*

Sia **$2n-1$** il generico numero dispari

$$\begin{aligned}(2n-1)^2 - 1 &= 4n^2 - 4n = \\ &= 4n(n-1) = 8 \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]\end{aligned}$$

Sia **n** il generico numero dispari

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$



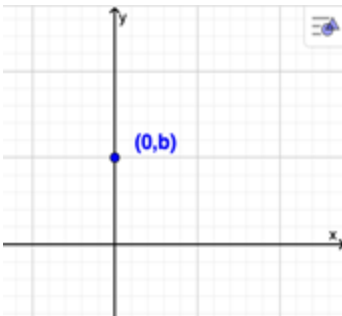
Fa parte del symbol sense la consapevolezza di due aspetti:

- la **scelta dei simboli è libera**, anche se certe scelte possono semplificare la manipolazione ed il risultato finale
- la **scelta iniziale non è vincolante**, si può sempre decidere di passare ad un'altra rappresentazione simbolica più vantaggiosa

Comportamento #8 | Symbol in contest

Si consideri la relazione lineare $y = mx + q$.
Con x, y variabili e m, q parametri.
Come può essere interpretata $y = b$?

Se risulta dall'aver **sostituito** $x=0$



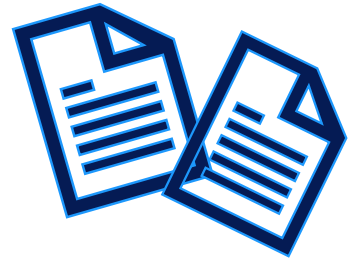
Se risulta dall'aver **sostituito** $m=0$



Fa parte del symbol sense riconoscere nel contesto i **diversi ruoli** che i simboli possono giocare.
Fa parte del symbol sense riuscire a districarsi da una situazione confusa, **recuperando il significato** dei simboli.



Lavoro in piccoli gruppi

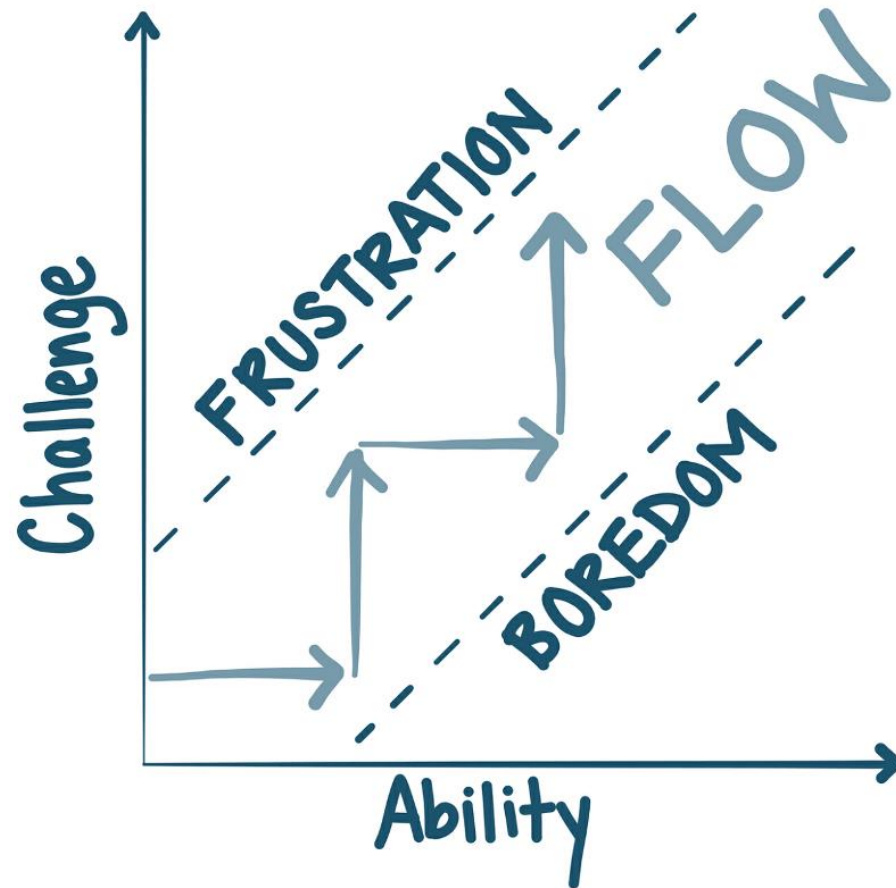


IN COSA VI ABBIAMO COINVOLTO?



<https://www.peterliljedahl.com>

IL FLOW NELLE ATTIVITÀ MATEMATICHE



PER MANTENERE IL FLOW:

1. Setting d'aula

Quando entri in un'aula, capisci immediatamente che cosa aspettarti e questa aspettativa plasma il tuo comportamento

2. Utilizzare buoni problemi

Chiedere agli studenti di fare qualcosa dopo che è stato loro mostrato come farlo, promuove l'abilità di imitazione, non processi di pensiero significativi

3. Dove lavorano gli studenti

Quando gli studenti sono seduti, si sentono anonimi ed è più probabile che si distraggano

4. Favorire l'autonomia

In una "classe pensante", l'insegnante non è la fonte della conoscenza, ma lavora per mettere in moto la conoscenza che è già presente nella stanza

5. Consolidare dal basso

Il rischio è che gli studenti confondano il fatto che venga "mostrato come si fa" con l'aver "appreso"



Lavoro in piccoli gruppi



UN ESEMPIO DI PRATICA D'AULA

D14. L'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?"

Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".

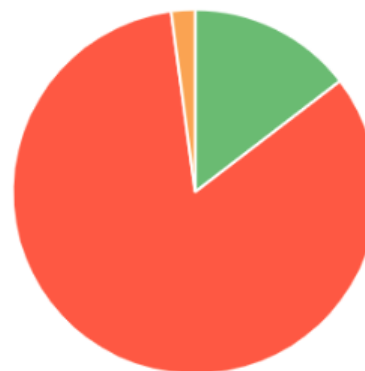
Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".

Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".

Chi ha ragione?

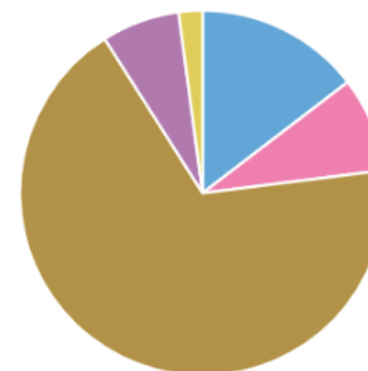
- ☐ A. Tutti e tre
- ☐ B. Solo Mario
- ☐ C. Solo Luisa
- ☐ D. Solo Giovanni

Risposte corrette



■ Risposte corrette 14.6%
■ Risposte errate 83.3%
■ Risposte Mancate 2.1%

Domande a risposta multipla



■ Risposta A 14.6%
■ Risposta B 8.4%
■ Risposta C 68%
■ Risposta D 6.9%
■ Mancate e non valide 2.1%

Gestinv 3.0



MATEMATICA



RISTRUTTURAZIONE DEL QUESITO



1

QUESITO:

Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n + 1$, $2n + 3$ e $2n + 5$?

CONSEGNA (individuale):

Dopo aver letto il quesito compi una prima esplorazione della situazione proposta.

Si tratta di un primo approccio al problema per cui non sentirti costretto/ta a dover formulare una congettura definitiva.

2

QUESITO:

L'insegnante chiede:

"Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n + 1$, $2n + 3$ e $2n + 5$?"

Mario afferma: *"Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri"*.

Luisa risponde: *"Si ottiene sempre un numero dispari"*.

Giovanni dice: *"Si ottiene sempre un multiplo di 3"*.

**CONSEGNA** (individuale):

Facendo seguito alla tua esplorazione iniziale del problema e avendo letto le affermazioni di Mario, Luisa e Giovanni discuti, motivando la scelta, il valore di verità delle tre affermazioni.

3

QUESITO:

L'insegnante chiede:

"Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n + 1$, $2n + 3$ e $2n + 5$?"

Mario afferma: *"Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri"*.

Luisa risponde: *"Si ottiene sempre un numero dispari"*.

Giovanni dice: *"Si ottiene sempre un multiplo di 3"*.

Chi ha ragione?

- a. Tutti e tre
- b. Solo Mario
- c. Solo Luisa
- d. Solo Giovanni

**COME LAVORARE NEL PICCOLO GRUPPO:**

Discuti e confronta con i membri del gruppo l'idea che ti sei fatto/ta sul valore di verità delle tre affermazioni.

Riporta tutte le informazioni rilevanti che hai riportato tu o i tuoi compagni nella discussione.



TRE EPISODI DEL PERCORSO

EPISODIO #1: LA DINAMICA DELLA DISCUSSIONE



- **di comprendere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (32)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (34-35)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (36-37)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (38-39)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (40-41)**



DISCUSSIONE
GRUPPO CLASSE

EPISODIO #2: LO STATO DELL'ARTE DELL'APPRENDIMENTO



- **di comprendere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (32)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (34-35)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (36-37)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (38-39)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (40-41)**

EPISODIO #3: L'ASCOLTATORE ATTIVO



- **di comprendere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (32)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (34-35)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (36-37)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (38-39)**
- **di riconoscere la natura che emerge dalle espressioni degli studenti, in particolare, facendo affidarsi su loro ipotesi l'attenzione e il ruolo dell'insegnante (40-41)**

Gli interventi nella discussione vanno nella direzione di **rendere esplicito** il ruolo degli **esempi numerici** nelle produzioni degli studenti, per **individuare la problematicità** ed **affrontarle con gli studenti**.

EPISODIO #1: LA DINAMICA DELLA DISCUSSIONE

In questo episodio, vi chiedo di osservare l'attivazione delle **strategie di valutazione formativa** messe in campo

- dal docente, nei suoi interventi nella discussione
- e, in risposta, dagli studenti.

S1: esplicitazione degli obiettivi e criteri per il raggiungimento degli stessi

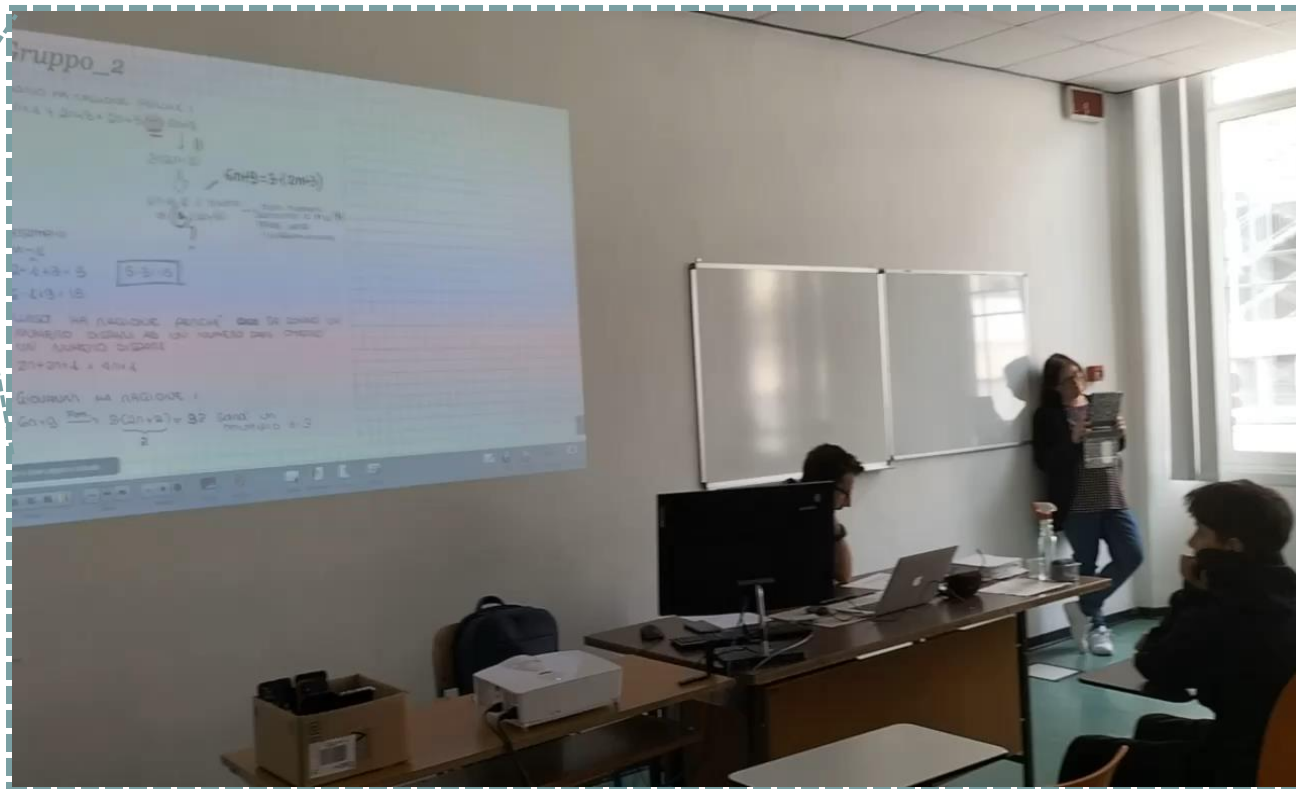
S2: progettazione che attesti dove gli studenti si collocano rispetto a questo apprendimento

S3: feedback che consentono il miglioramento dello studente

S4: studenti come risorse gli uni per gli altri

S5: responsabilità verso il proprio apprendimento

EPISODIO #1: LA DINAMICA DELLA DISCUSSIONE



EPISODIO #2: LO STATO DELL'ARTE DELL'APPRENDIMENTO

In questo episodio, vi chiedo di osservare il tentativo da parte degli studenti, **con** l'insegnante, di attestare a che punto si stanno collocando, in relazione all'apprendimento auspicato.

S1: esplicitazione degli obiettivi e criteri per il raggiungimento degli stessi

S2: progettazione che attesti dove gli studenti si collocano rispetto a questo apprendimento

S3: feedback che consentono il miglioramento dello studente

S4: studenti come risorse gli uni per gli altri

S5: responsabilità verso il proprio apprendimento

EPISODIO #2: LO STATO DELL'ARTE DELL'APPRENDIMENTO



EPISODIO #3: L'ASCOLTATORE ATTIVO

In questo episodio, vi chiedo di osservare come gli studenti restano ascoltatori attivi, anche in seguito all'esposizione della propria risoluzione, ricercando di comprendere le strategie dei compagni.

S1: esplicitazione degli obiettivi e criteri per il raggiungimento degli stessi

S2: progettazione che attesti dove gli studenti si collocano rispetto a questo apprendimento

S3: feedback che consentono il miglioramento dello studente

S4: studenti come risorse gli uni per gli altri

S5: responsabilità verso il proprio apprendimento

EPISODIO #3: L'ASCOLTATORE ATTIVO



Selezionando task

il quesito ha garantita la robustezza e significatività sia per il contenuto matematico che per la formulazione.

Trasformare il task

in modo esplorativo, affinché sia una attività con cui lavorare in classe.

Sviluppare una cultura di classe

nella quale vengono valorizzati gli elementi della valutazione formativa in modo che diventi una pratica d'aula quotidiana: *il modo standard di fare matematica*.

Grazie per l'attenzione

*Genova, 4- 6 settembre 2025
Albergo dei Poveri – Piazzale Brignole 2*

Simone Quartara

simonequartara@gmail.com

Andrea Ottonello

andreaottonello1996@gmail.com