L'IA PUÒ AIUTARE A RIFLETTERE SULLA VERITÀ DI UN'AFFERMAZIONE?



XXXVIII Convegno UMI-CIIM

La matematica serve ancora?

L'EDUCAZIONE MATEMATICA PER UNA CITTADINANZA ATTIVA, CONSAPEVOLE E CRITICA

5 settembre 2025

Il contributo di ChatGPT al lavoro in classe

Alfonsina Sibilla SMS M.Novaro-IM

Nadia Zamboni IC Cogoleto-GE

affermazione	vero o falso?	come hai fatto a stabilirlo?
Se il 17 del mese cade di venerdì, in quel giorno bisogna stare attenti		
Sabato 31 maggio 2025 il Paris Saint-Germain ha battuto l'Inter nella finale di Champions League, 5 a 0		
Nella nostra classe c'è almeno una ragazza bionda		
Tutti i liguri sono tirchi		
La somma di due numeri dispari è un numero pari		
Una affermazione è vera se è vera per la maggioranza della gente		

Quali difficoltà nel valutare un'affermazione matematica?

- Saper esplorare i vari casi in gioco per individuare un controesempio o una regolarità
- Pensare che un'affermazione matematica possa essere sempre vera o sempre falsa o a volte vera e a volte falsa
- Congetturare (partendo dall'ipotesi e non dalla tesi)
- Dimostrare

Continuità cognitiva tra processo di produzione di una congettura e processo di costruzione di una dimostrazione

•

L'IA PUÒ AIUTARE A RIFLETTERE SULLA VERITÀ DI UN'AFFERMAZIONE?



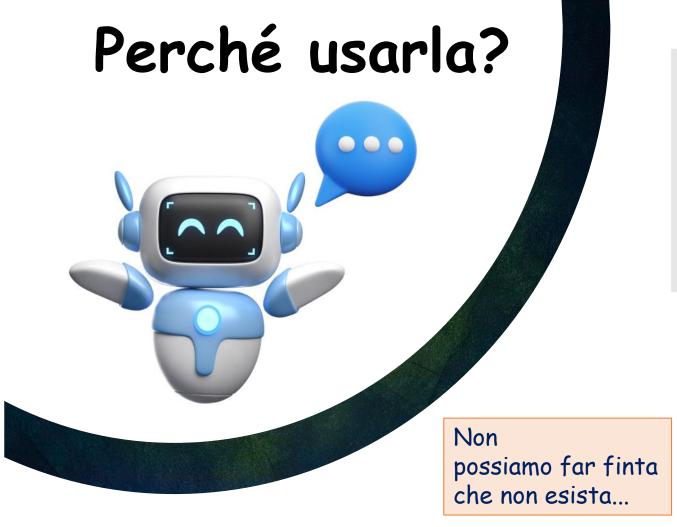
XXXVIII Convegno UMI-CIIM

La matematica serve ancora?

L'EDUCAZIONE MATEMATICA PER UNA CITTADINANZA ATTIVA, CONSAPEVOLE E CRITICA

5 settembre 2025

Il contributo di ChatGPT al lavoro in classe



Scuola che integra le tecnologie digitali con prudenza e senso critico.

Il tema delle **tecnologie digitali** è centrale. La scuola dovrebbe formare un pensiero complesso, capace di valutare attentamente le nuove tecnologie facendone cogliere presupposti ed orientandone l'uso alla luce di chiari principi etici e pedagogici. (IN 2025)

> Anche gli studenti più giovani la usano se disponibile in APP a loro accessibili

È uno stimolo potente per l'attenzione e per l'impegno

Ma in che modo usarla?

... anche alla luce dei problemi normativi che ne regolano l'utilizzo a scuola?



Insegnare l'IA Insegnare per l'IA Insegnare con l'IA

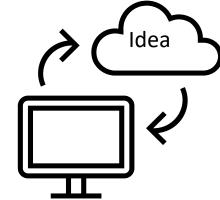
https://stelliniudine.edu.it/costruire-il-futuro-lia-entra-a-scuola/ https://www.agendadigitale.eu/scuola-digitale/ia-nelle-scuole-un-nuovo-approccio-alleducazione-interdisciplinare/

Insegnare con l'IA...

L'obiettivo principale in questo ambito, a livello di primo ciclo, non è studiare, conoscere e comprendere la tecnologia alla base di questi strumenti

Ma.. sfruttarne a pieno il potenziale per migliorare, agevolare e favorire processi di insegnamento e apprendimento.

Il docente dialogando/interagendo con l'I.A. può ricavare spunti di lavoro ...



con cui, ad esempio...

- 1) consolidare competenze su contenuti specifici (IN 2025)
- 2) accrescere la consapevolezza dello studente nei confronti delle proprie conoscenze e nel metodo di lavoro utilizzato
- 3) sviluppare capacità critiche nei confronti dell'IA
- 4) accrescere il senso di responsabilità nell'uso dei dispositivi elettronici diventando consapevoli che l'utilizzo corretto delle tecnologie è quello che potenzia l'esercizio delle competenze individuali, non quello che lo sostituisce (Linee guida per l'insegnamento dell'educazione civica)

Competenze attese al termine della classe terza (2025) □Operare concretamente applicando le conoscenze di base relative ai vari nuclei ossia: padroneggiare i calcoli con sicurezza anche con i numeri razionali nelle loro diverse rappresentazioni; stimare misure di grandezze e risultati di operazioni; □Sostenere le proprie idee, portando esempi e controesempi adequati e utilizzando concatenazioni di affermazioni e accettare di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta. □Comprendere e comunicare con il linguaggio matematico in modo appropriato e coglierne il rapporto con il linguaggio naturale Obiettivi specifici di apprendimento: Numeri □ Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri naturali, interi, razionali sotto forma di frazioni e numeri decimali, quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e software specifici, valutando quale strumento possa essere più opportuno Relazioni e funzioni ☐ Estendere e generalizzare sequenze numeriche e geometriche, costruendo rappresentazioni in linguaggio simbolico per esprimere la generalizzazione individuata. Rappresentare relazioni in diversi linguaggi (numerico, simbolico) e passare da uno all'altro.

Organizzazione del laboratorio

Scenario 1 - introduzione all'attività con confronto tra i docenti

- a. Analisi delle risposte a un prompt riguardante i NUMERI, generate in tempi diversi

 Prima versione / Seconda versione
- b. Confronto tra le risposte

Scenario 2 - la nostra proposta - prima parte: intreccio di voci (versione Imperia e Cogoleto)

- a. presentazione dell'attività
- b. previsioni e analisi delle risposte

Scenario 3 - la nostra proposta - seconda parte: dall'intreccio di voci al loro eco (versione Imperia e Cogoleto) Analisi degli elaborati dei ragazzi e loro gestione

Le conclusioni degli studenti e degli insegnanti



Discussione finale

SU ChatGPT

REGISTRAZIONE

PRIMA DELLA

No, non è sempre vero che il prodotto di due numeri interi sia maggiore di ciascun fattore.

Affinché questo accada, entrambi i fattori devono essere maggiori di zero.

Ecco alcuni casi da considerare.

- Se un fattore è zero: il prodotto sarà sempre zero, indipendentemente dall'altro fattore. Per esempio, 5 × 0 = 0
- Se un fattore è negativo: il prodotto sarà maggiore, minore o uguale a zero a seconda dell'altro fattore. Per esempio:
 - $-5 \times (-2) = -10$, che è minore di entrambi i fattori
 - $-5 \times (-5) = -25$, che è minore di 5 ma maggiore di -5
- $-(-5) \times (-5) = 25$, che è maggiore di entrambi i fattori.

Quindi, la regola generale è che il prodottodidue numeri interi è maggiore di ciascun fattore solo se entrambi i fattori sono positivi. è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore?

No, non è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore. Dipende dai valori dei numeri coinvolti. Vediamo i vari casi possibili:

1. Entrambi i numeri sono positivi e maggiori di 1:

In questo caso, il prodotto sarà sempre maggiore di ciascun fattore.

Esempio:
$$3 \times 4 = 12$$
, e $12 > 3$ e $12 > 4$.

2. Uno dei numeri è 1:

In questo caso, il prodotto sarà uguale al fattore diverso da 1, quindi non è maggiore.

Esempio:
$$1 \times 5 = 5$$
.

3. Uno dei numeri è 0:

Il prodotto sarà 0, che è minore di qualunque numero positivo.

Esempio:
$$0 \times 7 = 0$$
.

4. Entrambi i numeri sono negativi:

Il prodotto sarà positivo (poiché il prodotto di due numeri negativi è positivo), e potrebbe essere maggiore o minore in base ai valori assoluti.

Esempio:
$$-3 \times -4 = 12$$
, e $12 > -3$ e $12 > -4$.

5. Uno dei numeri è negativo e l'altro positivo:

Il prodotto sarà negativo, e quindi sempre minore del fattore positivo.

Esempio:
$$-2 \times 5 = -10$$
, e $-10 < 5$.

In conclusione, il prodotto di due numeri interi non è sempre maggiore di ciascun fattore, ma dipende dai segni e dai valori specifici dei numeri coinvolti.

La nostra proposta di utilizzo di ChatGPT...



una voce aggiunta al gruppo classe

Da dove partire?

Da prompt, meditati in dettaglio, che diventano **strumento** per sviluppare/consolidare/ampliare conoscenze su contenuti specifici

In che modo?

Utilizzando il confronto tra risposte degli studenti e risposte del chatbot e la continua mediazione del docente che supporta, stimola, favorisce lo studente nell'esprimere il proprio pensiero sia in forma orale che scritta

Con quale approccio metodologico?

Attraverso forme di didattica laboratoriale che conducono ad un confronto delle risposte per costruire concetti nuovi e consolidare quelli già conosciuti, per una costruzione sociale del sapere attraverso attività in piccolo gruppo e quindi sul gruppo classe



A ChatGPT È STATA FATTA QUESTA DOMANDA (PROMPT)

SCHEDA 1

è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore?

Alla classe è stato ricordato che i numeri interi non sono i numeri naturali

RISPONDI ANCHE TU E GIUSTIFICA LA RISPOSTA

Quali sono state, a vostro parere, le risposte?







COSA SI PUÒ NOTARE?

SCHEDA 2

LA VOCE DI ChatGPT

è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore?

No, non è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore. Dipende dai valori dei numeri coinvolti. Vediamo i vari casi possibili:

1. Entrambi i numeri sono positivi e maggiori di 1:

In questo caso, il prodotto sarà sempre maggiore di ciascun fattore.

Esempio:
$$3 \times 4 = 12$$
, e $12 > 3$ e $12 > 4$.

2. Uno dei numeri è 1:

In questo caso, il prodotto sarà uguale al fattore diverso da 1, quindi non è maggiore.

Esempio:
$$1 \times 5 = 5$$
.

3. Uno dei numeri è 0:

Il prodotto sarà 0, che è minore di qualunque numero positivo.

Esempio:
$$0 \times 7 = 0$$
.

4. Entrambi i numeri sono negativi:

Il prodotto sarà positivo (poiché il prodotto di due numeri negativi è positivo), e potrebbe essere maggiore o minore in base ai valori assoluti.

Esempio:
$$-3 \times -4 = 12$$
, e $12 > -3$ e $12 > -4$.

5. Uno dei numeri è negativo e l'altro positivo:

Il prodotto sarà negativo, e quindi sempre minore del fattore positivo.

Esempio:
$$-2 \times 5 = -10$$
, e $-10 < 5$.

In conclusione, il prodotto di due numeri interi non è sempre maggiore di ciascun fattore, ma dipende dai segni e dai valori specifici dei numeri coinvolti. a) QUALE STRATEGIA PER PERSEGUIRE
LO SCOPO SCORGI NELLA RISPOSTA DATA DA CHAT GPT?

b) TU, QUALE STRATEGIA HAI SEGUITO PER PERSEGUIRE LO SCOPO?

c) COME CONTINUERESTI IL DIALOGO CON CHATGPT?

QUALI SONO STATE, A VOSTRO PARERE, LE RISPOSTE DELLA CLASSE?

RIFLESSIONE SU QUANTO SVOLTO

ECCO LA RISPOSTA DATA DA ChatGPT

è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore?

No, non è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore. Dipende dai valori dei numeri coinvolti. Vediamo i vari casi possibili:

1. Entrambi i numeri sono positivi e maggiori di 1:

In questo caso, il prodotto sarà sempre maggiore di ciascun fattore.

Esempio:
$$3 \times 4 = 12$$
, e $12 > 3$ e $12 > 4$.

2. Uno dei numeri è 1:

In questo caso, il prodotto sarà uguale al fattore diverso da 1, quindi non è maggiore. Esempio: $1\times 5=5$.

3. Uno dei numeri è 0:

Il prodotto sarà 0, che è minore di qualunque numero positivo.

Esempio:
$$0 \times 7 = 0$$
.

4. Entrambi i numeri sono negativi:

Il prodotto sarà positivo (poiché il prodotto di due numeri negativi è positivo), <u>e potrebbe essere</u> maggiore o minore in base ai valori assoluti.

Esempio:
$$-3 \times -4 = 12$$
, e $12 > -3$ e $12 > -4$.

5. Uno dei numeri è negativo e l'altro positivo:

Il prodotto sarà negativo, e quindi sempre minore del fattore positivo. Esempio: $-2 \times 5 = -10$, e -10 < 5.

QUALE STRATEGIA PER PERSEGUIRE LO SCOPO SCORGI NELLA RISPOSTA DATA DA CHAT GPT?

Si confrontano le tre risposte «tipo»

- Ha usato degli esempi
- Analizza i vari casi possibili per cui la risposta non è vera
- Analizza i vari casi possibili

TU, QUALE STRATEGIA HAI SEGUITO PER PERSEGUIRE LO SCOPO?

" non abbiamo considerato le varie possibilità e ci siamo soffermati solo su di un caso, per questo abbiamo sbagliato"

"abbiamo elencato solo un caso possibile per cui la risposta non è vera" (controesempio)

"abbiamo ragionato di più infatti abbiamo fatto un esempio che ci ha fatto arrivare alla risposta giusta "

"non siamo d'accordo con la tua risposta 4 perché il prodotto è sempre positivo perciò maggiore di ciascun fattore"

ERRORE

(PUÒ/DEVE)

In conclusione, il prodotto di due numeri interi non è sempre maggiore di ciascun fattore, ma dipende dai segni e dai valori specifici dei numeri coinvolti.

- CONDIZIONI DA CUI PARTIRE E LA CONCLUSIONE A CUI ARRIVARE
- •ESPLORARE LA SITUAZIONE CON ESEMPI DI TIPO DIVERSO : CHAT GPT HA TROVATO VARI CASI PER CUI LA CONCLUSIONE È FALSA

c) COME CONTINUERESTI IL DIALOGO CON ChatGPT?

" non continueremmo il dialogo, perché la risposta dell'intelligenza artificiale è coerente con la nostra

"è vero che se dividiamo due numeri interi il risultato è sempre minore?" e si danno la risposta

SCHEDA 3

L'OBIEZIONE DEL MATEMATICO

se una affermazione è falsa, non basta il controesempio?

Sì, in generale un solo controesempio è sufficiente per dimostrare che un'affermazione è falsa.

Se qualcuno dicesse:

"Il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore",

basterebbe trovare un solo caso in cui questa affermazione non è vera per dimostrare che è falsa.

Ad esempio, se prendiamo 2 imes 1=2, vediamo che il prodotto non è maggiore di uno dei fattori (è

uguale a 2). Questo basta per invalidare l'affermazione.

a) TI SEMBRA CHE LA RISPOSTA DATA PRECEDENTEMENTE SIA COERENTE CON QUANTO AFFERMA GIUSTAMENTE ORA ChatGPT?

Tuttavia, se vogliamo dimostrare che un'affermazione è sempre vera, allora dobbiamo fornire una dimostrazione generale e non basta un esempio.

La maggioranza dei ragazzi afferma che ChatGPT poteva fermarsi all'esempio 2

Quindi:

- Per mostrare che qualcosa non è sempre vero, basta un controesempio.
- Per mostrare che qualcosa è sempre vero, serve una dimostrazione generale.

Difficoltà a rispondere. Si lascia l'argomento in sospeso b) PERCHÉ SECONDO TE NON BASTANO GLI ESEMPI PER AFFERMARE CHE UNA AFFERMAZIONE È VERA?

DA DOVE PUÒ DERIVARE LA DIFFICOLTÀ?

e se nella domanda non avessi scritto sempre?

APPROFONDIMENTO POSSIBILE

Bellissima riflessione!

Cambiare o togliere la parola "sempre" cambia completamente il significato della frase.

Torniamo alla frase iniziale:

'Il prodotto di due numeri interi è maggiore di ciascun fattore'

Senza la parola "sempre", la frase non è più un'affermazione generale, ma diventa semplicemente una possibilità.

Q Cosa cambia?

Con "sempre":

"Il prodotto è sempre maggiore di ciascun fattore."

Significa: qualunque coppia di numeri interi (diversi da 0 e 1), questa cosa succede.

X Basta un controesempio per dire che non è vero.

Senza "sempre":

"Il prodotto è maggiore di ciascun fattore."

Questa frase potrebbe essere vera in alcuni casi, falsa in altri.

Non è né una regola, né un teorema, né una proprietà da dimostrare o confutare in modo assoluto.

- In effetti, a volte è vera, per esempio:
- 2 × 3 = 6, che è maggiore di 2 e di 3
- X Altre volte è falsa:
- 2 imes (-4) = -8, che non è maggiore né di 2 né di -4

Conclusione

- Se dici "il prodotto è maggiore di ciascun fattore", allora è una frase descrittiva: qualche volta è vera, qualche volta no.
- Se dici "il prodotto è sempre maggiore di ciascun fattore", allora è una regola generale, e devi dimostrarla o smentirla.

Quindi, quella parolina "sempre" cambia tutto.

In matematica, ogni parola conta!

un'affermazione matematica può essere vera o falsa. non ci sono altre possibilità

Hai detto una cosa giustissima, e molto profonda. In matematica:

- Un'affermazione è o vera, o falsa.
- Non esistono vie di mezzo.

Questa è una delle regole fondamentali della logica matematica e si chiama principio del terzo escluso.

Cos'è il principio del terzo escluso?

Dice che:

Ogni affermazione matematica è vera oppure è falsa. Non esiste una terza possibilità.

Per esempio:

- "Il numero 7 è dispari." → ✓ Vera
- "Tutti i numeri pari sono multipli di 2." →
- "3 è maggiore di 5." → X Falsa

Attenzione però...

Non tutte le frasi sembrano subito vere o false. A volte:

- Non abbiamo abbastanza informazioni (es: "x è maggiore di 3" → dipende da x)
- Non sappiamo ancora dimostrarlo (es: congetture aperte)
- La frase è mal formulata (ambigua, incompleta).

In quei casi, non è la matematica ad avere dubbi, ma noi che non siamo ancora in grado di dire se è vera o falsa.

Conclusione

In matematica, una volta che un'affermazione è ben formulata, deve essere vera o falsa. Questo è ciò che rende la matematica precisa e affidabile.

SCENARIO 3

SCHEDA 4

CONSIDERA LE AFFERMAZIONI

(la classe sa che si confronteranno le risposte con quelle di ChatGPT)

- a) La somma dei quadrati di due numeri interi è minore del quadrato della loro somma
- b) La somma di tre numeri consecutivi è un multiplo di 3

PER CIASCUNA DI ESSE VALUTA LA LORO VERITÀ E GIUSTIFICA LA RISPOSTA

SCHEDA 5

Se tu fossi un matematico (o ChatGPT) come dimostreresti la verità dell'affermazione: La somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 4

A ChatGPT È STATA FATTA QUESTA DOMANDA (PROMPT)

è vero che il prodotto di due numeri interi è sempre maggiore di ciascun fattore?

CLASSE DI IMPERIA

RISPONDI ANCHE TU E GIUSTIFICA LA RISPOSTA

2 gruppi, Sì Fanno esempi con i Naturali



3 gruppi, No Fanno un esempio con 0 0000



uno con i relativi

1 gruppo, No

Fa un esempio con 1 e

CLASSE DI COGOLETO

è vero che il prodotto di due numeri interi, diversi da 0 e da 1, è sempre maggiore di ciascun fattore?

11 gruppi

RISPONDI ANCHE TU E GIUSTIFICA LA RISPOSTA

8 gruppi, Sì Fanno esempi con i naturali

1 gruppo, No Fa un esempio con i naturali e 2 con i discordi



1 gruppo, No Scrive a parole che il prodotto di due discordi è minore dei fattori



1 gruppo, si no perché se prendiamo ad esempio la moltiplicazione 2x2 = 4 che è maggiore di 2 però ci sono infiniti numeri e un esempio non basta. Per smentire prendiamo ad es i numeri negativi per es -3 x 2 = -6 che è minore di tutti e 2 i fattori



PROMPT 1

è vero che il prodotto di due numeri interi, diversi da 0 e da 1, è sempre maggiore di ciascun fattore?

LA VOCE DI ChatGPT

No, non è vero che il prodotto di due numeri interi, diversi da 0 e da 1, è sempre maggiore di ciascun fattore.

Vediamo perché con alcuni esempi che dimostrano il contrario.

Caso 1: Numeri negativi

Prendiamo due numeri interi negativi, ad esempio:

$$a = -2 e b = -3$$

Il loro prodotto è:

$$a \cdot b = (-2) \cdot (-3) = 6$$

6 è maggiore sia di -2 che di -3, quindi fin qui sembra vero, ma attenzione...

◆ Caso 2: Un numero positivo e uno negativo

$$a = -2$$
, $b = 5$

$$a \cdot b = -10$$

Ora, il prodotto -10 è minore di entrambi i fattori, quindi la proprietà non vale in generale.

Conclusione:

Il prodotto di due numeri interi positivi, entrambi maggiori di 1, è sempre maggiore di ciascun fattore. Ma in generale, non si può dire che sia sempre maggiore, se consideriamo anche numeri negativi o minori di 1.

CLASSE DI COGOLETO

a) IN QUALE MODO CHAT GPT SEMBRA VOLER DIMOSTRARE CHE L'AFFERMAZIONE È FALSA?

Caso 3: Numeri positivi ma minori di 1

Proviamo con due frazioni positive (che non sono 0 o 1), tipo:

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$$

 $a \cdot b = \frac{1}{6}$

Qui il prodotto è minore di entrambi i fattori.

Caso 4: Numeri interi positivi > 1

Prendiamo:

$$a=3, b=5 \Rightarrow a \cdot b=15$$

In questo caso il prodotto è maggiore di ciascun fattore.

Quindi la proprietà è vera solo in questo sottoinsieme di casi.

b) I CASI ANALIZZATI TI SEMBRANO COERENTI CON QUANTO SI PROPONEVA ChatGPT ?

c) COME CONTINUERESTI IL DIALOGO CON ChatGPT?

PROMPT 1

è vero che il prodotto di due numeri interi, diversi da 0 e da 1, è sempre maggiore di ciascun fattore?

LA VOCE DI CHAT GPT

No, non è vero che il prodotto di due numeri interi, diversi da 0 e da 1, è sempre maggiore di ciascun fattore.

Vediamo perché con alcuni esempi che dimostrano il contrario.

6 è maggiore sia di -2 che di -3, quindi fin qui sembra vero, ma attenzione...

Caso 1: Numeri negativi

Prendiamo due numeri interi negativi, ad esempio:

$$a = -2 e b = -3$$

Il loro prodotto è:

$$a \cdot b = (-2) \cdot (-3) = 6$$

Caso 3: Numeri positivi ma minori di 1

Proviamo con due frazioni positive (che non sono 0 o 1), tipo:

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$$

 $a \cdot b = \frac{1}{6}$

 $a \cdot b = \frac{1}{6}$

Caso 2: Un numero positivo e uno negativo

$$a = -2, b = 5$$

$$a \cdot b = -10$$

Ora, il prodotto -10 è minore di entrambi i fattori, quindi la proprieta

♦ Caso 4: Numeri interi positivi > 1

Qui il prodotto è minore di entrambi i fattori.

Prendiamo:

$$a=3, b=5 \Rightarrow a \cdot b=15$$

In questo caso il prodotto è maggiore di ciascun fattore.

Quindi la proprietà è vera solo in questo sottoinsieme di casi.

CLASSE DI COGOLETO

a) IN QUALE MODO CHAT GPT SEMBRA VOLER DIMOSTRARE CHE L'AFFERMAZIONE È FALSA?

con esempi che dimostrano il contrario

b) I CASI ANALIZZATI TI SEMBRANO COERENTI CON QUANTO SI PROPONEVA CHAT GPT ?

otto gruppi: tranne nel caso 3, ci sono le frazioni

due gruppi: non tutti gli esempi dimostrano il contrario

un gruppo: no, non dimostra tutti i casi possibili per rispondere alla domanda

Conclusione:

Il prodotto di due numeri interi positivi, entrambi maggiori di 1, è sempre maggiore di ciascun fattore.

Ma in generale, non si può dire che sia sempre maggiore, se consideriamo anche numeri negativi o
minori di 1.

c) COME CONTINUERESTI IL DIALOGO CON CHATGPT?

Perché non hai fatto una formula generale?

Perché non hai dimostrato tutti i casi possibili per rispondere alla domanda?

Se due numeri sono negativi come è il loro prodotto?

Siano due numeri interi a < 0 e b < 0.

Allora:

 $a \cdot b = (\text{numero negativo}) \times (\text{numero negativo}) = \text{numero positivo}$

Quindi:

Il prodotto di due numeri negativi è positivo.

Ma è maggiore di ciascun fattore?

Ricorda che:

• $-2 < 0, -3 < 0 \rightarrow \text{quindi } ab = 6 > -2, 6 > -3$

Sempre vero?

Sì, perché:

- Il prodotto è positivo
- I fattori sono negativi
- Quindi sarà sempre maggiore di ciascuno dei due

se il prodotto di due numeri negativi è positivo, perché lo hai preso in considerazione?

Errore nella logica della smentita

Il caso dei due numeri negativi in realtà non smentisce l'affermazione, ma la conferma!

Quindi: includere questo caso tra i controesempi è stato un errore.

i numeri positivi minori di 1 sono numeri interi?

Perfetta osservazione — e ti confermo con chiarezza:

X No, i numeri positivi minori di 1 non sono numeri interi.



Perché?

Gli numeri interi sono:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Quindi:

- I numeri interi positivi sono {1, 2, 3, ...}
- Non esiste alcun intero positivo < 1

Conclusione:

I numeri positivi minori di 1 non appartengono agli interi. Quindi quel caso non è rilevante

L'OBIEZIONE DEL MATEMATICO

se una affermazione è falsa, non basta il controesempio?

Sì, in generale un solo controesempio è sufficiente per dimostrare che un'affermazione è falsa.

a) TI SEMBRA CHE LA RISPOSTA DATA PRECEDENTEMENTE SIA COERENTE CON QUANTO AFFERMA GIUSTAMENTE ORA ChatGPT?

Tuttavia, se vogliamo dimostrare che un'affermazione è sempre vera, allora dobbiamo fornire una dimostrazione generale e non basta un esempio.

Quindi:

- Per mostrare che qualcosa non è sempre vero, basta un controesempio.
- Per mostrare che qualcosa è sempre vero, serve una dimostrazione generale.
- b) PERCHÉ SECONDO TE NON BASTANO GLI ESEMPI PER AFFERMARE CHE UNA AFFERMAZIONE È VERA?

La classe non ha difficoltà a rispondere

SCENARIO 3

SCHEDA 4

CONSIDERA LE AFFERMAZIONI

(la classe sa che si confronteranno le risposte con quelle di ChatGPT)

- a) La somma dei quadrati di due numeri interi è minore del quadrato della loro somma
- b) La somma di tre numeri consecutivi è un multiplo di 3

PER CIASCUNA DI ESSE VALUTA LA LORO VERITÀ E GIUSTIFICA LA RISPOSTA

SCHEDA 5 Non è stata possibile svolgerla in classe per mancanza di tempo

Se tu fossi un matematico (o ChatGPT) come dimostreresti la verità dell'affermazione: La somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 4 a) La somma dei quadrati di due numeri interi diversi da 0 è minore del quadrato della loro somma

CLASSE DI IMPERIA

L'insegnante di classe alla lavagna scrive $a^2 + b^2 < (a + b)^2$

NO perché
$$(-3)^2 + (+4)^2 < (-3 + (+4))^2 + 9 + 16 < (-3 + 4)^2$$
25 e 1

2 gruppi Sì e fanno esempi solo con i positivi

1 gruppo non si orienta perché sbaglia i calcoli

SÌ è sempre vero con i numeri positivi (aggiunto in seguito) perché facendo vari esempi si dimostra che è sempre così e la somma dei due numeri elevati al quadrato è sempre maggiore dei quadrati dei due numeri

$$4 ext{ e 3 } 4^2 = 16$$
 $3^2 = 9$ $16 + 9 = 25$ $49 > 25$ Fanno poi un altro esempio con lo stesso stile

invece con due numeri dai segni diversi: $-3 e 4 (-3)^2 = 9$ $4^2 = 16$

$$9 + 16 = 25$$
 $(-3 + 4)^2 = 1^2 = 1$

No perché se i due numeri sono entrambi negativi i risultati vengono uguali, se invece uno è negativo e l'altro positivo $(a)^2 + (b)^2$ viene maggiore e $(a+b)^2$ viene minore

$$(-4)^2 + (3)^2 <$$
 NO $[(-4) + 3]^2$ il primo risultato viene maggiore, il secondo minore simbolo $\rightarrow >$

a) La somma dei quadrati di due numeri interi diversi da 0 è minore del quadrato della loro somma CLASSE DI COGOLETO

Alla lavagna scritto, con l'aiuto della classe, si traduce l'affermazione in linguaggio algebrico

Gr 3: l'affermazione è vera falsa e lo possiamo dimostrare per prima cosa con degli esempi: $a^2 + b^2 < (a + b)^2$ sostituiamo le lettere con numeri a caso ≠ 0 $2^2 + 4^2 < (2 + 4)^2 = 1^2 + 2^2 < (1 + 2)^2 =$ $4 + 16 < (6)^2 = 1 + 4 < (3)^2 =$ 20 < 36 5 < 9 Ora vediamo con il prodotto di numeri negativi

 $(-2)^2 + (-4)^2 < (-2 + -4)^2 = 4 + 16 < (-6)^2 = 20 < 36$

Ora con i numeri negativi e positivi

$$(-2)^2 + 4^2 < (-2 + 4)^2 = 4 + 16 < (2)^2 = 20 < 4$$

Gr 8: provo con 2 numeri naturali

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

 $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

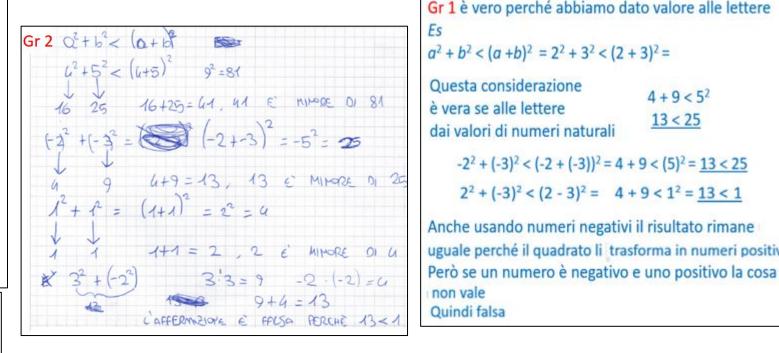
provo con un numero negativo e un numero positivo

tivo

$$(-3)^2 + 2^2 = 13$$

 $(-3 + 2)^2 = -1^2 = 1$
provo con 2 numeri negativi
 $(-3)^2 + -2^2 = 13$
 $(-3 - 2)^2 = 25$
È falsa perché nel secondo caso $a^2 + b^2 > (a + b)^2$

$$a^2 + b^2 < (a + b)^2$$



Gr 1 è vero perché abbiamo dato valore alle lettere $a^2 + b^2 < (a + b)^2 = 2^2 + 3^2 < (2 + 3)^2 =$ Questa considerazione $4 + 9 < 5^2$ è vera se alle lettere 13 < 25 dai valori di numeri naturali $-2^{2} + (-3)^{2} < (-2 + (-3))^{2} = 4 + 9 < (5)^{2} = 13 < 25$ $2^2 + (-3)^2 < (2-3)^2 = 4+9 < 1^2 = 13 < 1$ Anche usando numeri negativi il risultato rimane

uguale perché il quadrato li trasforma in numeri positivi

Un altro gruppo, trovato il controesempio, prova con 2 numeri negativi

2 gruppi non evidenziano il confronto, anche se sembrano aver capito

non vale

Quindi falsa

LA VOCE DI ChatGPT

è vero che il quadrato della somma di due numeri interi diversi da 0 è minore del quadrato della loro somma? Puoi spiegarlo per una classe di III media?

Conclusione

La disequazione è vera solo se i due numeri hanno lo stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi). Se uno è positivo e l'altro è negativo, allora la disequazione non è sempre vera!

Quindi, la risposta alla domanda è: NO, non è sempre vero per tutti i numeri interi!

SEI D'ACCORDO CON QUANTO AFFERMA ChatGPT?

Esempio 1: numeri positivi

Prendiamo 2 e 3.

- Il quadrato di $2 \ earline{e}{e} \ 2^2 = 4$.
- Il quadrato di $3 \ earline{e} \ 3^2 = 9$.
- La somma dei loro quadrati è 4+9=13.

Ora facciamo il quadrato della loro somma:

- La somma di 2 e 3 e 2 + 3 = 5.
- Il quadrato di $5 \ earline{e}$ $5^2 = 25$.

Confrontiamo:

La disequazione è vera.

Esempio 2: numeri negativi

Prendiamo -2 e -3.

- Il quadrato di -2 è sempre 4.
- Il quadrato di -3 è sempre 9.
- La somma dei loro quadrati è di nuovo 4 + 9 = 13.

Ora la somma di -2 e -3 è -5, e il quadrato di -5 è 25.

13 < 25

Anche qui la disequazione è vera.

Esempio 3: numeri con segni diversi

domanda Imperia

Prendiamo 2 e -3.

- Il quadrato di 2 è 4.
- Il quadrato di $-3 \ earline{e}$ 9.
- La somma dei loro quadrati è 4+9=13.

Ora calcoliamo il quadrato della somma:

- La somma di 2 e -3 è 2-3=-1.
- Il quadrato di −1 è 1.

Confrontiamo:

 $13 \nless 1$

Questa volta la disequazione non è vera!

Nessuna risposta

LA VOCE DI ChatGPT

è vero che il quadrato della somma di due numeri interi diversi da 0 è minore del quadrato della loro somma? Puoi spiegarlo per una classe di III media?

Vediamolo con degli esempi!

Esempio 1: numeri positivi

Prendiamo 2 e 3.

- Il quadrato di 2 è $2^2=4$.
- Il quadrato di $3 \ earline{e}$ $3^2 = 9$.
- La somma dei loro quadrati è 4+9=13.

Ora facciamo il quadrato della loro somma:

- La somma di 2 e 3 e 2 + 3 = 5.
- Il quadrato di $5 \, \text{è} \, 5^2 = 25$.

Confrontiamo:

13 < 25

La disequazione è vera.

Conclusione

La disequazione è vera solo se i due numeri hanno lo stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi). Se uno è positivo e l'altro è negativo, allora la disequazione non è sempre vera!

Quindi, la risposta alla domanda è: NO, non è sempre vero per tutti i numeri interi!

SE TU FOSSI UN MATEMATICO, POTRESTI ACCETTARE LA PARTE CONCLUSIVA DI CHAT GPT, DOPO LA SUA PROCEDURA?

domanda Cogoleto

Esempio 2: numeri negativi

Prendiamo -2 e -3.

- Il quadrato di -2 è sempre 4.
- Il quadrato di -3 è sempre 9.
- La somma dei loro quadrati è di nuovo 4+9=13.

Ora la somma di -2 e -3 è -5, e il quadrato di -5 è 25.

13<25

Anche qui la disequazione è vera.

Esempio 3: numeri con segni diversi

Prendiamo 2 e -3.

- Il quadrato di 2 è 4.
- Il quadrato di −3 è 9.
- La somma dei loro quadrati è 4+9=13.

Ora calcoliamo il quadrato della somma:

- La somma di 2 e 3 e 2 3 = -1.
- Il quadrato di -1 è 1.
 Confrontiamo:

 $13 \nless 1$

Questa volta la disequazione non è vera!

Gr 6 No, perché se abbiamo due numeri uguali il risultato è uguale a = b = 5

Gr 3 Se per dimostrare che qualcosa è sempre vero serve una dimostrazione generale, lui non l'ha fatto nella sua conclusione

Gr 1 L'affermazione è sempre vera perché non abbiamo trovato controesempi

Due gruppi ChatGPT ha ragione

Imperia RIFLESSIONE SULLA SCHEDA

è vero che il quadrato della somma di due numeri interi diversi da 0 è minore del quadrato della loro somma? Puoi spiegarlo per una classe di III media?

Esempio 1: numeri positivi

Prendiamo 2 e 3.

- Il quadrato di $2 \ earline{e}{e} \ 2^2 = 4$.
- Il quadrato di $3 \ earline{e} \ 3^2 = 9$.
- La somma dei loro quadrati è 4+9=13

Ora facciamo il quadrato della loro somma:

- La somma di 2 e 3 e 2 + 3 = 5.
- Il quadrato di $5 \ earline{e}$ $5^2 = 25$.

Confrontiamo:

La disequazione è vera.

Esempio 2: numeri negativi

Prendiamo -2 e -3.

- Il quadrato di -2 è sempre 4
- Il quadrato di -3 è sempre 9.
- La somma dei loro quadrati è di nuovo 4+9=13.

Conclusione

Ora la somma di $\sqrt{2}$ e -3 è -5, e il quadrato di -5 è 25.

13 < 25

Anche qui la disequazione è vera.

E sufficiente l'esempio per concludere che l'affermazione è vera?

Prendiamo 2 e -3.

• Il quadrato di 2 è 4.

Quindi, la risposta alla domanda è: NO, non è sempre vero per tutti i numeri interi!

- Il quadrato di −3 è 9.
- La somma de loro quadrati è 4+9=13.

Ora calcoliamo il quadrato della somma:

La disequazione è vera solo se i due numeri hanno lo stesso segno (entrambi positivi o entrambi

negativi). Se uno è positivo e l'altro è negativo, allora la disequazione non è sempre vera!

- La somma di 2 e 3 e 2 3 = -1.
- Il quadrato di −1 e 1.

Confrontiamo

 $13 \nless 1$

Questa volta la disequazione non è vera!

CONTROESEMPIO

UNA STRATEGIA CHE SI PUÒ SEGUIRE PER VALUTARE LA VERITÀ DI UNA AFFERMAZIONE :

- CAPIRE LE CONDIZIONI DA CUI PARTIRE E LA CONCLUSIONE A CUI ARRIVARE
- ESPLORARE LA SITUAZIONE CON ESEMPI DI TIPO DIVERSO:
 - SE SI TROVA IL CONTROESEMPIO ALLORA

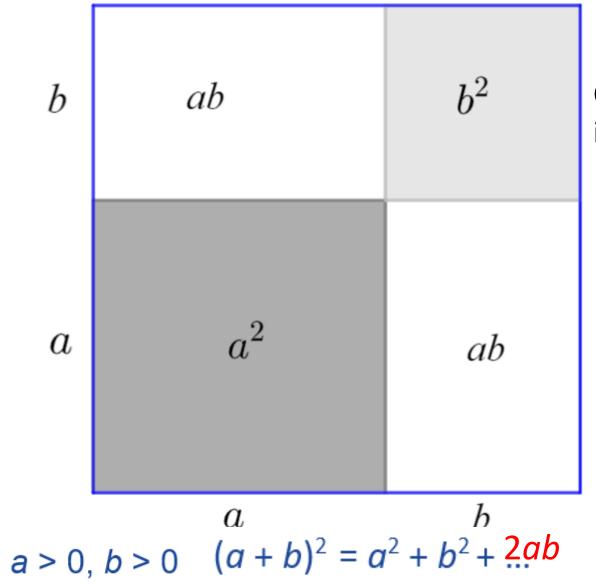
MAEL E SE NON SI TROVA UN CONTROESEMPIO?

Mael vuol dire che non c'è, oppure mi confronto con gli altri del gruppo, se non l'hanno trovato nemmeno loro, vuol dire che non c'è

Tamara faccio tanti esempi di tipo diversi

Cecilia uso il linguaggio algebrico per avere un esempio più largo

LA SOMMA DEI QUADRATI DI DUE NUMERI INTERI DIVERSI DA 0 È MINORE DEL QUADRATO DELLA LORO SOMMA SE I DUE NUMERI HANNO LO STESSO SEGNO



Questa formula vale per ogni valore di a e di b, infatti

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) =$$

= $a^2 + b^2 + 2ab$

Cecilia uso il linguaggio algebrico per avere un esempio più largo

Gr 1
$$3 + 4 + 5 = 12$$
 è un multiplo di 3 $33 + 34 + 35 = 102$ è un multiplo di 3

- Gr 2 abbiamo provato con degli esempi e abbiamo capito che la somma di 3 numeri è un multiplo di 3, perché i numeri sono 3, ma devono essere consecutivi (qualcuno del gruppo pensava che fosse vero anche con numeri non consecutivi, e hanno fatto esempi, scoprendo di no)
- sì, perché avendo 3 addendi si aggiunge 3 ogni volta Gr 6
- sì perché il numero dei numeri naturali consecutivi deve essere sempre un multiplo di 3, Gr 5 esempio 2 + 3 + 4, se fossero 2 fattori 2 + 3 = 5, non sarebbero, 2 + 3 + 4 + 5 = 14 no ci sono 4numeri
- 123 456 789 40 -41 -12 13 +41 -15 16 -17 -18 19 20 24 22 23 24 25 26 Gr 3

$$n + n_{+1} + n_{+2} =$$

Sì è vero perché facendo la somma di 3 numeri qualsiasi il risultato è sempre un numero divisibile per 3

b) La somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di 3

```
Gr 6 perché n + n + 1 + n + 2 sarà sempre un multiplo di 3, infatti 4 + 5 + 6 = 15 = 3x5
```

Gr 1 sì perché (n) + (n + 1) + (n + 2) infatti (1) + (1 + 1) + (1 + 2)
$$6$$

```
Gr 8\ 1 + 2 + 3 = 6\ (3x2) (n) + (n + 1) + (n + 2)

5 + 6 + 7 = 18\ (3x6)

10 + 11 + 12 = 33\ (3x11)

56 + 57 + 58 = 171\ (3x57)

È vero perché tutti i risultati ottenuti sono multipli di 3
```

Gr 7
$$6+7+8=21$$
 $7x3$
 $(n) + (n+1) + (n+2)$ $4+5+6$ $15=3x5$
 $n+n+1+n+2$ $3n+3$
 $3x4+3=12+3=15$

Gr 10
$$1+2+3=6$$

 $n+n+1+n+2=3n+3$
 $4+5+6=15$

Gr 9 5 + 6 + 7 = 18

$$n + n + 1 + n + 2 = multiplo di 3$$

Gr 5 vero perché n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3
$$\frac{3n+3}{3}$$
 n + 3

Gr4 vero in formula n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3

Gr2 vero perché
$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Gr 11 sì perché n + n + 1 + n + 2 se diamo a n un qualsiasi numero il risultato è multiplo di 3, che è uguale a 3n + 3 = (3 + 1)x3

LA VOCE DI CHAT GPT

COGOLFTO

Puoi spiegare per una classe di III media se la somma di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 3?

Α

Certo! Spieghiamolo passo passo in modo chiaro per una classe di terza media. 😊



Problema:

Dobbiamo capire se la somma di tre numeri naturali consecutivi è sempre divisibile per 3.

QUALE STRATEGIA PER PERSEGUIRE LO SCOPO SCORGI NELLA RISPOSTA DATA DA CHAT GPT?

COME HA UTILIZZATO L'ALGEBRA CHAT GPT?

Passaggio 1: Scriviamo i tre numeri consecutivi

Chiamiamo il primo numero n.

Se prendiamo tre numeri consecutivi, saranno:

$$n, n+1, n+2$$
 Algebra che definisce

Passaggio 2: Sommiamo i tre numeri

$$n + (n+1) + (n+2)$$

Semplifichiamo:

$$n+n+1+n+2 = 3n+3$$

Algebra che trasforma

Passaggio 3: Controlliamo se è divisibile per 3

Possiamo scrivere la somma così:

$$3(n + 1)$$

Qui vediamo che c'è un 3 che moltiplica un numero intero

$$1 + 2 + 3 = 6 (3x2)$$

 $5 + 6 + 7 = 18 (3x6)$

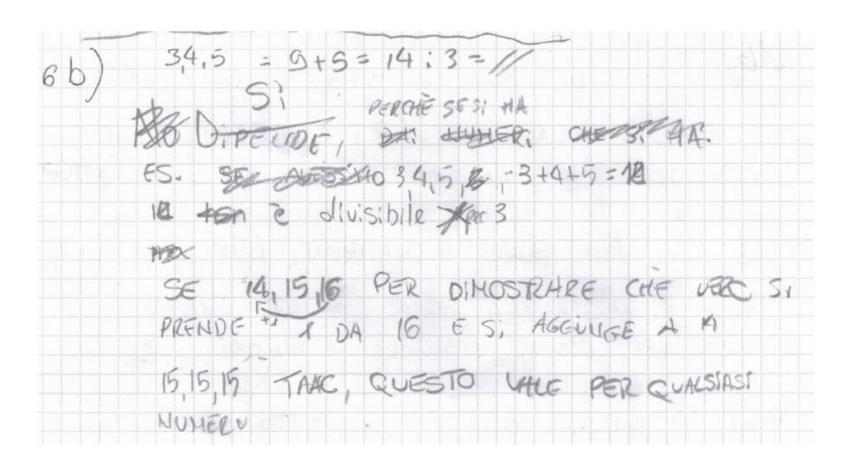
Algebra che dimostra

56 + 57 + 58 = 171 (3x57)

Conclusione:

La somma è sempre un multiplo di 3, quindi è sempre divisibile per 3! 🏂

LA RISPOSTA DI LUCA (alunno della classe di Imperia)



La somma di 3 numeri naturali consecutivi è un numero divisibile per 3

$$n \ge 0$$
 $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ multiplo di 3

$$n \ge 1$$

$$n \ge 1$$

$$n-1 + n + n+1 = 3n \text{ multiplo di 3}$$

La classe di Imperia non si orienta con la dimostrazione prodotta da ChatGPT

Molti sono perplessi sull'infinità dei numeri e sul valore della generalizzazione algebrica.

COSA FARE?

QUALI ATTIVITÀ PROPORRE IN PRECEDENZA

PER AVVIARE IL PENSIERO ALGEBRICO?

IMPERIA

b) La somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di 3

Si dimostra con la classe a partire dalle dimostrazioni prodotte dai ragazzi

Avendo 3 addendi si aggiunge 3 ogni volta

I numeri sono 3, ma devono essere consecutivi

TRADUCIAMO NEL LINGUAGGIO ALGEBRICO I TRE NUMERI CONSECUTIVI

Il primo numero lo indico con *n*

Il secondo numero è il consecutivo di n, allora n + 1

Il terzo numero è il consecutivo di n + 1, allora n + 1 + 1, ossia n + 2

$$n + 1 + 2$$

algebra che generalizza e definisce

la loro somma è

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$$
 algebra che trasforma

Applichiamo la proprietà distributiva $3n+1 = 3(n+1) \rightarrow \text{multiplo di } 3$

algebra che trasforma e dimostra

Possibile utilizzo LA VOCE DI CHATGPT

Puoi spiegare per una classe di III media se la somma di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 3?

Certo! Spieghiamolo passo passo in modo chiaro per una c

Problema:

Dobbiamo capire se la somma di tre numeri naturali consecutivi è sempre divisibile per 3.

Passaggio 1: Scriviamo i tre numeri consecutivi

Chiamiamo il primo numero n.

Se prendiamo tre numeri consecutivi, saranno:

$$n, n+1, n+2$$

Sei d'accordo con ChatGPT? Giustifica

Passaggio 2: Sommiamo i tre numeri

Come procederà ora ChatGPT?

$$n + (n+1) + (n+2)$$

Semplifichiamo:

$$n+n+1+n+2 = 3n+3$$

Passaggio 3: Controlliamo se è divisibile per 3

In quale modo si può eseguire il controllo?

Possiamo scrivere la somma così:

$$3(n+1)$$

Qui vediamo che c'è un 3 che moltiplica un numero intero n+1.

Conclusione: Come concluderà ChatGPT?

È vero che la somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di 3?

Continuità cognitiva tra processo di produzione di una congettura e processo di costruzione di una dimostrazione

Cosa puoi dire sulla somma di tre numeri consecutivi? Cosa succede se addizioni tre numeri consecutivi?



Conclusioni... la voce degli studenti

Io penso che l'IA possa sbagliare come tutti e quindi non fidarsi molto e di controllare anche con la tua mente, abbiamo notato che facendo riflettere ChatGPT ammette di aver sbagliato e si scusa, ma abbiamo notato anche che spesso fa dei buoni ragionamenti

Io penso che l'uso dell'IA sia una cosa innovativa e molto bella, ma non bisogna usarla in modo spropositato perché è ancora in fase di miglioramento e non ci si può fidare, in ambito matematico soprattutto perché ci sono molti concetti su cui ragionare e delle volte solo la mente umana riesce a analizzare questi concetti.

L'IA per riflettere sui contenuti matematici è utile, però bisogna stare attenti perché molte volte non rispetta le consegne, a volte scrive cose non accettabili quindi per me si può usare però bisogna stare attenti su le operazioni che fa ma anche su quello che scrive

Ho capito anche che ragionare da solo senza l'aiuto dell'IA è meglio, perché troveremmo una risposta valida e personale

L'I.A. in certi casi fa degli errori e se non glielo fai notare non te lo dice e in ambito matematico bisogna stare attenti ad usarla con prudenza

Bisogna sempre indagare sulle informazioni che ci fornisce e avere un pensiero critico nei suoi confronti

Conclusioni... la voce dei degli insegnanti

L'uso dell'IA come 'voce aggiunta' al gruppo classe permette :

- **un approccio mirato** su obiettivi specifici di apprendimento e quindi sulla costruzione di competenze
- un controllo nella gestione delle attività che non possono tuttavia prescindere dalla dinamicità di una discussione di classe, in cui emergono idee e proposte spesso imprevedibili
- **un'articolazione innovativa**, perché fondata sull'uso di materiale ricavato da un'interazione con l'IA
- una riflessione profonda sull'importanza degli aspetti linguistici specifici e non, per comprendere le risposte fornite dall'IA, verso la costruzione di una competenza per la formulazione di prompt adeguati (→ interdisciplinarità)
- lo sviluppo di una sensibilità critica in uno scenario di apprendimento supportato da confronti continui tra il pensiero degli studenti e l'elaborazione controllata di un chatbot



... a volte è innovazione
fare le cose che si sono sempre
fatte in modo nuovo "
Joseph Alois Schumpeter

"La mente che riesce ad allargarsi non torna mai alla dimensione precedente."

LA PAROLA A VOI

Boero, P.; Garuti, R.; Mariotti, M.A.: 1996, 'Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjecture Proceedings of PME-XX, Univ. de Valencia, vol. 2, pp. 121-128.

Boero, P.; Pedemonte, B. & Robotti, E.: 1997, 'Approaching Theoretical Knowledge Through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspection of PME-XXIII abtinual 2 pp. 81-88

Proc. of PME-XXI, Lahti, vol. 2, pp. 81-88

https://stelliniudine.edu.it/costruire-il-futuro-lia-entra-a-scuola/

https://www.agendadigitale.eu/scuola-digitale/ia-nelle-scuole-un-nuovo-approccio-alleducazione-interdisciplinare/

https://www.agendadigitale.eu/scuola-digitale/docenti-e-ia-guida-pratica-alluso-consapevole-nella-didattica/

https://www.giustizia-amministrativa.it/-/gallone-riserva-di-umanit-c3-a0-e-funzioni-amministrative

