



DALLE PORTE LOGICHE ALLE RETI NEURALI. UN VIAGGIO TRA GEOMETRIA E INTELLIGENZA ARTIFICIALE.

ANTONIO CASERTA.



OBIETTIVI DEL LABORATORIO

Esploreremo come concetti fondamentali di **logica, geometria e algebra lineare** siano alla base del funzionamento delle reti neurali artificiali.

Obiettivi principali:

- **Comprendere come funziona un perceptron**, il neurone artificiale più semplice, e il suo legame con le **porte logiche** (AND, OR, EXOR)
- **Visualizzare la separazione delle classi** nel piano cartesiano attraverso **iperpiani (rette)** usando Geogebra.
- **Scoprire i limiti dei modelli lineari** e comprendere quando serve una **rete neurale multistrato (MLP)**.
- **Esplorare di diagrammi di Voronoi** per rappresentare le **regioni di influenza** di un classificatore geometrico.
- Collegare concetti matematici e computazionali per interpretare meglio l'intelligenza artificiale moderna.

QUALI COMPETENZE PROMUOVE IL LABORATORIO?

- Sviluppo del pensiero computazionale.
- Uso consapevole degli strumenti digitali (in linea con le finalità educative delle discipline matematiche e informatiche).
- Approfondimento di contenuti relativi all'algebra lineare (vettori, matrici, sistemi lineari)
- E alla geometria analitica (rappresentazioni nel piano, rette, iperpiani) con applicazioni alle reti neurali e classificatori automatici.
- L'uso di Geogebra consente di rappresentare in modo dinamico e visuale concetti astratti, favorendo un apprendimento per scoperta e «learning by doing»

E L'INFORMATICA?

- Esplorazione di modelli computazionali come il perceptron e le reti di Hopfield
- Logica booleana, algoritmi e rappresentazioni matriciali
- Progettare soluzioni e interpretare sistemi intelligenti.

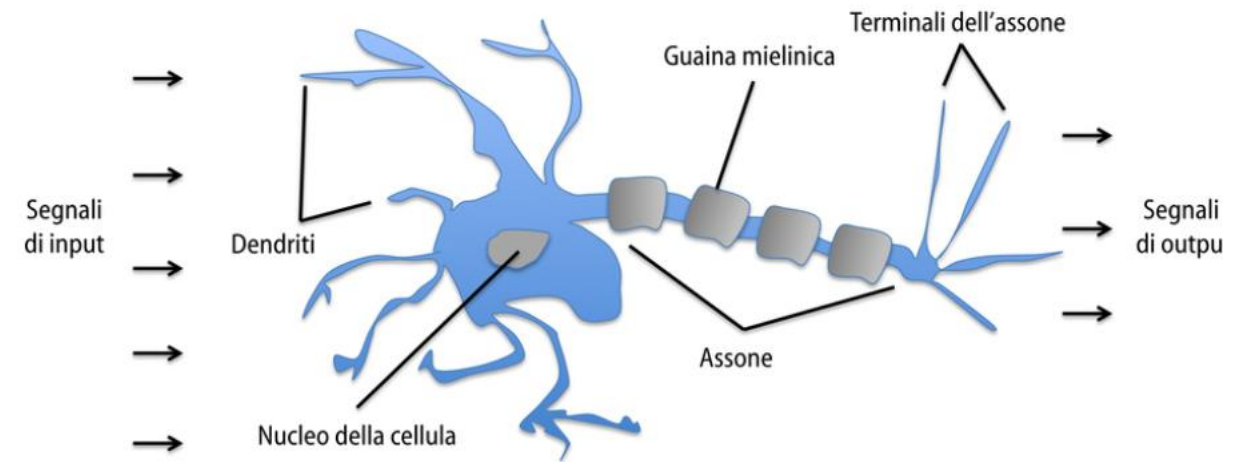
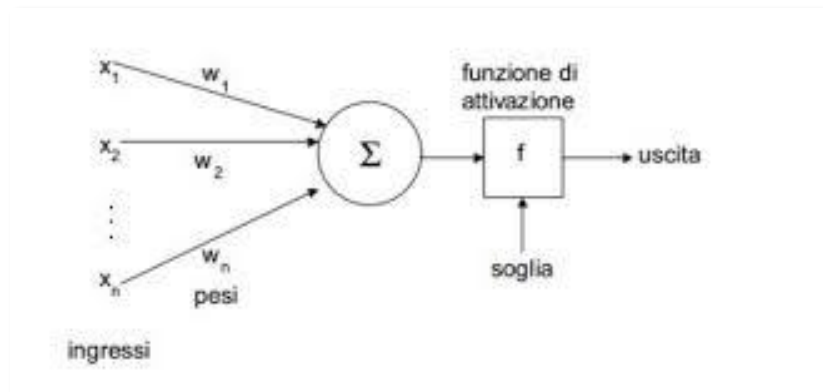
CHE COS'E' L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE?

- «L'intelligenza artificiale è la scienza di far fare alle macchine cose che richiederebbero intelligenza se fossero fatte da esseri umani.» *Marvin Minsky, pioniere dell'IA al MIT*
- «L'IA non è magia: è matematica applicata ai dati» *Pedro Domingos, professore e autore di The master Algorithm*
- «L'Intelligenza artificiale è una tecnologia che consente alle macchine di imitare alcune capacità umane come apprendere, ragionare pianificare e creare. » *UNESCO, guida per l'IA (2021)*



IL PERCEPTRON: UN NEURONE SEMPLICE

- Il **Perceptron** è il modello più semplice di **neurone artificiale**.
- Prende decisioni binarie (si/no) combinando pesi e una funzione di attivazione.



COME IL SINGOLO NEURONE CALCOLA LA MEDIA?

- Calcolare media tra due numeri



- Se ricevi $x_1=1$ e $x_2=2$ devi ottenere $y=1,5$
- Se ricevi $x_1=2$ e $x_2=4$ devi ottenere $y=3$

- Struttura adattabile del neurone, perché parametrica, che gli consenta di imparare dagli esempi proposti  Sistema a comportamento appreso

FORMULA BASE DEL PERCEPTRON

Il calcolo effettuato dal perceptron si svolge in questo modo:

$$\text{somma} = w_1x_1 + w_2x_2 + b$$

Se somma > 0 allora $y = 1$

Altrimenti: $y = -1$

Più in generale e in notazione matematica

$$g(x) = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n + b = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b$$

$$f(z) = \begin{cases} -1, & z \leq 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

$$y = f(g(x)) = \begin{cases} -1, & g(x) \leq 0 \\ 1, & g(x) > 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica.

- La formula descrive una retta nel piano che divide due regioni (classi)
- Il perceptron **classifica** i punti in base **da che parte della retta si trovano**.

GEOGEBRA I

LOGICA BOOLEANA E PORTE LOGICHE



La logica booleana è un particolare tipo di algebra che lavora su due soli valori 0 e 1

- Vero (TRUE) / Falso (FALSE)
- Oppure in termini numerici : 1/0

E' stata introdotta dal matematico **George Boole** nel XIX secolo.



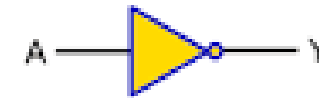
PORTE LOGICHE E TABELLE DI VERITA'

AND



A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT



A	Y
0	1
1	0

■ AND, OR, NOT, EXOR

OR



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

EXOR



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

DAL CALCOLO LOGICO AL CALCOLO NEURALE: LE PORTE LOGICHE

- Le porte logiche elaborano input binari 0 e 1 e restituiscono un output binario.
- Possiamo rappresentare queste operazioni come punti nel piano cartesiano e usare un perceptron per imitarle.

x1	x2	and	or	xor
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

MODELLARE LE PORTE LOGICHE (10 MIN) (ESERCIZIO)

■ AND

Input: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)

Output: solo (1,1) Dà 1

POSSIBILE SOLUZIONE

$$w_1=1, w_2=1, b=-1,5$$

■ OR:

Output=1 se almeno un input è 1

Es.

$$w_1=1, w_2=1, b=-0,5$$

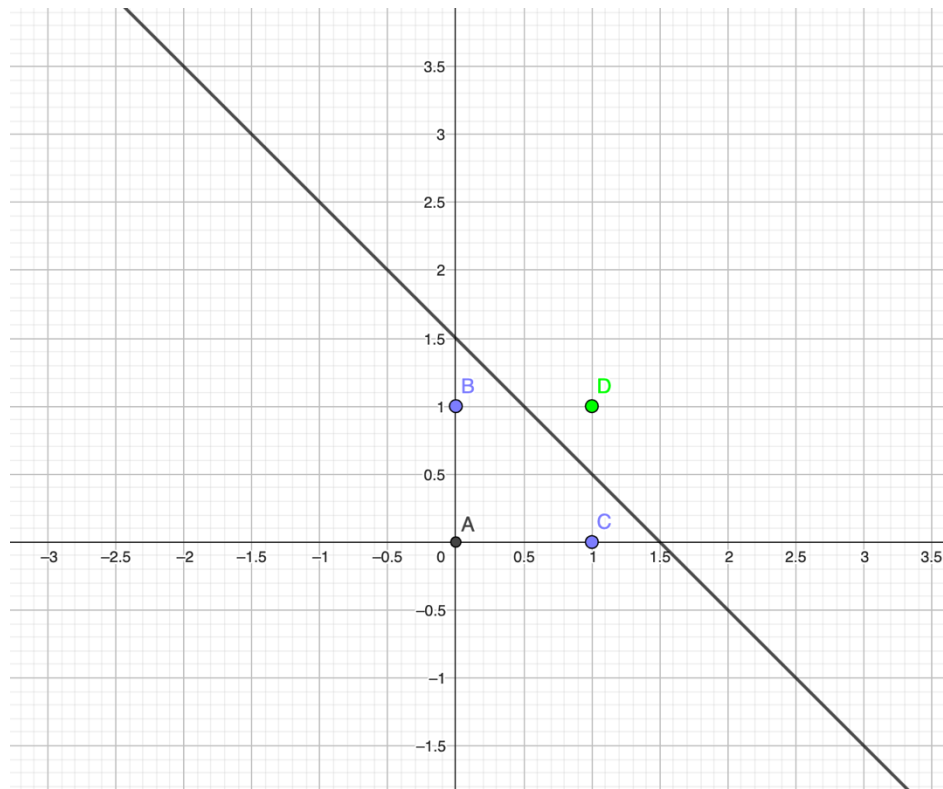
■ NOT solo un input

Es.

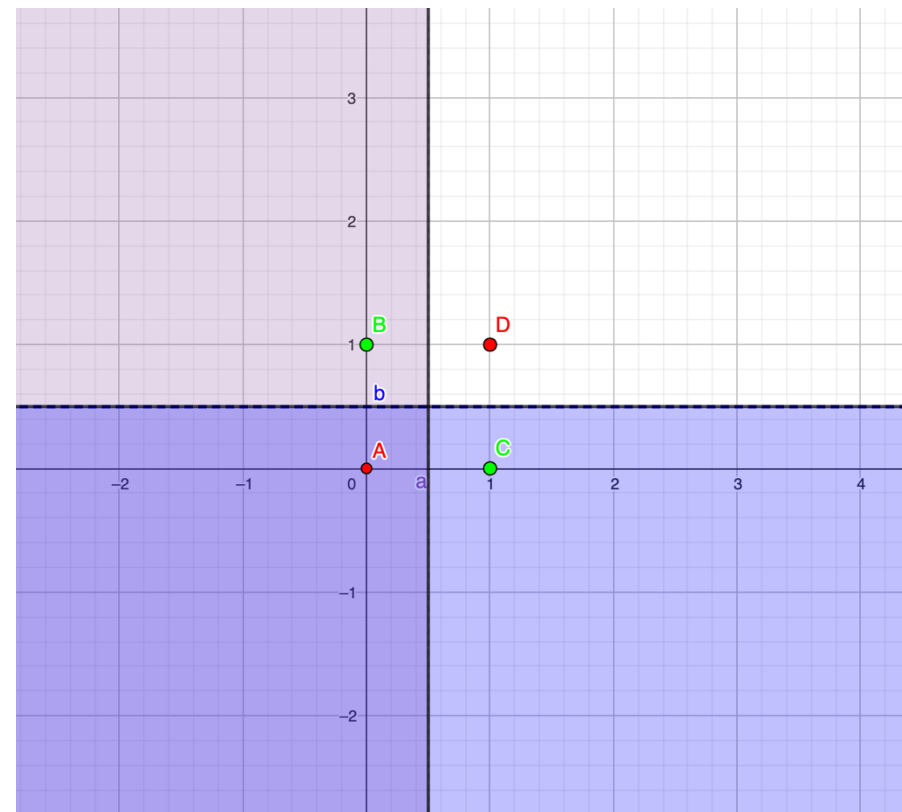
$$w=-1, b=0.5$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

PORTA AND

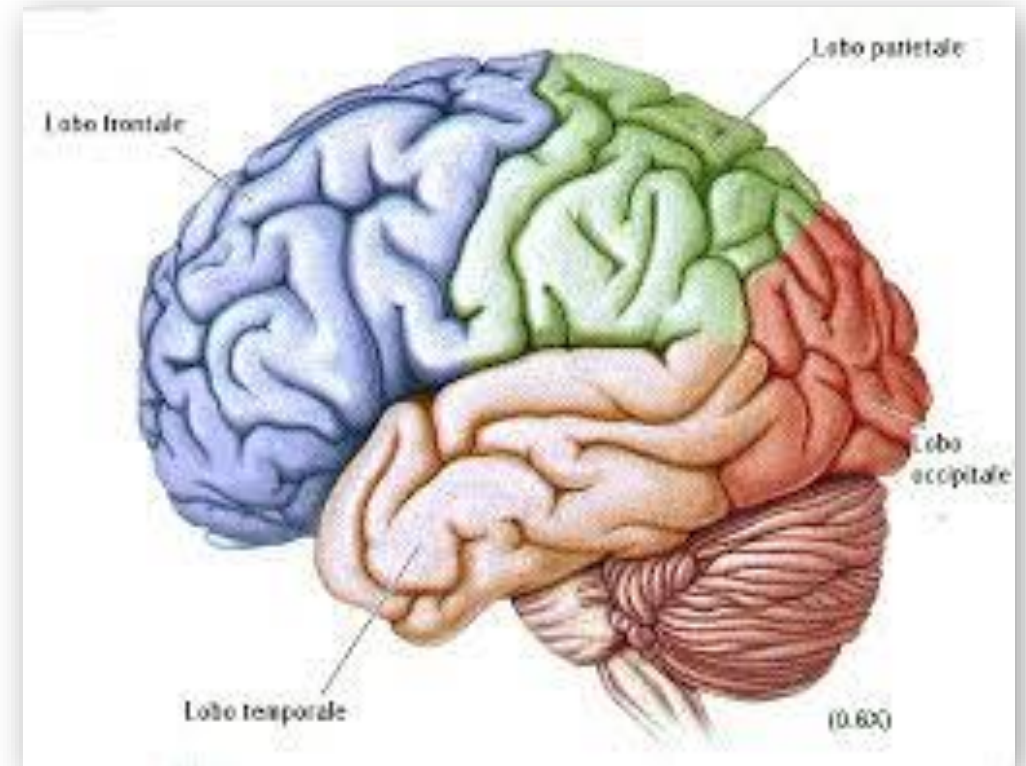


PORTA EXOR



DOMANDE STIMOLO (3 MIN)

- Quali funzioni si possono modellare con un solo neurone?
- Cosa vuol dire «linearmente separabile»?
- Perché una rete neurale può «imparare» di più?



DOMANDE GUIDA PER LA DISCUSSIONE

- Perché il perceptron riesce a simulare AND, OR, ma non EX-OR? (LO VEDREMO)
- Cosa rappresenta algebricamente il bias?
- Come varia la posizione della retta al variare dei pesi? Osservare con geogebra (geometria dinamica)

INTERPRETAZIONE ALGEBRICA

- Il bias sposta il punto in cui il perceptron «scatta»
- E' simile al termine noto in una funzione lineare, il bias è come il q
- Senza il bias, il perceptron attiverebbe solo in presenza di input molto forti o ben bilanciati, il che limita la sua flessibilità

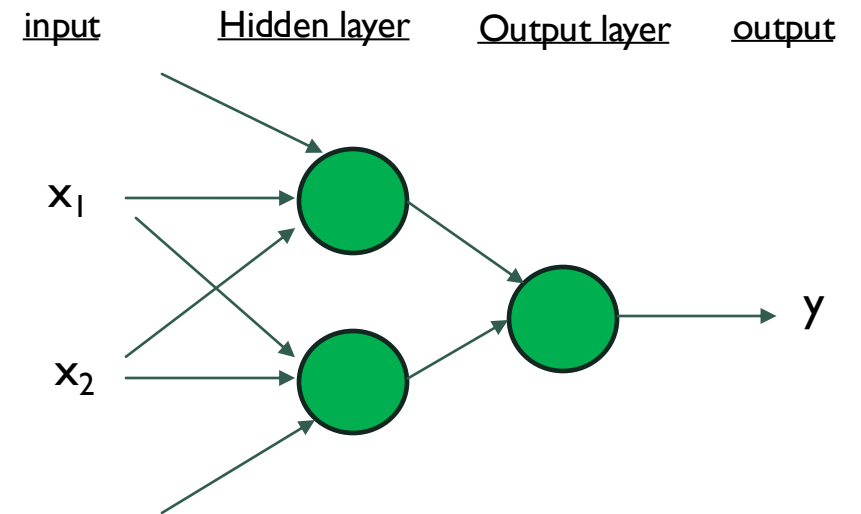
IDEA DI BASE

- Dividiamo il problema in due condizioni lineari che insieme riescono a rappresentare la EX-OR
 1. Primo neurone (N1) attiva se $x_1 = 1$
 2. Secondo neurone (N2) attiva se $x_2 = 1$
 3. Uscita attiva se esattamente uno dei due neuroni è attivo.



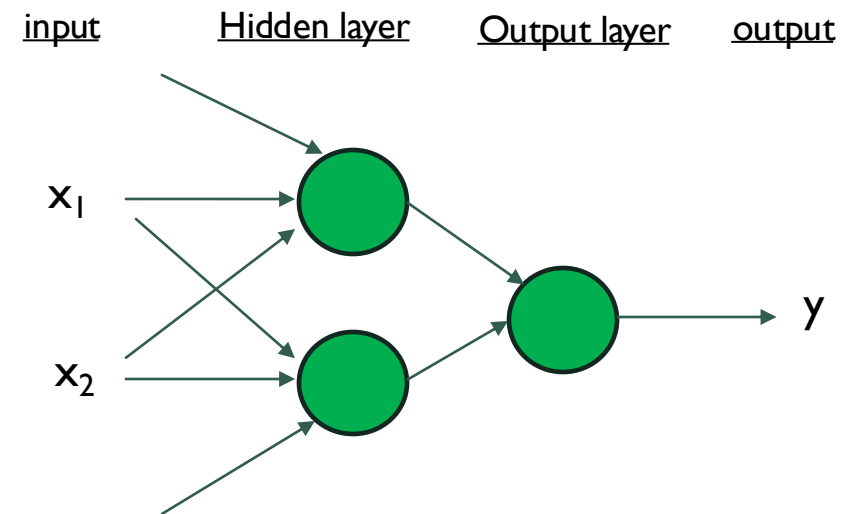
UNA RETE A DUE STRATI RISOLVE LA EX-OR

- Obiettivo: **Costruire una rete neurale semplice a due livelli** (2 neuroni nel livello nascosto +1 in uscita) per classificare la Ex-OR



RETE NEURALE O (PERCEPTRON MULTISTRATO)

- I neuroni, detti anche «nodi» della rete sono organizzati in «strati» (in inglese *layer*)
- Ogni neurone di uno strato è connesso a tutti i neuroni dello strato successivo (la rete è completamente connessa, *fully connected* e ad ognuno di essi invia il risultato che produce.
- Non ci sono altre connessioni tra neuroni, la struttura realizza un processo di esecuzione «in avanti» (*feed forward*)



MODELLAZIONE DELLA RETE

■ Due neuroni che implementano

N1: attivo se $x_1 = 1$ ➡ retta verticale

N2: attivo se $x_2 = 1$ ➡ retta orizzontale

Output finale (EXOR)

■ La rete attiva l'output solo se uno solo dei due neuroni nascosti è attivo cioè

$$(x_1 > 0.5 \text{ AND } x_2 < 0.5) \text{ OR } (x_1 < 0.5 \text{ AND } x_2 > 0.5)$$

Questa non è una singola disuguaglianza ma una combinazione serve un altro neurone che simula questa logica

RETE A DUE STRATI PER EX-OR (FALLISCE CON UN SINGOLO NEURONE)

■ Attività con Geogebra:

Inserire i punti $A=(0,0)$, $B=(0,1)$, $C=(1,0)$, $D=(1,1)$

Colora A e D in rosso (output 0)

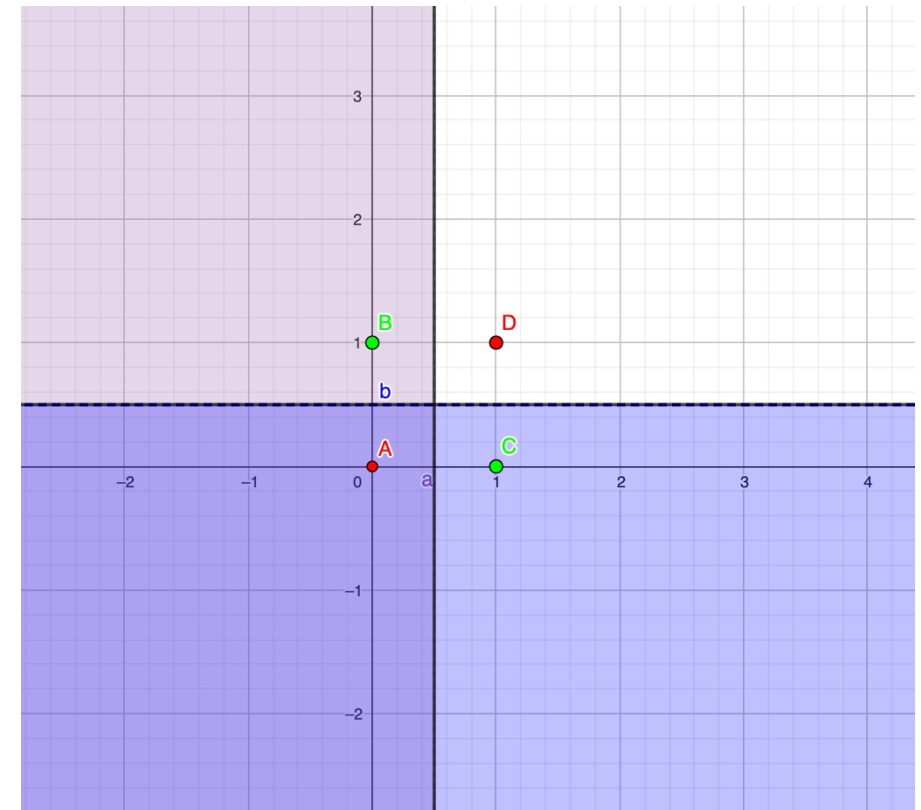
Colora B e C in verde (output 1)

■ Traccia le due rette di attivazione dei neuroni nascosti

$x=0.5$

$y=0.5$

Dividono il piano in **quattro quadranti**



RETE A DUE STRATI PER EX-OR (FALLISCE CON UN SINGOLO NEURONE)

Quadrante	Output atteso
$x < 0.5, y < 0.5$	0
$x < 0.5, y > 0.5$	1
$x > 0.5, y < 0.5$	1
$x > 0.5, y > 0.5$	0

Visualizza l'effetto combinato con Geogebra:

- I due neuroni «tagliano» il piano
- Il neurone finale «decide» in base al quadrante, così si ottiene la separazione corretta.

SIGNIFICATO : IL NEURONE FINALE «DECIDE» IN BASE AL QUADRANTE

Neurone $x1 > 0.5$	Neurone $x2 > 0.5$	Quadrante	XOR
0 (off)	0 (off)	(0,0)	0
0 (off)	1 (on)	(0,1)	1
1 (on)	0 (off)	(1,0)	1
1 (on)	1 (on)	(1,1)	0

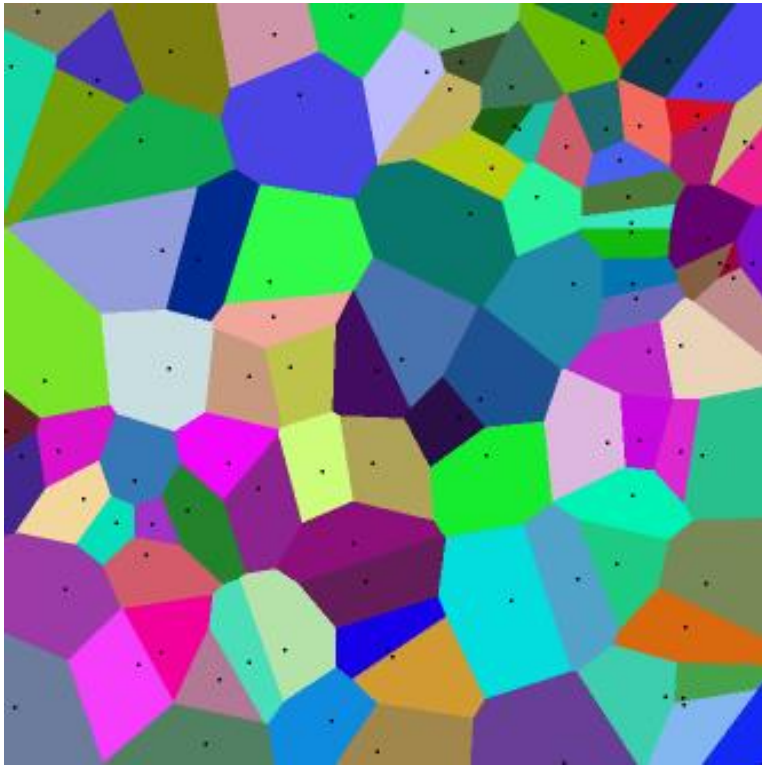
Il neurone finale riceve in input questi due valori (attivazioni dei neuroni $x1$ e $x2$) e decide secondo una logica simile a una porta XOR a due ingressi

CLASSIFICATORI GEOMETRICI CON GEOGEBRA E DIAGRAMMI DI VORONOI

Obiettivi :

- Visualizzare come si comportano modelli semplici di **classificazione**
- Usare i **diagrammi di Voronoi** per interpretare decisioni di tipo neurale
- Comprendere cosa fa un **classificatore neurale**

DIAGRAMMA DI VORONOI

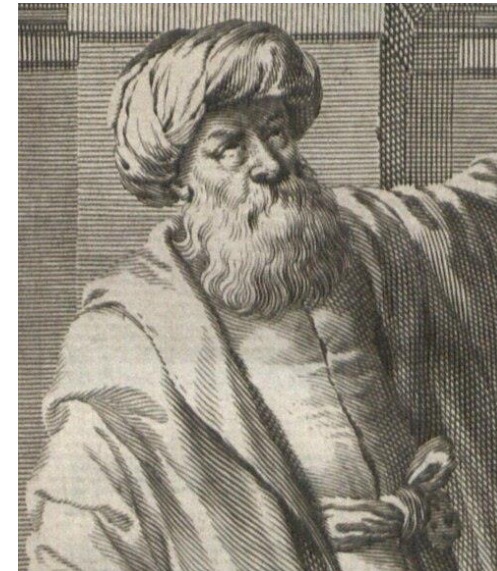


- ...E' possibile disegnare una cella di Voronoi attorno a ciascun punto, o «seme» , in modo che qualsiasi punto all'interno della cella sia più vicino al suo seme che a qualsiasi altro seme....
- Bisogna introdurre un concetto di distanza

PERCHE' VEDIAMO? (TEORIA DELL'INTROMISSIONE ED ALHAZEN)

- Teoria dell' «intromissione» : vediamo un oggetto perché dei pezzi di materia fuoriescono da quell'oggetto ed entrano nei nostri occhi: «Le repliche materiali escono in tutte le direzioni dai corpi visibili ed entrano nell'occhio di un osservatore per produrre la sensazione visiva.»

- Alhazen propose una teoria che metteva fine a questa teoria bislacca, luce irradiata in linea retta da ogni punto di oggetto colorato. Una parte di questa luce sarebbe entrata nei nostri occhi e avrebbe portato alla percezione.

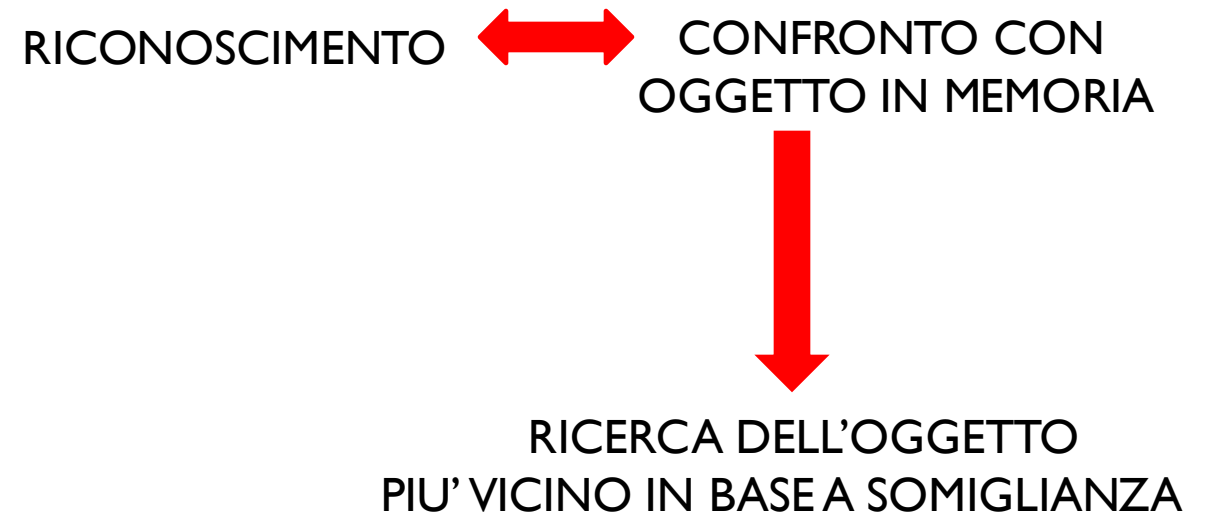


ALHAZEN E LA SOMIGLIANZA

- «Quando la vista percepisce un oggetto visibile, la facoltà di discriminazione cerca immediatamente la sua controparte tra le forme che persistono nell'immaginazione, e quando trova una forma simile alla forma di quell'oggetto visibile, riconosce tale oggetto e percepisce di cosa si tratta»
- A. non spiega il concetto di «somiglianza». In informatica, la somiglianza a a che fare per es. con la distanza: Quando più vicini sono due punti, più simili sono tra loro

VICINO PIU' PROSSIMO (NN)

- Regola del vicino più prossimo (NN)
- T. Cover , P. Hart
- **Per il riconoscimento dei modelli** che classifica i dati come appartenenti ad una categoria o ad un'altra. (Quello che si vede è un cane o un gatto?)



LA DISTANZA DI HAMMING

- Presi due vettori di uguale lunghezza **la distanza di Hamming** misura il numero di posizioni in cui i bit corrispondenti sono diversi.

- Tradotto in formule

Se abbiamo due vettori binari

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\text{Allora Ham}(A,B)=\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

- Con gli studenti si può implementare in Excel o in Google Sheets per affinare le competenze chiave digitali.

UN ESERCIZIO...E IPERSPAZI. (FASE I)

Fase I-Preparazione dei dati

Materiali:

- Fogli con griglia 7x9
- Pennarelli o matite nere
- Etichette adesive (per indicare il numero disegnato)

Attività

1. Ogni partecipante disegna 2 cifre «2» e 2 cifre «8» sulla griglia 7x9 colorando alcuni pixel di nero
2. Ogni disegno viene etichettato con la cifra reale («2» o «8»)
3. Si convertono i disegni in vettori binari da 63 bit: ogni quadrato nero vale 1 ogni bianco vale 0 (Su foglio Excel)

PERCHÉ DUE «2» E DUE «8»

Avere più esempi per cifra

- Se ciascuno facesse solo un «2» e solo un «8», il dataset sarebbe molto povero e fragile.
- Due esempi per cifra permettono di vedere **variazioni nello stile di scrittura.**

Ridurre il rischio di errore

- Se un disegno viene male, non influisce troppo, hai almeno un altro «2» e un altro «8» dello stesso partecipante.

Creare un piccolo dataset bilanciato

- Avendo lo stesso numero di «2» e di «8» si evita che il classificatore impari a sbilanciarsi verso una cifra.

Mostrare che il classificatore non memorizza solo un disegno.

- Con più esempi per classe, il classificatore deve davvero «generalizzare» e non solo copiare a memoria un singolo esempio.

FASE 2 - INTRODUZIONE AL CONCETTO DI DISTANZA



- Ogni immagine disegnata può essere pensata come un punto nello spazio a 63 dimensioni
- Si può pensare quanto due immagini sono simili usando la distanza di Hamming (quanti bit sono diversi)

FASE 3 – CLASSIFICAZIONE CON NEAREST NEIGHBOUR.

Algoritmo :

Per classificare una nuova immagine:

1. Si calcola la distanza di Hamming tra il vettore da classificare e tutti i vettori nel database («training set»)
2. Si trova il vettore con la distanza minima
3. Si assegna all'immagine la classe (2 o 8) del vettore più vicino.



Grazie per l'attenzione!

antonio2584@hotmail.it

antoniocaserta@isisdavinci.eu