

XXXVIII Convegno nazionale UMI-CIIM
Genova, 4-6 settembre 2025

Dal metodo di adeguazione al calcolo differenziale. Un laboratorio sui testi originali

Cristina Sironi – Università di Roma 'Tor Vergata'

Laura Lamberti – Liceo Scientifico 'Augusto Righi' di Roma

L'importanza della storia nella didattica della matematica

«In any treatise or higher text-book it is **always desirable that references to the original memoirs should be given**, and, if possible, short historic notices also. I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history.»

J. W. L. Glaisher (1890)

«All'inizio l'aritmetica e la geometria erano unite, poi fu necessario dividerle. Ma **la cosa più semplice e naturale è l'origine delle cose**: come dico sempre, **il bambino deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e naturale per la sua mente. Noi non dobbiamo far altro che trovare un materiale che renda l'origine accessibile.**»

M. Montessori, 5 maggio 1931, conferenza n. 31

«Se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, **non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi.** [...] **La storia della scienza viene qui in soccorso**, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati: numeri quadrati e rettangolari, numeri triangolari, etc»

F. Enriques 1934, "Prefazione" in Enriques, A., Aritmetica ad uso delle scuole medie inferiori, pp. IX-XI.

La Storia della Matematica nelle indicazioni nazionali



Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca

Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento."



«Al termine del percorso del liceo [...] lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico. **Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.** Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.»

Il ruolo della *Storia della Matematica* nella didattica

- La *Storia della Matematica* come **fine**: la conoscenza dello sviluppo e dell'evolversi delle teorie matematiche ha una valenza intrinseca.
- La *Storia della Matematica* come **strumento**: in questa prospettiva, sarebbe vista come un supporto a livello motivazionale e cognitivo per l'insegnamento di concetti particolari.

Jankvist, Uffe Thomas. 2007. « On empirical research in the field of using history in mathematics education ». *Nordic Studies in Mathematics Education*, vol. 12, no 3, pp. 83-105.

Nei libri di testo



Frazioni magiche

Tra racconti mitologici ed esigenze pratiche, le frazioni fanno la loro comparsa fin dai tempi dell'antico Egitto, dove si credeva che avessero anche poteri magici.

Secondo la mitologia egizia, Seth uccise il fratello Osiride, re d'Egitto, per impossessarsi del regno. Però, una volta fattosi grande, Horus, figlio di Osiride, decise di vendicare la morte del padre e di riprendersi il regno. Codardamente, Seth cavò un occhio a Horus mentre dormiva e lo ruppe in pezzi. Tuttavia Thot, dio della conoscenza, lo ricostruì e, non trovando uno dei frammenti, lo fabbricò, fornendogli così dei poteri magici. Infatti, Horus riuscì a vincere la battaglia e a regnare proprio grazie al potere di questo occhio.

Ma che legame c'è tra questa storia e le frazioni nell'antico Egitto?

Gli Egizi usavano soprattutto le frazioni unitarie, cioè del tipo $\frac{1}{n}$ con n numero naturale diverso da 0. L'occhio di Horus, come si vede nella figura a lato, racchiude al suo interno potenze della frazione unitaria $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1, \quad \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \\ \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

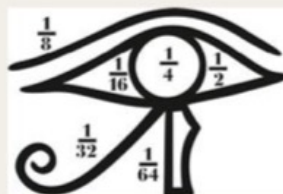
Queste potenze di $\frac{1}{2}$ costituivano i sottomultipli dell'*hekat*, l'unità di misura usata, all'epoca, per misurare le quantità di materiali secchi come il grano. E, per annotare questi sottomultipli, si impiegavano i geroglifici raffiguranti le parti dell'occhio di Horus.

- Somma le frazioni che vedi nella figura dell'occhio di Horus. Quale frazione Thot dovette «fabbricare» per arrivare all'occhio intero?

STORIA DELLA MATEMATICA



Tempio di Hathor, particolare, Dendera (Egitto).



MATEMATICA E STORIA

► Alle origini del metodo delle coordinate



- Perché il metodo delle coordinate è così utile?
- Quali problemi ha consentito di risolvere?
- Com'è nato e come si è sviluppato nel corso del tempo?

Cerca nel Web:

geometria analitica, Dicaerco, Descartes, Fermat

Dalle prime riflessioni allo stato dell'arte

- 1975: nascita in Francia della Commissione inter-IREM «Épistémologie et histoire des mathématiques», dall'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
- Contemporaneamente nasce l'HPM Group (History and Pedagogy of Mathematics) dal secondo ICME (International Congress on Mathematics Education).
- L'introduzione della storia nell'insegnamento della matematica assume il ruolo di una **«terapia contro il dogmatismo, un insieme di strumenti che permettono loro di appropriarsi e padroneggiare il loro sapere: per gli alunni, hanno preparato un ambiente dove la matematica cessa di giocare il ruolo di mostro arido che appiattisce, giudica e condanna, per tornare ad assumere lo statuto di attività culturale indissociabile dalle altre pratiche umane»**.

Evelyne Barbin, *Dix ans d'histoire des mathématiques dans l'IREM*, Bulletin de l'APMEP, 1987, n°358, pp. 175-184.



Secondo la Commissione inter-IREM, la storia della matematica assolve a tre funzioni fondamentali:

- ➡ una funzione ***vicariante***,
- ➡ una funzione ***dépaysante***,
- ➡ una funzione ***culturelle***.

Evelyne Barbin, *Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi ? Comment ?*, Bulletin AMQ, Vol. XXXVII, n°1 mars 1997, p.21.



Nelle sue applicazioni, l'approccio storico:

- ➡ ridona **vitalità** ai temi trattati, attraverso il pensiero e le opere degli scienziati che a essi si sono dedicati;
- ➡ permette molteplici **aperture interdisciplinari** e **transdisciplinari**;
- ➡ dà **unità** alla matematica e approfondisce lo sguardo sulla sua stessa natura, sul **senso** del pensare e fare matematica.

Evelyne Barbin, *Apports de l'Histoire des Mathématiques et de l'Histoire des sciences dans l'enseignement*, Tréma, 26, 2006,

I temi, i materiali e i metodi

Alla luce di queste funzioni, le scelte che si profilano, e che un insegnante è tenuto a compiere, riguardano tanto i temi quanto i materiali e i metodi per una proposta didattica integrata e coerente con il percorso del gruppo di studenti interessato.

Queste scelte guideranno l'adozione di una prospettiva storica e di una riflessione epistemologica.

- **Il problema.** Scelta legata alle **difficoltà riconosciute** come ricorrenti tra gli studenti o alle apparenti **discontinuità nella storia** della risoluzione di questioni generali.
- **Lo scienziato.** Approfondire **figure meno popolari**, può contribuire a completare il quadro della nascita e dello sviluppo di un'idea, che non è mai il frutto di un singolo ingegno ma di una comunità scientifica che ha lavorato grazie ai contributi di tutti i suoi membri.
- **Il dibattito scientifico.** I processi creativi nell'ambito di una teoria o della sua applicazione non possono essere esenti da un grande **travaglio intellettuale** e soprattutto da **errori**.

I materiali

- Vasta scelta di **materiali disponibili in rete**: Bulletin AMQ, Actes des Colloques inter-IREM, <https://www.univ-irem.fr/-commissions-inter-irem->.
- Lavoro di ricerca approfondito: **rigore** matematico + rigore storico ed epistemologico.
- Cura nella scelta dei **testi originali**.



I metodi



- Didattica **laboratoriale** in piccoli gruppi e/o in modalità singola.
- Accento sull'attività di **ricerca** individuale o in gruppo.
- Si studia su materiali nuovi, nient'affatto scontati, in **modo nuovo**.



La proposta didattica:

Il Principio di minima azione di Maupertuis nella storia della Matematica.





Le caratteristiche della proposta

- Interdisciplinarietà
- Autonomia, ricerca e progettualità
- Frequenza volontaria
- Didattica laboratoriale a piccoli gruppi
- Laboratori sui testi originali
- Laboratorio di fisica con materiale povero
- Recupero accelerato di temi affrontati negli anni precedenti

La Storia delle scienze nel progetto proposto

- I temi sono stati affrontati a partire dai **testi originali** delle opere degli scienziati del XVII e XVIII secolo; è stato possibile così esaminare il linguaggio scientifico dell'epoca nonché il formalismo matematico, rilevandone le differenze con quello moderno. Da evitare una lettura anacronistica dei testi.
- Attraverso le fonti storiche si è potuta apprezzare **la genesi di un'idea**, inquadrandola nel panorama storico e culturale dell'epoca.
- L'ambiente scientifico del periodo storico in esame, è caratterizzato da vivaci confronti che coinvolgono gli intellettuali (non solo scienziati) sostenitori di teorie discordanti; queste animate discussioni testimoniano come **l'evoluzione del pensiero scientifico non sia un processo lineare** ad opera di poche menti geniali.

I laboratori sui testi originali

- Pierre Hérigone, *Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum effectiones*, PROPOS. XXVI, 1642
- Pierre de Fermat, *Analyse pour les réfractions*, 1657
- Johann Bernoulli, *Acta Eruditorum*, giugno 1696 e maggio 1697
- Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, *Essai de cosmologie*, 1744
- Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, *Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles*, 1744



«Ne sous-estimons pas nos
enfants!»

Monica Neagoy, Comment cultiver le goût des mathématiques avec la méthode de Singapour ?, conferenza al Collège de France, nell'ambito del ciclo Réenchanter les maths à l'école, 21 maggio 2025

Progetto didattico
“Il Principio di minima azione di Maupertuis”

Liceo Scientifico Statale “Augusto Righi”
a.s. 2024/2025

Laboratorio **Il metodo di adeguazione applicato a un problema di massimo e minimo.**

Scheda di lavoro 1. ***Cursus Mathematicus* di Pierre Hérigone.**

Nel “*Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum effectiones*”, Pierre Hérigone (1580 circa – 1643) dedica la PROPOS. XXVI¹ a quesiti di massimo e minimo che risolve con il *metodo di adeguazione*, unico strumento che all’epoca era a disposizione per la ricerca della condizione di estremalità di una determinata quantità.

L’opera, redatta in latino e francese, offre l’occasione di cimentarsi nella traduzione del testo dei quesiti; una traduzione che si estende ai simboli matematici, diversi da quelli moderni ma per i quali Hérigone ha fornito un ‘dizionario’ nelle prime pagine del volume.

Il primo quesito si trova alla pag. 59 del testo citato:

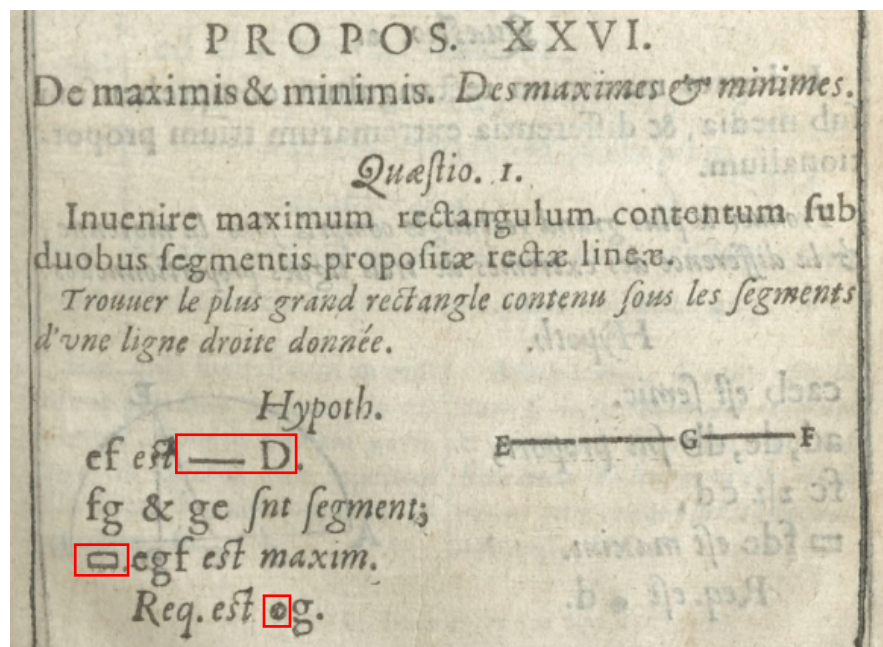


Figura 1. Particolare della pag.59, *Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum effectiones*, 1642.

¹ In realtà si tratta della PROPOS. XXXVI: c’è un errore di stampa in questa edizione del testo.

→ Traduci l'enunciato del problema proposto.

→ Specifica le ipotesi e la tesi, attribuendo un significato ai simboli evidenziati in rosso.

La pag. 60 riprodotta di seguito, riporta la soluzione del problema, ricavata applicando il *metodo di adeguazione*:

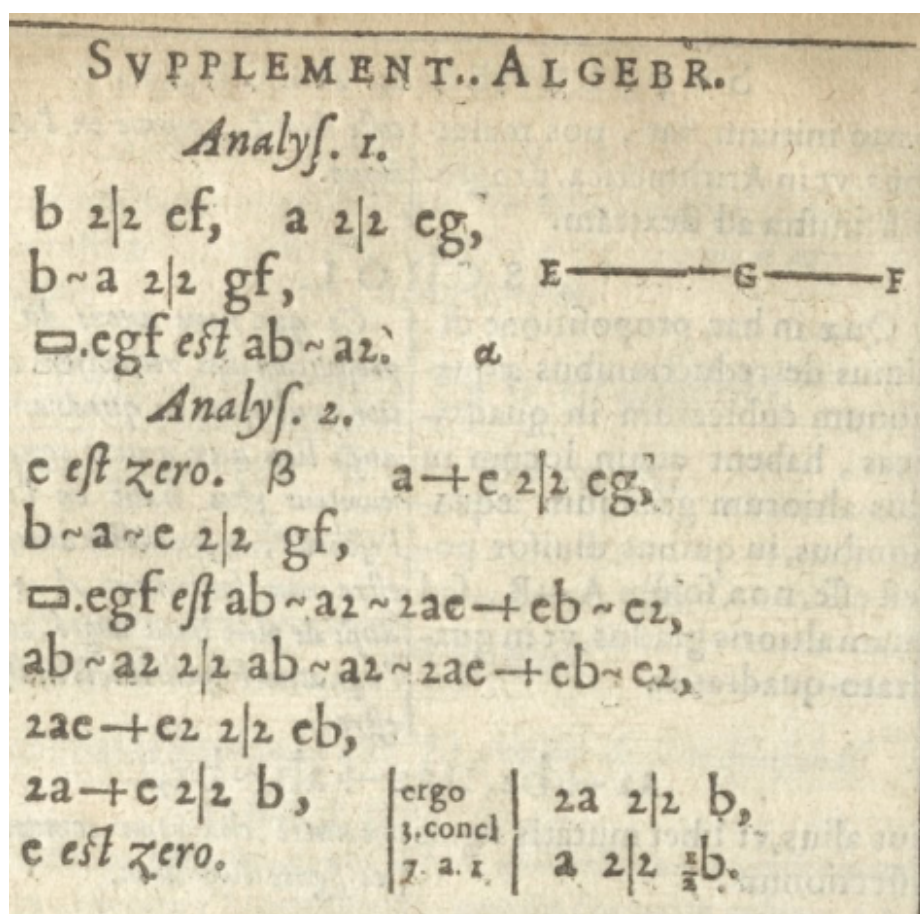


Figura 2. Particolare della pag.60, Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum effectiones, 1642.

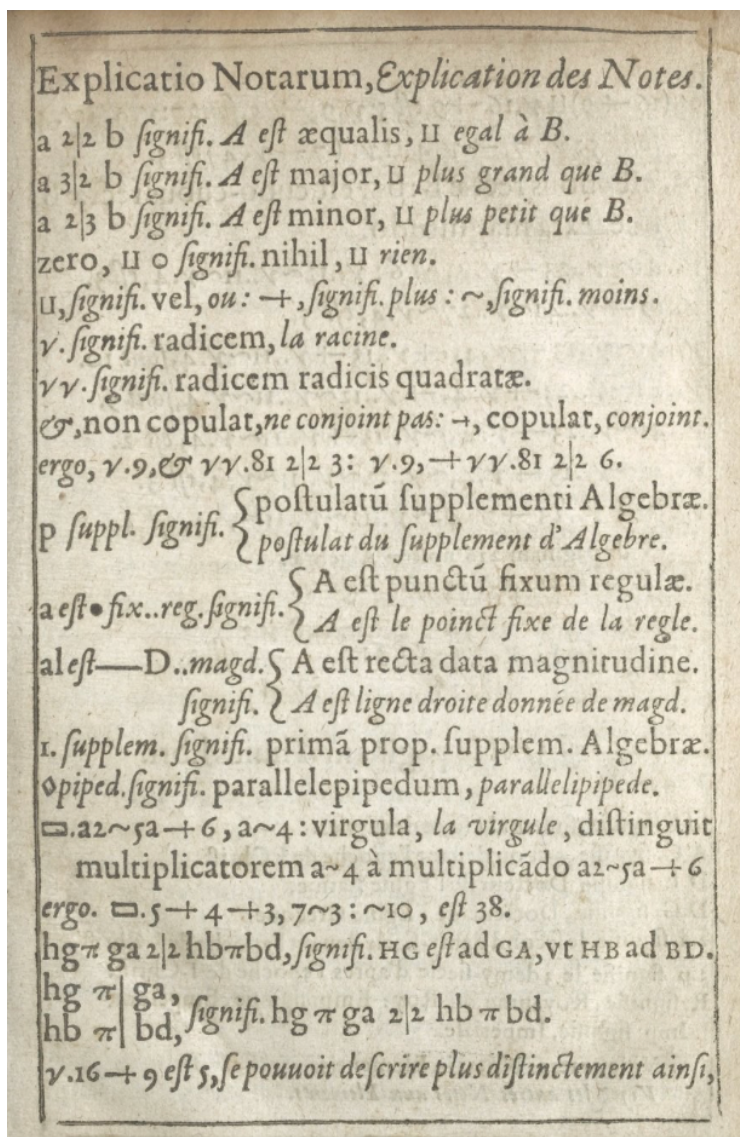


Figura 3. Prima pagina non numerata, Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum effectiones, 1642.

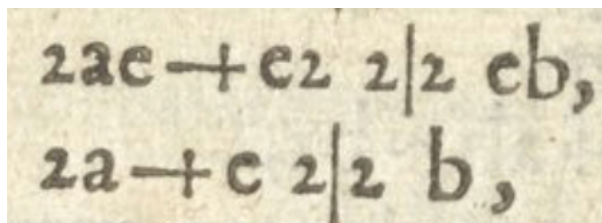
→ Con l'aiuto di quanto riportato nella pagina *Explicatio Notarum*, 'traduci' la soluzione di Hérigone in un linguaggio matematico moderno.

Osservazioni e domande

- L'uso delle lettere maiuscole per indicare gli estremi dei segmenti nei disegni non viene rispettato nella trattazione. Questo genera un abuso di notazione per quanto riguarda la lettera "e" cui è necessario prestare attenzione.
- Gli esponenti non sono indicati con apici ma come 'coefficienti' scritti a destra della base cui si riferiscono.
- La quantità e , elemento cruciale del metodo di adeguazione, chiamata da Fermat "incognita", viene introdotta da Hérigone scrivendo: " e è zero". Qual è il suo ruolo? Come viene utilizzata?

- Quali sono le quantità cui Hérigone applica il *metodo d'adequazione*? Individua il passaggio in cui ciò avviene.

- Individua il passaggio algebrico che lega le due uguaglianze:



e valutarne la liceità alla luce di quanto posto da Hérigone.

[illegible]

Progetto didattico
“Il Principio di minima azione di Maupertuis”

Liceo Scientifico Statale “Augusto Righi”
a.s. 2024/2025

Laboratorio. *Le leggi della rifrazione.*

Scheda di lavoro 2. **Fermat e la legge della rifrazione.**

In una lettera a Marin Cureau de la Chambre del 1657, Pierre de Fermat enuncia il principio secondo cui la luce segue percorsi che minimizzano il tempo; pochi anni dopo, deduce la legge della rifrazione della luce a partire da questo principio, assumendo che l'indice di rifrazione di un mezzo sia inversamente proporzionale alla velocità della luce in quello stesso mezzo.

Il calcolo relativo al fenomeno della rifrazione è parzialmente contenuto nel testo *Œuvres de Fermat* a cura di Paul Tannery, tomo III, di cui si riportano di seguito le pagine dalla 149 alla 151 con la traduzione in italiano.

lèle à la tangente et rencontrant le diamètre en G. Ce point G tombera entre les points F et D, autrement la parallèle GI ne rencontrerait pas le demi-cercle. En raison du parallélisme, on a $\frac{FB}{BE} = \frac{GN}{NI}$; mais $FB = 2BE$; donc $GN = 2NI$ et, par suite, $GD = DN + 2NI$. Mais comme $GD (= DN + 2NI)$ est inférieure à $DF (= DB + 2BE)$, il s'ensuit que $DB + 2BE$ est un maximum et que le cylindre cherché aura pour base DE et pour côté EA.

On prouvera, d'après ce qui précède, que le rapport $\frac{DE}{EA}$ est celui du plus grand au plus petit segment d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.

Nous pouvons d'ailleurs par le même procédé *trouver et construire un cylindre de surface donnée*.

On ramènera en effet la question à l'égalité entre la somme $DN + 2NI$ et une droite donnée, soit DG, qui, d'après la valeur trouvée pour le maximum, devra être au plus égale à DF. Menez GI parallèle à FE; le point I satisfera à la question et l'on pourra ainsi avoir tantôt deux cylindres, tantôt un seul répondant à la condition posée.

Si, en effet, le point G tombe entre F et A, deux cylindres différents satisferont au problème; mais si G tombe en A ou plus près de D, la solution sera unique.

VIII.

ANALYSE POUR LES RÉFRACTIONS.

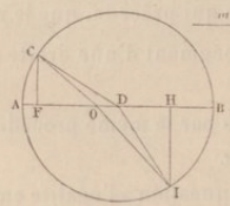
Soit ACBI (*fig. 108*) un cercle dont le diamètre AFDB sépare deux milieux de nature différente, le moins dense étant du côté ACB, le plus dense du côté AIB.

Soient D le centre du cercle et CD le rayon incident tombant sur ce centre du point C donné; on demande le rayon réfracté DI, ou autrement le point I par où passera le rayon après la réfraction.

Abaissez sur le diamètre les perpendiculaires CF, IH. Le point C

étant donné ainsi que le diamètre AB et le centre D, le point F et la droite FD seront également donnés. Supposons que le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense soit celui de la droite donnée DF à une autre droite m donnée en dehors de la figure. On devra avoir $m < DF$, la résistance du milieu moins dense devant être inférieure à celle du milieu plus dense, par un axiome plus que naturel.

Fig. 108.



Nous avons maintenant à mesurer, au moyen des droites m et DF, les mouvements suivant les droites CD et DI; nous pourrons ainsi représenter comparativement l'ensemble du mouvement sur ces deux droites par la somme de deux produits : $CD \cdot m + DI \cdot DF$.

Ainsi la question est ramenée à partager le diamètre AB en un point H de telle sorte que si en ce point on élève la perpendiculaire HI, puis qu'on joigne DI, l'aire $CD \cdot m + DI \cdot DF$ soit minima.

Nous emploierons à cet effet notre méthode, déjà répandue parmi les géomètres et exposée depuis environ vingt ans par Hérigone dans son *Cursus mathematicus*. Appelons n le rayon CD ou son égal DI, b la droite DF, et posons $DH = a$. Il faut que la quantité $nm + nb$ soit minima.

Soit, pour l'inconnue e , une droite arbitraire DO; joignons CO, OI. En notations analytiques : $CO^2 = n^2 + e^2 - 2be$, et $OI^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; donc

$$CO \cdot m = \sqrt{m^2 n^2 + m^2 e^2 - 2 m^2 b e}, \quad IO \cdot b = \sqrt{b^2 n^2 + b^2 e^2 + 2 b^2 a e}.$$

La somme de ces deux radicaux doit être *adéqualée*, d'après les règles de l'art, à la somme $mn + bn$.

Pour faire disparaître les radicaux, on élèvera au carré, on supprimera les termes communs et l'on transposera de façon à ne laisser dans un des membres que le radical qui subsistera; puis on élèvera de nouveau au carré; après nouveau retranchement des termes communs de part et d'autre, division de tous les termes par e et suppression de ceux où e entrera encore, selon les règles de notre méthode généralement connue depuis longtemps, on arrivera, en ôtant les facteurs communs, à l'équation la plus simple possible entre a et m , c'est-à-dire qu'après avoir fait disparaître les obstacles opposés par les radicaux, on trouvera que la droite DH de la figure est égale à la droite m .

Par conséquent, pour trouver le point de réfraction, il faut, ayant mené les droites CD et CF, prendre les droites DF et DH dans le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense, soit dans le rapport de b à m . On élèvera ensuite en H la perpendiculaire HI au diamètre; elle rencontrera le cercle en I, point où passera le rayon réfracté; et ainsi d'ailleurs le rayon, passant d'un milieu moins dense dans un plus dense, s'infléchira du côté de la perpendiculaire: ce qui concorde absolument et sans exception avec le théorème découvert par Descartes; l'analyse ci-dessus, dérivée de notre principe, donne donc de ce théorème une démonstration rigoureusement exacte.

IX.

SYNTHÈSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

VIII ANALISI PER LE RIFRAZIONI

Sia ACBI (fig. 108) un cerchio il cui diametro AFDB separa due mezzi di natura diversa, il meno denso nella parte ACB, il più denso nella parte AIB.

Siano D il centro del cerchio e CD il raggio incidente che cade nel centro dal punto C dato: si chiede il raggio rifratto DI, o equivalentemente il punto I per cui passerà il raggio dopo la rifrazione.

Abbassate sul diametro le perpendicolari CF, IH. Essendo il punto C, così come il diametro AB e il centro D, dati, il punto F e la retta FD saranno ugualmente determinati. Supponiamo che il rapporto della resistenza del mezzo più denso con quella del mezzo meno denso sia uguale al rapporto tra il segmento dato DF e un altro segmento m indicato fuori dalla figura. Dovrà essere $m < DF$, dovendo essere la resistenza del mezzo meno denso minore di quella del mezzo più denso, grazie ad un assioma più che naturale.

Ora dobbiamo misurare, per mezzo dei segmenti m e DF, come variano i segmenti CD e DI; potremo così rappresentare in modo comparato l'insieme delle variazioni di questi segmenti attraverso la somma di due prodotti: $CD \cdot m + DI \cdot DF$.

In questo modo il quesito è equivalente a quello di dividere il diametro AB con un punto H tale che, se da questo punto si alza la perpendicolare HI, raggiungendo poi DI, l'area $CD \cdot m + DI \cdot DF$ sia minima.

Per questo scopo, utilizzeremo il nostro metodo, già diffuso tra i geometri ed esposto circa vent'anni fa da Hérigone nel suo *Cursus mathematicus*. Chiamiamo n il raggio CD o, che è lo stesso, DI, b il segmento DF, e poniamo $DH = a$. E' necessario che la quantità $nm + nb$ sia minima.

Sia, come incognita e , un segmento arbitrario DO; tracciamo CO e OI. In notazione analitica: $CO^2 = n^2 + e^2 - 2be$, e $OI^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; dunque

$$CO \cdot m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \quad IO \cdot b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}$$

La somma di questi due radicali deve essere *adequata*, a regola d'arte, alla somma $mn + bn$.

Per far scomparire i radicali, si eleverà al quadrato, si elideranno i termini comuni e si trasformerà [l'espressione, N.d.T.] in modo da lasciare in uno dei due membri solo il radicale che rimarrà; poi si eleverà di nuovo al quadrato; dopo una nuova eliminazione dei termini comuni in un membro e

nell'altro, una divisione di tutti i termini per e e l'eliminazione di tutti i termini che ancora lo contengono, secondo le regole del nostro metodo conosciuto da tempo, si arriverà, semplificando i fattori comuni, all'equazione più semplice possibile tra a e m , cioè che, dopo aver eliminato gli ostacoli posti dai radicali, si troverà che il segmento DH della figura è uguale al segmento m . Di conseguenza, per trovare il punto di rifrazione, è necessario, dopo aver tracciato i segmenti CD e CF, considerare i segmenti DF e DH nello stesso rapporto della resistenza del mezzo più denso e di quella del mezzo meno denso, cioè nel rapporto tra b ed m . Si tratterà da H la perpendicolare HI al diametro; essa incontrerà il cerchio in I, punto da cui passerà il raggio rifratto; e così infatti il raggio, passando da un mezzo meno denso a uno più denso, devierà verso la normale: questo concorda assolutamente e senza eccezioni con il teorema scoperto da Decartes; l'analisi qui di seguito, derivata dal nostro principio, dà dunque di questo teorema una dimostrazione rigorosamente corretta.

Nel 1657 non si parla ancora di 'funzione'; questo termine, nell'accezione che utilizziamo ancora oggi viene introdotto sette anni dopo da Leibniz. Le proprietà di estremalità sono attribuite a 'quantità', come il tempo di percorrenza, il tragitto seguito, etc..

Di là da venire anche il calcolo differenziale quale strumento per la ricerca di massimi e minimi. Il *metodo di adeguazione*, pur contemplando tutti gli elementi che concorreranno alla definizione di derivata prima di una funzione, rimane uno strumento puramente algebrico, la cui validità è indubbia, nonostante evidenti forzature.

Come sua abitudine, Fermat imposta il problema introducendo le grandezze su cui lavorare ma poi descrive il metodo senza eseguire i calcoli nel dettaglio. A differenza dell'*Ultimo Teorema di Fermat*, in questo caso, siamo in grado di completare quanto solo accennato nel testo: bastano infatti gli strumenti di base dell'algebra.

→ Seguendo le indicazioni contenute nel testo di Fermat, applicando il *metodo di adeguazione*, ricava il risultato da lui previsto (**da svolgere a casa**)

Lined paper template with horizontal ruling lines.

→ A partire dal risultato descritto da Fermat, ricava la II legge della rifrazione nella forma che conosci.

→ Quale relazione puoi ipotizzare tra l'indice di rifrazione relativo e le *resistenze* nei due mezzi, definite da Fermat?

→ Introducendo nella legge le velocità della luce nei due mezzi, quale relazione esiste tra queste grandezze e le *resistenze* definite da Fermat?

Progetto didattico
“Il Principio di minima azione di Maupertuis”

Liceo Scientifico Statale “Augusto Righi”
a.s. 2024/2025

Laboratorio. *Il Principio di minima azione di Maupertuis.*

Scheda di lavoro 4. Maupertuis e la legge della rifrazione.

En méditant profondément sur cette matiere , j’ai pensé que la lumiere , lorsqu’elle passe d’un milieu dans un autre , abandonnant déjà le chemin le plus court, qui est celui de la ligne droite , pouvoit bien aussi ne pas suivre celui du tems le plus prompt ; en effet quelle préférence devroit-il y avoir ici du tems sur l’espace ? La lumiere ne pouvant plus aller tout à la fois par le chemin le plus court , & par celui du tems le plus prompt , pourquoi iroit-elle plutôt par l’un de ces chemins que par l’autre ? aussi ne suit elle aucun des deux ; elle prend une route qui a un avantage plus réel : le chemin qu’elle tient est celui par lequel la quantité d’action est la moindre,

Il faut maintenant expliquer ce que j’entens par la quantité d’action. Lorsqu’un corps est porté d’un point à un autre , il faut pour cela une certaine action: *Comme il n’y a ici qu’un seul corps , on fait abstraction de sa* cette action dépend de la vitesse qu’a le corps , & de l’espace qu’il parcourt , mais elle n’est ni la vi- *Masse.*

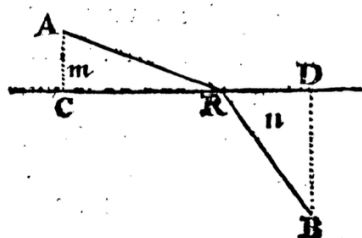
“Meditando profondamente su questa materia, ho pensato che la luce, quando passa da un mezzo all’altro, abbandonando il tragitto più corto, che è quello della linea retta, potesse comunque non seguire quello del tempo più breve; in effetti quale preferenza dovrebbe avere il tempo sullo spazio? La luce non potendo seguire contemporaneamente il cammino più corto e quello del tempo più breve, perché dovrebbe seguire l’uno piuttosto che l’altro? Così non segue nessuno dei due; essa prende una via che ha un vantaggio più reale: *il tragitto che [la luce] segue è quello per cui la quantità d’azione è minima.*

E’ necessario ora spiegare cosa intendo per quantità d’azione. Quando un corpo viene portato da un punto ad un altro, è necessaria una certa quantità d’azione: questa azione dipende dalla velocità che ha il corpo, e dallo spazio che percorre, ma essa non è né la velocità

Poiché qui non c’è che un solo corpo, si trascura la sua Massa

tesse ni l'espace pris séparément: La quantité d'action est d'autant plus grande que la vitesse du corps est plus grande, & que le chemin qu'il parcourt est plus long; elle est proportionnelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse avec laquelle le corps les parcourt.

C'est cela, c'est cette quantité d'action qui est ici la vraie dépense de la nature, & ce qu'elle ménage le plus qu'il est possible dans le mouvement de la lumière.

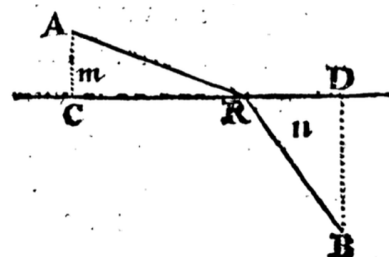


Soient deux milieux différens, séparés par une surface représentée par la ligne CD, tels que la vitesse de la lumière, dans le milieu qui est au-dessus, soit comme m , & la vitesse dans le milieu qui est au-dessous, soit comme n .

Soit un rayon de lumière qui, partant d'un point donné A, doit parvenir au point donné B: pour trouver le point R où il doit se briser, je cherche le point où le rayon se brisant, la quantité d'action est la moindre: & j'ai $m \cdot AR + n \cdot RB$ qui doit être un minimum: ou, ayant tiré sur la surface commune des deux milieux, les perpendiculaires AC, BD; $m\sqrt{AC^2 + CR^2} + n\sqrt{BD^2 + DR^2}$

né lo spazio presi separatamente. La quantità d'azione è tanto più grande quanto lo è la velocità del corpo, e quanto il cammino che percorre è lungo; essa è proporzionale alla somma degli spazi moltiplicati ciascuno per la velocità con la quale il corpo li percorre.

E' questo, è questa quantità d'azione che qui è il vero dispendio della natura, e ciò che essa risparmia il più possibile nel moto della luce.



Siano dati due mezzi diversi, separati da una superficie rappresentata dalla linea CD, tali che la velocità della luce, nel mezzo che sta sopra, sia m , e la velocità nel mezzo che sta sotto, sia n .

Sia un raggio di luce che, partendo da un punto dato A, debba giungere al punto dato B: per trovare il punto R dove deve spezzarsi, io cerco il punto dove, spezzandosi il raggio, la quantità d'azione è minima: e ho $m \cdot AR + n \cdot RB$ che deve essere un minimo: o, avendo tracciato sulla superficie comune dei due mezzi, le perpendicolari AC, BD;

$m\sqrt{AC^2 + CR^2} + n\sqrt{BD^2 + DR^2}$

$DR^2) = \text{minimum}$, ou AC & BD
étant constants,

$$\frac{m \cdot CR \, dCR}{\sqrt{(AC^2 + CR^2)}} + \frac{n \cdot DR \, dDR}{\sqrt{(BD^2 + DR^2)}} = 0.$$

Mais, CD étant constant, on
a, $dCR = -dDR$. On a donc.

$$\frac{m \cdot CR}{AR} - \frac{n \cdot DR}{BR} = 0. \&$$

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} :: n : m.$$

C'est-à-dire : le sinus d'incidence,
au sinus de réfraction, en raison ren-
versée de la vitesse qu'a la lumière
dans chaque milieu.

Tous les phénomènes de la ré-
fraction s'accordent maintenant
avec le grand principe, que la
nature dans la production de ses effets
agit toujours par les voies les plus
simples. De ce principe suit, que,
lorsque

*lorsque la lumière passe d'un milieu
dans un autre, le sinus de son angle
de réfraction est au sinus de son angle
d'incidence en raison inverse des vi-
tesses qu'a la lumière dans chaque
milieu.*

= minimo, o essendo AC e BD
costanti,

$$\frac{m \cdot CR \, dCR}{\sqrt{AC^2 + CR^2}} + \frac{n \cdot DR \, dDR}{\sqrt{BD^2 + DR^2}} = 0$$

Ma, essendo CD costante, si ha,
 $dCR = -dDR$. Si ha quindi

$$\frac{m \cdot CR}{AR} - \frac{n \cdot DR}{BR} = 0 \text{ e}$$

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} :: n : m$$

Cioè: il seno d'incidenza e il seno di
rifrazione stanno in rapporto inverso
alle velocità che la luce ha in ciascun
mezzo.

Tutti i fenomeni della rifrazione
concordano con questo grande
principio, che la natura nella
produzione dei suoi effetti agisce
sempre per le vie più semplici. Da
questo principio segue che,

quando

*quando la luce passa da un mezzo
all'altro, il seno del suo angolo di
rifrazione sta al seno del suo angolo
di incidenza in rapporto inverso alle
velocità che la luce ha in ciascun
mezzo".*

Il testo sopra riportato è tratto dalla memoria *Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles* (Accordo di differenti leggi della natura che erano sembrate fino ad ora incompatibili), presentata da Maupertuis il 15 aprile 1744 all'Académie des Sciences di Parigi; queste righe trattano dell'applicazione del Principio di minima azione al fenomeno della rifrazione.

A differenza di quanto visto nella trattazione di Fermat, Maupertuis dispone degli strumenti del calcolo differenziale e li applica per trovare il minimo della quantità d'azione.

Attività proposta

La presentazione di un tema attraverso i testi originali permette il confronto del formalismo matematico e del lessico utilizzato da Maupertuis con quello 'moderno'. Si tratta di un vero e proprio lavoro di traduzione nel quale è possibile riconoscere aspetti e contenuti noti.

In questo laboratorio si esaminerà il linguaggio matematico agli albori del calcolo differenziale, esaminando con una corretta prospettiva storica gli studi sull'ottica geometrica.

→ Dopo aver letto il testo in cui Maupertuis esamina il fenomeno della rifrazione, scrivi la quantità d'azione $\mathcal{A}$ relativa a tale fenomeno, seguendo le indicazioni dell'autore.

→ Per tradurre quanto riportato nella fonte storica in un formalismo matematico moderno, poniamo $CR = x$, $CD = a$, $AC = h$ e $BD = k$; in questo modo possiamo scrivere la quantità d'azione come una funzione della variabile x :

→ Applichiamo la condizione per la ricerca dei punti stazionari, in particolare per determinare il minimo della funzione $\mathcal{A}(x)$:

→ Introducendo la definizione di seno di un angolo, possiamo ricavare la II legge della rifrazione:

→ Cosa possiamo osservare riguardo al risultato ottenuto, se confrontato con ciò che sappiamo dalla legge di Snell?
