



UNIVERSITÀ
DI TORINO

Dipartimento di
Matematica
"Giuseppe Peano"



UMI



CIIM



Embodimath: esplorazione immersiva delle funzioni con il corpo e GeoGebra Plus

Andrea Gheresi, Lara Monformoso, Ornella Robutti
Dipartimento di Matematica, Università di Torino



DIDATTICA DELLE FUNZIONI

Dalle Indicazioni Nazionali vigenti e dalle Linee Guida:

- 1) «Lo studente [...] conoscerà i concetti e i metodi [...] rilevanti per la **descrizione e la previsione di fenomeni**, in particolare del mondo fisico.»
- 2) «Acquisire l'abitudine a **ragionare** con rigore logico, ad **identificare i problemi** e a individuare **possibili soluzioni**.»
- 3) «Lo studente sarà in grado di **passare** agevolmente **da un registro di rappresentazione a un altro** (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.» (IN) e «Le funzioni e la loro **rappresentazione** (numerica, funzionale, grafica).» (LN)
- 4) «Formalizzare un problema di fisica e **applicare gli strumenti matematici** e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione.»

PONTI PER LA CITTADINANZA

Le funzioni e le loro rappresentazioni hanno un **ruolo centrale** per motivi formativi e culturali:

- 1) sono lo strumento principe per la **costruzione di modelli** che descrivono fenomeni reali, diventando così un ponte tra realtà e astrazione matematica;
- 2) permettono di sviluppare capacità di analisi, sintesi, formalizzazione e rappresentazione, potenziando le **competenze trasversali**;
- 3) permettono di sfruttare, in maniera naturale, una vasta gamma di **multimodalità di rappresentazioni**, valorizzando la trasferibilità delle competenze;
- 4) creano le basi per l'**interdisciplinarietà** favorendo l'interconnessione con metodi e contenuti di altre discipline.

LABORATORIO DI MATEMATICA

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto **un insieme strutturato di attività** volte alla **costruzione di significati** degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge **persone** (studenti e insegnanti), **strutture** (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), **idee** (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della **bottega rinascimentale**, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.

UMI, 2003



IL PROGETTO TransEET



Transforming **E**ducation with **E**merging **T**echnologies

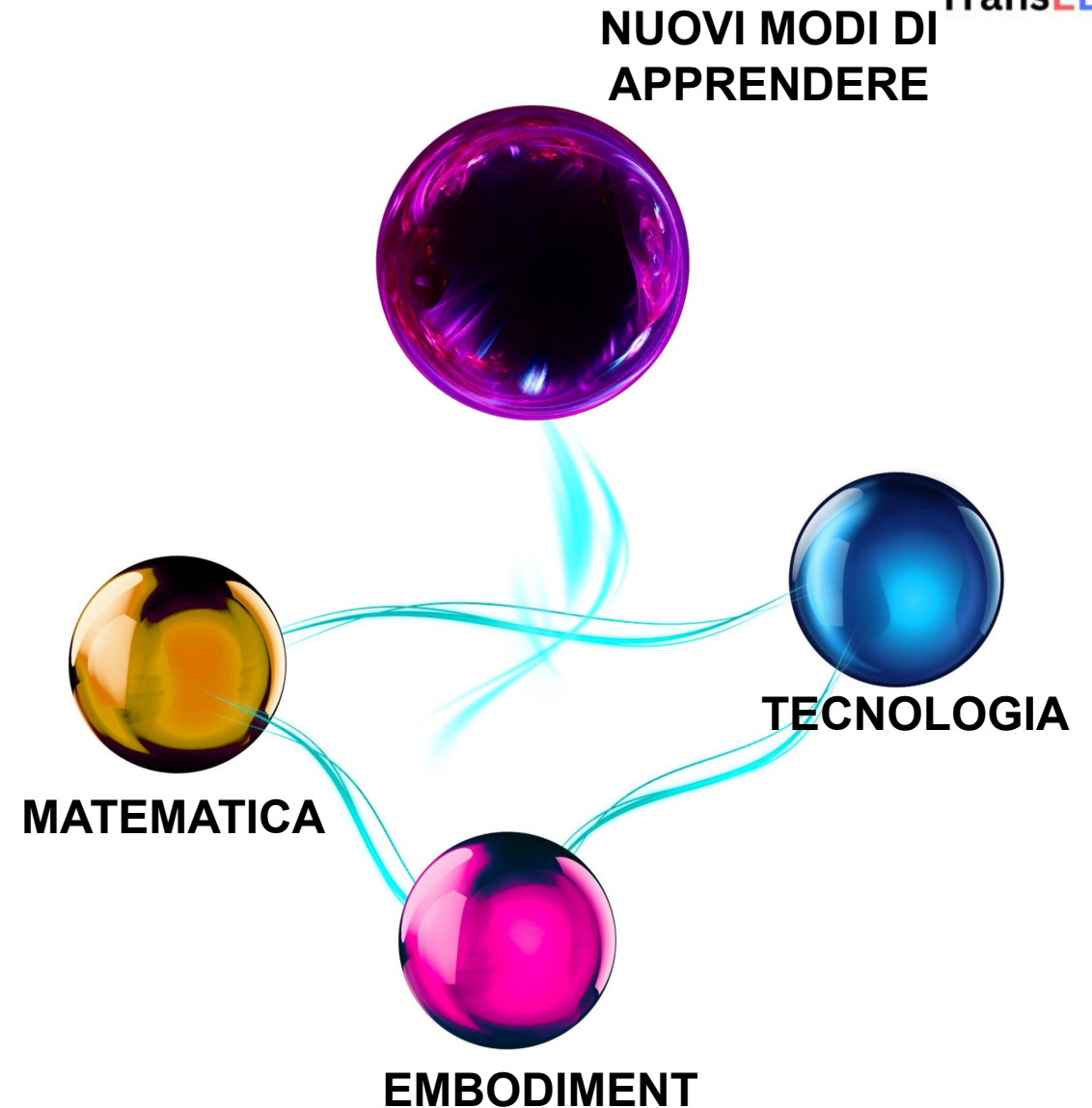


Dipartimento di
Matematica
"Giuseppe Peano"



TRASFORMARE L'APPRENDIMENTO

- **Matematica:** la conoscenza matematica degli studenti, già posseduta e da sviluppare; in questo caso: le funzioni
- **Embodiment:** le rappresentazioni del corpo e la loro concettualizzazione tramite pose e movimenti
- **Tecnologia:** tecnologie emergenti di tipo embodied



DIVERSI APPROCCI ALLA FUNZIONE

Funzione come macchina input – output

➡ Approccio alla funzione orientato all'**azione**.

Funzione come particolare corrispondenza

➡ Approccio alla funzione orientato al **processo**.

Funzione come espressione variabile, come covarianza

➡ Approccio alla funzione orientato all'**oggetto**.



Slavitt, 1997

APPROCCIO ORIENTATO ALLE **PROPRIETÀ**

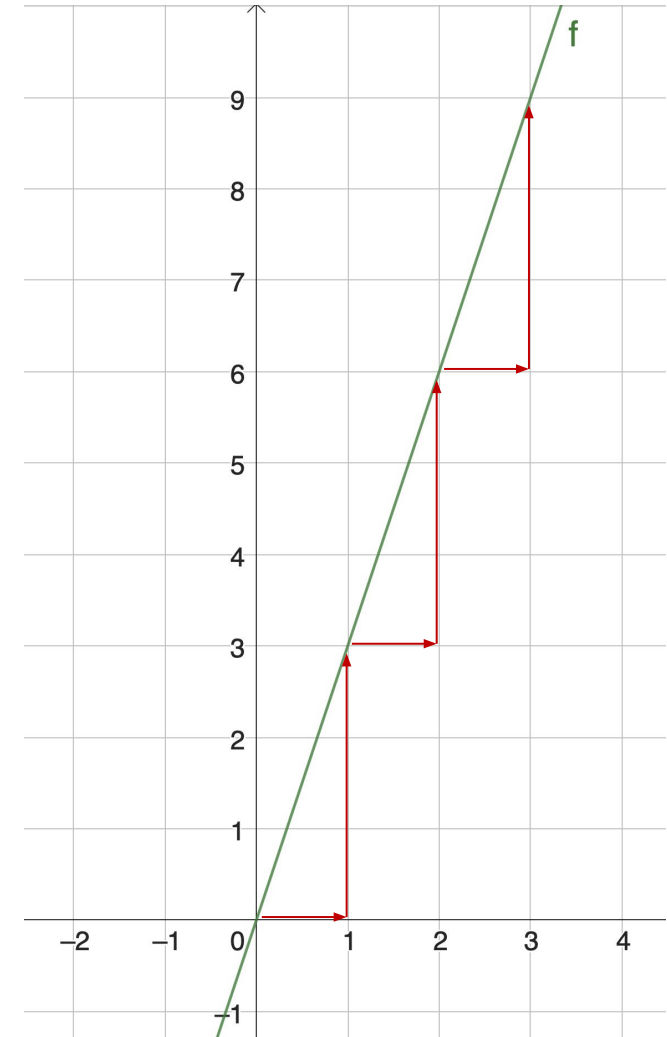
Slavit propone un ulteriore approccio, basato sulla crescita funzionale e sulla definizione di funzione come covarianza.

Il punto di vista orientato alle proprietà si differenzia da quello orientato all'oggetto in quanto si pone meno enfasi sul modo in cui le variabili cambiano e più sulle **proprietà che risultano da tali cambiamenti**.

Slavit, 1997

«Si tratta di un approccio molto simile a quello di Newton, che pensava a grandezze variabili in funzione del tempo. [...] **sono le variazioni della variabile dipendente che danno un'idea delle caratteristiche della funzione**».

Paola, 2003



EMBODIMENT E APPRENDIMENTO ATTIVO

«Embodied interaction might help remediate what Thompson (2013) diagnosed as “the absence of meaning” in mathematics education. To the extent that **meanings emerge** from presymbolic multimodal operator schemes afforded **by actual or imagined perceptual features**, ecological dynamics stands to stimulate this concerted discussion.»

Abrahamson & Sanchez-Garcia, 2016



«Students become more and more conscious of **mathematical meanings** by working together and by mutual interaction with materials and tools. In introducing semiotic nodes, which mark their awareness of mathematical meanings, they **make use of gestures**, mediated actions and words all together, at particular points that are **simultaneously sensual and conceptual.**»

Arzarello et al., 2015



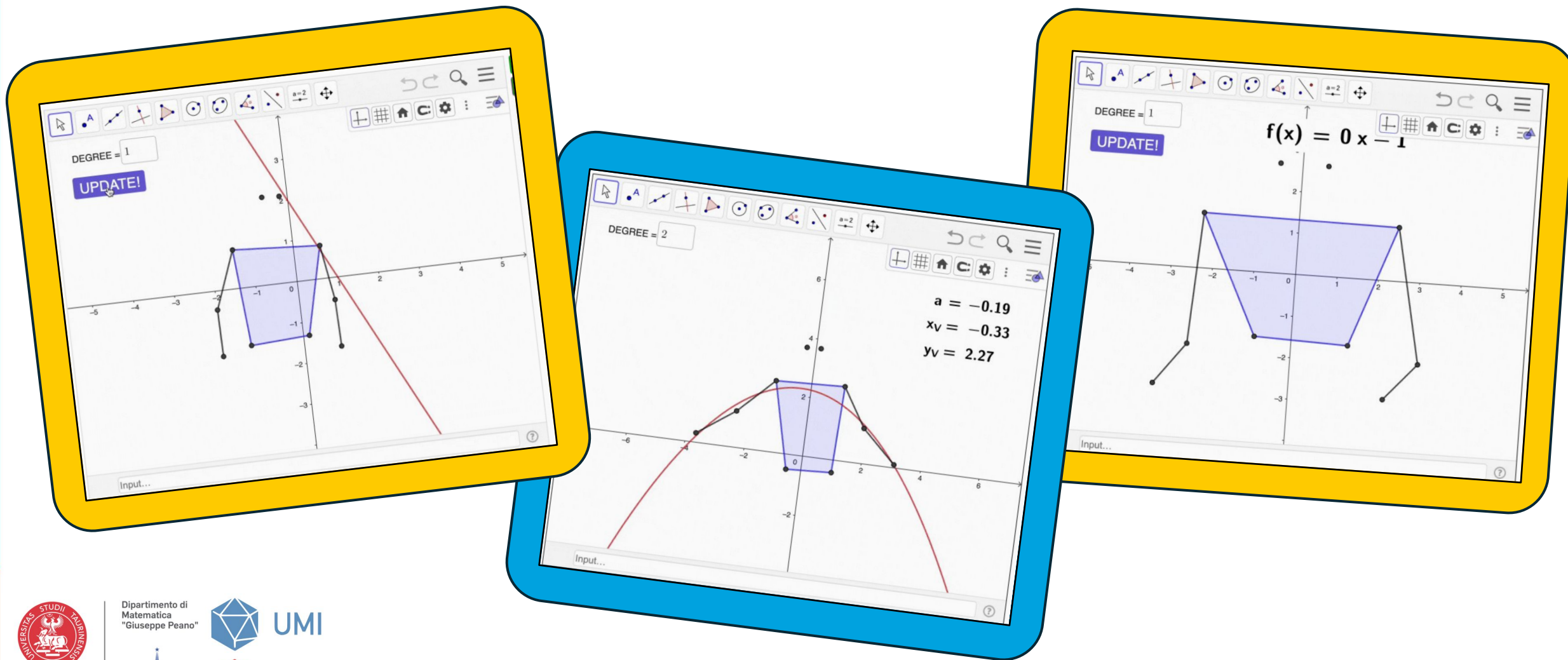
GEOGEBRA PLUS (GGB+)



Sviluppato da David Hornsby (JKU) e Andrea Gherzi (UNITO), è un software basato su GeoGebra in cui gli utenti possono **manipolare** direttamente oggetti matematici **attraverso** la rappresentazione virtuale e dinamica del **proprio corpo**.



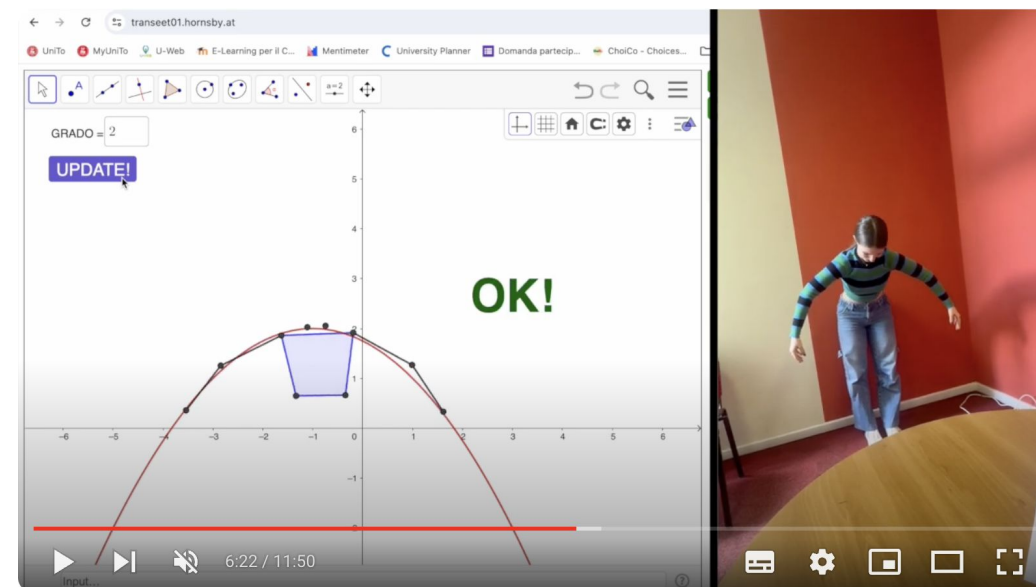
BENVENUTI NEL MONDO DI GGB+



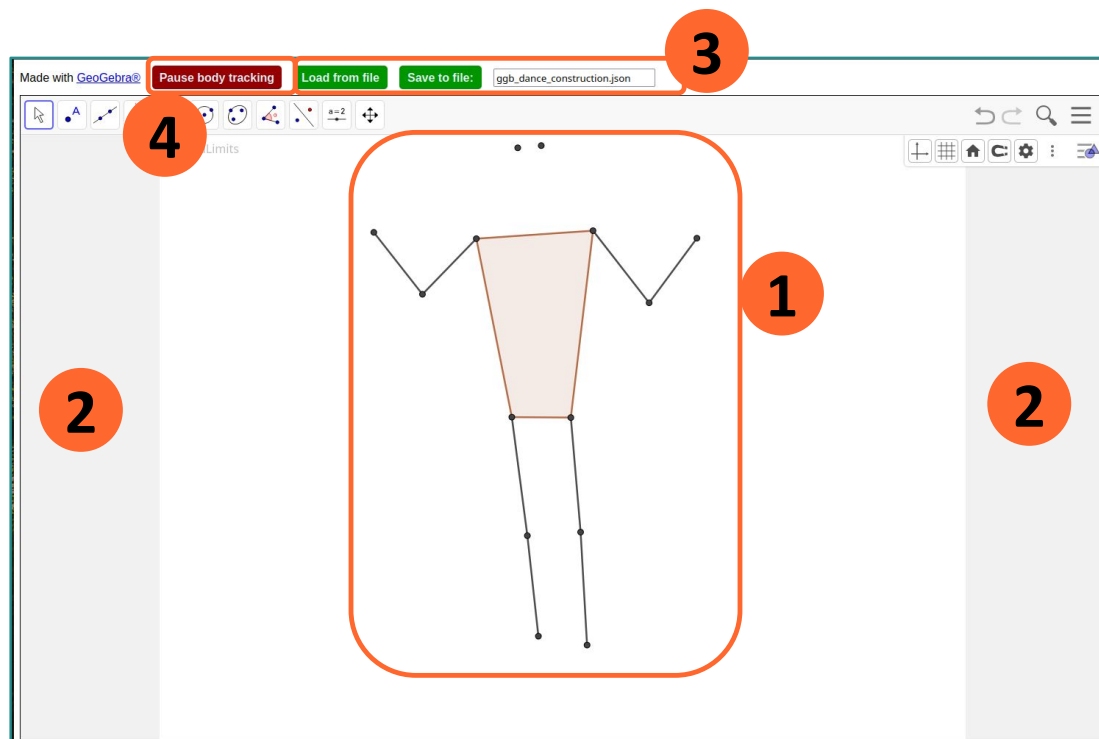
GEOGEBRA PLUS (GGB+)

Attraverso una rete neurale addestrata al riconoscimento della posizione(PoseNet), GGB+ consente di rappresentare determinati punti del corpo dell'utente (ad es. gomiti, occhi, caviglie) nella vista grafica di GGB come oggetti di GGB con cui è quindi possibile...

... controllare le rappresentazioni di oggetti matematici attraverso i movimenti del corpo!



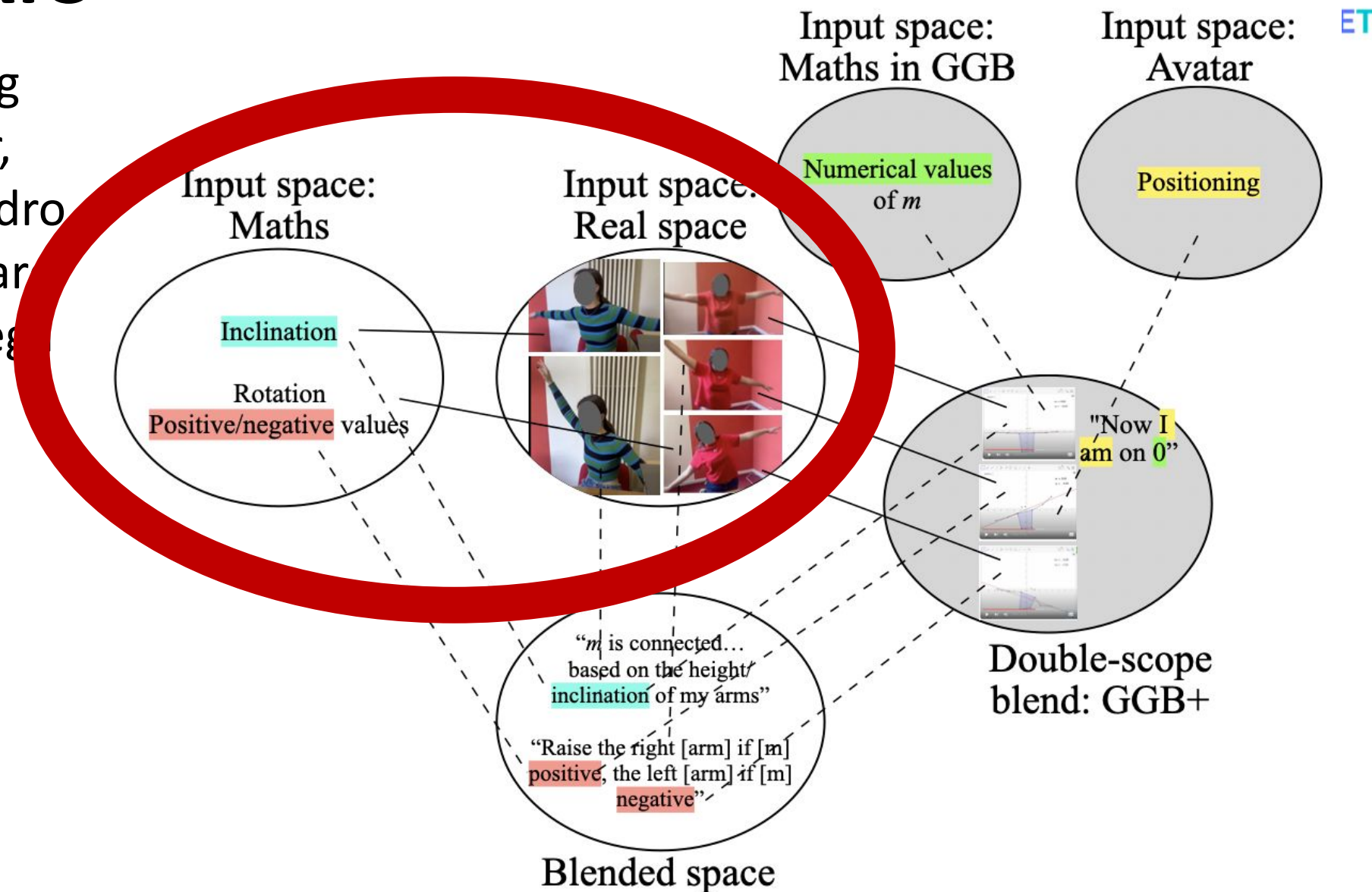
INTERFACCIA DI GGB+



- 1 L'avatar è invariante alla traslazione e alla dilatazione della finestra (la webcam è sempre centrata sullo schermo).
- 2 Quando il rapporto della telecamera non corrisponde al rapporto della finestra, i bordi non accessibili all'avatar sono evidenziati in grigio.
- 3 Menu per il salvataggio e il caricamento delle applet.
- 4 Possibilità di avviare e interrompere il tracciamento del corpo.

PILLOLA DI RICERCA...

Il conceptual blending
(Fauconnier & Turner,
2002) ci offre un quadro
teorico per interpretare
i processi cognitivi degli
studenti



UNIVERSITÀ
DI TORINO

Dipartimento di
Matematica
"Giuseppe Peano"



UMI



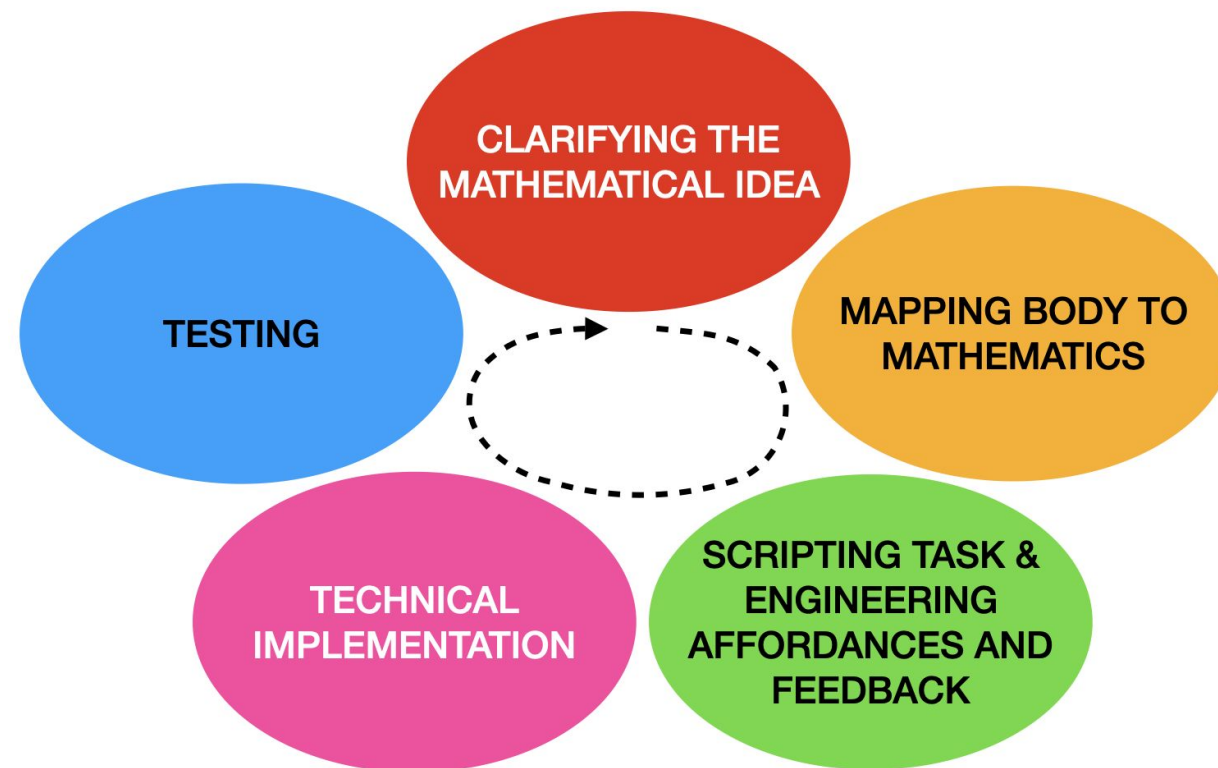
CIIM



DESIGN GRAMMAR DI GGB+ APPLET

«Designing an embodied applet is not a linear process but a spiralling cycle: designer moves forward, returns to earlier decisions, and iterates until the movement–mathematics coupling feels transparent to the learner and the task supports the achievement of the defined learning goals.»

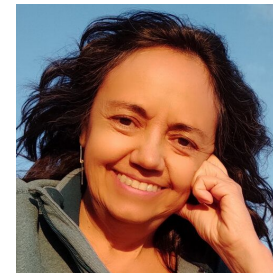
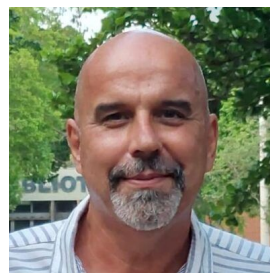
Gheri et al., 2025 (submitted)



DA HUMANS-**WITH**-MEDIA...

Quando il paradigma è stato formulato per la prima volta (2005), l'interazione con la tecnologia si basava in gran parte su **dispositivi di input indiretti** come mouse, cursori o tastiere. Pertanto, si tendeva a presumere una **separazione spaziale** tra lo studente e lo spazio rappresentazionale.

Nel corso del tempo, questa separazione si è ridotta e **l'interazione con le nuove tecnologie** è cambiata. La realtà aumentata e virtuale, o sistemi come GeoGebra Plus (GGB +), **dissolvono la barriera dell'interfaccia**.



Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking

Information and Communication
Technologies, Modeling,
Experimentation and Visualization

Marcelo C. Borba and Mónica E. Villarreal

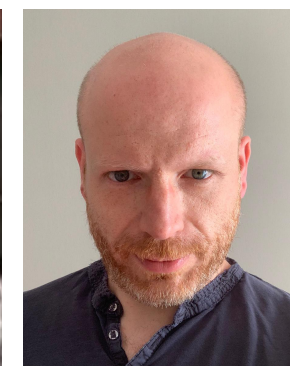
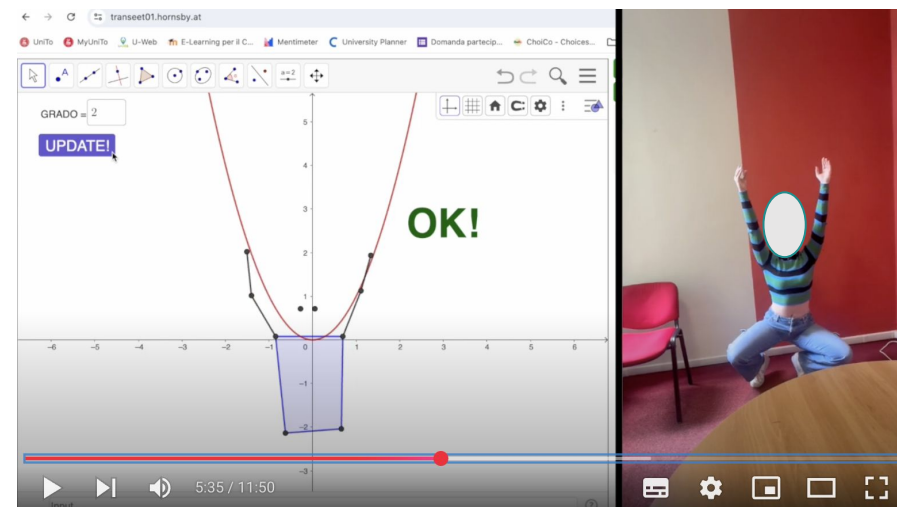


 Springer

... A HUMANS-IN-MEDIA

The Humans-in-Media paradigm extends Borba & Villarreal's H-w-M framework by relocating the learner from operating with a technological artefact to existing in a responsive medium. Drawing on H-w-M, it retains the idea of distributed agency, but re-defines “media” as an inhabited milieu that co-evolves with bodily action.

Agency therefore circulates among body, digital feedback and mathematical objects, making knowledge an emergent property of their continuous interaction. Rather than breaking with H-w-M, H-i-M is positioned on a continuum that considers how H-w-M changes as artefacts change and seeks to read the transformation brought about by embodied emerging technologies.

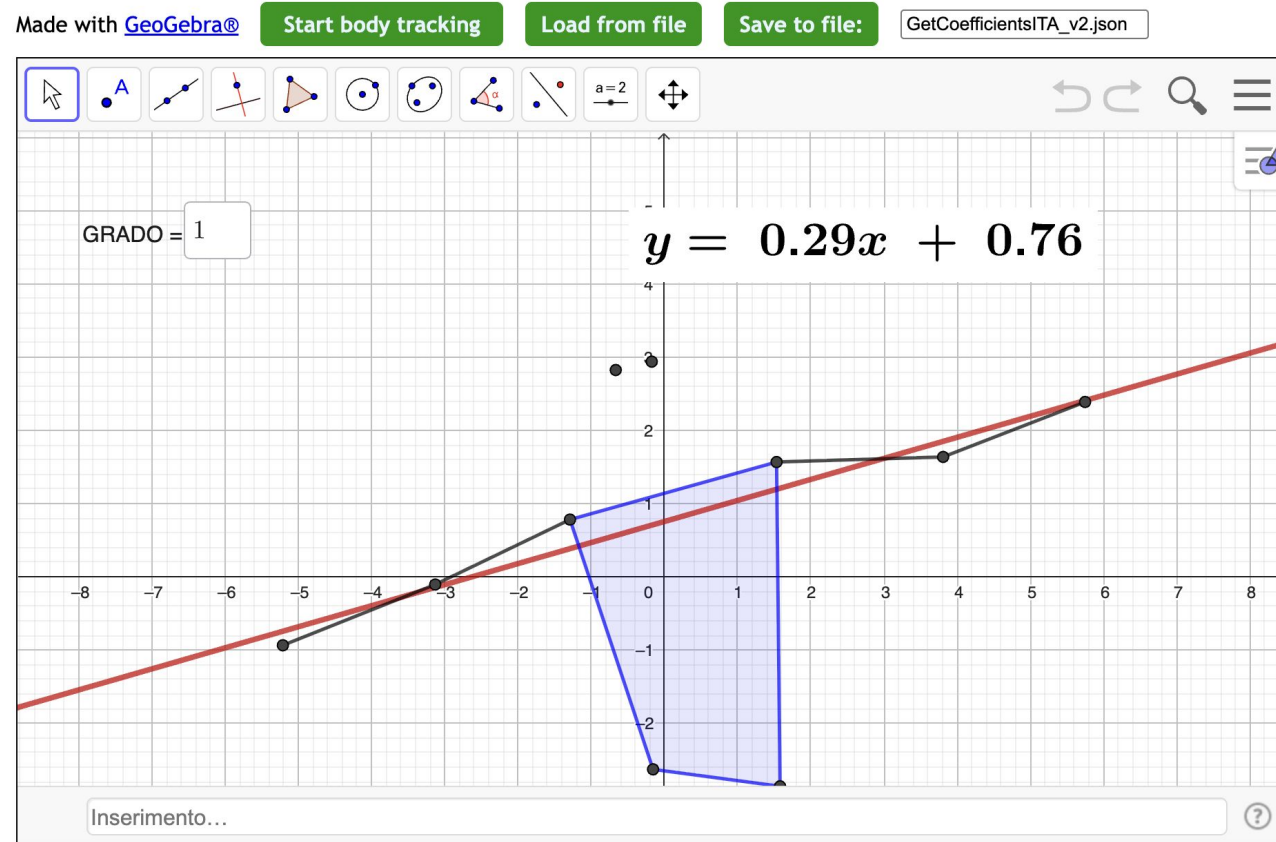


GEOGEBRA

1. MIRROR



GET 2. COEFFICIENTS



LEVEL 3. UP



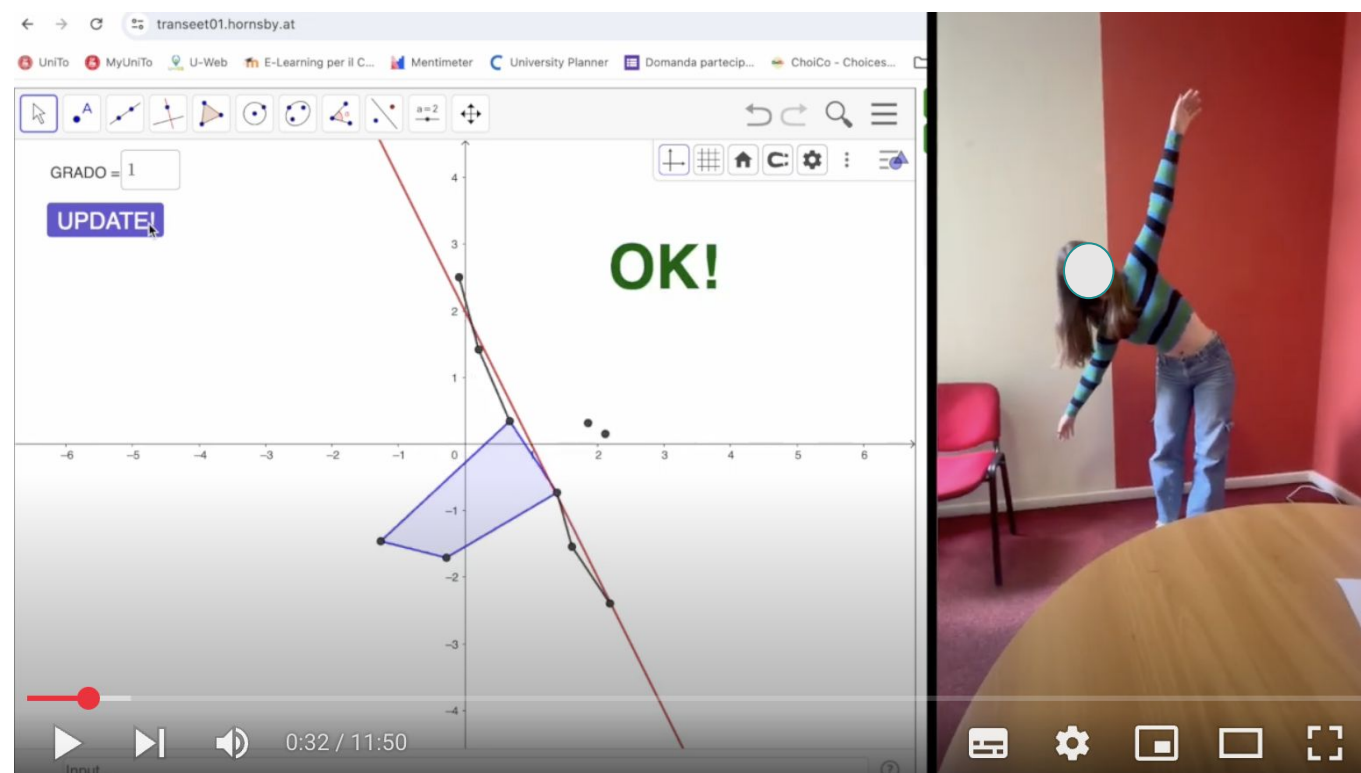
FEEDBACK CONCLUSIVO



POSITIONING

«The immediate feedback loop guides the user to align with specific poses or movements and, from now on, we will refer to the process of intentionally adjusting the body posture or pose in response to real-time feedback displayed on a screen with the word *positioning*.»

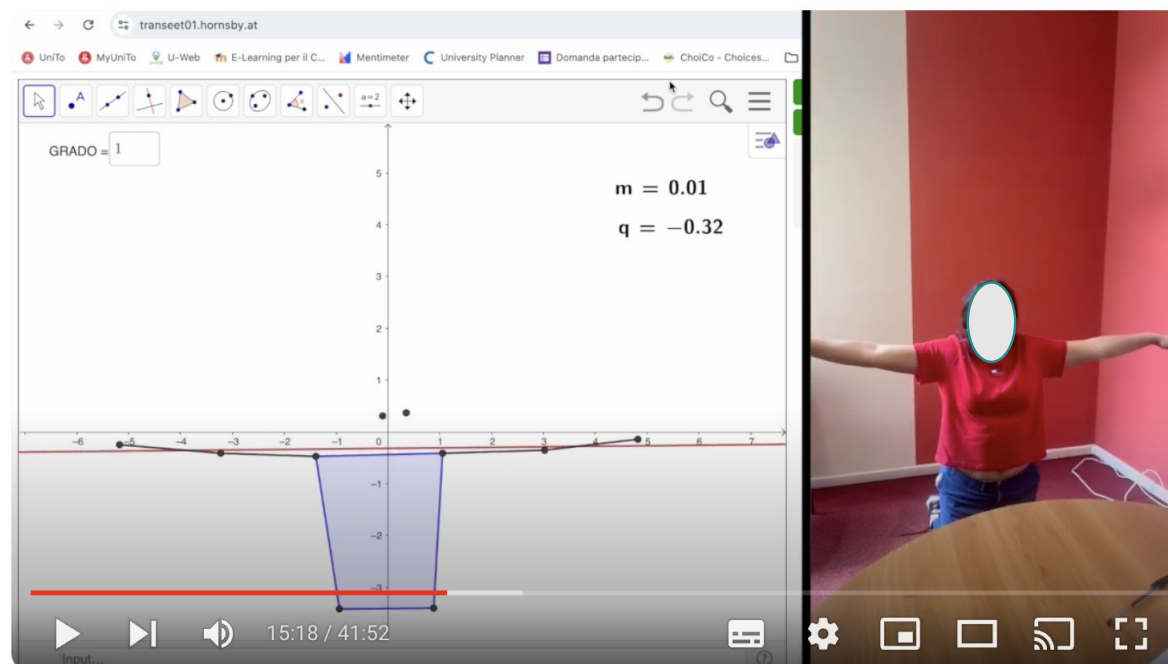
Gherzi et al., 2024 (in press)



POSITIONING

«The researcher then asked “How is this number [m] connected to your positioning?”. And S2 claimed: “Now I am on 0”, a sentence making sense only in the GGB+ environment [...] The conceptual blending of these elements generates new knowledge in which the students collectively elaborate on the mathematical meaning of m by connecting the variations of body position to its corresponding numerical values.»

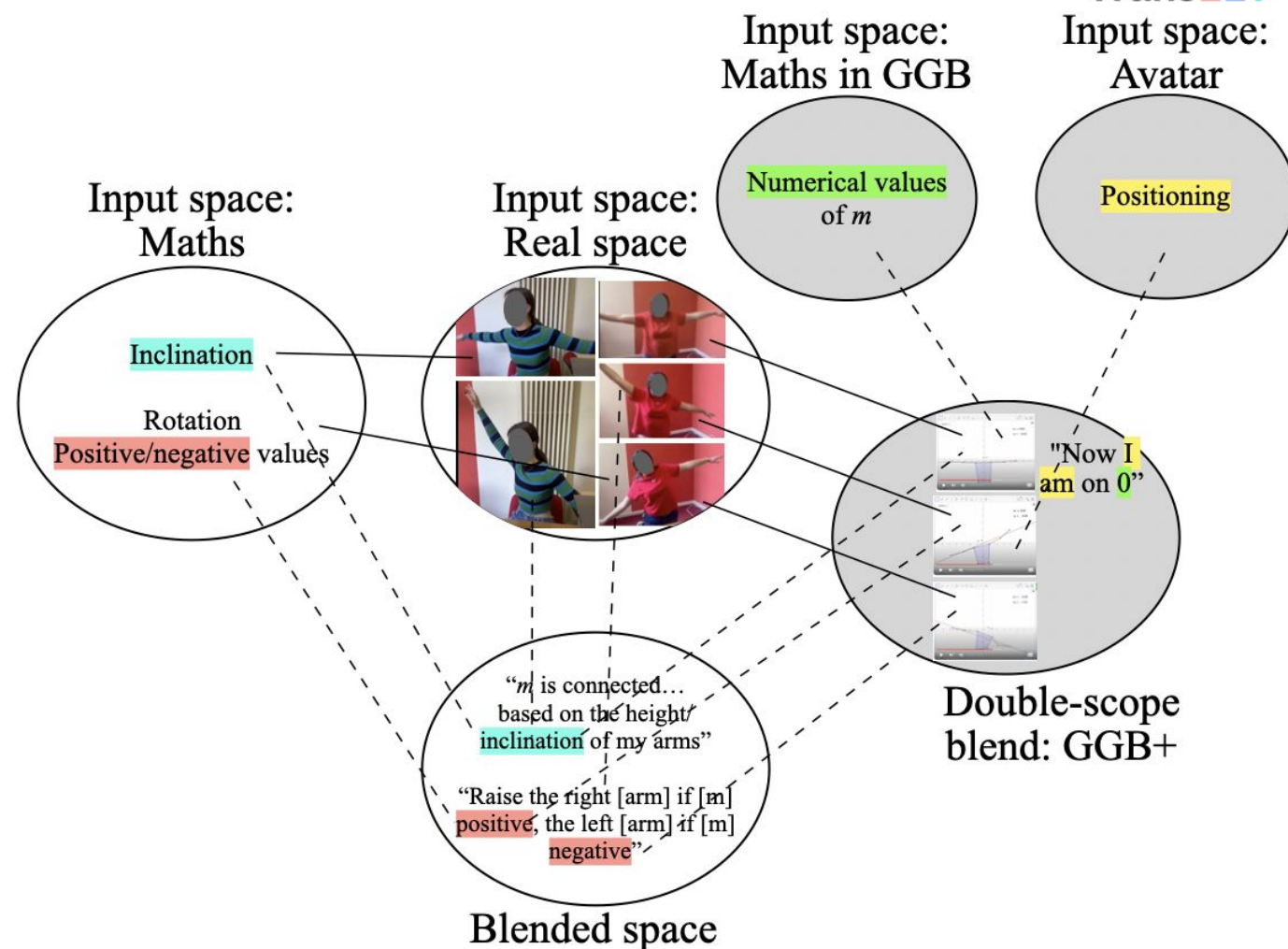
Gherzi et al., 2024 (in press)



PILLOLA DI RICERCA...

Il conceptual blending (Fauconnier & Turner, 2002) mostra che gli studenti hanno collegato:

- le loro conoscenze matematiche sui valori positivi/negativi e sull'inclinazione (*maths space*);
- i movimenti delle braccia eseguiti davanti al computer (*real space*);
- i valori numerici di m forniti da GGB+ e controllando la funzione lineare creata attraverso le loro braccia (*GGB+ space*).



TransEET
Input space:
Avatar

Input space:
Maths in GGB

Input space:
Maths

Input space:
Real space

Double-scope
blend: GGB+

Blended space



UNIVERSITÀ
DI TORINO

Dipartimento di
Matematica
"Giuseppe Peano"



UMI



CIIM



WORK IN PROGRESS



Grazie!