NIENTE E' SPARITO!

- 1) Camminata sulla zattera: la zattera deve restare in equilibrio, ognuno cammina in silenzio, concentrato su se stesso e poi risponde ai comandi dati dal docente. Di seguito una serie di possibili comandi:
 - Via (camminare)
 - Vai (girarsi di 180° e continuare a camminare)
 - Stop (fermarsi)
 - Abbracciarsi a gruppi di due, abbracciarsi a gruppi di tre...
- 2) Durante la zattera, il docente divide gli studenti in 3 gruppi facendo pescare a ognuno, durante uno stop, uno dei tre simboli di antiche comunità di matematici: i Maya, gli Egizi e i Pitagorici.



3) In cerchio, il docente (narratore) legge:

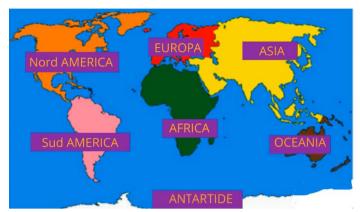
Immagina che questo parco sia il mondo intero:

A est, le vaste pianure dell'Asia ci offrono un panorama di culture e popoli diversi, come l'India che, con i suoi colori vivaci e tradizioni millenarie, ci invita a scoprire antiche storie e spiritualità profonde. Mentre a sud, l'Africa con le sue piramidi e deserti ci racconta di antiche civiltà e natura selvaggia. Oltre l'oceano Atlantico, le luci di New York e le vivaci città del Nord America, e poi ancora il Sud America, che ci sorprende con le sue foreste pluviali e le sue spiagge immense.

Nell'emisfero australe, l'Australia e le isole del Pacifico ci portano in luoghi di meraviglie naturali e tradizioni uniche, come le barriere coralline e le culture delle isole Fiji e Hawaii. mentre ai poli, Artide e Antartide, ci mostrano la purezza dei ghiacci e le creature polari.

E poi c'è la nostra Europa, con le sue città ricche di bellezza e arte, che ci ricordano un passato ricco di storia e di cultura.

4) Ogni gruppo sorteggia da una scatola 2 dei 7 continenti (Asia, America del Sud, America del Nord, Africa, Oceania, Australia e Europa) e poi, attraverso un quadro vivente, deve far capire agli altri gruppi che continente sta rappresentando. Dopo aver rappresentato il continente, posiziona un foglio col nome del continente a terra, in uno spazio grande abbastanza per creare la mappa dei continenti



L'ultimo continente, quello che nessuno sorteggia, lo rappresentano e lo posizionano tutti insieme.

5) Si torna in cerchio - Narratore:

Dopo aver esplorato le meraviglie dello spazio e aver attraversato tutta la Terra, ora ci avventuriamo in un emozionante viaggio nel tempo. Sulle tracce di antiche civiltà, scopriamo le loro incredibili matematiche e le loro culture uniche. Partiamo dai Maya, maestosi astronomi e matematici che hanno creato un calendario preciso e complesso, riflesso della loro profonda connessione con il cielo. Ci spostiamo poi ai pitagorici, filosofi e matematici dell'antica Grecia, che hanno rivoluzionato il pensiero con il loro studio dei numeri, dei rapporti e delle figure geometriche. Infine, ci immergiamo nell'antico Egitto, dove i sacerdoti hanno sviluppato tecniche avanzate di misurazione e costruzione, lasciando in eredità le meravigliose piramidi. Un viaggio nel tempo attraverso genti diverse, un percorso che ci svela come il sapere numerico abbia accompagnato l'umanità lungo i secoli.

- 6) Assegnazione di un compito per ogni gruppo: studiare la loro aritmetica (a partire da dispense consegnate a ogni gruppo) e produrre degli artefatti da lasciare ai posteri. Ogni gruppo, avendo a disposizione vari oggetti (conchiglie, palline, tappi, bastoncini, stuzzicadenti, cartoncini, etc ...) precedentemente preparati dal docente (oppure si può chiedere a ogni studente di portare qualcosa) deve realizzare un artefatto per far capire agli altri gruppi come facevano matematica. Volendo si può inserire un'ulteriore difficoltà: parlando lingue diverse ogni gruppo dovrà far capire agli altri a cosa servono gli oggetti senza parlare. Possono usare gli artefatti e il loro corpo. In alternativa a tutto questo, si può inserire una spiegazione con le lavagne verticali, come fatto a Genova.
- 7) Ogni gruppo mostra e spiega il suo artefatto agli altri gruppi.
- 8) Arrivo di Zefiro Jones : attenzione è sparito lo zero! Con musica Indiana Jones

No zero – no party

Parla Zefiro:

Sono Zefiro Jones, archeologo, e ho deciso di prendermi un anno sabbatico per staccare dalla mia vita di scavi e ritrovamenti. Così sono arrivato a Napoli, per assistere all'ultima

partita del campionato italiano di calcio: Napoli contro Cagliari. Tifo per il Napoli, ovvio. È un giorno speciale, l'atmosfera è elettrizzante.

Ma poi succede qualcosa di assurdo. All'improvviso, lo zero sul tabellone scompare, piano piano, come se si dissolvesse nel nulla. All'inizio non ci faccio caso, ma poi guardo l'orologio al mio polso e anche lì sta succedendo qualcosa di terribile: lo zero sta sbiadendo, svanendo. Apro il cellulare e anche lì, il punteggio è incompleto, senza lo zero.

E allora tutto si ferma. Lo stadio si blocca, il silenzio è assordante. Il Napoli non può vincere il suo quarto scudetto perché non c'è modo di leggere il punteggio senza lo zero. È come se il cuore della partita, il suo simbolo, fosse scomparso nel nulla.

A questo punto capisco: niente è scomparso. Hanno rubato lo zeroooo! È come se avessero sottratto il senso stesso del punteggio, del risultato, della vittoria. In quel momento comprendo che non è solo uno zero che manca, ma qualcosa di più grande, un pezzo fondamentale di ciò che rende tutto reale. E ora devo scoprire chi ha fatto questo e perché. E soprattutto, devo riportare lo zero tra noi

Mi rivolgo ai tre grandi gruppi di matematici: gli Egizi, i Maya e i Pitagorici. Ho trovato una porta spazio temporale che mi permette di parlare con voi. La sfida è questa: dovete correre nel presente, in questo momento, e trovare una soluzione per scrivere il punteggio di una partita senza usare lo zero.

Ma non basta eliminare lo zero, dobbiamo trovare un modo convincente, un metodo alternativo di contare che ci permetta di rappresentare i numeri senza quel simbolo che ormai ci sembra così naturale.

Se riusciremo a farlo, se tutti nel nostro stadio capiranno il nuovo modo di contare, allora il Napoli vincerà il suo quarto scudetto. E la festa potrà continuare, senza intoppi, senza confusione, solo con numeri nuovi e una vittoria indimenticabile.

Ricordate: no zero, no party! La sfida è lanciata. Siamo pronti a cambiare le regole del gioco, a dimostrare che anche senza lo zero possiamo contare, festeggiare e vincere!

- 9) Lasciare tempo per far lavorare i gruppi. Poi ogni gruppo dirà la sua soluzione (se ne trova una)
- Arriva una lettera dell'agente **7 per Zefiro: attenzione lo zero è stato ritrovato e in questa lettera ci sono gli indizi per sapere dov'è (Con Musica di Mission Impossible o tema di 007)

Caro Zefiro Jones,

Scrivo questa lettera in circostanze urgenti e delicate. Lo zero è stato misteriosamente rubato da un noto matematico. C'è bisogno dell'aiuto di persone che amano la matematica per ritrovarlo e assicurarlo nuovamente alla nostra comunità.

Per aiutarvi a capire l'identità di chi lo ha rubato e, quindi, il luogo dove si trova ora, ho lasciato in questa busta degli indizi, uno per ogni gruppo di matematici. Tuttavia, non posso scrivere direttamente il nome del matematico, poiché questa lettera potrebbe cadere nelle mani sbagliate. Invito quindi i matematici a analizzare attentamente gli indizi e a collaborare tra i diversi gruppi, se necessario.

Perché se nessuno da solo riesce a risolvere il mistero, allora la collaborazione potrebbe essere la chiave. Conoscendo gli indizi degli altri gruppi, infatti, si potranno mettere insieme i pezzi del puzzle e ritrovare lo zero rubato.

Zefiro, devi dire ai matematici, che confido nelle loro capacità e nel loro ingegno. La sicurezza dello zero e, più in generale, della matematica stessa, dipende anche da voi.

Buona fortuna.

Con stima e fiducia,

L'Agente **7

Nella busta ci sono tre biglietti con tre diversi indizi:

- 1729
- È un simbolo che ricorda quello presente dietro la maglietta di Mac Fratm.
- G.H. Hardy

Spiegazione indizi:

- 1729 è il più piccolo numero intero positivo che può essere espresso come somma di due cubi positivi in due modi diversi:
 1729 = 10³ + 0³ o 1729 = 12³ + 1³ Questa proprietà fu scoperta dal matematica.
 - $1729 = 10^3 + 9^3$ e $1729 = 12^3 + 1^3$ Questa proprietà fu scoperta dal matematico indiano Srinivasa Ramanujan
- Mac Fratm è il soprannome dato dai tifosi partenopei al giocatore scozzese
 McTominay (che gioca nel Napoli). Il numero che ha dietro la maglia è il numero 8, che visto in orizzontale ricorda il simbolo dell'infinito.
- G.H. Hardy è un matematico britannico mentore di Srinivasa Ramanujan, cioè il
 matematico indiano protagonista del film L'uomo che vide l'infinito e che, in questa
 storia, ha rubato lo zero. Una volta individuato il matematico, si cerca in india (nella
 mappa dei continenti costruita a terra precedentemente), sotto l'Asia (in India,
 appunto) sono state precedentemente nascoste tre lettere.

Lettera 1 (la legge chi la trova):

Cari amici.

Mi rivolgo a voi con il cuore colmo di emozione e di un senso di necessità che non potevo più ignorare. Sono Ramanujan, umile matematico indiano, e desidero condividere con voi un pensiero che da tempo mi tormenta e che ora, con coraggio, sento il bisogno di esprimere.

Lungo anni di studio e dedizione, abbiamo in India sviluppato e perfezionato una delle più grandi conquiste della nostra civiltà: lo zero. Questa idea, così semplice eppure così rivoluzionaria, ha aperto le porte a un mondo di possibilità che l'umanità ha cominciato a esplorare. Tuttavia, ho notato con grande dispiacere che nel corso del tempo il mondo occidentale tende a dimenticare a chi si deve questa incredibile invenzione, dando lo zero per scontato, dimenticandosi di raccontare la sua storia a scuola, ignorando le nostre radici e il nostro contributo.

Per questo motivo, ho deciso di agire, di riportare lo zero nel mio paese natale, l'India, affinché il mondo ricordi che questa invenzione è un dono per l'intera umanità. Non si tratta di furto nel senso stretto, ma di un gesto simbolico, un atto di restituzione e di riconoscimento di un debito storico che l'Occidente ha troppo a lungo ignorato.

Lo zero è nato qui, tra le nostre montagne, tra le nostre menti, e merita di essere riconosciuto come un patrimonio universale. È giusto che il mondo occidentale comprenda e apprezzi l'immenso contributo della nostra civiltà, e che non si dimentichi che il progresso non ha confini né frontiere, ma si nutre di uno scambio reciproco e di un rispetto condiviso.

Molti credono che lo zero sia di origine araba, ma in realtà gli arabi hanno semplicemente fatto da tramite tra la civiltà indiana, che ha sviluppato il concetto, e l'Europa. È grazie agli arabi che questa importante invenzione si diffuse nel mondo occidentale, ma il suo vero punto di origine risale alle antiche civiltà dell'India, che elaborarono il concetto di zero come cifra e come elemento fondamentale del sistema numerico decimale.

Ho deciso di far ritrovare lo zero anche per un motivo più personale e simbolico: un gesto di amore e di rispetto per la città di Napoli, un luogo che sento vicino al cuore, perché spesso oggetto di pregiudizi, come capita anche con la nostra cara India. E come capita pure con la mia amatissima matematica, che troppe volte viene pensata, vista, insegnata e descritta come un sapere per poche menti elette, mentre invece bisogna adoperarsi perché tutti possano democraticamente avere accesso alla bellezza di questa disciplina. Ma torniamo a Napoli. Non potevo consentire che gli amici napoletani restassero senza il loro meritato quarto scudetto, simbolo di passione, orgoglio e di un'identità che è giusto che sia riconosciuta e rispettata. Perciò vi restituisco lo zero, fatene buon uso e raccontate ai più piccoli la sua storia perché non vada persa e perché tutti sappiano quali sono le sue origini,

Con stima e speranza per un futuro di maggiore riconoscimento e collaborazione,

Srinivasa Ramanujan

Lettera 2: la storia dello zero (la legge un altro gruppo)

Lettera 3: Poesia di Rodari (la legge il terzo gruppo)

Restituzione finale dell'intera attività in cerchio.

Materiali: cassa, lettera Zefiro, storia zero, poesia Rodari, simboli comnunità matematiche, fogli continente, scatola continente, mappe, dispense, cappello e zaino da esploratore per Zefiro Jones, indizi.

Matematica Maya

La civiltà Maya fiorì tra il 250 e il 900 d.C., ma non ebbe alcuna influenza sulla storia dell'Europa fino al 1500. Infatti, la civiltà Maya (insieme a quella azteca e incas) fu "studiata" solo dopo la scoperta dell'America. Precisamente nel 1505 Hernán Cortés, sbarcò nell'isola di Hispaniola (attualmente in Santo Domingo) e successivamente conquistò Cuba nel 1511. Infine, nel 1519 si diresse nello Yucatán, dove viveva il popolo Maya.

Un personaggio di spicco per questa storia è Diego de Landa, vescovo cattolico che, successivamente alla conquista dello Yucatan, si trasferì dalla Spagna per "evangelizzare" il popolo Maya. De Landa aveva simpatia per il popolo Maya, e trovava analogie tra le due religioni per quel che riguarda i riti, che prevedevano sacrifici umani, ricordando la figura di Cristo.

I Maya non accettarono di buon grado la religione cattolica, così De Landa fece arrestare e torturare molti elementi di spicco della civiltà Maya e, soprattutto, fece distruggere tutti i loro idoli e bruciò tutti i loro libri, affermando "Troviamo tutti i libri scritti nella loro lingua e dato che in essi non v'è cosa che non sia corrotta da superstizione e falsità diabolica, bruciamoli indistintamente!"

Così abbiamo perso gran parte dei documenti che avrebbero potuto svelarci la cultura Maya ...

Forse preso dai rimorsi, Landa divenne uno dei maggiori studiosi della cultura Maya e paradossalmente, l'opera di Diego de Landa, colui che voleva annichilire la cultura maya, oggi rappresenta il riferimento principale per tutti i ricercatori e gli studiosi di questo mondo.

Una piccola parte dei documenti sopravvissero a Landa: il codice di Dresda, il codice di Madrid e il codice di Parigi, che trattano essenzialmente temi di ordine religioso e rituale. Nel codice di Dresda troviamo delle informazioni sul ciclo di Venere.

Ecco qualche concetto sui calendari Maya.

I Maya usavano essenzialmente due calendari. Il primo ero quello rituale, Tzolkin, composto da 260 giorni, (la durata del ciclo di Venere attorno al sole e corrispondente circa alla durata di una gestazione umana) divisi in 13 mesi da 20 giorni; ogni mese aveva il nome di un dio, mentre i giorni erano nominati da 0 a 19.

Il secondo, Haab, era il calendario civile e aveva 365 giorni, diviso in 18 mesi da 20 giorni (da 0 a 19) più un piccolo mese di 5 giorni, chiamato Wayeb. Quei 5 giorni erano considerati nefasti e la popolazione rimaneva chiusa in casa. Chi nasceva durante il Wayeb era considerato sfortunato e destinato a vivere una vita povera e infelice.

Ora, i due calendari completavano insieme un ciclo dopo 18980 = m.c.m. (260, 365) giorni, cioè ogni 52 anni Haab = 73 anni Tzolkin, periodo che i Maya consideravano come un ciclo sacro.

Inoltre ogni 104 anni, Venere compiva il suo periodo sinodico di 584 giorni (tempo necessario perché un corpo completi la sua orbita rispetto alla terra, mentre il periodo siderale è il tempo di rivoluzione intorno al sole), per 65 volte quindi ogni 104 anni i Maya celebravano in grande la fine del ciclo.

Ecco perché i Maya avevano delle date molto care (vedi 21 dicembre 2012). In particolare, essi credevano che il momento in cui tutti i cicli erano iniziati fosse l'inizio del mondo, che avevano calcolato per il 12 Agosto 3113 a.C. (data per cui "sappiamo" che il mondo già esisteva).

Con strumenti tecnici molto rozzi, i Maya riuscirono a calcolare tutti i vari cicli dei pianeti e anche la durata dell'anno solare come di 365,242 giorni (il valore che oggi accettiamo è di 365,242198 giorni) e la durata del mese lunare come 29,5302 giorni (il valore moderno è di 29,53059 giorni).

Il periodo classico dei Maya copre il periodo dal 250 DC al 900 DC.

$^{\circ}\mathbb{Q}$	1	2	3 •••	4
5	6 •	7	8	9
10		12	13	14
15	16 •	17 ••	18	19 ••••
20	21	22 •	23 •	24
25 •	26 •	27 •	28 •	29 •
Mayan positional number system				

Quasi certamente la ragione della base 20 deriva dalle popolazioni antiche che contavano sia sulle dita delle mani che su quelle dei piedi. Anche se si trattava di un sistema a base 20, chiamato sistema vigesimale, si può notare come il 5 giochi un ruolo importante, ancora una volta chiaramente in relazione alle cinque dita delle mani e dei piedi. In effetti, vale la pena di notare che, sebbene il sistema sia in base 20, ha solo tre simboli numerici (forse il simbolo dell'unità derivante da un sassolino o un chicco di mais e il simbolo della linea da un bastoncino usato per contare).

Spesso si dice che sarebbe impossibile avere un sistema numerico a base larga, perché comporterebbe la memorizzazione di tanti simboli speciali. Questo dimostra come le persone siano condizionate dal sistema che utilizzano e possano vedere solo varianti del sistema numerico in stretta analogia con quello con cui hanno familiarità. Caratteristiche sorprendenti e avanzate del sistema numerico maya sono lo zero, indicato da una conchiglia, e la natura posizionale del sistema.

Tuttavia, il sistema non era un vero sistema posizionale, come spiegheremo ora.

In un vero sistema a base venti, la prima cifra dovrebbe denotare il numero di unità fino a 19, la seconda cifra dovrebbe denotare il numero di "ventine" fino a 19 ventine, la terza cifra dovrebbe denotare il numero di "quattrocentinaia" fino a 19 quattrocentinaia, etc ...

Sebbene il sistema Maya cominci con l'unità fino a 19 e le ventine fino a 19 ventine, dal terzo posto il sistema cambia e la terza cifra denota il numero di "trecentosessantine" (360, cioè 18×20 , invece di $400 = 20 \times 20$).

Dopo di che il sistema torna ai multipli di 20, per cui il quarto posto è il numero di 18 × 202, il prossimo il numero 18 × 203 e così via. Per esempio [8; 14; 3; 1; 12] rappresenta il numero

$$12 + 1 \times 20 + 3 \times 18 \times 20 + 14 \times 18 \times 202 + 8 \times 18 \times 203 = 1253912$$
.

Un secondo esempio: [9; 8; 9; 13; 0] rappresenta

$$0 + 13 \times 20 + 9 \times 18 \times 20 + 8 \times 18 \times 202 + 9 \times 18 \times 203 = 1357100$$
.

Il sistema appena descritto è utilizzato nel Codice di Dresda ed è l'unico sistema di cui abbiamo testimonianza scritta. Ifrah sostiene che il sistema numerico appena introdotto era il sistema dei sacerdoti e degli astronomi Maya, che lo utilizzavano per i calcoli astronomici e calendariali. È indubbiamente così e il fatto che fosse utilizzato in questo modo spiega alcune irregolarità del sistema, come vedremo in seguito. Era il sistema utilizzato per i calendari. Tuttavia Ifrah sostiene anche l'esistenza di un secondo sistema a base 20 che sarebbe stato utilizzato dai mercanti e che sarebbe stato il sistema numerico usato anche nel linguaggio. Questo, sostiene, aveva come unità un cerchio o un punto (che secondo alcuni derivava da una moneta a base di semi di cacao, secondo altri da un sasso usato per contare), una barra orizzontale per il 5 e simboli speciali per 20, 400, 8000 ecc. Ifrah scrive:-

Anche se non ne rimane traccia, possiamo ragionevolmente supporre che i Maya avessero un sistema numerico di questo tipo e che i numeri intermedi fossero calcolati ripetendo i segni tutte le volte che era necessario.

I numeri erano rappresentati attraverso tre simboli, una conchiglia vuota, un punto (Frijolito o Maisito, cioè un chicco di mais) e una linea (Palito cioè una barretta di legno), che rappresentavano rispettivamente lo zero, l'uno e il cinque.

Ad esempio, il numero 69 è espresso come

$$3 \times 20 = 60$$

$$9 \times 1 = 9$$

In tutti gli esempi a noi giunti di rappresentazione di grandi numeri la base moltiplicativa per il terzo livello è 360 (18×20) anziché 400 (20×20). Si pensa che questo sia dovuto a motivi religiosi legati al loro calendario (360 è un numero vicino alla durata dell'anno), mentre il rapporto tra i livelli più alti riprende ad essere 20.

Per effettuare addizioni e sottrazioni i Maya usavano un particolare tipo di abaco, nel quale le cifre erano rappresentate per unità o per cinquine su una tabella (tablero), simile a quella utilizzata per la moltiplicazione araba.

L'addizione era effettuata combinando i diversi simboli:

$$\frac{5}{} + \frac{8}{} = \frac{13}{}$$

Se dopo l'addizione vi erano più di cinque punti, se ne rimpiazzavano cinque con una linea; allo stesso modo se si raggiungevano le quattro linee si aggiungeva un punto nella colonna di grado più alto.

Dobbiamo anche notare che i Maya quasi certamente non avevano metodi di moltiplicazione per i loro numeri e sicuramente non usavano la divisione dei numeri. Tuttavia, il sistema numerico maya è certamente in grado di essere utilizzato per le operazioni di moltiplicazione e divisione.

Può essere utile:

https://www.dmi.unict.it/archelab/projects/abacomayadecimale/doc/UserGuide.pdf

I pitagorici

Se aprite un libro di storia della filosofia (occidentale, europea¹), il primo nome che trovate è quello di Talete di Mileto², vissuto tra il VII e il VI secolo a.C., e del quale tutti imparano a scuola l'affermazione: "l'acqua è il principio di tutte le cose". Ma anche se aprite un libro di storia della fisica, ecco di nuovo al primo posto Talete, il quale predisse l'eclisse solare del 28 maggio del 585 a.C.; per non parlare della storia della matematica, che comincia con i teoremi di Talete. Ora, Talete sarà stato senz'altro un uomo geniale ("ingegnoso nelle tecniche", lo chiamerà tre secoli dopo Platone); ma il fatto che fosse nello stesso tempo filosofo, astronomo, geometra, ingegnere non deve essere considerato con i criteri di oggi. Nelle colonie greche dell'Asia Minore (Turchia) e delle isole dell'Egeo, nasce infatti la prima scienza, che non è ancora suddivisa in rami, in discipline, in scienze speciali. Sì tratta, piuttosto, di un nuovo atteggiamento complessivo nei confronti della natura. Nelle isole e sulle coste, dall'Asia Minore alla Sicilia, le colonie greche sono collettività di navigatori, di artigiani, di costruttori. La natura non è più per loro un complesso di oscure forze, personificate in divinità (animismo), ma una realtà da conoscere e dominare razionalmente e tecnicamente. La "spiegazione" fantastica dei fenomeni naturali (mito), e il tentativo di renderli favorevoli per gli uomini con esorcismi, riti e preghiere (religione primitiva, magia) non corrispondono più alle nuove esigenze e attività, anche se continuano ad esistere come tradizione, e come simbolo della comunità stessa (divinità locali). Dal mito si separa perciò la scienza, la "filosofia naturale", l'investigazione della natura con la sperimentazione pratica e con la ragione.

Un compito immenso, e di carattere generale, si presenta ai primi filosofi naturali: comprendere come \grave{e} tutto l'Universo, trasformare il **caos** in **cosmos**.

La scuola milesia, o ionica (Mileto, lo abbiamo già detto in nota, era una colonia ionica), fondata da Talete, proseguita da Anassimandro, da Ecateo, da Anassimene, fu perciò scuola di astronomi, geografi, geometri, fisici, che cercavano di descrivere come sono fatti il Cielo e la Terra e di spiegare i fenomeni che in Cielo e in Terra si manifestano, e insieme scuola di filosofi che cercavano di capire la struttura dell'Universo, di scoprire un'unità nella diversità. Essi cercavano la *arché:* traducendo in italiano, cercavano il **principio primo, l'elemento base** dal quale nascono tutte le differenti sostanze. Talete, vedendo l'acqua trasformarsi in vapore e ghiaccio, e nubi e ghiacci ritrasformarsi in acqua (ciclo dell'acqua), pensò che il principio primo fosse l'acqua, capace di tante trasmutazioni (liquido, solido, aeriforme). Anassimandrà pensò a una sostanza primitiva indeterminata (*apeiron* in greco); Anassimene all'aria

Un'idea davvero geniale, e già molto astratta, sulla questione del "principio primo", venne espressa da Pitagora - o forse più tardi dalla scuola che da lui prese il nome (scuola pitagorica).

Anche Pitagora nasce — all'incirca neI 570 a. C. — in una colonia ionica, e precisamente nell'isola di Samo, vicino alle coste dell'Asia Minore. Si trasferisce però nella cosiddetta Magna Grecia, cioè nell'Italia Meridionale, e precisamente a Crotone (oggi: Cotrone) in Calabria.

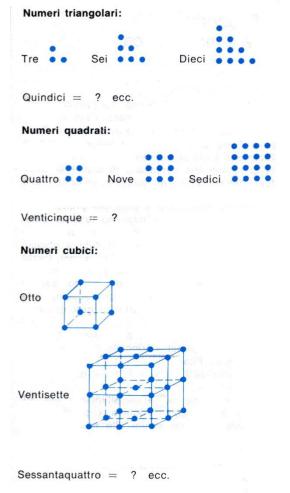
I Pitagorici affermavano che il principio di tutte le cose è i numero, dicevano che « tutte le cose sono numero". Che cosa avevano in testa facendo un'affermazione che per noi, oggi, suona molto strana? Avevano in testa i numeri concepiti come un "reticolato geometrico", come un insieme di palline disposte in maniera da formare figure geometriche: **triangoli**,

¹ Siamo troppo abituati a considerare l'Europa il centro del mondo (eurocentrismo), e a dimenticarci che ci sono state grandi e antiche civiltà non europee: in Cina, in India, nell'America precolombiana.

² Mileto era una colonia greca, abitata dalla stirpe ionica, sulle coste dell'Asia Minore.

quadrati, cubi, piramidi.

Diamo qualche esempio dei numeri figurati dei pitagorici:



Con la loro visione geometrica dei numeri, i Pitagorici ottennero risultati assai belli sui numeri interi (aritmogeometria dei pitagorici). Abbiamo, nell'elenco dei primi numeri dei vari tipi, omesso il numero uno, che è ...tutto: il primo numero triangolare, quadrato, cubico, tetraedale. Quello che ci interessa sottolineare ora è che, per i Pitagorici, i **punti** (da loro chiamati *monadi* = unità) coi quali costruivano le varie figure erano insieme atomi fisici e indivisibili geometrici. Erano, insomma, gli elementi primi, non altrimenti decomponibili, tanto dei corpi fisici quanto delle figure geometriche; non veniva fatta differenza tra "corpo fisico" e "figura geometrica", geometria e fisica erano la stessa cosa. (Atomo vuoi dire esattamente "in-divisibile"; in greco a particella "a" significa "non", quindi "a-tomo" = "indivisibile").

Per loro, una sottilissima **bacchetta** e un **segmento**, in senso geometrico, erano la stessa cosa. Un segmento, tratto di una retta, era per loro un ente fisico, costituito da un certo numero di punti messi in fila:

.....

Numeri piramidali, o tetraedrali:

Quattro

Dieci

Venti = ? ecc.

Per i Pitagorici, quindi, un segmento non poteva essere suddiviso indefinitamente in parti sempre più piccole. No, esso era composto da un numero **finito** di monadi (punti-atomi), **dotate di dimensioni**, se pure piccolissime. Di conseguenza, la lunghezza di ogni possibile

segmento era un multiplo esatto di un "metro assoluto": la lunghezza di una singola monade. In altre parole: dati due segmenti a e b, doveva esserci in ogni caso un sottomultiplo comune ai due segmenti, in quanto, se a \grave{e} composto da m "monadi", e b da n "monadi", essendo tutte le monadi uguali, deve ben essere:

$$\frac{1}{m}a = \frac{1}{n}b$$

Ma allora il rapporto $\frac{a}{b}$ dovrebbe essere la **frazione** (quoziente di due interi):

$$\frac{m}{n}$$

a si otterrebbe prendendo m volte la n-sima parte di b e due segmenti dovrebbero essere

sempre commensurabili tra di loro.

Ma questo **non è vero**, come scoprirono anche i Pitagorici; con sgomento.

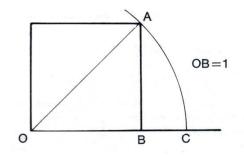
Sulla retta esistono numeri diversi dai razionali

Sulla retta i numeri interi si trovano distanziati tra loro; i razionali invece sono vicinissimi, basta pensare ai termini della successione:

$$\frac{1}{2}$$
, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$,...

che si «addensano» verso Io zero. Ma, come lo zero ha dei numeri razionali che gli si addensano vicini, anche intorno ad uno qualunque degli altri numeri si addensano infiniti numeri razionali; si pensi ad esempio a quanti numeri razionali si possono mettere fra $\frac{1}{2}$ e 1.

Questo fatto si esprime dicendo che l'insieme dei numeri razionali è denso; quello degli interi si chiama invece discreto perché tra due interi c'è sempre un numero finito di interi. Ma, ci si chiede: i numeri razionali esauriscono tutti i punti della retta? Per rispondere a questo interrogativo, riprendiamo la retta dei numeri e costruiamo un quadrato con un lato coincidente con il segmento CB di lunghezza unitaria.



Ilteorema di Pitagora ci permette di calcolare la diagonale:

$$OA = \sqrt{OB^2 + BA^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

 $\sqrt{2}$ è la **lunghezza** del segmento OA e quindi è naturale considerarla come un **numero.** Facendo centro in C con apertura CA fino ad incontrare la

retta dei numeri in C, otterremo un segmento OC= CA, che quindi ha per **misura** $\sqrt{2}$.

Che razza di numero è $\sqrt{2}$? Per definizione è quel numero che elevato al quadrato dà 2; non è quindi un numero intero perché nessun numero intero ha per quadrato 2. Vediamo se si tratta di un numero razionale.

Immaginiamo che si tratti di una frazione, e cioè poniamo:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

dove si può sempre supporre che la frazione sia ridotta ai minimi termini, cioè che m ed n non abbiano divisori comuni. Elevando al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza avremo:

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Questa relazione è assurda: infatti il primo membro è un numero intero mentre il secondo non è certamente un numero intero, perché m^2 non può, per quanto s'è detto, essere multiplo di n^2 . Ma, se è assurda questa relazione, lo è anche quella da cui questa è stata ottenuta e cioè:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

questo significa che $\sqrt{2}$ non è una frazione. Abbiamo perciò trovato sulla retta un punto C a cui non corrisponde un numero razionale. È naturale pensare che questo non sia l'unico numero, e così è: basta infatti considerare $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... e ripetere per essi lo stesso ragionamento fatto per $\sqrt{2}$.

Dobbiamo quindi dedurre che i numeri razionali lasciano sulla retta dei «buchi» o per meglio dire delle «lacune» infinitesime; queste lacune sono riempite da numeri decimali illimitati non periodici: i numeri irrazionali.

La crisi dei pitagorici

I problemi relativi all'infinito hanno avuto la loro influenza in tutti i tempi, e hanno sempre (anche adesso) presentato gravi difficoltà.

La scoperta della incommensurabilità tra diagonale e lato di uno stesso quadrato, fatta dai Pitagorici se non dallo stesso Pitagora, metteva infatti in crisi **tutta** la loro filosofia, perché faceva cadere l'ipotesi che le cose fossero numeri, che il costituente della realtà fosse la monade, punto-atomo, indivisibile ma non evanescente dotato di dimensioni.

Scoperto che esistono segmenti che non possiedono un sottomultiplo comune (segmenti incommensurabili) ne viene di conseguenza che il punto non può avere dimensioni perché, se così fosse, esso dovrebbe costituire un sottomultiplo di tutti i segmenti, e quindi tutti i segmenti dovrebbero essere commensurabili tra di loro.

I greci, costretti ad ammettere che il punto non può avere dimensioni, deducono che ciascun segmento è costituito da infiniti punti. Di qui l'origine della tragedia pitagorica che seguì a scoperta degli irrazionali. La geometria, nata per studiare il mondo esterno, il **reale**, si rivelava **diversa dal mondo esterno.**

L'atomo ha dimensioni, il punto no; essi non sono quindi la stessa cosa come avevano ritenuto i Pitagorici.

Il problema fu risolto quando, rinunciando alla convinzione che costruire la geometria voleva dire fare una costruzione razionale del reale, si ammise che la geometria rappresentasse una **idealizzazione della realtà**. (questa idea si venne formando nella stessa scuola pitagorica).

Non dobbiamo stupirci del fatto che la scoperta dei numeri irrazionali fosse tenuta gelosamente segreta dai Pitagorici. Bisogna sapere che essi costituivano una singolare "setta", una specie di antica massoneria, che aveva i suoi riti e i suoi misteri, e che aveva un suo preciso "credo" scientifico-religioso e anche politico. (In politica, i Pitagorici, e il loro maestro Pitagora per primo, erano per i governi aristocratici, autoritari, tirannici — " tiranno " era per i greci sinonimo di monarca assoluto. Spesso erano uomini di potere; così Archita, l'ultimo grande della scuola, governò Taranto nel quarto secolo a. C.).

Una leggenda narra che lppaso di Metaponto (Metaponto è un'altra città dell'attuale Calabria), discepolo diretto di Pitagora, avrebbe tradito il segreto dell'esistenza di grandezze incommensurabili, e per questo "sacrilegio" (nonché, pare, per certe sue lodevoli tendenze democratiche), sarebbe stato colpito dall'ira degli Dèi, amici della setta pitagorica, affogando in un naufragio. In verità, faceva naufragio la teoria pitagorica, attribuendo dimensioni al punto geometrico, negando l'esistenza di grandezze incommensurabili e quindi dei numeri irrazionali.

Fu la prima grande, e sconvolgente, rivoluzione scientifica. Non meno grande, e sconvolgente, dell'ipotesi di Copernico, suffragata da Galileo, che "fermava" il Sole e "metteva in moto" la Terra, o della teoria della relatività dimostrata da Einstein, che non ci permette più

di parlare in senso assoluto di lunghezze e di durate (dipendono dalla velocità dell'osservatore).

Abbiamo un'interessantissima testimonianza di Platone .sulla "sensazionalità" che ebbe la scoperta degli irrazionali. Platone conosceva bene la Magna Grecia e i suoi centri culturali; nel 388 era andato appositamente a Taranto per conoscere Archita. Platone (l'Ateniese), di ritorno dai suoi viaggi, discutendo con Clinia nel dialogo *Le Leggi*, giudica l'ignoranza dei suoi concittadini cosa "non già propria d'uomini, ma piuttosto di branchi di maiali". Ne prova vergogna non "per sé solamente, ma per tutti i Greci".

Che cosa è mai che i Greci non sanno, e che li fa chiamare "branco di maiali" da Platone Ateniese? "Non pensiamo tutti noi Greci —dice Ateniese a Clinia — che lunghezza e larghezza sono in certa guisa commensurabili con la profondità, e lunghezza e larghezza tra di loro?"

"Proprio così", conferma Clinia. E l'Ateniese allora ribatte:

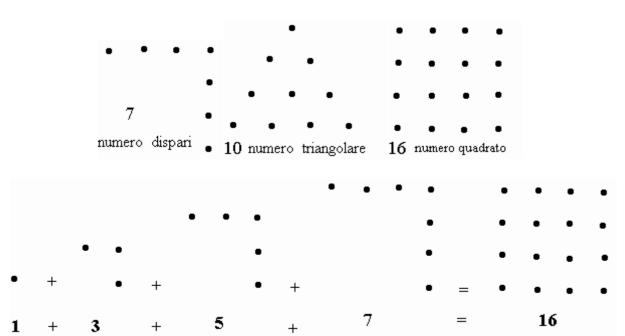
"Ma se esse non sono assolutamente commensurabili, e tutti i Greci, come dicevo, pensano che lo sono, non è giusto che provi vergogna per essi tutti, e si dica loro: Ottimi Greci, questa è una di quelle cose delle quali dicevamo che è vergognoso ignorarle, mentre non è affatto un pregio il conoscere ciò che è necessario?"

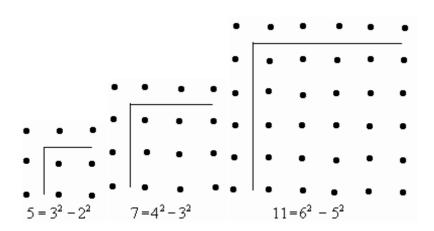
Il grande Platone Ateniese, allievo di Socrate e autore dei famosi *Dialoghi*, vive tra il 428 e il 348 a.C. In una certa misura, Platone è ancora un "filosofo naturale", si occupa di tutto, della struttura dell'Universo e della repubblica degli uomini, di leggi scientifiche e di costituzioni civili. Ma la scoperta dell'esistenza di numeri irrazionali, il "naufragio di Pitagora", porta Platone a considerare gli enti geometrici, e in primo luogo il punto, come enti ideali, che possiedono una realtà diversa dagli enti corporei. Con Platone, perciò, la geometria come noi la intendiamo, lo studio idealizzato e razionale di figure che sono astrazioni e immagini della realtà fisica, non realtà fisica esse stesse, si stacca tanto dalla filosofia come scienza generale dei principi, quanto dalla fisica. La monade pitagorica, che era insieme punto geometrico e atomo fisico, si "sdoppia". Democrito di Abdera, che visse all'incirca tra il 460 e il 380 a. C., immagina il mondo fisico costituito da atomi, particelle piccolissime, ma pesanti e dotate di dimensioni, che con il loro vario intrecciarsi e combinarsi, pur essendo tutti assolutamente identici, danno luogo alla inesauribile varietà delle sostanze. Invece Euclide di Alessandria, sotto il regno "ellenistico" di Tolomeo Primo, attorno al 300 a. C., nella sua grande opera Gli Elementi costituisce la geometria in scienza a sé stante. In una delle sue prime definizioni Euclide, seguendo Platone dal quale discente, dice che "il punto è ciò che non ha parti". Geometria e fisica si sono separate. Ne ha piena consapevolezza Aristotele (384-322 a. C.), e vogliamo concludere con un brano della sua Metafisica:

Delle definizioni e delle essenze alcune sono come quella di "camuso", altre come quella di "curvo", i quali [aggettivi] differiscono in questo, che in camuso è compresa sempre la materia (camuso diciamo un naso che ha una certa curva), la curvità, invece, è compresa senza una materia sensibile. Quindi, tutti gli oggetti della fisica si intendono similmente a camuso, ad esempio naso, occhio, fisionomia, carne, ossa, animale, insomma tutte [le] cose [che] mai sono senza materia..."

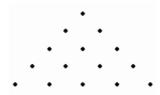
Giochiamo coi numeri pitagorici

Ogni numero dispari è uguale alla differenza di due quadrati . Precisamente dei quadrati dei due numeri consecutivi di cui il numero dato è uguale alla somma .





• Se partiamo da 1 la somma di un numero qualsiasi di numeri interi consecutivi è un numero triangolare come indica la seguente figura :



raddoppiando l'immagine troviamo

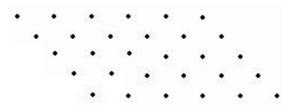


immagine che ci fornisce la somma dei primi n numeri naturali, uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$

• La somma di una successione di numeri dispari consecutivi dà sempre un numero quadrato come indica la seguente figura



Se sommo n numeri dispari consecutivi trovo sempre il numero n^2 :

$$1+3+5+7+\dots 2n+1=n^2$$

• La somma di una successione di numeri pari consecutivi dà sempre un numero rettangolare come indica la seguente figura



$$2+4+6=3\cdot 4=12$$

Il numero 12 è il **numero rettangolare che si ottiene sommando i primi 3 numeri pari** .. Se sommo n numeri pari consecutivi trovo sempre il numero rettangolare

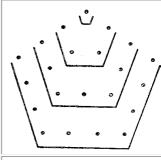
$$n(n + 1)$$
.

Le linee diagonali della figura di un qualsiasi numero rettangolare ci dicono che **qualsiasi** numero rettangolare è uguale alla **somma di due numeri triangolari uguali** .



Numeri naturali	1,2,3,4,5	somma triangolare ; numeri triangolari
Numeri dispari	1,3,5,7,9	somma quadrata ; numeri quadrati
Numeri pari	2,4,6,8,10	somma rettangolare ; numeri rettangolari
Contando per 3	1,4,7,10,13	somma pentagonale ; numeri pentagonali
Contando per 4	1,5,9,13,17	somma esagonale ; numeri esagonali

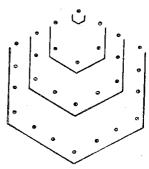
numeri pentagonali : 1,5,12,22,35,51,70 ... numeri esagonali : 1,6,15,28,45,66,91 ...



Numeri pentagonali

Per n = 4 otteniamo il numero pentagonale 22 = 1 + 4 + 7 + 10

Per n = 5 otteniamo il numero pentagonale 35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13



Numeri esagonali

per n = 4 otteniamo il numero esagonale 28 = 1 + 5 + 9 + 13

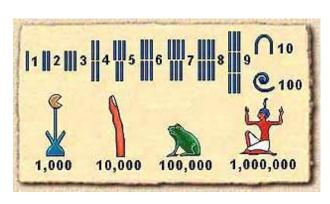
per n = 5 otteniamo il numero esagonale 45 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17

La matematica Egiziana

La civiltà egiziana fiorì tra il 4000 a.C. e 300 a.C. Il periodo dal 332 a.C. al 600 d.C. è detto periodo alessandrino, perché successivo alla conquista di Alessandro Magno. Prima di tale conquista, che vide il reciproco influenzarsi delle due culture egizia e greca, gli Egiziani, a differenza dei Babilonesi, ebbero una cultura, e anche una matematica, auto referenziata. I due documenti principali che ci raccontano la matematica egiziana sono il papiro di Mosca e il papiro di Rhind (British Museum); quest'ultimo fu scoperto nel 1858 da Rhind ed è noto anche come papiro di Ahmes (l'autore).

Il papiro di Ahmes inizia con le parole "Regole per ottenere la conoscenza delle cose oscure". In effetti, come vedremo, si tratta appunto solo di "regole", di procedimenti, non c'è alcuna dimostrazione o astrazione, tanto che alcuni studiosi ipotizzano che Ahmes fosse solo uno studente e che il papiro sia una sorta di quaderno degli appunti. La maggior parte degli studiosi concorda invece che Ahmes fosse uno scriba.

L'aritmetica



La scrittura egiziana era fatta di geroglifici, e similmente, simboli erano usati anche per i numeri.

Addizione e sottrazione erano fatte

essenzialmente da un punto di vista grafico (aggiungendo i simboli o elidendoli).

Moltiplicazione e divisione venivano fatte costruendo una sorta di tavole. Vediamo un esempio. Vogliamo ottenere 12 * 26.

Scriviamo due colonne, nella prima iniziamo da 1 e nella seconda da 12.

In ogni riga si moltiplica per due finché nella prima colonna non ho un numero maggiore di 26. A questo punto si scrive il 26 come somma di numeri della prima colonna. Il risultato della moltiplicazione per 12 sarà la somma dei numeri corrispondenti della seconda colonna.

1	12	
2	24	In pratica nella prima colonna ci sono le potenze di 2.
4	48	26 = 2+8+16
8	96	Allora 12*26 sarà 24 + 96 + 192 = 312.
16	192	Allo stesso modo veníva eseguita la divisione (nella prima
32		colonna invece che 1, 2, 4, 8, si avrà ½, ¼, 1/8,

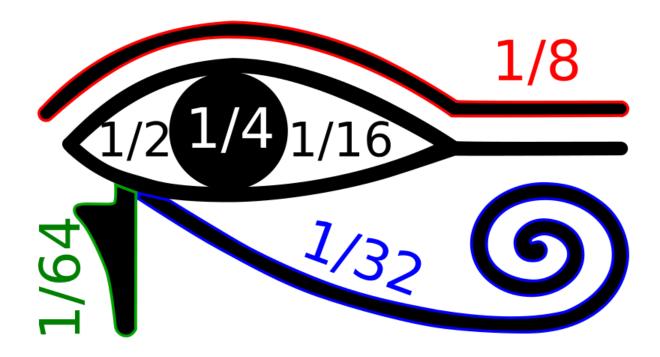
Anche gli egiziani, quindi, come i babilonesi, conoscevano le frazioni e sconoscevano gli irrazionali, cioè quando usavano una radice erano convinti che corrispondesse a un numero razionale (cioè vi facevano corrispondere una sua approssimazione, che per i calcoli a cui serviva, andava benissimo).

Fondamentalmente gli egiziani erano, in confronto ai greci, "rozzi carpentieri" (Kline) non avevano alcun interesse diverso da quello pratico nello sviluppo della matematica, che usarono per l'agrimensura, per l'economia, per l'astrologia (anche gli egiziani, come i babilonesi, svilupparono un calendario e combinarono le loro conoscenze matematiche e astronomiche ad esempio per costruire templi in modo che in un certo giorno a una certa ora venisse illuminato il dio posto sull'altare).

Tuttavia la loro matematica, come quella dei babilonesi, ha un valore come introduzione ai concetti matematici e come testimonianza di un precoce interesse e capacità nei popoli antichi del contare. Inoltre la matematica assunse un ruolo simbolico del divino. L'occhio di Horus (o occhio di Ra) rappresentava l'occhio di Horus, che, combattendo contro Seth aveva perduto l'occhio sinistro, che si frantumò in 63 parti. L'occhio fu ridonato a Horus da Toth, dio della giustizia, che aggiunse una parte. Ecco come l'occhio viene disegnato come somma di

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \ \mathbf{0} = \frac{1}{4} \ \mathbf{0} = \frac{1}{8} \ \mathbf{D} = \frac{1}{16} \ \mathbf{0} = \frac{1}{32} \ \mathbf{1} = \frac{1}{64}$$

a questo occhio manca il 64-simo pezzo, aggiunto da Toth.



L'occhio è simbolo di prosperità, di potere regale e di buona salute.

LO ZERO E LA SUA STORIA

L'abaco come mezzo di calcolo fu superato dal sistema posizionale soltanto quando quest'ultimo fu dotato di un vero zero. Cioè, non soltanto di uno zero come quello dei Babilonesi, che può stare fra altri numeri a indicare la mancanza di una potenza della base. e neppure di uno zero come quello di Tolomeo, che può stare anche al fondo di un numero a indicare la mancanza di un'unità. Bensì di uno zero che può stare anche da solo, a indicare una quantità nulla.

Detto altrimenti, lo zero come indicatore di un posto vuoto non è ancora un numero autonomo, alla pari con tutti gli altri: è solo l'analogo di un buco in un pieno, e non del vuoto o del nulla. Gli indiani poterono arrivare a una concezione completa dello zero perché usavano la matematica a fini di contabilità. registravano dunque i "dare" e gli "avere", e li distinguevano non con i nostri segni "meno" e "più", ma mediante due colori: nero per i debiti, e rosso per i crediti. nella trasmissione da Oriente a Occidente i colori si sono però invertiti, e oggi noi diciamo "andare in rosso" quando ci riferiamo ai bilanci in nega tivo, invece che in positivo. da questo punto di vista contabile, lo zero corrisponde semplicemente al "pareggio": cioè, alla mancanza di debiti e crediti.

il primo sistema posizionale completo dello zero fu introdotto in india nei primi secoli della nostra era, anche se non sappiamo esattamente quando. Certamente entro il 458, anno in cui fu descritto nel trattato di cosmologia Lokavibhaga, "le parti dell'universo". ma sicuramente molto prima, visto che l'opera si presenta come la registrazione in sanscrito di una "ininterrotta tradizione orale dei dottori giainisti", che a sua volta derivava dagli indiani. nel manoscritto Bakhshali, ritrovato nell'omonima cittadina pachistana nel 1881 e considerato il più antico documento matematico indiano, lo zero viene indicato con un punto • ed è chiamato shunya, che significa "vuoto", "assenza" o "nulla". dalla traduzione araba sifr deriva la parola "cifra". e dalla successiva traduzione latina zephirum derivano le parole "zevero" o "zefiro", che per contrazione divennero finalmente zero, usato per la prima volta nel 1491 da Filippo Calandri nell'Opuscolo di aritmetica.

Come si può però immaginare dalle abitudini indiane descritte in precedenza, oltre che con shunya lo zero veniva indicato con un'interminabile lista di nomi, che lo richiamavano a volte in maniera più o meno diretta, e altre per contrapposizione. Anzitutto, il punto (bindu) che lo rappresentava in origine, ma anche il buco (randhra), la volta celeste (gagana), il cielo (nabha), l'atmosfera (ambara), lo spazio (kha), l'etere (akasha), l'infinito (ananta) e il tutto (purna).

Una volta introdotto come numero, lo zero divenne sia l'elemento neutro della somma e della sottrazione, sia l'annullatore del prodotto. Le leggi che coinvolgono lo zero furono enunciate per la prima volta nel 628 da Brahmagupta nel Brahma Sphuta Siddhanta, "Rivisitazione della dottrina di Brahma", e si riducono a queste note formule:

$$x \pm 0 = x$$
 $x - x = 0$ $x \cdot 0 = 0$ $\frac{0}{x} = 0$.

In particolare, 0 `e divisibile per qualunque numero, e nessun altro numero è divisibile per 0. Lo stesso Brahmagupta usò però il termine *khachheda*, "diviso per lo spazio", per indicare l'infinito.

IL TRIONFO DELLO ZERO



C'era una volta un povero Zero tondo come un'o, tanto buono ma però contava proprio zero e nessuno lo voleva in compaper non buttarsi via. gnia Una volta, per caso, trovò il numero Uno di cattivo umore perché non riusciva a contare fino a tre. Vedendolo cosi nero il piccolo Zero si fece coraggio, sulla sua macchina gli offerse un passaggio, e schiacciò l'acceleratore, fiero assai dell'onore di avere a bordo un simile personaggio. D'un tratto chi si vede fermo sul marciapiede? Il signor Tre che si leva

il cappello e fa un inchino fino al tombino... e poi, per Giove, il Sette, l'Otto, il Nove che fanno lo stesso. Ma cosa era successo? Che l'Uno e lo Zero uno qua, l'altro là, formavano un gran Dieci: nientemeno, un'autorità! Da quel giorno lo Zero fu molto rispettato, anzi da tutti i numeri ricercato e corteggiato: gli cedevano la destra con zelo e premura, (di tenerlo a sinistra avevano paura), lo invitavano a cena, gli pagavano il cinemà, per il piccolo Zero fu la felicità.