Probabilità: Quando una parola non basta

Riccardo Rosso

Dipartimento di Matematica "F. CASORATI", Università di PAVIA

Sottotitolo

- Ian HACKING (1936-2023)
- *L'emergenza della probabilità* (1975)

È importante osservare come la probabilità che comparve così all'improvviso abbia carattere bifronte. Da un lato, infatti, essa è statistica e riguarda le leggi stocastiche dei processi casuali, dall'altro è epistemologica, volta a valutare gradi ragionevoli di credenza in proposizioni assolutamente prive di contenuto statistico.

Rassegna Stampa

- John STUART-MILLS (1882)

Rassegna Stampa

- John STUART-MILLS (1882)

  [Il calcolo delle probabilità] è il vero obbrobrio della matematica.

Rassegna Stampa

- Henri POINCARÉ
- *Calcul des Probabilités* (1893)

Rassegna Stampa

- Henri POINCARÉ (1893)
- *Calcul des Probabilités* (1893)

Non si può quasi dare una definizione soddisfacente della probabilità.

Rassegna Stampa

- Richard von Mises (1919)

Rassegna Stampa

- Richard von Mises (1919)

> Nessun matematico, che abbia tra le mani uno dei libri di testo esistenti, negherà la necessità di fondamenti precisi per il calcolo delle probabilità: di fatto non è possibile qualificare in altro modo lo stato attuale se non dicendo che il calcolo delle probabilità oggi *non è una disciplina matematica*.

Rassegna Stampa

- John VENN (1866)

Rassegna Stampa

- John VENN (1866)

  Procedendo a prendere più termini della serie [di prove], troveremo che la proporzione [del numero di volte in cui si è realizzato un evento sul numero di prove] oscillerà ancora un po' ma le sue fluttuazioni cresceranno di meno. Infatti, la proporzione tenderà gradualmente verso un valore numerico fisso che i matematici chiamano il suo *limite*.

Rassegna Stampa

- John Maynard KEYNES (1921)

Rassegna Stampa

- John Maynard KEYNES (1921)

  La teoria della probabilità si occupa della relazione tra due insiemi di proposizioni tali che, se si sa che il primo insieme è vero, da esso si può riconoscere con un argomento la verità del secondo con un appropriato grado di probabilità. La relazione esiste però anche quando non si sa se il primo insieme è vero ed è solo ipotetico.

Rassegna Stampa

- Bruno De Finetti (1970)

Rassegna Stampa

- Bruno De Finetti (1970)

  La probabilità non esiste

Dal dizionario....

- Salvatore BATTAGLIA
- *Grande Dizionario della Lingua Italiana* (1988)

  Calcolo delle probabilità. Teoria ricavata con procedimenti induttivi da fondamenti empirici, con lo scopo di rilevare e di prevedere, avvalendosi di formule matematiche, le frequenze, specie nei giochi d'azzardo e nei fenomeni soggetti alle assicurazioni.

Rassegna Stampa

Matematica di precisione o di approssimazione?

- la “legge empirica del caso”
- Guido CASTELNUOVO (1865-1952)
- *Calcolo delle Probabilità* (1919)

> In una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza (relativa) che è presso a poco uguale alla sua probabilità. L’approssimazione cresce ordinariamente col crescere del numero delle prove.

Rassegna Stampa

Matematica di precisione o di approssimazione?

Il postulato che precede non è adunque paragonabile ai postulati teorici della geometria, che stabiliscono relazioni tra concetti astratti, bensì ad una proposizione come questa: “le proprietà della retta (limitata) sono applicabili, in modo approssimato, ai fili tesi. (...) Però accanto all’analogia è bene mettere in luce una differenza tra i postulati empirici del Calcolo delle probabilità e della Geometria.

Rassegna Stampa

Matematica di precisione o di approssimazione?

In quest'ultima scienza si può, in ogni caso concreto assegnato, fissare un limite superiore all'errore che si commette trasportando la proprietà geometrica dal campo astratto alle applicazioni. Nulla di simile ha luogo nella teoria delle probabilità. Io so che lanciando 1000 o 10000,... volte una moneta, e chiamando ν_1, ν_2,... i numeri dei colpi ove si presenta *testa*, le frequenze $\frac{\nu_1}{1000}$, $\frac{\nu_2}{10000}$ sono prossime ad $\frac{1}{2}$. Ma non posso prevedere in nessun modo un limite di errore; non posso ad es. fissare un numero di colpi così grande che la corrispondente frequenza sia compresa tra $0,49$ e $0,51$. È un caso estremamente raro, di cui in pratica non si tien conto, che la frequenza sopra un milione di prove esca dal detto intervallo; ma, per quanto inverosimile, il caso non è matematicamente assurdo.

Da dove partiamo?

- Siméon-Denis POISSON (1781-1840)

  Un problema relativo ai giochi d'azzardo che un uomo di mondo propose ad un austero giansenista è stato l'origine del calcolo delle probabilità.

Da dove partiamo?

- Siméon-Denis POISSON (1781-1840)

  Un problema relativo ai giochi d'azzardo che un uomo di mondo propose ad un austero giansenista è stato l'origine del calcolo delle probabilità.

- Antoine GOMBAUD, Cavaliere de Méré (1607-1684)
- Blaise PASCAL (1623-1662)
- Pierre de FERMAT (1601-1665)
- Christiaan HUYGENS (1629-1695)

Da dove partiamo?

- la ripartizione della posta o problema dei punti

  Due giocatori A e B si accordano nel mettere in palio una certa quantità p di denaro ciascuno, da destinare a chi per primo raggiunga N punti in un gioco. Il gioco è però interrotto quando A ha ottenuto n punti e B ne ha ottenuti m, con n ed m entrambi inferiori ad N. Si domanda come occorra ripartire la posta in questo caso.

Da dove partiamo?

- la ripartizione della posta o problema dei punti
- Filippo CALANDRI (XV sec.)

  > ma perché e gl'è giuoco di fortuna non si risponde assolutamente che questo sia la verità apunto.

- Lorenzo FORESTANI (1585-1660)

  > Ma perché le solutioni di simil proposte consistono nell'opinioni, e l'opinioni, e i pareri essendo varj, però lasciaremo tal giudicio a più savj, e intendenti, perciò che a noi basta haver detto il parer nostro.

È possibile una “scienza del caso”?

- ARISTOTELE, *La metafisica*

  Che nessuna delle scienze che ci sono state trasmesse tratti dell’accidente è chiaro (...). Che la scienza non possa avere per oggetto l’accidente, risulterà evidente a coloro che tenteranno di vedere che cos’è mai l’accidente. (...) L’accidente è ciò che avviene, ma non sempre né di necessità né per lo più. (...) Ogni scienza è di ciò che è sempre o per lo più, mentre l’accidente non è in nessuna di queste due specie di essere.

Intermezzo

- Luigi PIRANDELLO: *Il fu Mattia Pascal* (1904)

> Vi seggono, di solito, certi disgraziati, la cui passione del gioco ha sconvolto il cervello nel modo più singolare: stanno lì a studiare il così detto equilibrio delle probabilità, e meditano seriamente i colpi da tentare, tutta un'architettura di giuoco, consultando appunti su le vicende de' numeri: vogliono insomma estrarre la logica dal caso, come dire il sangue dalle pietre; e son sicurissimi che, oggi o domani, vi riusciranno.

Il vento è cambiato

- Christiaan HUYGENS *De ratiociniis in ludo aleae* (1657)

  Sapendo che, con la pubblicazione dei lodevoli frutti della vostra intelligenza e del vostro zelo, vi proponete anche di far vedere, grazie alla varietà degli argomenti trattati, l'ampiezza del campo sul quale si estende la nostra eccellente Arte *Algebrica*, non dubito che il presente scritto sul calcolo nei giochi d'azzardo potrà servire a raggiungere questo obiettivo. In effetti, quanto più è difficile stabilire con la ragione quanto è incerto e soggetto al caso, tanto più la scienza che raggiunge questo risultato sembrerà degna di ammirazione.

Un'origine "scomoda"

- Christiaan HUYGENS *De ratiociniis in ludo aleae* (1657)

  anche se alcuni lettori potrebbero pensare che io abbia lavorato su argomenti di poca importanza, (...) il lettore percepirà presto che non si tratta di un semplice divertimento dello spirito ma che vi si gettano i semi di una riflessione molto interessante e profonda.

Probabilità: una parola “ambigua”

• Albert GIRARD (1595-1632)

• *De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée* (1629)

Probabilità: una parola “ambigua”

• Albert GIRARD (1595-1632)

• *De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée* (1629)

> La verità del teorema è evidente e probabile.

Probabilità: una parola “ambigua”

- Albert GIRARD (1595-1632)

- *De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée* (1629)

  La verità del teorema è evidente e probabile.

- Un commento “moderno”

  GIRARD seems not quite convinced by his own argument, referring to it only as a “probable conclusion.”

Probabilità: una parola “ambigua”

- Edward GIBBON (1737-1794)
- Il passaggio di ANNIBALE sulle Alpi

Probabilità: una parola "ambigua"

- Edward GIBBON (1737-1794)
- Il passaggio di ANNIBALE sulle Alpi

  Ne concludiamo, allora, anche se con un certo scetticismo, che, benché la narrazione di LIVIO sia più probabile, quella di POLIBIO è più veritiera.

Probabilità: una parola "ambigua"

- Edward GIBBON (1737-1794)
- Il passaggio di ANNIBALE sulle Alpi

  Ne concludiamo, allora, anche se con un certo scetticismo, che, benché la narrazione di LIVIO sia più probabile, quella di POLIBIO è più veritiera.

- Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit

Probabilità: una parola “ambigua”

- CICERONE: *De partitione oratoria.*
- argomentazione:

    probabile inventum ad faciendam fidem

Probabilità: una parola "ambigua"

• che cos'è il *probabilismo*?

Se un certo comportamento morale ha ricevuto l'approvazione di un numero esiguo ma non nullo di autorità, seguendolo non si è in errore.

Probabilità: una parola “ambigua”

- Eppur si move....
- Antoine ARNAULD (1612-1694)
- Pierre NICOLE (1625-1695)
- *Ars Cogitandi* (1662)

Probabilità: una parola "ambigua"

- Eppur si move....
- Antoine ARNAULD (1612-1694)
- Pierre NICOLE (1625-1695)
- *Ars Cogitandi* (1662)

> Sarebbe forse esagerato dire che una persona su due milioni è morta per folgorazione; tra le morti violente, questa è una delle meno comuni. La paura di subire un danno dovrebbe essere proporzionale non soltanto alla sua gravità ma anche alla probabilità che esso si verifichi effettivamente; perciò, visto che quasi non esiste morte più rara di quella per folgorazione, questa dovrebbe provocare meno paura di ogni altra.

Probabilità: una parola “ambigua”

- Eppur si move....
- Antoine ARNAULD (1612-1694)
- Pierre NICOLE (1625-1695)
- *Ars Cogitandi* (1662)

> Sarebbe forse esagerato dire che una persona su due milioni è morta per folgorazione; tra le morti violente, questa è una delle meno comuni. La paura di subire un danno dovrebbe essere proporzionale non soltanto alla sua gravità, ma anche alla probabilità che esso si verifichi effettivamente; perciò, visto che quasi non esiste morte più rara di quella per folgorazione, questa dovrebbe provocare meno paura di ogni altra.

- stima “*frequentista*” della probabilità
- si intravede l’*aspettazione*

Leggendo il *De Ratiociniis*

- Chistiaan HUYGENS

Tre giocatori A, B, C mettono 12 sassolini in un'urna: 4 sono bianchi e 8 neri; essi giocano con questo accordo: vincerà chi tra loro, bendato, (*velatis oculis*) estrarrà per primo un sassolino bianco. A estrarrà per primo, B per secondo, C per terzo e poi da capo. Si chiedono quali saranno i rapporti delle loro sorti.

Leggendo il *De Ratiocinìis*

- Jacob BERNOULLI

  Questo problema ha un significato ambiguo e, di conseguenza, possono esserci soluzioni diverse...

Probabilità: non solo giochi d'azzardo

- Blaise PASCAL (1623-1662)
- *Infini-rien* (*Les Pensées*, 1670)

> Dio esiste o non esiste. Ma verso quale parte propenderemo? La ragione qui non può stabilire nulla. Un abisso infinito ci separa. All'estremità di quest'infinita distanza si gioca una partita dove capiterà testa o croce: su cosa punterete?

Probabilità: non solo giochi d'azzardo

- Blaise PASCAL (1623-1662)
- *Infini-rien* (*Les Pensées*, 1670)

> Dio esiste o non esiste. Ma verso quale parte propenderemo? La ragione qui non può stabilire nulla. Un abisso infinito ci separa. All'estremità di quest'infinita distanza si gioca una partita dove capiterà testa o croce: su cosa punterete?
>
> Soppesiamo la vincita e la perdita, qualora voi sceglieste croce che Dio esiste. Valutiamo questi due casi: se vincete, vincete tutto; se perdete, non perdete nulla. Scommettete dunque che esiste, senza esitare!

Probabilità: non solo giochi d'azzardo

- Blaise PASCAL (1623-1662)
- *Infini-rien* (*Les Pensées*, 1670)

  si deve lavorare per l'incerto, secondo la regola delle poste in gioco, la quale è dimostrata.

- probabilità: guida per decidere in condizioni di incertezza

Da un manuale di De Finetti

- Bruno De Finetti-Ferruccio Minisola
- *La matematica per le Applicazioni Economiche (1961)*

  La preoccupazione qui è di dare anzitutto qualche rudimento della teoria delle decisioni, in base a cui la nozione di probabilità viene fin dal primo momento ad acquistare il suo più largo e pieno significato, e poi subito innestare un cenno sui criteri consueti per una prima indicazione su come possano rendersi utili per la valutazione di probabilità in certi casi (i casi delle cosiddette "definizione classica" e "definizione statistica").

Il gioco equo

- Gerolamo CARDANO (1501-1576)
- *Liber de Ludo Aleae* (1663)

> Nei giochi d'azzardo è estremamente importante l'equità: dei giocatori come di chi osserva, del denaro come del luogo, degli strumenti per lanciare i dadi come dei dadi stessi. Nella misura in cui ti allontani dall'equità contro il tuo interesse sei stolto, a tuo vantaggio sei ingiusto.

Il gioco equo

- circuitus ed aequalitas
- Lanciamo due dadi
- circuitus=36
- in quanti casi si presenta il numero 1 su almeno un dado?

Il gioco equo

• in quanti casi si presenta il numero 1 su almeno un dado?

11

• in quanti casi si presentano il numero 1 o il numero 2 su almeno un dado?

Il gioco equo

- in quanti casi si presenta il numero 1 su almeno un dado?

11

- in quanti casi si presentano il numero 1 o il numero 2 su almeno un dado?

20

- in quanti casi si presentano il numero 1, il numero 2 o il numero 3 su almeno un dado?

Il gioco equo

- in quanti casi si presenta il numero 1 su almeno un dado?

$$11$$

- in quanti casi si presentano il numero 1 o il numero 2 su almeno un dado?

$$20$$

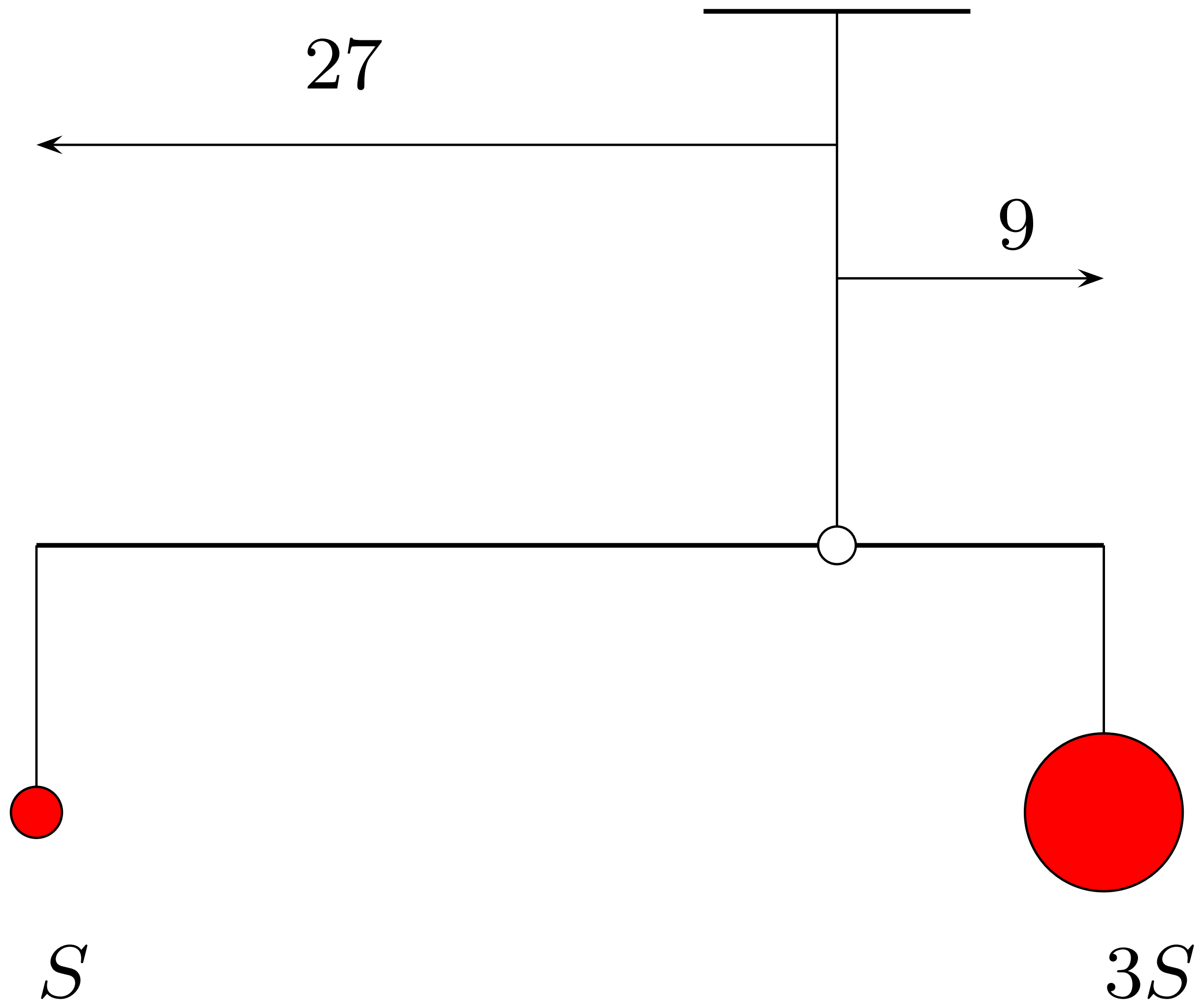
- in quanti casi si presentano il numero 1, il numero 2 o il numero 3 su almeno un dado?

$$27$$

Il gioco equo

Se pertanto qualcuno dicesse: voglio uno, due o tre punti, tu sai che questi sono 27 e siccome il circuito è 36, i lanci nei quali questi punteggi non compaiono sono 9 e pertanto saranno in proporzione tripla. Pertanto, su quattro lanci, tre volte compaiono l'uno, il due od il tre e solo una volta uno degli altri, con una fortuna equilibrata; se pertanto qualcuno puntasse tre ducati sulla comparsa di uno di quei numeri e l'altro giocatore uno, il primo vincerebbe tre volte guadagnando tre ducati, il secondo vincerebbe una volta guadagnando tre ducati cosicché, in un circuito di quattro lanci si fanno sempre equilibrio. Questa è dunque la condizione per giocare equamente e se qualcuno di loro scommette di più, gareggerà in condizioni non eque e con danno, se [scommette] di meno con lucro.

La “bilancia” del rischio



Il gioco equo

- n casi possibili, tutti equivalenti
- m casi favorevoli ad A, tutti equivalenti
- $n - m$ casi favorevoli a B, tutti equivalenti
- rapporto casi favorevoli ad A e B

$$\frac{m}{n - m}$$

- deve essere anche il rapporto tra le cifre giocate da A e B

L’aspettazione o speranza matematica

- Christiaan HUYGENS *De ratiociniis in ludo aleae* (1657)

  Se qualcuno, a mia insaputa, nascoste 3 monete in una mano e 7 nell’altra, mi desse l’opportunità di prendere le monete dalla mano che preferisco, io dico che ciò ha per me lo stesso valore che se mi fossero date 5 monete. Perché, avendo cinque monete, posso di nuovo giungere al punto in cui possiedo pari aspettazione di avere 3 o 7 monete: e ciò in un gioco equo.

L'aspettazione o speranza matematica

> Se qualcuno, a mia insaputa, nascoste 3 monete in una mano e 7 nell'altra, mi desse l'opportunità di prendere le monete dalla mano che preferisco, io dico che ciò ha per me lo stesso valore che se mi fossero date 5 monete. Perché, avendo cinque monete, posso di nuovo giungere al punto in cui possiedo pari aspettazione di avere 3 o 7 monete: e ciò in un gioco equo.

- gioco *equo* “equivalente”
- due giocatori, A e B; ciascuno punta x monete
- Se vince A: tiene 7 monete per sé e concede un premio di consolazione di $2x - 7$ monete a B
- Se vince B: tiene 7 monete per sé e concede un premio di consolazione di $2x - 7$ monete ad A

L'aspettazione o speranza matematica

- due giocatori, A e B; ciascuno punta x monete

- Se vince A: tiene 7 monete per sé e concede un premio di consolazione di $2x - 7$ monete a B

- Se vince B: tiene 7 monete per sé e concede un premio di consolazione di $2x - 7$ monete ad A

- voglio *ottenere* le stesse aspettazioni del gioco iniziale:

L'aspettazione o speranza matematica

• Se vince A: tiene 7 monete per sé e concede un premio di consolazione di $2x - 7$ monete a B

• Se vince B: tiene 7 monete per sé e concede un premio di consolazione di $2x - 7$ monete ad A

• voglio *ottenere* le stesse aspettazioni del gioco iniziale:

$$2x - 7 = 3 \qquad 2x = 10 \qquad x = 5$$

Si fa presto a dire media....

- Oscar CHISINI (1929)

Definizione. Data una funzione

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

di una certo numero, n, di variabili indipendenti, x_1, x_2,..., x_n, rappresentanti grandezze omogenee, dicesi media delle x_1, x_2,..., x_n *rispetto alla funzione* f, quel numero M che, sostituito alle x_1, x_2,..., x_n, dà il medesimo valore per la f che le x_1, x_2,..., x_n stesse, cioè quel numero M tale che

$$f(M, M, ..., M) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Si fa presto a dire media....

- Oscar CHISINI (1929)
- Media aritmetica

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \longrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nM$$

L'arte di congetturare

- Jacob BERNOULLI (1654-1705)
- *Ars Conjectandi* (1713)

> la *probabilità* è infatti un grado di certezza e ne differisce come la parte dal tutto. Pertanto, se supponiamo che la certezza piena ed assoluta—che indichiamo con la lettera a o con l'unità 1—consti, ad esempio, di cinque probabilità come di parti, tre delle quali militano a favore dell'esistenza attuale o futura di un certo evento, le altre contro: si dirà che quell'evento ha $\frac{3}{5}a$, ovvero $\frac{3}{5}$ di certezza.
>
> *Congetturare* qualcosa significa misurarne la probabilità: pertanto definiamo *arte della congettura* o *Stocastica* l'arte di misurare nel modo più preciso possibile le probabilità delle cose.

L'arte di congetturare

I numeri di casi possibili sono noti, ad esempio, nei giochi con i dadi, dal momento che conosciamo il numero di facce di ciascuno di essi e che tutte hanno la stessa propensione a presentarsi, dal momento che non vi è alcuna ragione, vista la somiglianza delle facce e la distribuzione uniforme del peso del dado, perché una faccia debba essere più propensa a presentarsi rispetto ad un'altra, come potrebbe succedere se le facce avessero una forma diversa ovvero se il dado fosse di due materie diverse. Similmente sono noti i numeri di casi favorevoli all'estrazione di una scheda bianca o una nera da un'urna ed è noto che sono tutte egualmente possibili, dal momento che sono determinati e noti i numeri di schede di entrambi i tipi e non si vede alcun motivo per cui debba essere estratta una piuttosto che un'altra.

L’arte di congetturare

- Se la simmetria manca?

  sarà possibile evincerla dall’osservazione ripetuta di un evento in situazioni simili dal momento che si deve presumere che qualcosa potrà avvenire o meno in tanti casi quanti si è già presentato in una situazione simile.

La “definizione classica”

- Abraham De Moivre (1667-1754)
- *De Mensura Sortis* (1711)

> Se p è il numero dei casi nei quali un certo evento può realizzarsi e q il numero dei casi nei quali può non realizzarsi, tanto il realizzarsi quanto il non realizzarsi dell’evento hanno il proprio grado di probabilità; poiché se tutti i casi nei quali l’evento può realizzarsi o non realizzarsi sono equi-facili, la probabilità che esso accada sta alla probabilità che non accada come p sta a q.

Le rendite vitalizie

- Che cosa è una rendita vitalizia?

- Un/Un'acquirente di età N anni vuole stipulare una polizza che gli dia diritto, per tutti gli anni successivi di vita, ad una rendita annua costante R. Il capitale è rivalutato con un tasso annuo del $t\%$ in regime di capitalizzazione composta. Quale deve essere il prezzo C della polizza?

- Perché creare questo strumento finanziario?

Le rendite vitalizie

- Le rendite certe
- Un capitale C, investito al $t\%$ annuo, produce dopo un anno il capitale

$$C_1 = C + \frac{t}{100}C = C\left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

$$R = C\left(1 + \frac{t}{100}\right) \qquad C = \frac{R}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

Le rendite vitalizie

- Il capitale iniziale deve permettere di avere R per tutti gli anni del contratto
- $R = \left(1 + \frac{t}{100}\right) C_1 \longrightarrow C_1 = \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)}$
- $R = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 C_2 \longrightarrow C_2 = \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2}$
- ....
- $R = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n C_n \longrightarrow C_n = \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^n}$

Le rendite vitalizie

- costo di una rendita certa:

$$C = R\left[\frac{1}{1+\frac{t}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^n}\right]$$

Le rendite vitalizie

- costo di una rendita certa:

$$C = R\left[\frac{1}{1+\frac{t}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^n}\right]$$

- È un contratto aleatorio

Le rendite vitalizie

- Tavole di Edmund HALLEY

età	N	età	N	età	N	età	N	età	N	età	N
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
età	N	età	N	età	N	età	N	età	N	età	N
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Le rendite vitalizie

• ω: età massima raggiungibile

• Come stimo la probabilità di sopravvivenza di un individuo che ha N anni?

• V_N: individui che raggiungono N anni di età

• V_{N+1}: individui che raggiungono $N+1$ anni di età

• p_{N+1}: probabilità che un individuo di età N anni raggiunga l'eta $N+1$

$$p_{N+1} = \frac{V_{N+1}}{V_N}$$

• $p_{N+2} = \frac{V_{N+2}}{V_N}$ ...... $p_\omega = \frac{V_\omega}{V_N}$

• Esempio: $N = 57 \longrightarrow p_{58} = \frac{262}{272} \qquad p_{59} = \frac{252}{272}$,...

Le rendite vitalizie

- rivediamo il costo della polizza....
- $C_1 = \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)} \longrightarrow C_1 = p_{N+1} \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)}$
- $C_2 = \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2} \longrightarrow C_2 = p_{N+2} \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2}$
- ......
- $C_{\omega-N} = \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^{\omega-N}} \longrightarrow C_{\omega-N} = p_\omega \frac{R}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^{\omega-N}}$

$$C = R\left[\frac{p_{N+1}}{\left(1+\frac{t}{100}\right)} + \frac{p_{N+2}}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{p_\omega}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^{\omega-N}}\right]$$

Un momento di crisi

• Siméon-Denis POISSON

• *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (1837)

> La *probabilità* di un evento è il motivo che noi abbiamo di credere che esso abbia avuto o avrà luogo.
>
> La probabilità, dipendendo dalle conoscenze che abbiamo su un evento, può essere diversa per uno stesso avvenimento e per persone diverse. (...) Se una persona sa solamente che un'urna contiene palline bianche e nere ed un'altra persona sa che le bianche sono in proporzione maggiore delle nere, questa seconda avrà più ragioni di quante ne abbia la prima per credere che sarà estratta una pallina bianca.

Un momento di crisi

- Siméon-Denis POISSON

  Nel linguaggio ordinario, le parole *chance* e probabilità sono press'a poco sinonimi. Il più delle volte li impiegheremo indifferentemente; quando però sarà necessario evidenziare una differenza tra le loro accezioni, si riferirà in quest'opera la parola chance agli avvenimenti in sé stessi, indipendentemente dalla conoscenza che possiamo averne e si conserverà per la parola probabilità la definizione precedente.

Un momento di crisi

- Siméon-Denis Poisson

  Da questa misura di probabilità, sembra risultare che questa frazione debba essere sempre una quantità commensurabile; se però il numero dei casi possibili e quello dei casi favorevoli ad un evento sono infiniti, la probabilità, cioè il rapporto del secondo numero col primo, potrà essere una quantità incommensurabile.

Un momento di crisi

- Siméon-Denis Poisson

  Supponiano, per esempio che s sia l'area di una regione del piano e σ quella di una sua porzione determinata; se si lancia un oggetto circolare, il cui centro può ugualmente cadere su tutti i punti di s, è evidente che la probabilità che cadrà in un punto di σ sarà il rapporto tra σ ed s, le cui grandezze possono essere incommensurabili.

Da un manuale di De Finetti

- Bruno De Finetti-Ferruccio Minisola
- *La matematica per le Applicazioni Economiche (1961)*

> La probabilità di un evento E, secondo l'opinione di un dato individuo, è il prezzo che egli stima equo per un guadagno unitario subordinato al verificarsi di E.

Da un manuale di De Finetti

Il calcolo delle probabilità può aiutare ciascuno ad elaborare più accuratamente le proprie opinioni, ma non può né intende creare un'opinione prefabbricata da imporre a tutti o a chicchessia. Ciò non toglie che le divergenze e incertezze nelle valutazioni di probabilità dei diversi individui siano più forti in certi casi e più attenuate in altri, fino a tendere a scomparire quando si presentano circostanze che favoriscono l'accettazione di criteri più o meno schematici.

Da un manuale di DE FINETTI

i problemi in cui si può distinguere un certo numero n di casi possibili incompatibili, giudicati ugualmente probabili; ciascuno di essi ha allora probabilità $1/n$, e un evento formato dalla riunione di m di essi ha probabilità m/n.

i problemi ove si può pensare un numero grande (o illimitato) di eventi analoghi (detti spesso, perciò "prove di un medesimo fenomeno"), giudicati ugualmente probabili, per i quali, in conformità all'esperienza passata, si ritiene molto probabile (con riferimento ad ogni prefissato gruppo numeroso di prove) che si verificheranno con frequenze prossima a un certo valore f [...] allora la probabilità di ciascuno di tali eventi è f.