

X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM
per Insegnanti di Matematica

Insegnare Matematica costruendo significati

La Thuile 27-30 Agosto 2025



UMI
Unione
Matematica
Italiana



CIIM

Commissione Italiana
per l'Insegnamento
della Matematica

Con il patrocinio di:



Comune di
La Thuile



Leggere e scrivere i numeri

Un nodo con tanti fili

Giorgio Bolondi

Libera Università di Bolzano- Freie Universität Bozen

Significati?



FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-
DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON
DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

Dr. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Cosa “vediamo” quando leggiamo i numeri?

40.861



33.162

921.142 o 962.003

3.070,7444

$746.146 - 645.620 = 100.526$

8.500.000 e 14.000.000



Cosa “vediamo” quando leggiamo i numeri?



Cosa "vediamo" quando leggiamo i numeri?

$$(2^3)^2 = ?$$

$$3^4 \times 3^2 = 3^6$$

$$6^8 : 6^3 = 6^5$$

$$2^4 \times 2 \times 2^2 = 2^7$$

$$5^4 : 5^2 = 5^2$$

$$9^6 : 9^4 = 9^2$$

$$2^{10} : 2^5 : 2^3 = 2^2$$

$$3^2 \times 2^2 \times 4^2 = 24^2$$

$$24^3 : 3^3 : 2^3 = 4^3$$

$$7^3 : 7^2 = 7^1$$

$$(2^2)^5 = 2^{10}$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$(5^2)^2 = 5^4$$

$$40^2 : 4^2 : 5^2 = 2^2$$

$$(7^3)^5 = 7^{15}$$

$$3^6 \times 3 = 3^7$$

$$3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$(-4)^{-2} = \left(\frac{1}{-4}\right)^2 = \frac{1^2}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D16. L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a

- ☐ A. 20^{75}
- ☐ B. 10^7
- ☐ C. $11 \cdot 10^{37}$
- ☐ D. $10^{37 \cdot 38}$

Il secondaria di
secondo grado



Sintassi vs significato

Una soluzione *sintattica*:

$$10^{37} + 10^{38} = 10^{37}(10^0 + 10^1) = 10^{37}(1 + 10) = 10^{37} \times 11 = 11 \times 10^{37}$$

Sintassi vs significato

Un approccio basato sul significato (interno alla matematica):

10^{37} **significa** 1 seguito da 37 zeri

10^{38} **significa** 1 seguito da 38 zeri

Li metto in colonna per sommarli

Trovo 11 seguito da 37 zeri

Cioè 11×10^{37}

Sintassi vs significato

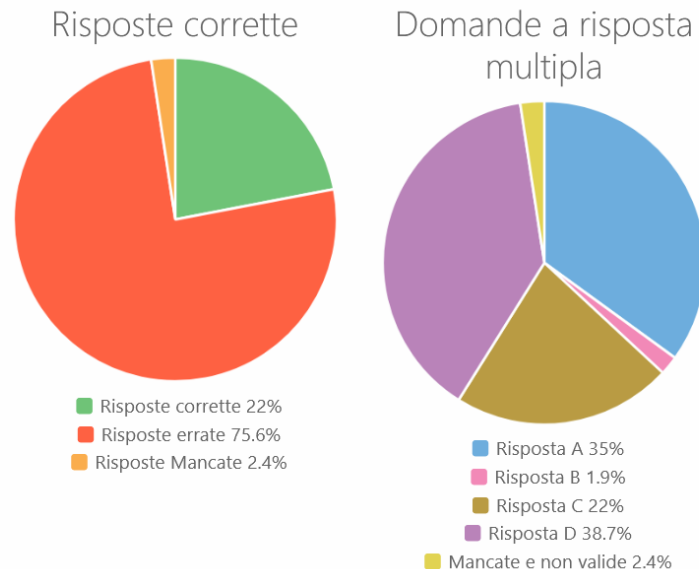
Un approccio basato sul significato (esterno alla matematica):

10^{37} **rappresenta** un numero in un certo ordine di grandezza
 10^{38} **rappresenta** un numero nell'ordine di grandezza contiguo

Se li sommo, resterò nello stesso ordine di grandezza o in uno contiguo

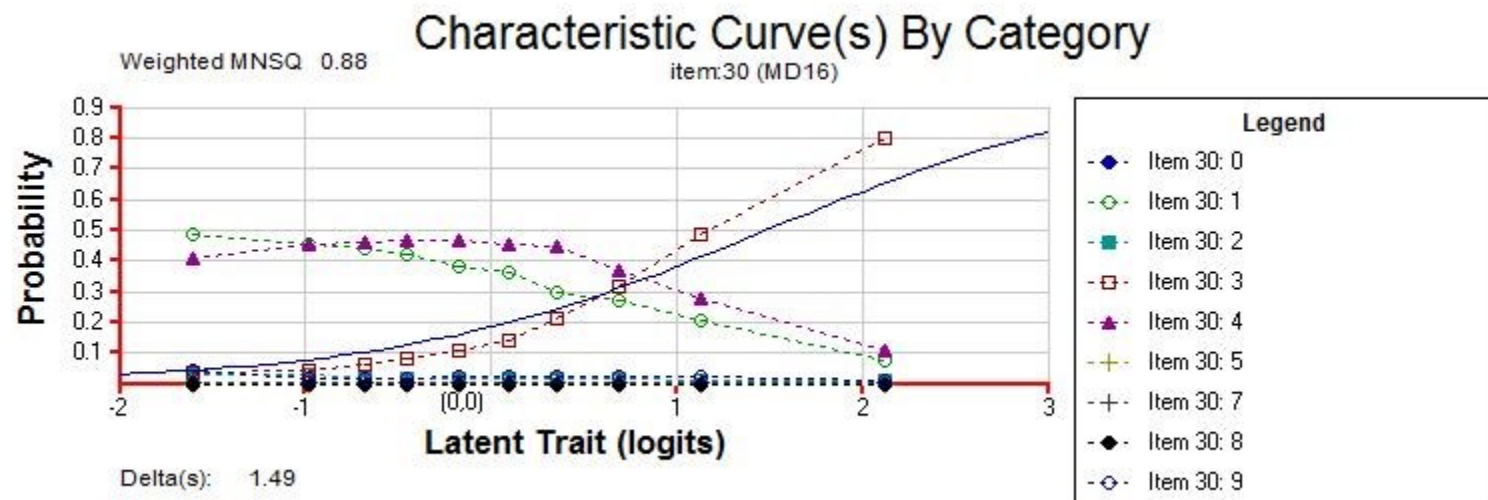
Quale risultato?

Risultati nazionali



Tutti i grafici e le tabelle sono tratte da www.gestinv.it

Quale risultato?



Tutti i grafici e le tabelle sono tratte da www.gestinv.it

Quale risultato?

LICEI	2,7	29,1	1,9	26,1	40,2
TECNICI	2,2	34,0	1,3	25,0	37,5
Ist. Prof.	2,3	47,7	2,5	9,8	37,7

Perimetro

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.



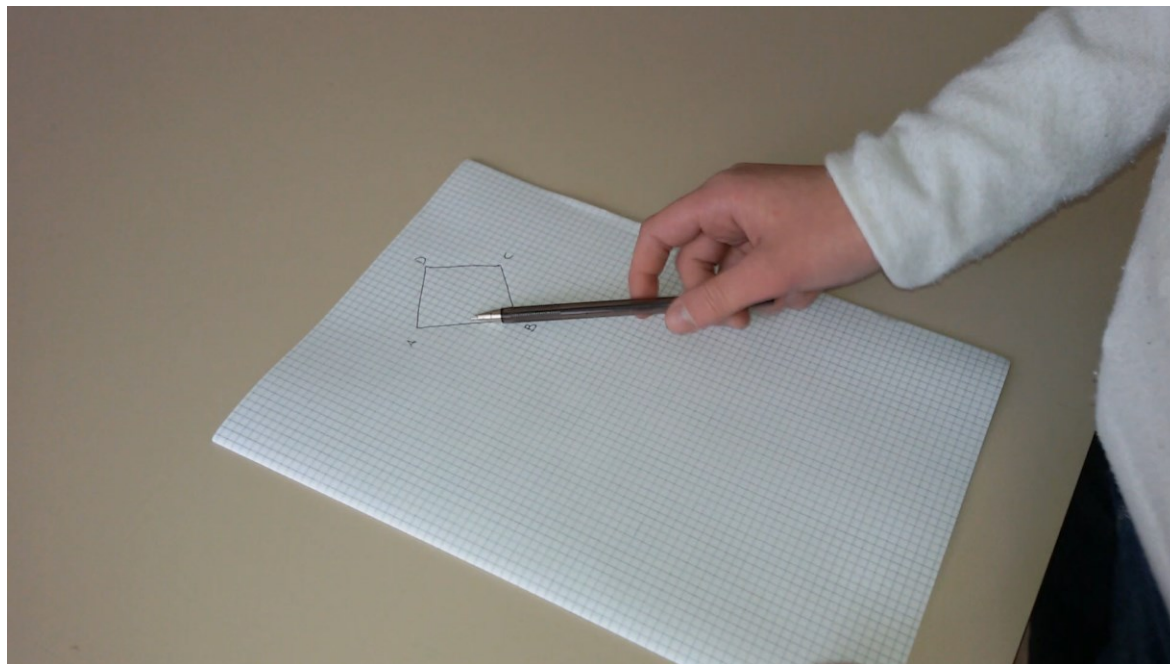
Questa voce sull'argomento geometria è solo un **abbozzo**.

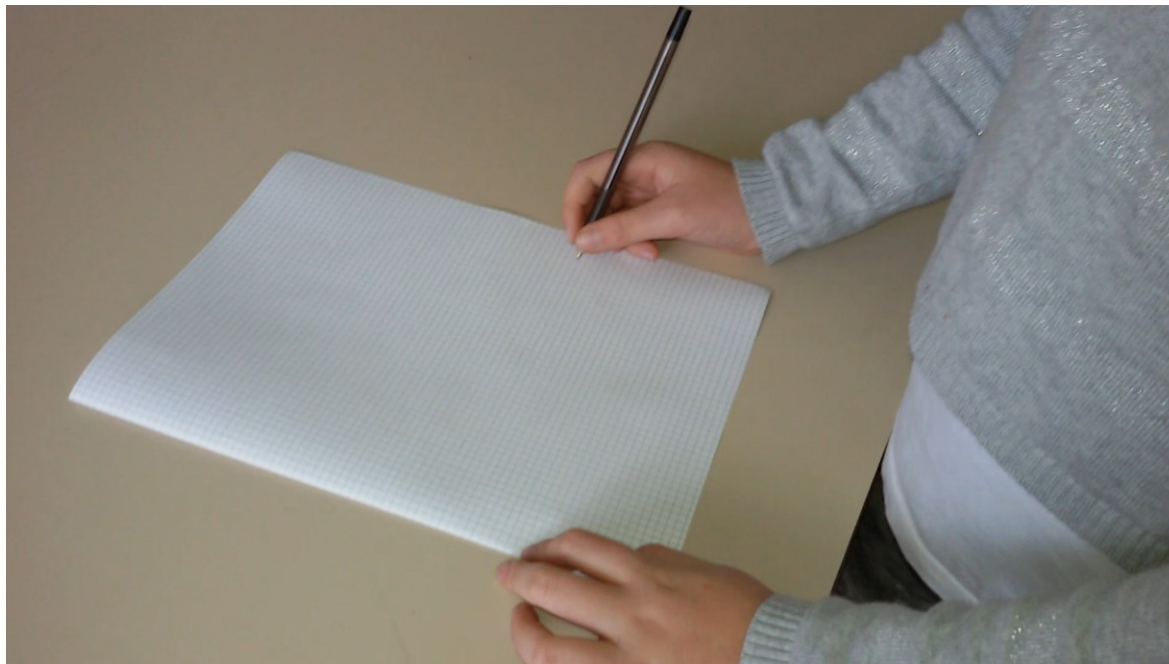
[Contribuisci](#) a migliorarla secondo le [convenzioni di Wikipedia](#). Segui i suggerimenti del [progetto di riferimento](#).

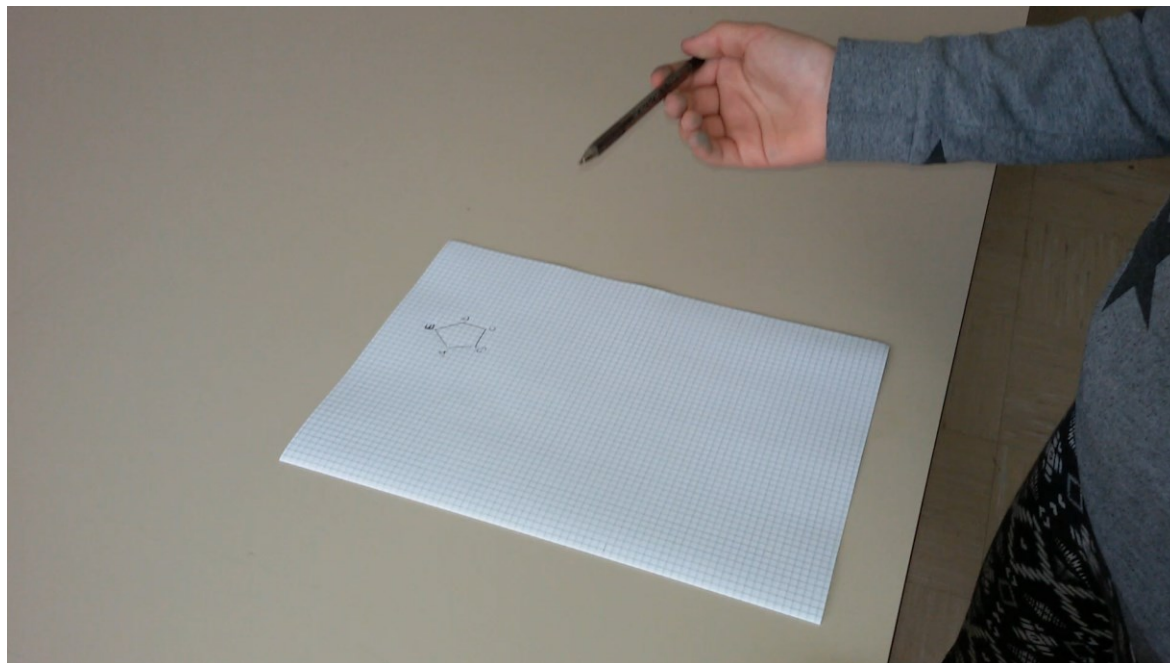
Il **perimetro** (dal [greco](#) *perímetros*, composto di *perí*, intorno, e *métron*, misura), in [geometria](#), è la misura della [lunghezza](#) del contorno di una [figura piana](#). Talvolta si indica con $2p$, da intendersi come "due volte p ", dove p è la metà del perimetro detto anche **semiperimetro**.

è la **misura** della **lunghezza** del **contorno** di una **figura piana**



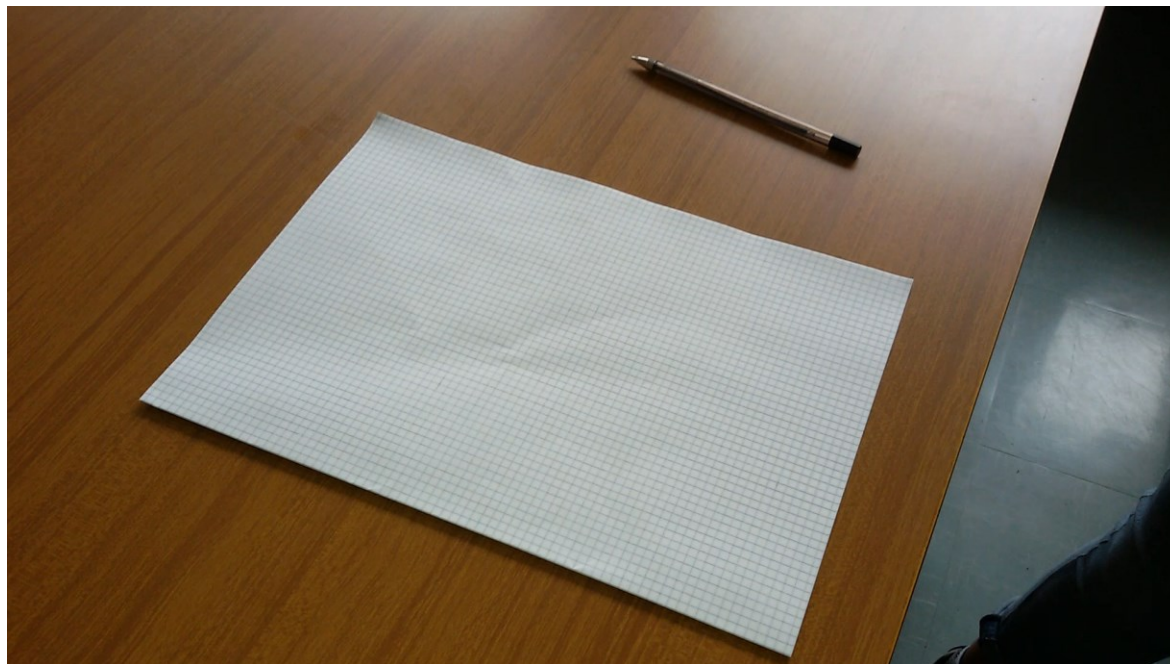


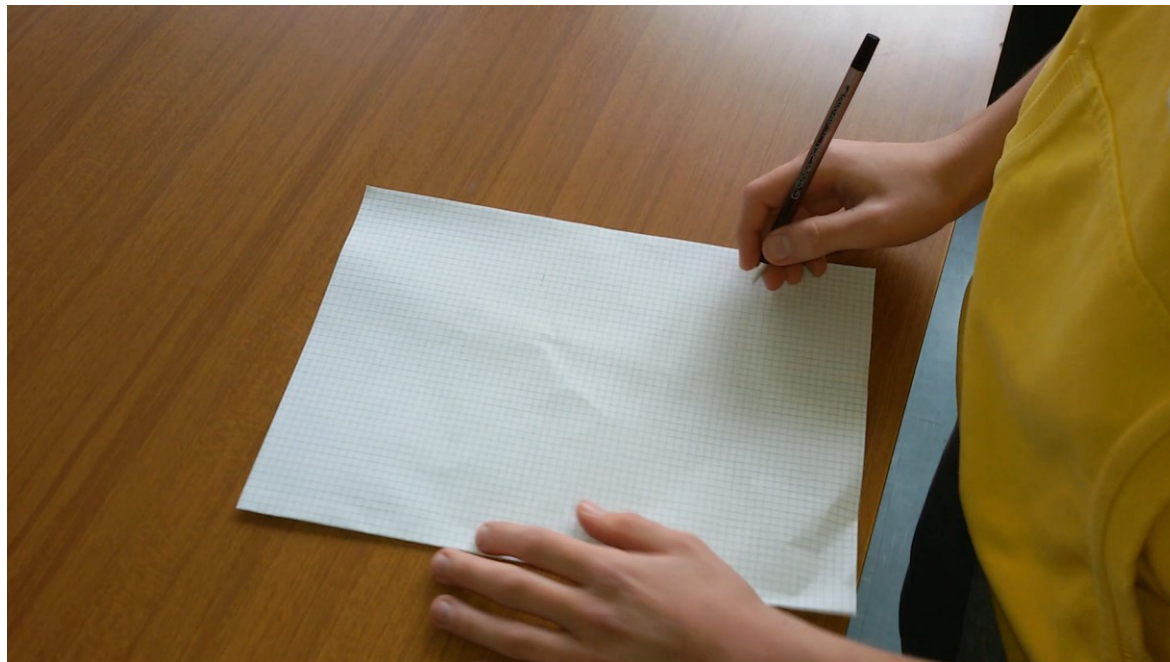












Spiega cosa significa che due frazioni sono equivalenti.

numeratore

Due frazioni sono equivalenti se moltiplicando o dividendo o moltiplicando o dividendo per uno stesso numero:

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} \quad \frac{6}{2} = \frac{36}{12}$$

Due frazioni sono equivalenti se hanno uno stesso valore cioè se si moltiplica o si divide per uno stesso numero e due frazioni ~~sono~~ ^{restano} equivalenti.

3) Due frazioni si dicono equivalenti se sia il denominatore che il numeratore, sono stati moltiplicati o divisi per uno stesso numero.

Nell'esempio non ci sono frazioni equivalenti Es: $\frac{36}{9}$ $\xrightarrow{\cdot 2}$ $\frac{72}{18}$
 $\xrightarrow{\cdot 2}$ $\frac{144}{36}$

Es 3
Due frazioni sono equivalenti se ridotte ai minimi termini sono uguali.

3) Due frazioni sono equivalenti quando partendo da una frazione si moltiplica ^{o più} per ^{o si divide} per uno stesso numero sia numeratore che denominatore, il risultato ottenuto è una frazione equivalente.

Due frazioni si dicono equivalenti quando moltiplicando o dividendo il denominatore e il numeratore per uno stesso numero danno un'altra frazione. Ad esempio: $\frac{18}{21} \rightarrow \frac{6}{7}$
o $\frac{36}{9} \rightarrow \frac{4}{1}$

Parole in libertà o parole forzate?

4) PROBLEMA 1

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R}) \setminus x = -1$

LA FUNZIONE DATA È RAZIONALE A COMPONENTI
INTERE.

5) Siccome la funzione resta intorno all'asse delle
y è invertibile

6) Se $\overline{AB}$ è uguale a 1 allora quel valore assume
5.

Parole in libertà o parole forzate?

derivando n volte la funzione si eliminano
progressivamente tutte le x , riducendo la
funzione ad un numero composto
da n volte il numero di potenze (n) per il
coefficiente della x .

Parole in libertà o parole forzate?

Loss of meaning

Kieran, 1992

Sfard, 1995

Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001

Radford, 2005

Bardini, Radford & Sabena, 2005

Niss, 2012

....

Loss of meaning

*Il percorso di algebra del biennio è sostanzialmente focalizzato sugli aspetti **sintattici** e **manipolatori***

*Questo può portare a uno svuotamento del **significato** delle «lettere», che pure era presente fin dall'inizio dell'utilizzo delle stesse, soprattutto in situazioni di modellizzazione*

(Doerr & Tripp, 1999; Dunne, 1998, Arcavi, 1994 e 2005; Capraro & Joffrion, 2006)

Loss of meaning

D17. La formula $L = L_0 + K \times P$ esprime la lunghezza L di una molla al variare del peso P applicato. L_0 rappresenta la lunghezza in centimetri “a riposo” della molla; K indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando le si applica una unità di peso.

Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:

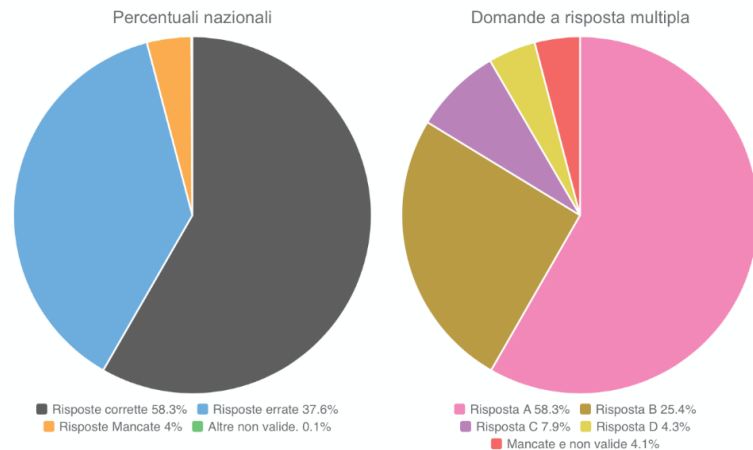
“È una molla molto corta e molto dura (cioè molto resistente alla trazione)”?

- ☐ A. $L = 10 + 0,5 \times P$
- ☐ B. $L = 10 + 7 \times P$
- ☐ C. $L = 80 + 0,5 \times P$
- ☐ D. $L = 80 + 7 \times P$



Quesito 17, Prova INVALSI di Matematica Grado 08, PN 2011

Loss of meaning



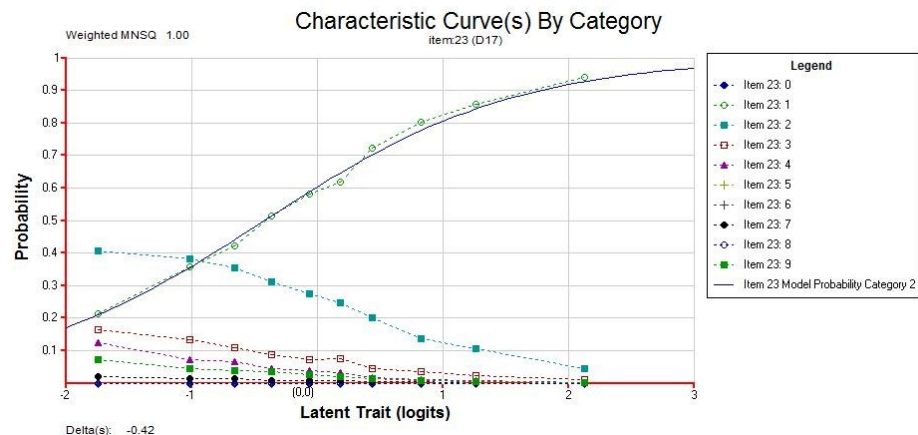
item:23 (D17)

Cases for this item 25892 Discrimination 0.43

Item Threshold(s): -0.41 Weighted MNSQ 1.00

Item Delta(s): -0.42

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PVIAvg:1	PV1 SD:1
1	1.00	15177	58.62	0.43	77.63(.000)	0.31	0.88
2	0.00	6640	25.64	-0.25	-40.97(.000)	-0.35	0.83
3	0.00	2025	7.82	-0.17	-27.49(.000)	-0.49	0.84
4	0.00	1114	4.30	-0.17	-28.50(.000)	-0.70	0.84
7	0.00	217	0.84	-0.06	-9.59(.000)	-0.57	0.82
9	0.00	719	2.78	-0.12	-19.98(.000)	-0.63	0.84



Loss of meaning

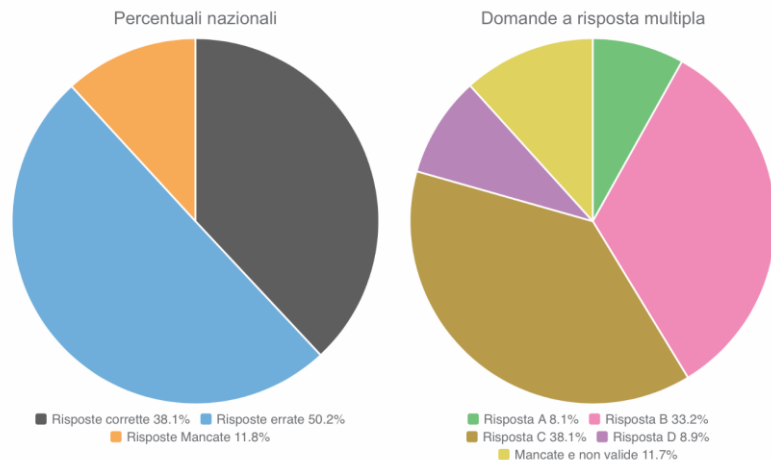
D24. La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza in centimetri “a riposo” della molla; k indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso. Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: *“È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione”*?

- ☐ A. $l = 15 + 0,5 \cdot P$
- ☐ B. $l = 75 + 7 \cdot P$
- ☐ C. $l = 70 + 0,01 \cdot P$
- ☐ D. $l = 60 + 6 \cdot P$



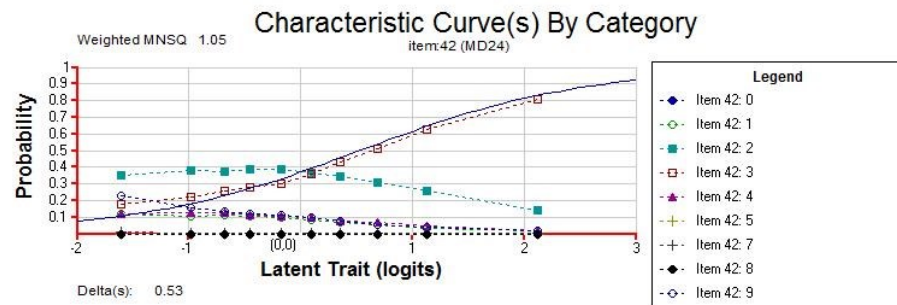
Quesito 24, Prova INVALSI di Matematica Grado 10, SNV 2011

Loss of meaning



item:42 (MD24)
 Cases for this item 43458 Discrimination 0.39
 Item Threshold(s): 0.53 Weighted MNSQ 1.05
 Item Delta(s): 0.53

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t	(p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
1	0.00	3481	8.01	-0.12	-24.83	(.000)	-0.37	0.79
2	0.00	14432	33.21	-0.13	-27.01	(.000)	-0.17	0.86
3	1.00	16892	38.87	0.39	87.03	(.000)	0.45	1.02
4	0.00	3944	9.08	-0.11	-23.38	(.000)	-0.32	0.81
7	0.00	117	0.27	-0.04	-8.61	(.000)	-0.78	1.13
9	0.00	4592	10.57	-0.20	-42.22	(.000)	-0.56	0.87



Un nucleo fondamentale trasversale:

La relazione tra il significato dei simboli e la loro manipolazione

Alcuni fili che si intrecciano (anche nel lavoro dell'insegnante)

*La percezione delle
quantità è legata a fattori
biologici*



*L'intreccio tra i diversi
sistemi semiotici utilizzati
dagli uomini è ineludibile
(grafici, verbali, pittorici) è
ineludibile*

Novantasette 90 7
quatre-vingt-dix-sept 4-20-10-7
Siebenundneunzig 7e90



*Il bisogno di registrare le
quantità è un fatto di
natura sociale*



*Il sistema di scrittura dei
numeri è un fatto
culturale*



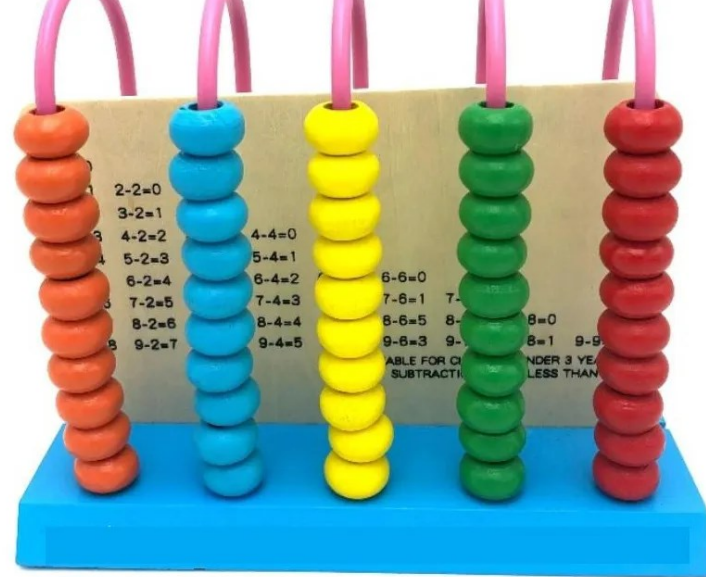
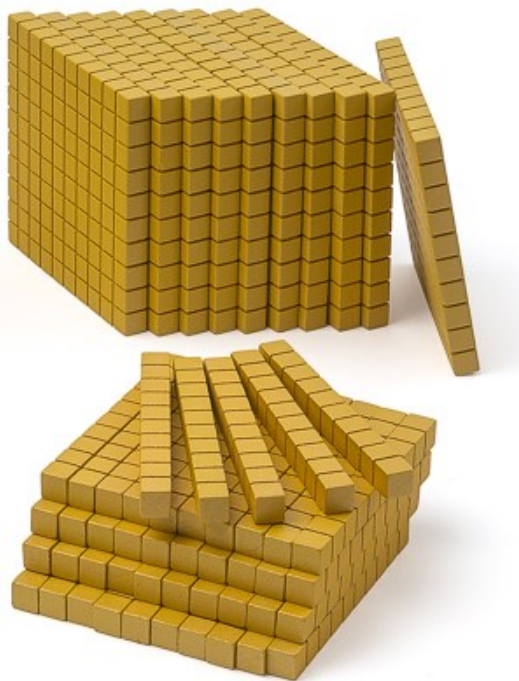
NUCLEI FONDANTI

DECIMALE

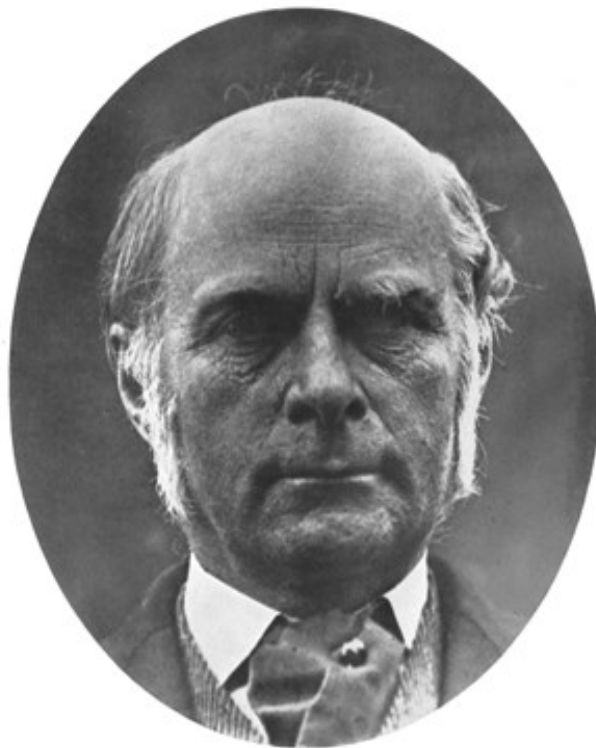
POSIZIONALE

RAGGRUPPAMENTO

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA



SIR FRANCIS GALTON

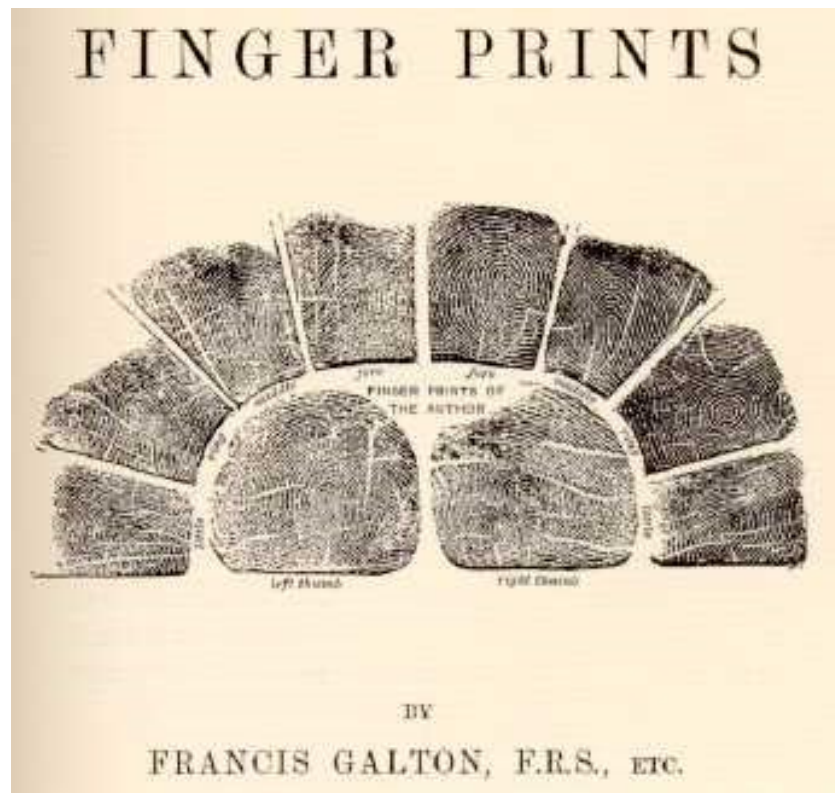


Sir Francis Galton

ARITHMETIC BY SMELL.

BY FRANCIS GALTON, F.R.S.,

London.



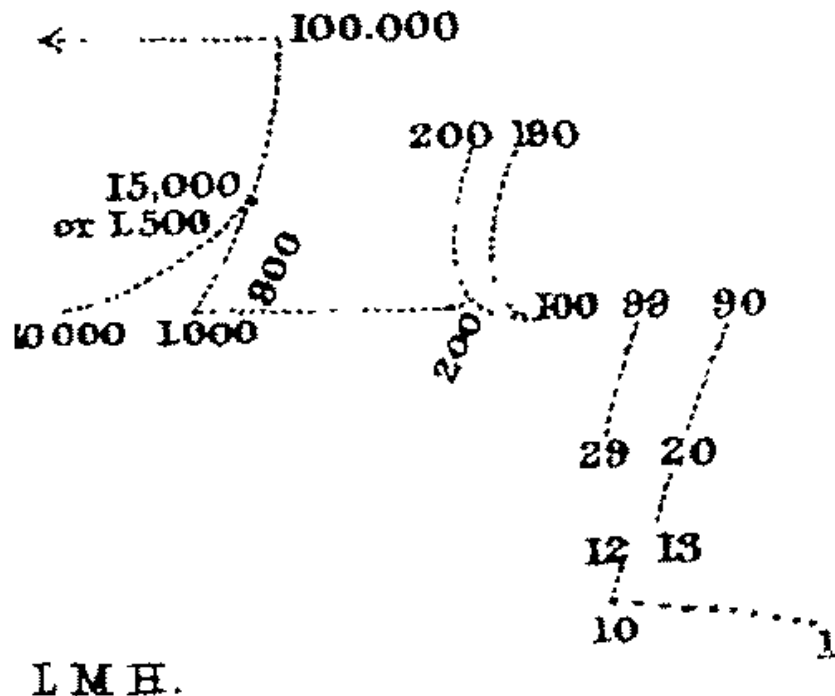
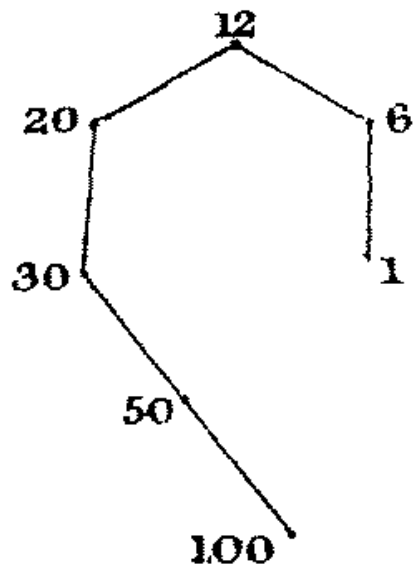
Visualised Numerals

VISUALISED NUMERALS

I HAVE lately been occupied in eliciting the degree and manner in which different persons possess the power of seeing images in their mind's eye, and am collecting a large and growing store of materials, partly of verbal answers made by friends to my inquiries, but principally by means of written replies to a printed list of questions that I am distributing. The subject bears in many ways upon psychological and ethnological studies, and I should be glad if the present memoir upon one particular branch of it should induce correspondents to furnish me with authentic information of the kind I seek.

The various ways in which numerals are visualised is but a small subject, nevertheless it is one that is curious and complete in itself. My data in respect to it are already sufficiently numerous to be worth recording, and they will serve to show that parallel results admit of being arrived at in other directions.

Visualised Numerals



by G H

Una percezione logaritmica?

- F. (8 anni): *Non so perché, ma mi sembra che i numeri diventano più fitti quando diventano grandi.*



IX.

Pinocchio vende
l'Abbecedario per
andare a vedere il
teatrino dei
buzattini.



Atilio
Mussino
Torino.



Un intreccio (tra i tanti) con il linguaggio

- $\text{CENTOTRE} = \text{CENTO PIÙ TRE} = 100 + 3$
- $\text{TRECENTO} = \text{TRE PER CENTO} = 3 \times 100$

Domanda 10 grado 2 - 2012

D10. Quale tra i seguenti numeri corrisponde a 3 decine e 17 unità?

A. ☐ 317

B. ☐ 173

C. ☐ 47



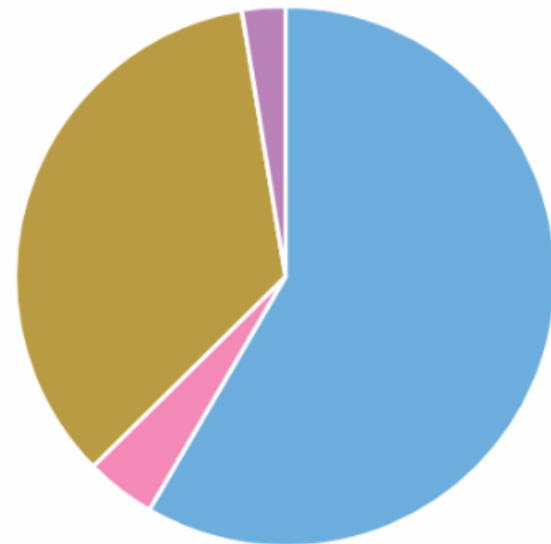
Domanda 10 grado 2 - 2012

D10. Quale tra i seguenti numeri corrisponde a 3 decine e 17 unità?

- A. ☐ 317
- B. ☐ 173
- C. ☐ 47



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it



■ Risposta A 58.4%

■ Risposta B 4.2%

■ Risposta C 34.8%

■ Mancate e non valide 2.6%

Domanda 10 grado 05 - 2009

10. A quale numero corrispondono “12 decine, 7 decimi e 2 millesimi”?

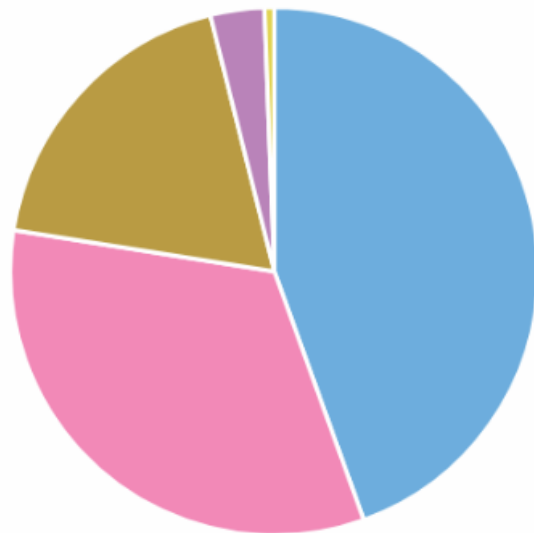
- ☐ A. 12,702.
- ☐ B. 120,702.
- ☐ C. 12,72.
- ☐ D. 120,72.



Domanda 10 grado 05 - 2009

10. A quale numero corrispondono “12 decine, 7 decimi e 2 millesimi”?

- ☐ A. 12,702.
- ☐ B. 120,702.
- ☐ C. 12,72.
- ☐ D. 120,72.



Risposta A 44.5%

Risposta B 33%

Risposta C 18.6%

Risposta D 3.3%

Mancate e non valide 0.6%



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it

Domanda 23 grado 05 - 2010

D23. In un esercizio si chiede di scrivere il successivo del numero che corrisponde a 90 decine. Roberto, Sara, Tiziano e Ursula danno quattro risposte diverse. Chi ha dato la risposta corretta?

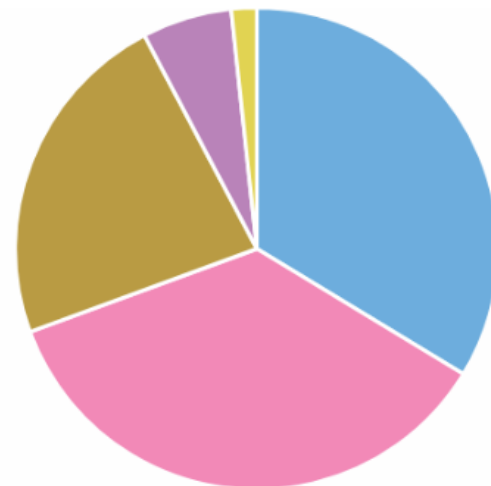
- ☐ A. Roberto, che scrive 91
- ☐ B. Sara, che scrive 901
- ☐ C. Tiziano, che scrive 900
- ☐ D. Ursula, che scrive 910



Domanda 23 grado 05 - 2010

D23. In un esercizio si chiede di scrivere il successivo del numero che corrisponde a 90 decine. Roberto, Sara, Tiziano e Ursula danno quattro risposte diverse. Chi ha dato la risposta corretta?

- ☐ A. Roberto, che scrive 91
- ☐ B. Sara, che scrive 901
- ☐ C. Tiziano, che scrive 900
- ☐ D. Ursula, che scrive 910



- Risposta A 33.7%
- Risposta B 35.7%
- Risposta C 22.9%
- Risposta D 6%
- Mancate e non valide 1.7%



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it

Domanda 9 grado 8 - 2015

D9. Qual è il risultato dell'operazione $2 + \frac{3}{100}$?

A. ☐ $\frac{5}{100}$

B. ☐ $\frac{3}{50}$

C. ☐ 2,3

D. ☐ 2,03

Domanda 9 grado 8 - 2015

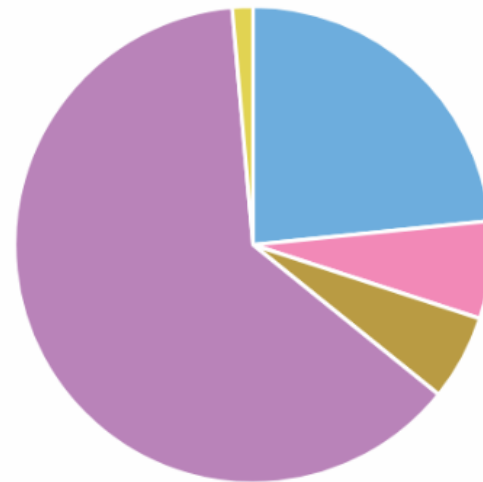
D9. Qual è il risultato dell'operazione $2 + \frac{3}{100}$?

A. ☐ $\frac{5}{100}$

B. ☐ $\frac{3}{50}$

C. ☐ 2,3

D. ☐ 2,03



■ Risposta A 23.4%
■ Risposta B 6.6%
■ Risposta C 5.8%
■ Risposta D 62.8%
■ Mancate e non valide 1.4%



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it

Domanda 27 grado 05 - 2010

D27. $\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

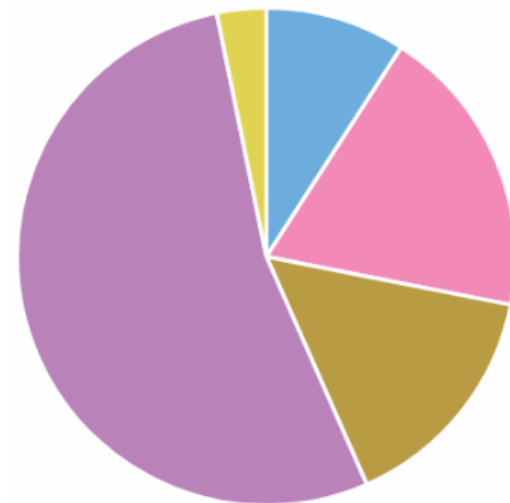
- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Sì, perché valgono entrambi la metà di un intero



Domanda 27 grado 05 - 2010

D27. $\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Sì, perché valgono entrambi la metà di un intero



Risposta A 9.1%

Risposta B 19%

Risposta C 15.3%

Risposta D 53.4%

Mancate e non valide 3.2%



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it

Domanda 10 grado 10 - 2011

D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$



Domanda 10 grado 10 - 2011

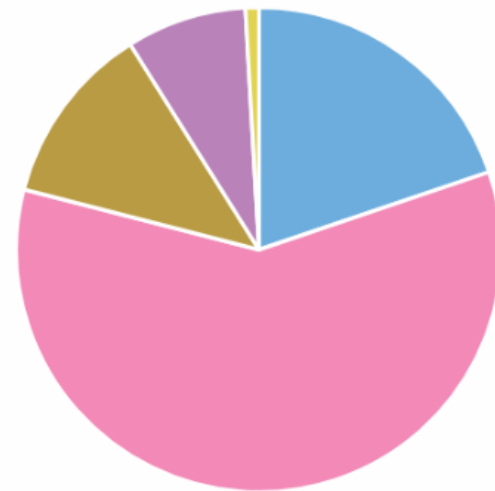
D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$



■ Risposta A 19.8%

■ Risposta B 59.2%

■ Risposta C 12.1%

■ Risposta D 8%

■ Mancate e non valide 0.9%



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it

Domanda 5 grado 10 - 2011

D5. L'età della Terra è valutata intorno ai $4,5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

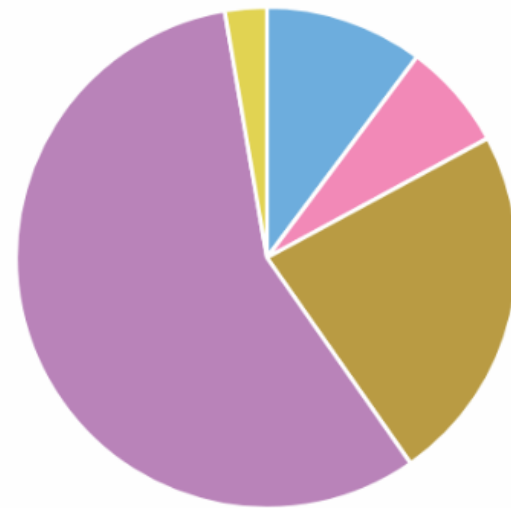
- ☐ A. $4,5 \times 10^9$ anni
- ☐ B. $3,5 \times 10^9$ anni
- ☐ C. $4,5 \times 10^6$ anni
- ☐ D. $4,5 \times 10^3$ anni



Domanda 5 grado 10 - 2011

D5. L'età della Terra è valutata intorno ai $4,5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

- ☐ A. $4,5 \times 10^9$ anni
- ☐ B. $3,5 \times 10^9$ anni
- ☐ C. $4,5 \times 10^6$ anni
- ☐ D. $4,5 \times 10^3$ anni



Risposta A 10.2%

Risposta B 6.9%

Risposta C 23.2%

Risposta D 57%

Mancate e non valide 2.7%



Tutti i grafici sono tratti da www.gestinv.it

E quindi?

Le potenze (in particolare le potenze in base 10) «perdono» significato come numeri, come già era successo ai numeri naturali, alle frazioni, ai numeri decimali....

La manipolazione formale dei segni avviene secondo «regole» di cui non c'è controllo semantico

La notazione scientifica risulta più un «campo di esercizi» che uno strumento, come già era successo all'algebra

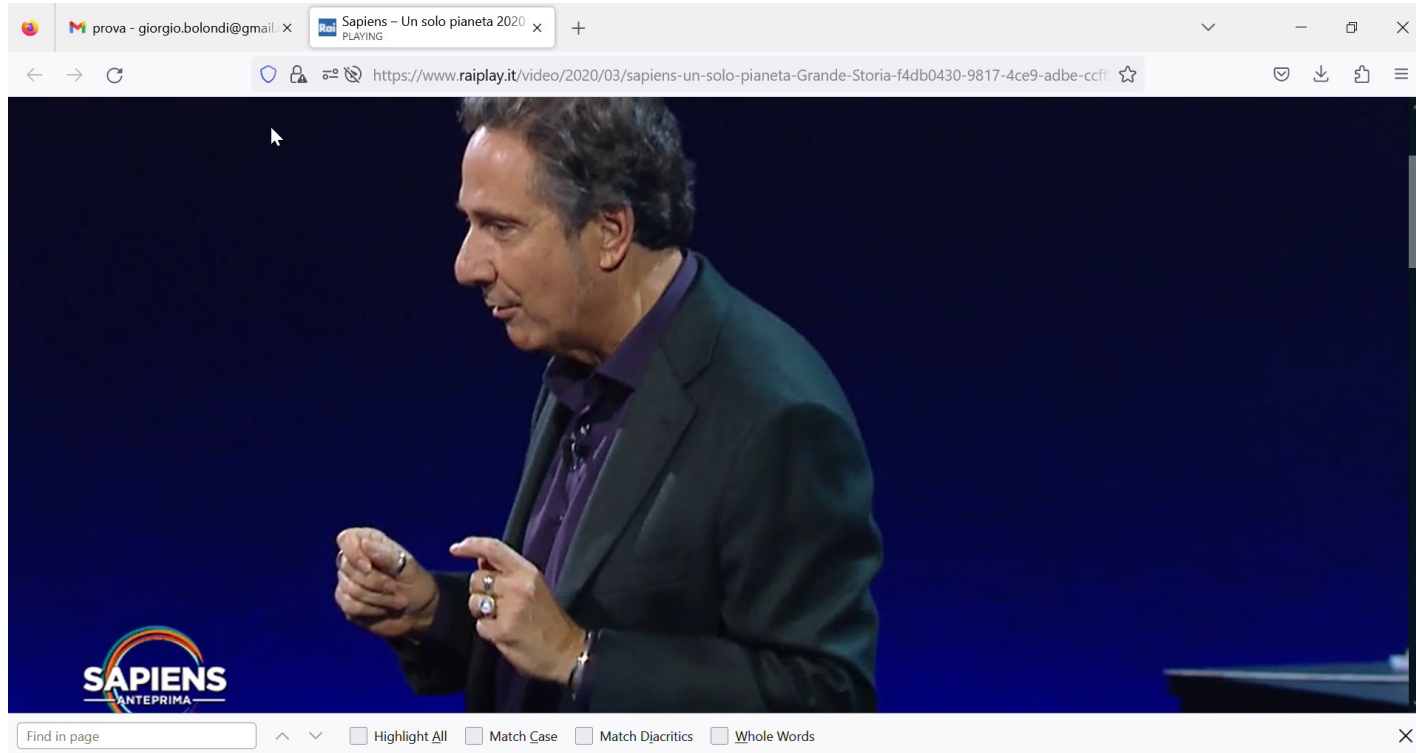
E quindi?

La «difesa» del significato si fonda sulla continua sistematica esplicitazione del significato dei segni e sul collegamento che deve venire instaurato tra i diversi sistemi semiotici utilizzati (in particolare le parole!)

Anche le relazioni e le operazioni tra i segni devono venire «caricate di significato»

I modelli mentali utilizzati per introdurre concetti matematici che poi vengono rappresentati mediante segni devono venire alimentati e arricchiti mano a mano che si procede, e non messi da parte

L'età della Terra



Simone Weil, lettera al fratello André

Quando i nostri allievi, lavorando su una equazione, arrivano a una scrittura come $\sqrt{abc}$, pensano di essere arrivati alla soluzione. Per i greci quello era il problema

X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM
per Insegnanti di Matematica

Grazie

La Thuile 27-30 Agosto 2025



UMI
Unione
Matematica
Italiana



CIIM
Commissione Italiana
per l'Insegnamento
della Matematica

Con il patrocinio di:

Regione Autonoma
Valle d'Aoste



Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Comune di
La Thuile

