

X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM
per Insegnanti di Matematica

Insegnare Matematica costruendo significati

La Thuile 27-30 Agosto 2025



UMI
Unione
Matematica
Italiana



CIIM

Commissione Italiana
per l'Insegnamento
della Matematica

Con il patrocinio di:

Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Comune di
La Thuile



Itinerario storico-didattico tra le diverse concezioni di probabilità

Elena Scalambro

Università degli Studi di Torino

Dipartimento di Biotechnologie Molecolari e Scienze per la Salute

elena.scalambro@unito.it



DBMSS
Dipartimento di Biotechnologie
Molecolari e Scienze per la Salute



UNIVERSITÀ
DI TORINO

X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM per Insegnanti di Matematica
La Thuile - 27-30 Agosto 2025



Unione
Matematica
Italiana



CIIM

Commissione Italiana
per l'Insegnamento
della Matematica

Con il patrocinio di:

Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Comune di
La Thuile



Storia della matematica... perché?

Oltre allo stereotipo, ancora diffuso, secondo cui la Matematica sia più congeniale al genere maschile, spicca l'errata convinzione che sia una **disciplina vecchia, arida, utile solo a chi lavora in ambito tecnologico** e, sostanzialmente, **staccata dalla realtà quotidiana, dalla dimensione personale e dal nostro modo di affrontare il mondo**. L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica nelle scuole devono contrastare tali pregiudizi.

La Matematica ha ricoperto e continua a ricoprire un ruolo fondamentale nell'evoluzione della scienza ma la sua influenza non si limita a questo ambito. **La sua storia si intreccia indissolubilmente con la storia del pensiero umano**. Con il suo rigore logico e il suo elevato livello di astrazione, la Matematica non è solo uno strumento per risolvere problemi, ma anche una **disciplina culturale che aiuta a leggere, interpretare e modellizzare la realtà e il noi** andando oltre stereotipi e pregiudizi. [...]

Coltivare un vero e proprio "pensiero matematico", valorizzando anche la conoscenza dell'evoluzione delle idee matematiche nel tempo, il contributo di civiltà diverse e i legami con le altre discipline umanistiche e scientifiche, ci fa sentire **parte di una grande avventura del pensiero umano**, rafforzando il nostro senso di appartenenza a una comunità di conoscenza senza tempo [...].



Cosa ci viene in mente sulla storia della probabilità?



Caccia al tesoro (anzi, all'errore!): alle origini della probabilità

La scienza non esclude gli errori; anzi, talora sono proprio questi a portare alla verità.
{Jules Verne}

Caccia... all'errore!



Il paradosso di D'Alembert nel lancio di 2 monete

Lanciando due monete indistinguibili con testa (T) e croce (C),
«il caso con una T e una C si verifica con la stessa facilità del caso TT e del caso CC».



Il gioco della zara: Dante e i suoi commentatori

«3 non può venire se non in un modo, cioè quando ciascun dado viene asso; 4 non può venire in tre dadi se non in un modo, cioè l'un dado in due, e due dadi in asso» [Jacopo della Lana, 1324-28]



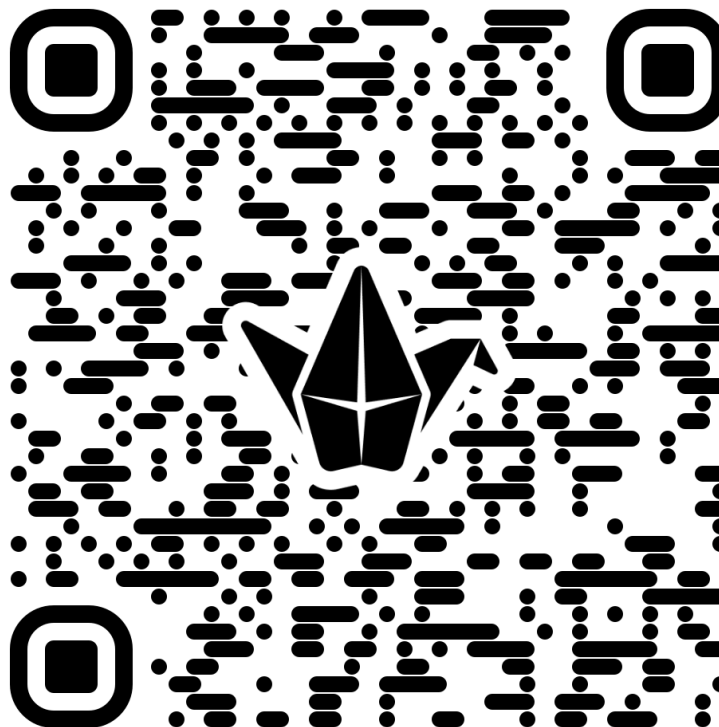
Galileo Galilei: i giocatori fiorentini e il lancio di 3 dadi

Lanciando 3 dadi, l'esperienza insegna che la somma 10 esce più spesso della somma 9. Com'è possibile? Le possibilità di ottenere 9 sono tante quante quelle di ottenere 10!

Caccia al tesoro (anzi, all'errore!)

Password Wi-Fi dell'hotel:

th-resorts.com



D'Alembert:
lanciando 2 monete
«il caso con una T e
una C si verifica con
la stessa facilità del
caso TT e CC».

Considera gli
eventi TC e CT
come un evento
unico

D'Alembert
non
considera che
CT o TC
hanno il 50%
di uscire

Non ha
considerato che
ci sono 2 modi
di fare TC

Il caso TC ha una probabilità doppia di
verificarsi rispetto a TT o CC

D'Alembert
non prende in
considerazioni
che le
permutazioni
TC e CT
conducono
allo stesso
"caso"

Il problema è che non
considera CT come diverso
da TC

D'Alembert non considera
che CT o TC hanno il 50%
di uscire

Differenza fra un singolo
lancio e una serie su
più lanci

La probabilità
che esca CT
è maggiore

**I commentatori di
Dante: lanciando 3
dadi, il «3 non può
venire se non in un
modo, cioè quando
ciascun dado viene
asso; 4 non può venire
in tre dadi se non in un
modo, cioè l'un dado in
due, e due dadi in
asso».**

Il 4 può venire in 3 modi

Non si considera l'ordine dei dadi

Possono
uscire 121, 112,
211 e non un
solo caso

La somma degli eventi
che dà 4 può avvenire
in tre eventi diversi

Non si considera
l'ordine

4 si può ottenere
con 3 combinazioni

Bisogna
considerare
come distinte
le
permutazioni
1,1,2 - 1,2,1 -
2,1,1

**I giocatori
fiorentini a
Galileo:**

«Lanciando 3
dadi,
l'esperienza
insegna che la
somma 10 esce
più spesso della
somma 9.
Com'è
possibile? Le
possibilità di
ottenere 9 sono
tante quante
quelle di
ottenere 10!».

Il 9 ha 25
combinazioni
possibili
e 10 ne ha
27

La somma degli eventi
che dà 9, può verificarsi
con una combinazione
(3+3+3) che "perde" due
eventi, cosa che non
accade per la somma 10.

tra le terne la
cui somma fa
9, (3,3,3)
capita una
sola volta,
mentre le
terne la cui
somma fa 10,
hanno tutte
almeno 3
permutazioni
distinte

Le possibili
combinazioni
che danno 9
sono 25
mentre quelle
che danno 10
sono 27

Il 10 ha più
possibilità
che il 9.

L'errore di un genio: il paradosso delle due monete di D'Alembert

Il contesto storico. Jean Baptiste Le Rond D'Alembert (1717-1783), un gigante dell'Illuminismo francese, nel suo studio sul lancio di due monete, giunge a una conclusione errata che oggi sembra sorprendente.

L'affermazione errata. Lanciando 2 monete indistinguibili, con testa (T) e croce (C), "il caso con una T e una C si verifica con la stessa facilità del caso con due teste (TT) e del caso con due croci (CC)".

D'Alembert vuole rispondere alla domanda:

Nel lancio di 2 monete indistinguibili, con testa (T) e croce (C), quanti sono i risultati che possono uscire con la stessa probabilità (ovvero i **casi equipossibili**)?

Secondo D'Alembert,

- i casi equipossibili sono 3;
- gli esiti TC e CT sono "sovrapponibili" (= rappresentano un unico caso).

Ma è davvero così?

Probabilità

	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$

L'errore di un genio: il paradosso delle due monete di D'Alembert

L'affermazione errata. Lanciando 2 monete indistinguibili, con testa (T) e croce (C), "il caso con una T e una C si verifica con la stessa facilità del caso con due teste (TT) e del caso con due croci (CC)".

D'Alembert sbaglia nel trattare i casi TC e CT come un unico evento. **I casi equipossibili sono 4** (TT, TC, CT, CC).

Attività pratica per SS1

Gli studenti possono verificare con un esperimento l'errore di D'Alembert: lanciando ripetutamente due monete e annotando i risultati, si nota che il caso "una T e una C" è due volte più frequente rispetto ai casi TT e CC, perché corrisponde a due eventi distinti (TC e CT).

Collegamento con il calcolo combinatorio per SS2

Si può formalizzare il concetto di spazio campionario e discutere la differenza tra combinazioni (errore di D'Alembert) e disposizioni con ripetizione (approccio corretto).

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3}{2} = 3$$
$$D'_{n,k} = n^k = 2^2 = 4$$

Probabilità

T	T	$\frac{1}{4}$
T	C	$\frac{1}{4}$
C	T	$\frac{1}{4}$
C	C	$\frac{1}{4}$

Il gioco della zara nel *Purgatorio* dantesco e l'errore dei commentatori

Il contesto storico. Nel commentare un passo del *Purgatorio* di Dante sul gioco della zara (gioco medievale con i dadi), grandi intellettuali come Jacopo della Lana (nel Trecento) e Benvenuto d'Imola (nel Quattrocento) analizzano le possibili uscite della somma 3 e 4 nel lancio di 3 dadi, commettendo però lo stesso errore fondamentale.

L'affermazione errata. 3 non può venire se non in un modo, cioè quando ciascun dado viene asso; **4 non può venire in tre dadi se non in un modo**, cioè l'un dado in due, e due dadi in asso. [Jacopo della Lana, 1324-28]

Secondo i commentatori di Dante, se si lanciano 3 dadi e si considera la somma delle facce, ottenere 3 o 4 sono eventi ugualmente rari.

Infatti:

- il 3 può uscire in un solo modo (1-1-1);
- il 4 può uscire in un solo modo (1-1-2).

Ma è davvero così?

“quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara.”
[Divina Commedia, *Purgatorio*, Canto VI, 1-3]



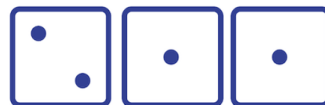
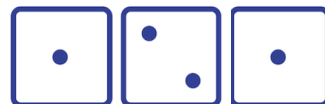
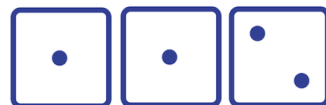
Il gioco della zara nel *Purgatorio* dantesco e l'errore dei commentatori

L'affermazione errata. 3 non può venire se non in un modo, cioè quando ciascun dado viene asso; **4 non può venire in tre dadi se non in un modo**, cioè l'un dado in due, e due dadi in asso [Jacopo della Lana, 1324-28].

■ **Somma 3:** 1 solo caso possibile.



■ **Somma 4:** 3 casi possibili.



Ottenere 4 è quindi tre volte più probabile che ottenere 3.

Attività pratica per SS1

Gli studenti possono verificare con un esperimento l'errore dei commentatori di Dante: lanciando molte volte tre dadi e annotando le uscite, si nota che la somma 4 è circa tre volte più frequente della somma 3.

Collegamento con il calcolo combinatorio per SS2

Si può analizzare la differenza tra combinazioni (errore dei commentatori di Dante) e permutazioni con ripetizione (approccio corretto).

$$C'_{1,2} \cdot C'_{1,1} = \binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1} = 1$$

$$P'_{n,k,h} = P'_{3,2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Galileo Galilei risponde al quesito dei giocatori fiorentini sul lancio di 3 dadi



Il contesto storico. A Galileo Galilei viene posto un interessante quesito da alcuni giocatori d'azzardo di Firenze: perché, lanciando tre dadi, la somma 10 esce più spesso della somma 9, sebbene entrambi i numeri possano essere formati da 6 combinazioni di facce?

Galileo risponde con un'analisi completa nel suo testo «Sopra le scoperte dei dadi» (1620). Non è un trattato teorico, ma una soluzione dettagliata alla domanda dei suoi amici fiorentini: perché la matematica sembra contrastare con la lunga osservazione dei giocatori?

L'affermazione errata. Lanciando 3 dadi, l'esperienza insegna che la somma 10 esce più spesso della somma 9. Com'è possibile? **Le possibilità di ottenere 9 sono tante quante quelle di ottenere 10!**

9	10
(1, 2, 6)	(1, 3, 6)
(1, 3, 5)	(1, 4, 5)
(1, 4, 4)	(2, 2, 6)
(2, 2, 5)	(2, 3, 5)
(2, 3, 4)	(2, 4, 4)
(3, 3, 3)	(3, 3, 4)

Galileo afferma «che il 9 e il 10 si formino con pari diversità di numeri è manifesto». Difatti,

■ per entrambe le somme esistono **6 combinazioni**.

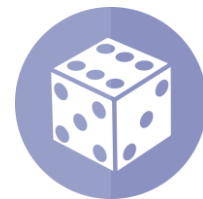
Tuttavia,

■ **ogni combinazione può uscire in modi differenti.**

Bisogna tener conto dell'ordine!



Galileo Galilei risponde al quesito dei giocatori fiorentini sul lancio di 3 dadi



L'affermazione errata. Lanciando 3 dadi, l'esperienza insegna che la somma 10 esce più spesso della somma 9. Com'è possibile? **Le possibilità di ottenere 9 sono tante quante quelle di ottenere 10!**

In conclusione:

- i giocatori fiorentini sbagliavano nel considerare i 6 casi **equipossibili**;
- la matematica **non** contraddice l'esperienza.

Spunti ulteriori per SS2

- Attività pratica (a gruppi) di elencazione sistematica di tutti i modi possibili per ottenere 9 e 10
- Riflessione sulla differenza tra le combinazioni e le disposizioni con ripetizione (calcolo combinatorio)
- Lettura e analisi del testo originale di Galileo (attività interdisciplinare)

modi		9	10		modi
6	←	(1, 2, 6)	(1, 3, 6)	→	6
6	←	(1, 3, 5)	(1, 4, 5)	→	6
3	←	(1, 4, 4)	(2, 2, 6)	→	3
3	←	(2, 2, 5)	(2, 3, 5)	→	6
6	←	(2, 3, 4)	(2, 4, 4)	→	3
1	←	(3, 3, 3)	(3, 3, 4)	→	3
25		somma dei modi			27

Una prima proposta didattica

Obiettivo: scoprire e comprendere alcuni dei concetti fondamentali del calcolo delle probabilità (eventi equiprobabili, spazio campionario per SS1 e SS2; elementi di calcolo combinatorio per SS2), andando alla ricerca di errori commessi da alcune grandi menti della storia (come D'Alembert) o corretti da importanti matematici (come Galileo).

Strumenti:

- Lavagna (interattiva o classica)
- Padlet (o strumento simile) per la condivisione interattiva delle ipotesi degli studenti
- Dadi e monete (per SS1 o per il primo biennio SS2)

■ Ruolo (storico e didattico) dell'errore
■ Importanza dell'alfabetizzazione matematica per contrastare la ludopatia (educazione civica)



Fasi dell'attività (1 ora o 2 ore, a seconda del numero di «affermazioni errate» da esaminare):

- 1. Introduzione (10-20 min):** presentazione del tema dell'attività, impostandola come una caccia al tesoro. Il «tesoro» è l'errore contenuto in problemi e affermazioni storiche relative alla probabilità.
- 2. Attività di gruppo (30-60 min):** suddivisione della classe in piccoli gruppi. A ciascun gruppo vengono sottoposte, una alla volta, le affermazioni storiche «errate» (3 per SS2, 2 per SS1). Gli studenti si confrontano tra loro e fanno esperimenti pratici con dadi e monete, scrivendo le loro ipotesi e conclusioni sul Padlet condiviso.
- 3. Discussione collettiva (15-35 min):** il docente guida la discussione, analizzando le ipotesi degli studenti e svelando l'errore «storico» di ogni quesito, giungendo alla formalizzazione della soluzione corretta.

Lasciando la parola a Federigo Enriques e Giovanni Vailati...

«Ogni errore contiene sempre una verità parziale da mantenere, così ogni verità un errore parziale da correggere». [Enriques 1911, p. 417]

Secondo Enriques, la correzione degli errori porta al progresso scientifico, da cui discende il loro valore euristico. Ciò ha conseguenze dirette sull'educazione matematica: occorre che il docente tenga conto degli errori dei propri allievi poiché gli «errori propriamente detti» rappresentano «tappe naturali del pensiero nella ricerca della verità», e dunque costituiscono «esperienze didattiche» e «altrettante occasioni di apprendere». [Enriques 1936, p. 14]



Federigo Enriques
(1871-1946)



«Un'asserzione erronea, un ragionamento inconcludente d'uno scienziato dei tempi trascorsi possono essere tanto degni di considerazione quanto una scoperta o un'intuizione geniale [...]. **Ogni errore ci indica uno scoglio da evitare mentre non ogni scoperta ci indica una via da seguire.**»

Giovanni Vailati
(1863-1909)

[Vailati 1897, p. 65]

Alla scoperta dell'approccio classico, frequentista e soggettivo alla probabilità

Il fatto che dovettero passare millenni prima che l'umanità iniziasse una qualche riflessione di carattere matematico sui giochi d'azzardo, è un evento storico estremamente singolare, del quale non sono state ancora trovate delle spiegazioni veramente soddisfacenti.
{Tullio Viola}

La probabilità classica («a priori», «teorica»)

Concetto fondamentale. La probabilità di un evento aleatorio E è il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, a condizione che tutti i casi siano ugualmente possibili (equiprobabili). Questa è la prima definizione formale di probabilità, nata dall'analisi dei giochi d'azzardo.

$$P(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

← equiprobabili

La probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo).

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

SS1: A lezione di dadi e astragali da Cardano

Obiettivo: Scoprire il concetto di equiprobabilità come condizione fondamentale della probabilità classica, confrontando sperimentalmente un dado e un astragalo e analizzando una fonte storica (Cardano) per distinguere un gioco "equo" da uno non equo.

SS2: La rovina del Cavalier De Méré

Obiettivo: Applicare il calcolo della probabilità dell'evento contrario per risolvere problemi di prove ripetute, comprendendo l'errore «intuitivo» di De Méré e utilizzando strumenti digitali per modellizzare il problema e analizzare l'andamento della probabilità.

Attività per SS1: A lezione di dadi e astragali da Cardano

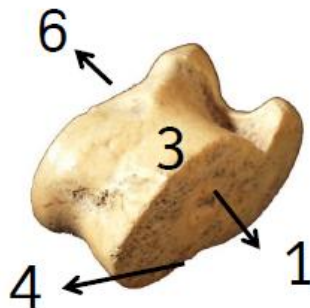
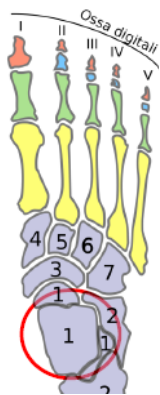
Spunto storico. Girolamo Cardano (1501-1576) è stato un illustre medico, fisico e matematico rinascimentale, ma anche un accanito giocatore, al punto da affermare: «Mi vergogno di dire che ho giocato non in modo sporadico, ma ogni giorno, per più di 40 anni a scacchi e per 25 ai giochi d'azzardo!». Con l'obiettivo di aumentare le sue probabilità di vittoria, ha studiato a fondo il gioco dei dadi nell'opera *De Ludo Aleae* (1526).

Materiali: Dadi a 6 facce, modellini di astragali (facilmente stampabili in 3D o reperibili online), scheda di lettura e/o traduzione del testo di Cardano.



Girolamo Cardano
(1501-1576)

1. Breve introduzione storica su Cardano



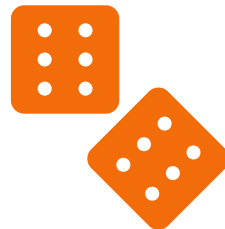
- Presentazione della figura di Cardano, esempio di «genio e sregolatezza», il primo a scrivere un vero manuale sul gioco d'azzardo, cercando di capirne le regole matematiche per vincere.
- Breve spiegazione sull'**astragalo** (osso irregolare a 4 facce).

Gli astragali sono ossicini del tarso, in particolare quelli di animali come pecore e capre, usati fin dall'antichità (VI sec. a.C.) come **dadi primitivi**. Venivano impiegati sia per giochi d'azzardo sia per pratiche divinatorie. A differenza dei dadi moderni, la loro forma irregolare rendeva i lanci non equi: le facce non avevano la stessa probabilità di uscire.

Attività per SS1: A lezione di dadi e astragali da Cardano

2. Esplorazione pratica

- Attività in piccoli gruppi: gli studenti osservano e manipolano un dado classico a 6 facce e un modellino di astragalo. Lanciano entrambi circa 30-40 volte, annotando gli esiti ottenuti.
- Restituzione collettiva: ciascun gruppo condivide con la classe i risultati ottenuti nei lanci del dado e dell'astragalo. Dal confronto collettivo, emergerà che, mentre nel dado le 6 facce escono con una frequenza simile, nell'astragalo le due facce larghe escono molto più spesso delle altre due strette.



3. Lettura guidata del testo di Cardano

- A gruppi o collettivamente, si legge e si commenta un breve passo tratto dal capitolo IX del *De Ludo Aleae*, in cui Cardano analizza la differenza tra i due oggetti.



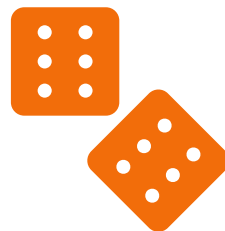
→ Per SS2 (licei): attività interdisciplinare con latino.

- Attraverso domande mirate, gli studenti collegano il loro esperimento alle parole di Cardano, che definisce il dado "onesto" e "giusto" per le scommesse perché ha "parità di condizioni", a differenza dell'astragalo che, essendo irregolare, non garantisce un gioco equo.
- Si conclude riflettendo insieme sul fatto che la definizione classica di probabilità «funziona» soltanto se tutti i casi possibili sono **equiprobabili**.

Attività per SS1: A lezione di dadi e astragali da Cardano

Gli esiti del nostro esperimento

DADO	Esce 1	Esce 2	Esce 3	Esce 4	Esce 5	Esce 6	Tot. lanci/gruppo
	115	125	116	132	100	106	694
	16,57%	18,01%	16,71%	19,02%	14,41%	15,27%	100,00%



ASTRAGALO	Esce A	Esce B	Esce C	Esce D	Tot. lanci/gruppo
	284	65	248	110	707
	40,17%	9,19%	35,08%	15,56%	100,00%

Attività per SS1: A lezione di dadi e astragali da Cardano

CAPITOLO IX. Sul lancio di un singolo dado.

L'astragalo ha quattro facce, e quindi anche quattro punteggi. Il dado invece ne ha sei; in sei lanci dovrebbero in teoria uscire tutti i singoli punteggi [una volta ciascuno]; ma poiché alcuni punteggi si ripetono mentre altri, di conseguenza, non escono, è inevitabile [che ciò non accada]. [L'astragalo] non giace piatto, ma può essere visto poggiare sulla sua parte curva da ogni lato, e da lì essere rappresentato; perciò non è in uso [per un gioco equo], ma i fanciulli ci giocano facendolo ruotare come una trottola, e non ha la forma di un dado (Alea). In tal caso, la probabilità è sempre la metà del numero [di esiti]; così, per esempio, nel risultato di tre lanci, posso ottenere un 1, un 3 e un 5 con la stessa facilità con cui [posso ottenere] un 2, un 4 e un 6. Di conseguenza, le scommesse si basano su questa parità di condizioni, se il dado è onesto; e [si vince] tanto di più, o di meno, quanto più [il dado] si sarà allontanato dalla vera equità. In verità, come ho detto, queste considerazioni contribuiscono moltissimo alla comprensione [teorica], ma quasi per nulla all'applicazione pratica.

[trad. it. di Cardano 1526]

CAPVT IX.

De vnus Alea iactu.

Talus habet quatuor facies, ideoque etiam puncta quatuor. Alea vero sex; in sex reuolutionibus singula puncta euenire deberent; sed quia repetuntur quædam alia, vt non eueniant, necesse est; sic representatur in plano, vt est ab omni latere dorso incumbens, videri potest, inde depingi; sic in vsu non est, sed verticilli in modum pueri ludunt, nec Aleæ formam habet; tum dimidium semper numeri est æqualitas, vt in tribus iactibus punctum eueniat; nam in sex completur reuolutio, aut tria puncta vno iactu, exemplum, tam possum proicere vnum tria quinque, quàm duo quatuor sex. Iuxta ergo hanc æqualitatem pacta constant, si Alea sit iusta; & tanto plus, aut minus, quanto à vera æqualitate longius distiterit. Verum (vt dixi) hæc ad intelligentiam plurimum, ad vsu penè nihil conferunt.

Attività per SS1: A lezione di dadi e astragali da Cardano

Esempio di scheda di lettura

L'astragalo ha quattro facce, e quindi anche quattro punteggi. Il dado invece ne ha sei...

1. Cardano distingue subito i due oggetti. Qual è la prima, fondamentale differenza che nota? A cosa corrisponde nelle vostre osservazioni?

[L'astragalo] non giace piatto, ma può essere visto poggiare sulla sua parte curva da ogni lato [...] i fanciulli ci giocano facendolo ruotare come una trottola, e non ha la forma di un dado.

2. In che modo questa descrizione di Cardano spiega quello che avete visto lanciando il vostro astragalo? Perché secondo voi alcune facce escono più spesso?

Nel risultato di tre lanci, posso ottenere un 1, un 3 e un 5 con la stessa facilità con cui [posso ottenere] un 2, un 4 e un 6.

3. Come potremmo riscrivere in termini moderni questa frase? Cosa significa? Qual è la probabilità di ottenere un numero pari lanciando un dado? E un numero dispari?

Di conseguenza, le scommesse si basano su questa parità di condizioni, se il dado è onesto; e [si vince] tanto di più, o di meno, quanto più [il dado] si sarà allontanato dalla vera equità.

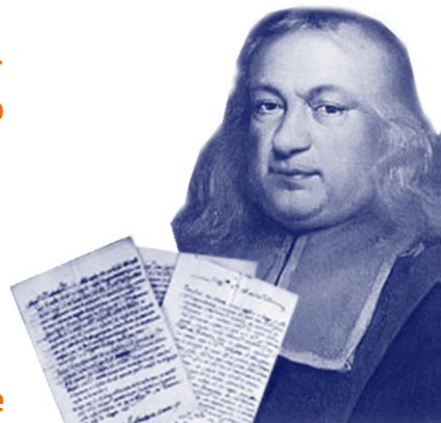
4. Cosa intende Cardano per "parità di condizioni" e "dado onesto"? Perché un gioco di scommesse con un astragalo non sarebbe "equo"?

Attività per SS2: La rovina del Cavalier De Méré



Blaise **Pascal**
(1623-1662)

Spunto storico. Si fa risalire la nascita del calcolo delle probabilità al 1654, quando Pascal e Fermat avviano una corrispondenza epistolare per risolvere alcuni problemi legati al gioco d'azzardo. La scintilla è un quesito riguardante come dividere equamente la posta in un gioco interrotto prima della fine (il "problema della divisione della posta"). I due matematici affrontano anche altri problemi, come quello posto a Pascal dal nobile e accanito giocatore Cavalier De Méré relativo al confronto tra due scommesse nel gioco dei dadi. La soluzioni trovate, basate su un rigoroso metodo matematico, segnano la nascita della teoria della probabilità, mostrando per la prima volta come la ragione può "svelare" le leggi e le regolarità nascoste dietro l'apparente casualità.



Pierre de **Fermat**
(1601-1665)

1. Introduzione al problema, a partire dalla lettera di Pascal

- Si propone agli studenti il problema del Cavalier De Méré, partendo dal testo della traduzione italiana della lettera che Pascal indirizza a Fermat il 29.7.1654, enucleando il cuore della questione in termini moderni.
- È utile discutere il significato di «scommessa vantaggiosa» per De Méré.

Un evento è «vantaggioso» se tale evento accade con probabilità superiore al 50%.

Attività per SS2: La rovina del Cavalier De Méré

B. Pascal a P. de Fermat, 29.7.1654

[...] Non ho il tempo di inviarvi la dimostrazione di una difficoltà che sorprenderebbe troppo **M. de Méré**, egli è, **infatti, di grande spirito, ma non è un matematico** (come sapete, questo è un grande difetto) [...].

Egli mi disse di aver trovato degli errori nei numeri per questo motivo:

- Se si scommette di ottenere **un sei con il lancio di un dado**, si ha un **vantaggio** se si scommette di ottenerlo **in 4 lanci**.
- Se si scommette di ottenere un **doppio sei con il lancio di due dadi**, si ha uno **svantaggio** se si scommette di ottenerlo **in 24 lanci**.

E **tuttavia 24 sta a 36** (che è il numero di facce di due dadi),
come 4 sta a 6 (che è il numero di facce di un dado).

Ecco quindi qual era il grande scandalo che lo faceva affermare così fortemente che le proposizioni non sono costanti e che l'Aritmetica si contraddice: ma voi ne troverete sicuramente il motivo per mezzo dei vostri principi.

[*Oeuvres de Pascal*, Paris, t. 2., 1858, pp. 392-394; *Oeuvres de Fermat*, Paris, t. 2., 1894, pp. 290-291]



Attività per SS2: La rovina del Cavalier De Méré

2. Attività di gruppo: l'errore di De Méré e la sua esperienza di giocatore

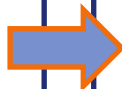
- Attività in piccoli gruppi: agli studenti si sottopongono le due seguenti domande-chiave.
 - Le probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando un dado 4 volte (scommessa A) e di ottenere almeno un doppio 6 lanciando due dadi contemporaneamente 24 volte (scommessa B) individuate da De Méré sono corrette? Argomentate la vostra risposta.***
 - L'esperienza di giocatore d'azzardo di De Méré gli suggerisce, correttamente, che la scommessa A è vincente mentre la B è perdente: perché? Come possiamo calcolarlo?***
- Discussione collettiva: ciascun gruppo condivide con la classe le proprie risposte, giungendo alla formalizzazione e alla risoluzione matematica del problema.

Il ragionamento (errato) di De Méré

La probabilità di ottenere 6 con un dado è $\frac{1}{6}$. Con 4 lanci del dado avrò

$$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

di probabilità di vincere.



La probabilità di ottenere una coppia di 6 con una coppia di dadi è $\frac{1}{36}$. Ripetendo 24 volte il lancio di 2 dadi avrò

$$24 \cdot \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{3}$$

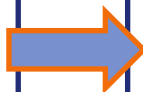
di probabilità di vincere. **La probabilità è la stessa!**

Attività per SS2: La rovina del Cavalier De Méré

Seguendo il ragionamento di De Méré, se lanciassimo il dado 7 volte, avremmo probabilità pari a $\frac{7}{6}$ di vincere, il che è chiaramente assurdo! **De Méré non calcola correttamente la probabilità dei due eventi considerati.** Tuttavia,

L'osservazione (corretta) di De Méré

Ho vinto una fortuna
scommettendo sull'uscita di
almeno un 6 in 4 lanci di un dado!



Perché mi rovino se scommetto
sull'uscita di almeno un doppio 6
in 24 lanci di due dadi?



Scommessa A

- La probabilità di *non* ottenere 6 in un lancio è $\frac{5}{6}$
- La probabilità di *non* ottenere mai 6 in 4 lanci è $\left(\frac{5}{6}\right)^4$
- La probabilità di ottenere almeno un 6 in 4 lanci è

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 1 - 0,482 = 0,518 \approx 51,8\% > 50\%$$

L'evento A ha probabilità leggermente superiore al 50%, quindi è una scommessa vantaggiosa.

Scommessa B

- La probabilità di *non* ottenere un doppio 6 in un lancio di 2 dadi è $\frac{35}{36}$
- La probabilità di *non* ottenere mai un doppio 6 in 24 lanci è $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$
- La probabilità di ottenere almeno un doppio 6 in 24 lanci è

$$P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0,509 = 0,491 \approx 49,1\% < 50\%$$

L'evento B ha probabilità leggermente inferiore al 50%, quindi è una scommessa svantaggiosa che, alla lunga, porta De Méré alla rovina.

Attività per SS2: La rovina del Cavalier De Méré

3. Costruzione del foglio di calcolo

Tabella 1 (Scommessa A)

- **Colonna A:** "Lancio" (numeri da 1 a 25).
- **Colonna B:** "Probabilità". In B3 inserire la formula $=1-(5/6)^{A3}$ e trascinarla in basso.
- **Colonna C:** "%". In C3 inserire la formula $=B3$, formattare come *Percentuale* e trascinare in basso.

Per la **Tabella 2 (Scommessa B)** procedere in modo analogo con

- **Colonna G:** "Probabilità". In E2 inserire la formula $=1-(35/36)^{D2}$ e trascinarla in basso.

Formattazione condizionale

Selezionare le colonne con le probabilità % (C e H). Andare su *Formato > Formattazione condizionale* e impostare due regole:

- Se il valore è $> 0,5$ → sfondo **verde** ("scommessa vantaggiosa").
- Se il valore è $< 0,5$ → sfondo **rosso** ("scommessa svantaggiosa").

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Q1: Ottenere almeno un 6 in n lanci					Q2: Ottenere almeno un doppio 6 in m lanci			
2	Lancio	Probabilità	%			Lancio	Probabilità	%	
3	1	0,1666666667	16,67%			1	0,0277777778	2,78%	
4	2	0,3055555556	30,56%			2	0,0547839506	5,48%	
5	3	0,4212962963	42,13%			3	0,0810399519	8,10%	
6	4	0,5177469136	51,77%			4	0,10656662	10,66%	
7	5	0,598122428	59,81%			5	0,1313842139	13,14%	
8	6	0,6651020233	66,51%			6	0,1555124302	15,55%	
9	7	0,7209183528	72,09%			7	0,1789704182	17,90%	
10	8	0,7674319606	76,74%			8	0,2017767955	20,18%	
11	9	0,8061933005	80,62%			9	0,2239496623	22,39%	
12	10	0,8384944171	83,85%			10	0,2455066161	24,55%	
13	11	0,8654120143	86,54%			11	0,2664647657	26,65%	
14	12	0,8878433452	88,78%			12	0,2868407444	28,68%	
15	13	0,906536121	90,65%			13	0,3066507237	30,67%	
16	14	0,9221134342	92,21%			14	0,3259104258	32,59%	
17	15	0,9350945285	93,51%			15	0,3446351362	34,46%	
18	16	0,9459121071	94,59%			16	0,3628397158	36,28%	
19	17	0,9549267559	95,49%			17	0,3805386126	38,05%	
20	18	0,9624389632	96,24%			18	0,3977458733	39,77%	
21	19	0,968699136	96,87%			19	0,4144751546	41,45%	
22	20	0,9739159467	97,39%			20	0,4307397337	43,07%	
23	21	0,9782632889	97,83%			21	0,4465525188	44,66%	
24	22	0,9818860741	98,19%			22	0,46192606	46,19%	
25	23	0,9849050617	98,49%			23	0,4768725583	47,69%	
26	24	0,9874208848	98,74%			24	0,4914038761	49,14%	
27	25	0,989517404	98,95%			25	0,5055315462	50,55%	
28									

Attività per SS2: La rovina del Cavalier De Méré

■ Dopo aver verificato «a mano» l'errore di De Méré, può essere utile passare al foglio di calcolo per analizzare il problema più in profondità.

La costruzione di un modello digitale favorisce la visualizzazione della crescita della probabilità degli eventi considerati all'aumentare del numero di lanci e permette di individuare il «punto di pareggio» (ovvero il numero di lanci corrispondenti al momento in cui la scommessa diventa vantaggiosa).

■ Sfruttando il foglio di calcolo, si può rispondere alle seguenti domande:

a) ***A partire da quale lancio la scommessa A diventa vantaggiosa?***

Al **4° lancio**, quando la probabilità supera per la prima volta il 50%.

b) ***Per la scommessa B, quanti lanci sarebbero necessari affinché diventi vantaggiosa?***

Servirebbero **25 lanci**. Il Cavalier De Méré sbagliava a fermarsi a 24, rimanendo appena sotto la soglia di convenienza.

4. Conclusioni ed eventuali approfondimenti

■ Il metodo di risoluzione adottato da **Pascal** sfrutta ciò che oggi è noto come **evento complementare**.

■ **Fermat** invece affronta il problema diversamente, basandosi su ciò che oggi è chiamato **teorema delle probabilità composte totali**.

■ C. **Huygens** torna sulla questione nel *De ratiociniis in ludo aleae* (1657), utilizzando il nuovo concetto di **speranza matematica** da lui introdotto.

La probabilità frequentista («a posteriori», «statistica»)

Concetto fondamentale. La probabilità di un evento E si può valutare come il rapporto tra il numero di casi in cui l'evento si è verificato e il numero totale dei casi osservati, purché il numero delle osservazioni sia molto grande.

$$P(E) = \frac{\text{numero dei casi in cui l'evento si è verificato}}{\text{numero dei casi osservati}}$$

↖ numero sufficientemente elevato

Ha un valore compreso tra 0 (quando l'evento non si è mai verificato) e 1 (quando l'evento si è verificato in tutti i casi osservati). A differenza della probabilità classica, non si basa su un ragionamento teorico «a priori», ma su un'analisi «a posteriori» di dati reali: coincide con la **frequenza relativa** di un evento.

SS1: Dai flagelli della peste ai pericoli del fumo

Obiettivo: Introdurre la probabilità frequentista come strumento per analizzare dati reali, imparando a calcolare e confrontare un rischio concreto attraverso l'esempio storico della peste e quello attuale del fumo.

SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

Obiettivo: Applicare la probabilità frequentista ai dati storici di J. Graunt per calcolare la probabilità semplice e condizionata di sopravvivenza, sviluppando un approccio critico sui pregi e i limiti dell'analisi statistica.

Attività per SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

Spunto storico. John Graunt (1620-1674), un mercante di tessuti londinese (e non un accademico!), può essere considerato il padre della statistica moderna e della demografia storica. La sua opera del 1662, *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, costituì la prima analisi sistematica dei dati (mortalità, natalità, distinzione dei sessi, ...) raccolti settimanalmente dalle parrocchie di Londra.

All'epoca, i bollettini di mortalità servivano principalmente per monitorare l'insorgere di epidemie di peste, permettendo ai ricchi di fuggire dalle città e ai commercianti di adattare le loro scorte. Graunt ebbe il merito di trasformare questi semplici elenchi di decessi in uno strumento per scoprire «verità nascoste» sulla popolazione londinese e fare previsioni.



John Graunt
(1620-1674)

1. Introduzione su Graunt e il contesto: il problema della peste

- Presentazione della figura di John Graunt, con cenni alla Londra del Seicento.
- Si fornisce agli studenti la prima pagina del cap. IV dell'opera di Graunt, per leggerla e discuterne insieme.
- Ci si pone la stessa domanda di Graunt:

*Alla luce dei dati sui decessi, **quale fu l'anno in cui l'epidemia di peste colpì più duramente?***

- Dopo aver raccolto le prime impressioni degli studenti, li si invita a costruire una tabella che «traduca» il testo di Graunt con l'obiettivo di rispondere alla domanda in modo matematicamente corretto.

Attività per SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

CAPITOLO IV. Sulla peste.

Cap. IV. Of the Plague

1. Before we leave to discourse of the Casualties, we shall add something concerning that greatest Disease, of Casualty of all, The Plague.

There have been in London, within this Age, four Times of great Mortality, that is to say, the years 1592, and 1593, 1603, 1625, and 1636.

[...]

2. Now it is manifest of it self, in which of these years most died; but in which of them was the greatest Mortality of all Deseases in general, or of the Plague in particular, we discover thus.

[Graunt 1662, p. 33]

→ Spunto per attività interdisciplinare con **inglese**.

CAP. IV.

Of the Plague.

1. **B**Efore we leave to discourse of the *Casualties*, we shall add something concerning that greatest *Disease*, or *Casualty* of all, The *Plague*.

There have been in *London*, within this Age, four Times of great *Mortality*, that is to say, the years 1592, and 1593, 1603, 1625, and 1636.

There died *Anno* 1592 from *March* to *December*,

_____ 25886

Whereof of the *Plague* _____ 11503

Anno 1593 _____ 17844

Whereof of the *Plague* _____ 10662

Christned in the said year _____ 4021

Anno 1603 within the same space of time, were

Buried _____ 37294

Whereof of the *Plague* _____ 30561

Anno 1625, within the same space, _____ 51758

Whereof of the *Plague* _____ 35417

Anno 1636, from *April* to *December* _____ 23359

Whereof of the *Plague* _____ 10400

2. Now it is manifest of it self, in which of these years most died; but in which of them was the greatest *Mortality* of all *Diseases* in general, or of the *Plague* in particular, we discover thus.

Attività per SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

Periodo	Morti totali	Morti di peste	Rapporto	%
1592-93	43.730	22.165	$\frac{22.165}{43.730} = 0,50686 \dots$	50,69%
1603	37.294	30.561	$\frac{30.561}{37.294} = 0,81946 \dots$	81,95%
1625	51.758	35.417	$\frac{35.417}{51.758} = 0,68428 \dots$	68,43%
1626	23.359	10.400	$\frac{10.400}{23.359} = 0,44522 \dots$	44,52%

■ **Un possibile errore:** indicare il 1625 in quanto anno con il numero assoluto di morti per peste più elevato.

■ **Metodo corretto:** come capita da Graunt, non bastano i dati assoluti ma bisogna calcolare il rapporto. L'anno peggiore è il 1603, con circa l'82% dei decessi dovuti alla peste.

2. Attività di gruppo: calcolare la speranza di vita nel 1662

■ A ciascun gruppo sono fornite la tavola di mortalità e la complementare tavola di sopravvivenza elaborate da Graunt.

Immaginate di «seguire» 100 neonati nella Londra del Seicento. La prima tabella ci rivela, secondo le osservazioni di Graunt, il numero di decessi a seconda della fascia d'età. La seconda ci dice quanti sono ancora vivi alle diverse età.

■ Gli studenti rispondono ad alcune domande-stimolo, utilizzando le tavole come unica fonte di informazione.

Attività per SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

Tavola di mortalità

Anni alla morte	Numero di morti nel periodo su 100 unità
[0; 6]	36
(6; 16]	24
(16; 26]	15
(26; 36]	9
(36; 46]	6
(46; 56]	4
(56; 66]	3
(66; 76]	2
(76; 86]	1

Tavola di sopravvivenza

Età	Sopravvissuti su 100 unità
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1
86	0

a) Probabilità semplice

Scegliendo a caso un neonato da questo gruppo, qual era la sua probabilità di raggiungere almeno i 16 anni?

$$P(\text{sopravvivere fino a 16 anni}) = \frac{40}{100} = 40\%.$$

b) Probabilità condizionata

Se un bambino è sopravvissuto al pericolosissimo periodo infantile e ha già compiuto 6 anni, quali sono ora le sue probabilità di arrivare almeno fino a 36 anni?

Il "totale dei casi possibili" è il numero di persone ancora vive a 6 anni. Dalla tabella, i sopravvissuti a 6 anni sono 64. Di questi, 16 arrivano a 36 anni.

$$P(\text{arrivare a 36 anni} \mid \text{essere vivo a 6}) = \frac{16}{64} = 25\%.$$

c) Analisi dei dati

Basandovi sulla tabella, in quale fascia d'età (dopo i 6 anni) morivano più persone? E in quale di meno?

Basta calcolare i decessi per ogni fascia d'età dalla tabella di sopravvivenza: il periodo più letale è la giovinezza.

Attività per SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

Si può anche proporre agli studenti di leggere un estratto dell'opera originale di Graunt in cui vengono affrontate tali questioni. Si tratta di una parte del

CAPITOLO XI. Sul numero di abitanti.

Cap. XI. Of the number of Inhabitants.

→ Spunto per attività interdisciplinare con inglese.

[Graunt 1662, p. 62]

not die in exact Proportions, nor in Fractions : from whence arises this Table following.

<i>Viz.</i> of 100 there dies	The fourth	6
within the first six years 36	The next	4
The next ten years, or	The next	3
<i>Decad</i> ————— 24	The next	2
The second <i>Decad</i> — 15	The next	1
The third <i>Decad</i> — 09		

10. From whence it follows, that of the said 100 conceived there remains alive at six years end 64.

At Sixteen years end 40	At Fifty six	6
At Twenty six ————— 25	At Sixty six ————— 3	
At Thirty six ————— 16	At Seventy six ——— 1	
At Forty six ————— 10	At Eighty ————— 0	

11. It follows also, that of all, which have been conceived, there are now alive 40 *per Cent.* above sixteen years old, 25 above twenty six years old, & *sic deinceps*, as in the above Table : there are therefore of Aged between 16, and 56, the number of 40, less by six, *viz.* 34; of between 26, and 66, the number of 25 less by three, *viz.* 22 : & *sic deinceps*.

Attività per SS2: Alla scoperta dell'indagine di John Graunt

3. Riflessione guidata: pregi e difetti dell'approccio di Graunt

- Si discute collettivamente il valore e i limiti dell'approccio frequentista, come fece lo stesso Graunt.

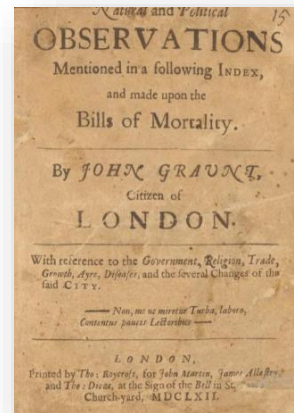


Punti di forza

- Si basa su dati reali e non richiede l'equiprobabilità dei casi.
- Ha un potere predittivo (ha dato origine alle assicurazioni sulla vita).
 - Permette di scoprire regolarità nascoste.

Criticità

- L'affidabilità dipende dalla qualità dei dati (Graunt lamentava imprecisione e incompletezza).
- I risultati sono validi solo per il campione studiato (la Londra del Seicento non è il mondo di oggi).
- Richiede un gran numero di osservazioni per essere attendibile.



- Attualizzazione dell'insegnamento di Graunt: la statistica è uno strumento molto potente per leggere la realtà, ma bisogna sempre essere critici verso i dati, domandandosi come sono stati raccolti e quali sono i loro limiti.

Attività per SS1: Dai flagelli della peste ai pericoli del fumo

1. Un «detective» del passato: John Graunt e la peste

- Breve presentazione di Graunt, della Londra del Seicento e dei «Bollettini di mortalità».

- Prima domanda-stimolo, basata sui dati storici di Graunt:

Nel 1625 morirono di peste 35.417 persone, nel 1603 'solo' 30.561.

Quale fu l'anno peggiore?

- Si fornisce agli studenti una versione «moderna» dei dati sulla peste raccolti da Graunt e si pone la seconda domanda-stimolo:

Dareste la stessa risposta avendo a disposizione i dati in tabella? Perché?

Anno	Morti totali	Morti di peste	Freq. relativa	Freq. %
1603	37.294	30.561		
1625	51.758	35.417		
1626	23.359	10.400		



- A coppie, gli studenti completano la tabella, calcolando la frequenza relativa e percentuale dei morti di peste.
- Si riflette insieme sul fatto che per confrontare i dati correttamente occorre sempre calcolare i rapporti (frequenza relativa) senza fermarsi ai numeri assoluti.

Attività per SS1: Dai flagelli della peste ai pericoli del fumo

2. Diventiamo «detective» del presente: i rischi del fumo

- Collegamento con l'attualità

Il metodo di Graunt è fondamentale ancora oggi. Per eventi come ammalarsi, non possiamo calcolare la probabilità come faremmo con un dado (non ci sono 'casi possibili' e 'favorevoli' teorici). Dobbiamo fare come lui: osservare i dati reali per capire i rischi. Vediamo un esempio che ci riguarda da vicino: il fumo.

- Presentazione dei seguenti dati relativi al carcinoma polmonare. I dati fanno riferimento a 100.000 persone della stessa età e sono ripartiti secondo il numero di sigarette fumate al giorno.

Numero di sigarette al giorno	0	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	>40
Casi di carcinoma polmonare all'anno	7	30	70	107	150	185	223	260	310	350

- Domande

- a) **Qual è la probabilità di ammalarsi per chi non fuma?** 7 su 100.000. È un rischio molto basso.
- b) **Ora confrontiamo un non fumatore con una persona che fuma circa un pacchetto al giorno (20 sigarette). Quante volte è più probabile che il fumatore si ammali?** Basta confrontare i casi: 150 (fumatore) contro 7 (non fumatore).

$$\frac{150}{7} = 21,428571 \approx 21 \rightarrow \text{Il rischio è più di 20 volte superiore!}$$

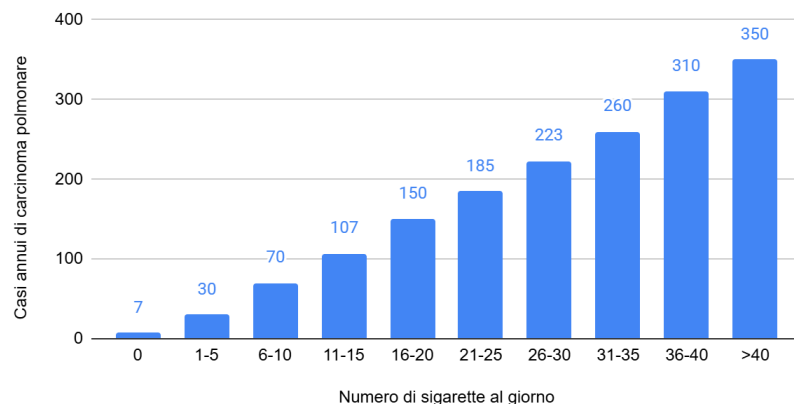
Attività per SS1: Dai flagelli della peste ai pericoli del fumo

- Visualizzazione (con carta e penna o con un foglio di calcolo)

Proviamo a rappresentare questi dati mediante un grafico a barre. Cosa si nota?

Gli studenti visualizzeranno una crescita drammatica del rischio, rendendo l'impatto dei dati ancora più evidente.

Rapporto tra casi annui di carcinoma polmonare e numero di sigarette al giorno (su 100.000 persone)



3. Riflessione finale: educazione alla salute

Cosa abbiamo imparato?

- Per capire i fenomeni complessi della vita reale (dalle epidemie storiche ai rischi per la salute oggi), l'unico strumento affidabile è la probabilità frequentista, cioè l'analisi dei dati raccolti su larga scala.
- I numeri dimostrano in modo inequivocabile che le nostre scelte hanno conseguenze dirette e misurabili. La matematica ci fornisce gli strumenti per leggere la realtà e prendere decisioni consapevoli per la nostra salute.

Lasciando la parola a Emma Castelnuovo...

Valutazione statistica della probabilità

Una situazione in cui è molto importante avere una valutazione statistica della probabilità riguarda l'influenza del fumo nei casi di carcinoma polmonare. Si parla sempre di più di questa influenza, e in molti paesi del mondo si fanno approfondite statistiche. [...]

Risulta da questi dati che chi non fuma ha una probabilità di ammalarsi uguale a $\frac{7}{100.000}$, mentre, anche

fumando solo 10 sigarette al giorno, la probabilità diventa uguale a $\frac{70}{100.000}$, cioè 10 volte maggiore. La

probabilità raggiunge il valore di $\frac{350}{100.000}$ per i fumatori di più di 40 sigarette al giorno.

Appare chiara la dipendenza fra tumore e fumo.

[...] la valutazione statistica della probabilità è attendibile solo se il numero di casi esaminati è molto grande.

Ma quante volte si sente dire: «Non è vero che il fumo faccia male; mio nonno fumava 50 sigarette al giorno e stava benissimo fino a 90 anni!», oppure, «Non è vero che il caffè faccia aumentare la pressione; io prendo 6 o 7 tazzine al giorno e non ho nessun disturbo!».

[Castelnuovo 1993, pp. 57-59]

La probabilità soggettiva

Concetto fondamentale. La probabilità soggettiva di un evento E è il rapporto tra la quantità di denaro che una persona è disposta a pagare per una scommessa e la somma che vincerebbe se l'evento E dovesse realizzarsi. È il grado di fiducia che una persona attribuisce all'evento E .

$$P(E) = \frac{\text{somma che un individuo è disposto a scommettere}}{\text{somma vinta se } E \text{ si realizza}}$$

Si parla di «concezione soggettiva» di probabilità perché individui diversi possono assegnare ad uno stesso evento probabilità diverse, in base alle informazioni in loro possesso.

Basta limitarsi alla concezione soggettiva, considerare cioè la probabilità come il grado di fiducia sentito da un dato individuo nell'avverarsi di un dato evento.
{Bruno de Finetti}

SS1: Il chiosco dei gelati: come decidere?

Introdurre la probabilità soggettiva come "grado di fiducia" personale, utilizzando un gioco di ruolo per prendere una decisione razionale in condizioni di incertezza, bilanciando rischi e opportunità.

SS2: Il problema del giornalista di de Finetti

Applicare il ragionamento marginalistico di de Finetti per formalizzare una strategia decisionale ottimale, calcolando una "soglia di convenienza" da utilizzare su una distribuzione di probabilità soggettiva.

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti



Bruno de Finetti
(1906-1985)

Spunto storico. Bruno de Finetti (1906-1985) è stato uno dei più influenti matematici italiani del XX secolo, noto per aver rivoluzionato il modo stesso di concepire la probabilità. Egli sostenne che la probabilità non è una proprietà oggettiva ma una misura del grado di fiducia che un individuo razionale assegna a un evento incerto. Per de Finetti, la probabilità è uno strumento della nostra mente per ragionare in condizioni di incertezza, non un attributo fisico degli eventi dunque «la probabilità non esiste». Tale approccio soggettivo è oggi fondamentale in svariati campi come l'economia, la finanza e l'intelligenza artificiale, dove le decisioni devono essere prese sulla base di informazioni incomplete.

1. Il contesto: il problema del giornalaio

- Introduzione storica su de Finetti e la sua concezione soggettiva della probabilità.
- Presentazione del problema originale:

Un giornalaio compra dei quotidiani al prezzo di 10 (costo, C) per rivenderli in giornata al prezzo di 25 (prezzo B , con $B > C$).
Le copie invendute perdono ogni valore (resa, $R = 0$).

Quante copie gli conviene acquistare, al costo dato C , per rivenderne un certo numero (aleatorio) N al prezzo B ?

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti

Il seguente esempio intende mostrare l'importanza che ha anche in questo campo il criterio di basarsi su confronti marginali. Si dice "problema del giornalaio" perché si pensa a un individuo che compra un certo numero di oggetti, p. es. al prezzo di 10 per rivenderli al prezzo di 25 in giornata dopo di che perdono ogni valore (e così è dei giornali, prescindendo dalla resa o tenendone implicitamente conto ritoccando i dati).

Quanti pezzi converrà comprare? Egli dovrà valutare quali probabilità attribuisce al fatto di *poterne vendere* 0, 1, 2, 3, ecc., calcolare il guadagno sperato nell'ipotesi di *comprarne* 0, 1, 2, 3, ecc., e vedere quale sia massimo. Ma tale procedimento laborioso si semplifica di colpo pensando in termini marginalistici: **ogni pezzo in più** che acquista porta a un aumento o a una diminuzione di guadagno sperato, perché comporta un'uscita certa di 10 ed un'entrata di 25 *se esso sarà venduto* (ossia se le richieste saranno più di quante si potevano soddisfare senza quel pezzo in più). La probabilità di vendere l' n -esimo pezzo (per es., il 12°) è la probabilità di avere almeno n (12) richieste, ossia la somma delle probabilità di tutti i singoli numeri da n in poi. Ci sarà convenienza ad acquistare il 12° pezzo – in generale l' n -esimo – se si attribuisce probabilità superiore al 40% alla sua vendita ossia al fatto di avere almeno 12 richieste (perché la spesa di 10 si compensa col ricavo di 25 al 40% di probabilità); insomma: ci si deve arrestare a quel numero di pezzi oltre il quale la probabilità di vendere tutte le copie scende al di sotto del 40% (in generale, del rapporto tra prezzo d'acquisto e prezzo di vendita).

[De Finetti 1967, in Anichini-Giacardi-Luciano, pp. 383-384]

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti

2. Il ragionamento di de Finetti: la soglia di convenienza

Si illustra e ripercorre insieme agli studenti il ragionamento di de Finetti, eventualmente partendo dal testo originale. De Finetti individua due «vie» per risolvere il problema:

- Metodo più «laborioso»: calcolo del profitto atteso per *ogni* possibile quantità di giornali da acquistare.
- Metodo più efficace (**marginalista**): bisogna porsi la domanda «**Conviene acquistare UN giornale in più?**».

Si passa all'**analisi rischio/opportunità**:

- **Rischio**: spesa certa di 10 (perdita P se resta invenduto).
- **Opportunità**: incasso possibile di 25, con guadagno netto di 15 (guadagno G se viene venduto).

Occorre allora stabilire una **soglia di convenienza**.

- Conviene acquistare l' n -esimo giornale solo se la probabilità di venderlo è *sufficientemente alta* da giustificare il rischio.
- La convenienza esiste se la probabilità di vendere l' n -esima copia è superiore al rapporto tra costo e prezzo.



$$\text{Soglia di convenienza} = \frac{\text{costo}}{\text{prezzo}} = \frac{10}{25} = 0,4 = 40\%$$

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti



- Seguendo il ragionamento di de Finetti, si perviene alla conclusione.

La regola finale. Acquista l' n -esima copia se
 $P(\text{domanda} \geq n) > 40\%$

Esempio di distribuzione

Domanda X	Probabilità P(X)
10 copie	10%
11 copie	20%
12 copie	35%
13 copie	25%
14 copie	10%

3. L'applicazione: siete voi i giornalai!

- Si divide la classe in piccoli gruppi e si assegna un primo compito:

Ora siete voi i giornalai.

Basandovi su esperienza, meteo, notizie del giorno, ecc., dovete definire il vostro «grado di fiducia» sulla domanda di oggi, costruendo la «vostra» distribuzione della probabilità di vendere 10, 11, 12, 13 o 14 copie.

- Una volta che ciascun gruppo ha definito la propria distribuzione di probabilità, si passa al secondo compito:

Calcolate la probabilità cumulata $P(X \geq n)$. Dal confronto con la soglia del 40%, stabilite il numero massimo di copie che vi conviene ordinare.

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti

Esempio



n (copia n -esima)	Probabilità cumulata $P(X \geq n)$	Confronto con 40%	Decisione
10	100%	>40%	OK
11	90%	>40%	OK
12	70%	>40%	OK
13	35%	<40%	NO
14	10%	<40%	NO

Decisione ottimale.

Il numero massimo di copie da acquistare è 12. Ordinare la 13esima è una scommessa matematicamente svantaggiosa!

4. Riflessione finale: la logica del probabile

- Dal problema del giornalaio alla realtà: questo modello è alla base di complesse decisioni aziendali (gestione delle scorte, prezzi dei voli aerei, strategie di investimento, ...).
- Lettura guidata: ma cos'è davvero la "probabilità"? Lasciamo che sia Bruno de Finetti a spiegarlo.
- Discussione collettiva: la probabilità non è una "proprietà oggettiva" ma rappresenta una misura del grado di fiducia che un individuo razionale attribuisce a un evento.

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti

Di molte asserzioni, o proposizioni, spesso non sappiamo dire se sono «vere» o «false» (ad es. per quanto riguarda tutti gli eventi futuri), ma soltanto se sono più o meno verosimili o probabili. Anche qui si presentano le due alternative: di concepire tale valutazione di probabilità come avente un senso obbiettivo, o come avente semplicemente un senso soggettivo. Quasi sempre si cerca, anche con grandi sforzi, di persuadere o di persuadersi dell'esistenza di un significato obbiettivo; tutti questi sforzi ebbero però sempre un esito poco soddisfacente, tanto vero che nessuna definizione o concezione di probabilità ha mai saputo imporsi o affermarsi. Il calcolo delle probabilità è la logica del probabile. Come la logica formale insegna a dedurre la verità o falsità di certe conseguenze dalla verità o falsità di certe premesse, così il calcolo delle probabilità insegna a dedurre la maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe premesse. Per chi attribuisca alla probabilità un significato obbiettivo, il calcolo delle probabilità dovrebbe avere un significato obbiettivo, i suoi teoremi esprimere delle proprietà che nel campo del reale risultano soddisfatte. Ma è inutile fare simili ipotesi. Basta limitarsi alla concezione soggettiva, considerare cioè la probabilità come il grado di fiducia sentito da un dato individuo nell'avverarsi di un dato evento, e si può dimostrare che i noti teoremi nel calcolo delle probabilità sono condizioni necessarie e sufficienti perché le opinioni di un determinato individuo non siano intrinsecamente contraddittorie e incoerenti.

[De Finetti 1930, p. 261-262]

Attività per SS2: Il problema del giornalaio di de Finetti

Esempio di scheda di lettura

Dopo aver letto attentamente il testo, rispondi alle seguenti domande.

1. Secondo de Finetti, qual è il principale punto debole delle concezioni "oggettive" della probabilità? Individua la frase del testo che, secondo lui, ne dimostra l'insuccesso.
2. Sottolinea nel testo la definizione esplicita di probabilità soggettiva. Prova ad esprimere con parole tue, basandoti su tale definizione, cosa intende de Finetti per probabilità.
3. De Finetti paragona il "calcolo delle probabilità" alla "logica formale". In che modo, secondo l'autore, queste due discipline si assomigliano nel loro scopo?
4. Secondo de Finetti, qual è il ruolo della matematica? Se la probabilità è un "grado di fiducia" personale e soggettivo, a cosa servono allora i teoremi e le regole matematiche del calcolo delle probabilità?
5. Pensa a un esempio concreto di "evento futuro" (es. "Domani pioverà" oppure "La mia squadra del cuore vincerà la prossima partita"). Come applicheresti la concezione soggettiva di de Finetti per assegnare una probabilità a questo evento e cosa significherebbe quel valore?



Attività per SS1: Il chiosco dei gelati: come decidere?

1. Un problema di realtà: la sfida del chiosco dei gelati

- Il contesto: si introduce il problema del chiosco dei gelati.

Ogni mattina i gelatai titolari del chiosco GelaMath preparano del gelato fresco, ma non sanno mai esattamente quanti clienti arriveranno. Il gelato che non viene venduto a fine giornata va buttato per ragioni di sicurezza alimentare.

- La sfida: tenendo conto che ogni porzione di gelato invenduta rappresenta una perdita,

Quante porzioni del nuovo gusto CioccoMath devono preparare oggi?

- I dati a disposizione:

- Costo di produzione: **1 €** a porzione.
- Prezzo di vendita: **3 €** a porzione.
- **Guadagno** (per porzione venduta): **+2 €**
- **Perdita** (per porzione invenduta): **-1 €**

Le vendite della scorsa settimana

Giorno	Porzioni vendute
Lun.	8
Mart.	10
Merc.	7
Giov.	11
Ven.	9

2. La decisione: tocca a voi!

- Si suddivide la classe in 4 o 5 squadre:

ciascuna deve scegliere quante porzioni preparare

oggi (da 5 a 20), basandosi sui dati a disposizione e sull'intuito (o «grado di fiducia»).



Attività per SS1: Il chiosco dei gelati: come decidere?

3. La simulazione: i risultati

- Si svela la domanda reale del giorno: **Oggi è una giornata fredda... sono arrivate solo 5 richieste!**
- Si analizza, collettivamente, come sono andate le squadre di gelatai. Ad esempio:

Squadra	Porzioni preparate	Porzioni vendute	Porzioni avanzate	Calcolo guadagno/perdita	Saldo
A	6	5	1	$(5 \cdot 2\text{€}) - (1 \cdot 1\text{€})$	+9 €
B	8	5	3	$(5 \cdot 2\text{€}) - (3 \cdot 1\text{€})$	+7 €
C	11	5	6	$(5 \cdot 2\text{€}) - (6 \cdot 1\text{€})$	+4 €
D	15	5	10	$(5 \cdot 2\text{€}) - (10 \cdot 1\text{€})$	0 €
E	20	5	15	$(5 \cdot 2\text{€}) - (15 \cdot 1\text{€})$	-5 €



4. Discussione guidata: cosa abbiamo imparato?

- Quale squadra ha guadagnato di più? Perché la sua scelta è stata la migliore in questo scenario?
- Cosa è successo alla squadra che è andata in perdita (o ha guadagnato meno)? Qual è stato il suo errore di valutazione?

La matematica è strumento per prendere le decisioni migliori possibili di fronte a un futuro incerto: per decidere, ogni squadra ha usato il proprio "grado di fiducia", bilanciando il rischio di perdere soldi con la possibilità di guadagnare di più.

Lasciando la parola a Bruno de Finetti...

Nella valutazione delle probabilità ci si avvale di vari elementi che possono presentarsi caso per caso (ragioni di simmetria come per dadi, palline in un'urna, roulette, ecc.; esperienze statistiche su fenomeni simili; confronti, ecc.) integrandole in genere con conoscenze, opinioni, ecc. relative al singolo caso in questione. Il giornalista avrà un'esperienza, ma potrà ad es. ritenere o no significativa la manifestazione di una tendenza recente all'aumento, o avrà motivi particolari per attendere minori o maggiori richieste nel caso particolare di "domani", e via dicendo.

Imparare praticamente, esercitandosi, a saper apprezzare i gradi di probabilità ed esprimere meditatamente le proprie valutazioni in fatto di probabilità, sarebbe una delle più preziose conquiste di un progresso nell'educazione: il senso del ragionamento probabilistico è infatti, come detto, deplorabilmente manchevole e distorto se non si ha cura di coltivarlo e affinarlo.

[De Finetti 1967, in Anichini-Giacardi-Luciano, p. 384]



Il Novecento: i paradossi della probabilità

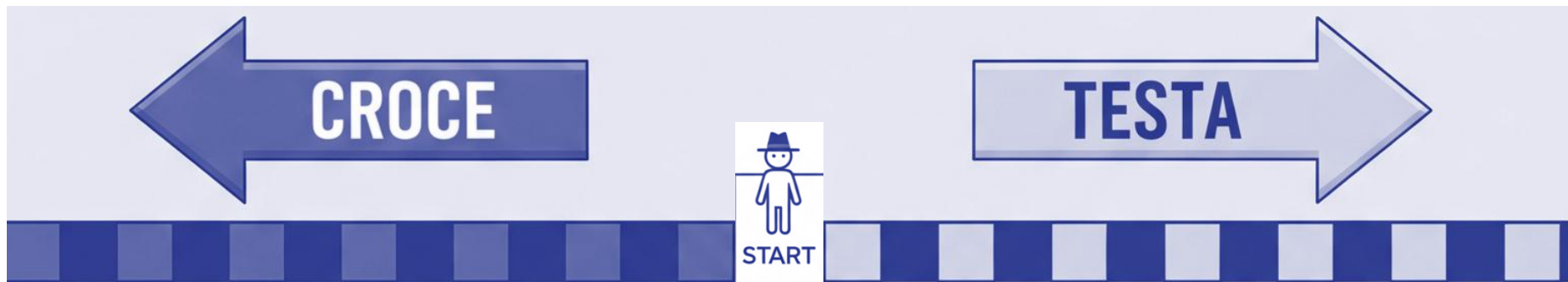
Possibile non significa probabile, significa solo che non è impossibile.
{Arthur Conan Doyle}

La passeggiata aleatoria (K. Pearson, 1905)

Spunto storico. Nel 1905 il celebre statistico Karl Pearson introduce il concetto di passeggiata aleatoria (*random walk*) per risolvere il problema della descrizione del percorso imprevedibile di una zanzara in una foresta, per studiare la diffusione della malaria. Questo modello matematico, fondamentale per descrivere movimenti casuali, nasce da un'esigenza biologica ma è oggi utilizzato in molteplici campi, dalla finanza all'informatica, dalla fisica alla chimica.

Come funziona la passeggiata aleatoria?

- Il viandante si muove lungo una linea numerica monodimensionale, con punto di partenza fissato a 0 (START o origine).
- Ad ogni passo, il movimento è deciso dal lancio di una moneta (evento casuale con due esiti equiprobabili).
 - **TESTA:** Il viandante si muove di **+1** (un passo verso destra).
 - **CROCE:** Il viandante si muove di **-1** (un passo verso sinistra).



Proposta di attività didattiche

Attività per SS1

Materiali: Gesso o nastro adesivo per tracciare una linea numerica sul pavimento, una moneta.

1. Introduzione: tracciare la linea a terra (es. da -20 a +20) e porre la domanda stimolo: "Se facciamo 30 lanci di moneta, secondo voi, su quale numero si fermerà il nostro viandante? Fate la vostra previsione!"

2. Sperimentazione: uno studente si posiziona sullo 0. La classe, a turno, lancia la moneta per 30 volte, mentre il "viandante" esegue la passeggiata passo dopo passo.

3. Discussione: confrontare la posizione finale con le previsioni iniziali. Si discute perché è quasi impossibile prevedere il punto esatto di arrivo, ma si osserva che, molto probabilmente, la posizione finale non sarà lontanissima dal punto di partenza, introducendo intuitivamente il concetto di "valore atteso".

Attività per SS2

Materiali: Tabelloni di gioco, pedine e monete.

1. Sperimentazione a gruppi: ogni gruppo effettua 40 lanci di moneta e traccia il percorso del proprio viandante.

2. Analisi e domande stimolo: ogni gruppo risponde alle seguenti domande

- Dove è più probabile che si trovi il viandante dopo 40 passi? Perché?
- Cosa accade se la passeggiata continua all'infinito? È possibile che il viandante si allontani per sempre o tornerà prima o poi al punto di partenza?

3. Riflessione collettiva: discussione delle risposte e brainstorming sulle applicazioni moderne del modello (potenza predittiva).



Spiegazione matematica della passeggiata aleatoria

a) Dove è più probabile che si trovi il viandante dopo 40 passi? Perché?

La posizione più probabile è **0** (il punto di partenza).

La motivazione risiede nel **valore atteso**: su 40 lanci, ci aspettiamo circa 20 T (+20 passi) e 20 C (-20 passi). I due movimenti tendono a elidersi, portando a un risultato finale «vicino» allo zero.



Attenzione: questo è il singolo risultato più probabile, non una certezza!

Si tratta del centro attorno al quale si distribuiranno tutti gli esiti possibili.

b) Cosa accade se la passeggiata continua all'infinito?

È possibile che il viandante si allontani per sempre o tornerà prima o poi al punto di partenza?

G. **Pólya** ha dimostrato che in una passeggiata aleatoria infinita il ritorno al punto di partenza è un evento certo. Anche se il viandante si allontana moltissimo, continuando a camminare all'infinito avrà infinite opportunità per compensare i passi fatti in una direzione con un numero uguale di passi nella direzione opposta, fino a tornare esattamente al punto di partenza.



Attenzione: se i passi sono infiniti, la probabilità di tornare al punto di partenza è del 100%!



György Pólya
(1887-1985)

Dal lancio di due monete al moto browniano

Approfondimento

Materiali: foglio di carta quadrettato, matita, 2 monete distinte (ad es. di colori diversi).

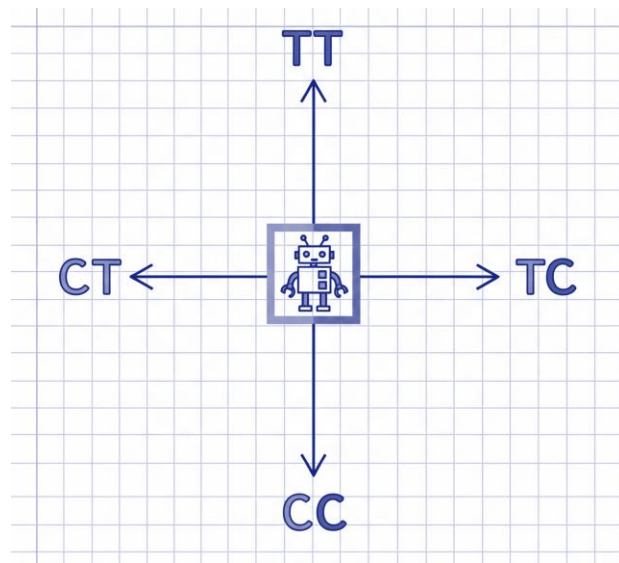
Tracciamo il percorso di un robot su una griglia. Il nostro robot parte dall'origine, si muove di un quadretto alla volta e ogni passo (su, giù, destra, sinistra) è determinato dal lancio casuale di due monete distinte. Nello specifico:

- TT → su
- TC → destra
- CT → sinistra
- CC → giù

Questa passeggiata aleatoria in 2D, apparentemente un semplice gioco, costituisce il modello più semplice possibile di un processo stocastico (o casuale) e fornisce una buona descrizione del cosiddetto

moto browniano

nel quale una particella si muove in modo caotico e imprevedibile, urtata incessantemente dalle molecole di fluido che la circondano (come un granello di polline in acqua).



Il problema delle scimmie infinite (É. Borel, 1909)

Spunto storico. Nel 1909 il matematico e politico francese Émile Borel elabora il “teorema delle scimmie infinite” (o “teorema della scimmia instancabile”) che affonda le sue radici nella teoria della probabilità. Proponendo una sorta di esperimento mentale, Borel afferma che “una scimmia che batte a caso sui tasti di una macchina da scrivere per un tempo infinito, prima o poi, comporrà le opere complete di Shakespeare” (o qualsiasi altro testo).



Attività per SS2

Materiali: Lavagna (o LIM), calcolatrice.

Obiettivo: Comprendere come la ripetizione di un evento casuale ne «influenzi» la probabilità, mettendo a confronto un problema con un numero finito di tentativi (il dado) con un esperimento mentale sull'infinito (le scimmie).

1. Presentazione dell'affermazione-paradosso di Borel

- Breve discussione sull'affermazione e raccolta delle prime reazioni degli studenti (incredulità, scetticismo, ...)
- Domanda chiave: ***Come è possibile che un evento così incredibilmente improbabile diventi una certezza assoluta?***

Per capirlo, partiamo da un problema più semplice: il lancio di un dado.

Dalle scimmie infinite al dado: andata...

2. Il problema del dado

- Qual è la probabilità di ottenere 6 lanciando un dado?

$$P(\text{un 6 in 1 lancio}) = \frac{1}{6} \approx 17\%$$

- Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 in 6 lanci di un dado?

Conviene utilizzare la probabilità dell'evento contrario.

$$P(\text{nessun 6 in 6 lanci}) = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} \approx 33,5\%$$

$$P(\text{almeno un 6 in 6 lanci}) = 1 - P(\text{nessun 6 in 6 lanci}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 66,5\%$$

- Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 in 60 lanci di un dado?

$$P(\text{almeno un 6 in 60 lanci}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{60} \approx 99,998\%$$



Con un numero **finito** di tentativi, un evento possibile diventa molto **più probabile**, ma non certo.



Dalle scimmie infinite al dado: ... e ritorno!



3. Il ponte concettuale: dal dado alla scimmia instancabile

	Almeno un 6 nel lancio del dado	Il problema della scimmia instancabile
Probabilità del singolo successo	Relativamente alta ($1/6$, circa 17%).	Estremamente bassa (infinitesimale, ma non zero).
Numero di tentativi	Finito (ad es. 6 o 60 lanci)	Infinito
Risultato	L'evento diventa molto più probabile al crescere del numero di lanci (nei nostri casi, probabilità di circa 66,5% e 99,998%), ma non è una certezza.	L'evento diventa una certezza (probabilità del 100%).

4. Conclusioni: il «potere» della ripetizione



- Un numero **finito** di tentativi trasforma un evento poco probabile in uno abbastanza probabile.
 - Un numero **infinito** di tentativi trasforma un evento quasi impossibile in un evento assolutamente certo.
- In sostanza, **l'infinito ha il «potere» di «sconfiggere» anche la più estrema improbabilità.**

Domanda di riflessione: *Vi vengono in mente altri esempi reali in cui un evento molto raro diventa quasi certo se si aspetta abbastanza a lungo o si aumenta enormemente il numero di tentativi?*



Approfondimento: il problema delle scimmie infinite

- Il teorema delle scimmie infinite rappresenta un caso particolare del secondo lemma di Borel-Cantelli, un risultato fondamentale per la dimostrazione della legge forte dei grandi numeri.
- Dal punto di vista matematico, data una tastiera di m tasti e un testo da riprodurre di k battute la probabilità di NON riprodurlo in n tentativi è

$$\left(1 - \frac{1}{m^k}\right)^n.$$

Considerando che m e k sono numeri interi positivi e, soprattutto, finiti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{m^k}\right)^n = 0.$$

Questo significa che, con infiniti tentativi, si ha la certezza di ottenere il testo desiderato.

- S. Woodcock e J. Falletta (University of Technology di Sydney) hanno calcolato che l'intera opera di Shakespeare, composta da circa 885.000 parole, richiederebbe $10^{7448366}$ battute casuali di tasti. Ma per fare ciò, servirebbe molto più tempo della durata di vita prevista dell'Universo!

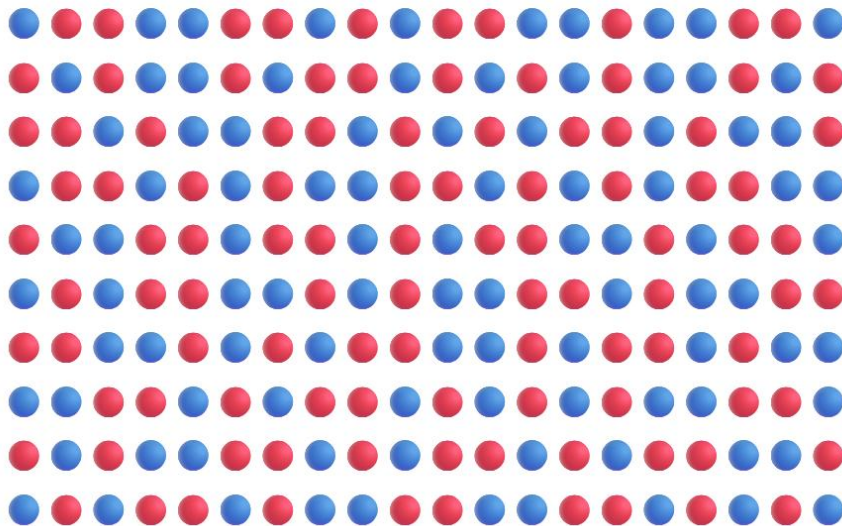


Legge di Benford, frodi e casualità

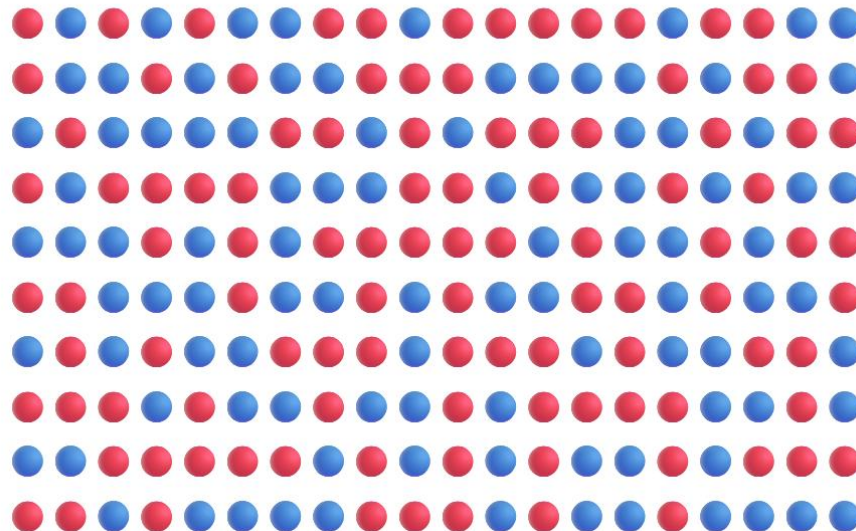
Una di queste sequenze di 200 lanci di una moneta è autentica, l'altra è stata inventata di sana pianta.

Quale delle due è quella reale?

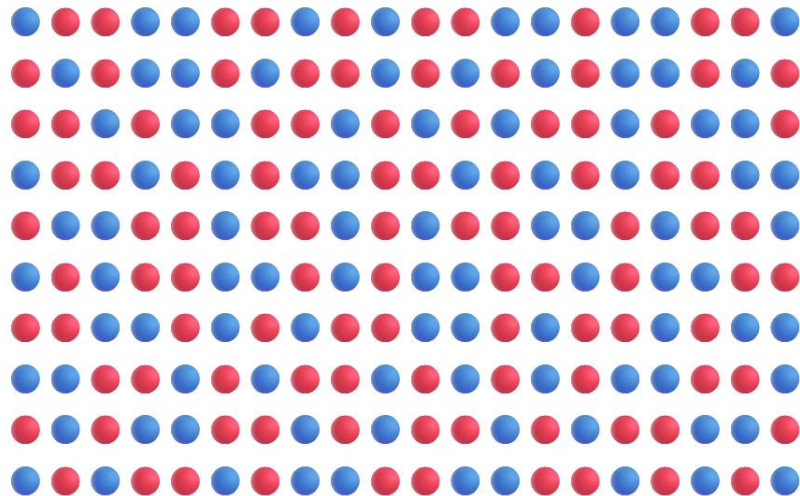
Sequenza A



Sequenza B



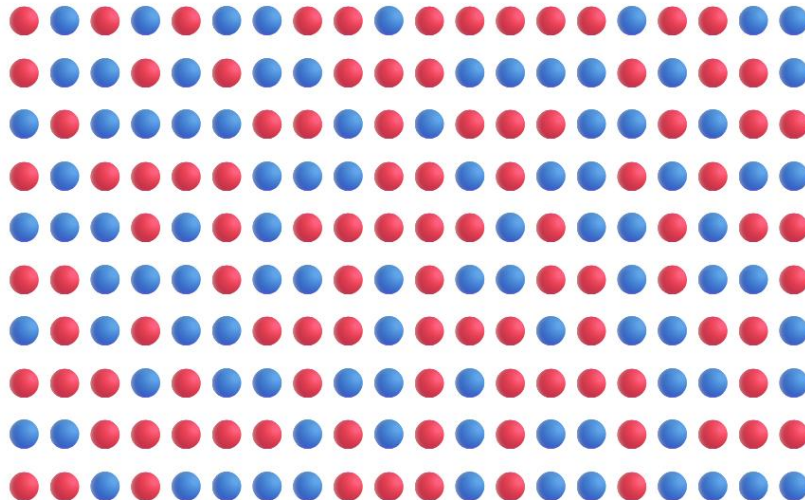
Sequenza A



Sequenza **falsa** (inventata)

- Tende a far alternare spesso T e C.
- Risente dell'errore della mente umana («fallacia del giocatore»), che evita le lunghe ripetizioni per far sembrare la sequenza "più casuale".
- Appare "troppo perfetta", uniforme e mista, senza le lunghe "strisce" tipiche della vera casualità.

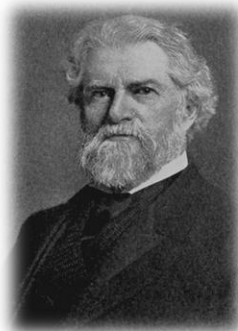
Sequenza B



Sequenza **autentica** (reale)

- Ogni lancio è un evento indipendente con il 50% di probabilità che esca T o C; la moneta **"non ha memoria"**.
- Le lunghe serie dello stesso risultato (5-6 T di fila) sono statisticamente normali e attese
- Presenta "ammassi" e "isole" dello stesso colore, vero marchio di un processo casuale.

La legge di Benford (F. Benford, 1938)



Simon Newcomb
(1835-1909)

Spunto storico. Quella della legge di Benford è la storia di una scoperta casuale.

- Nel 1881 il matematico e astronomo Simon Newcomb nota che le prime pagine delle tavole dei logaritmi erano molto più usurate delle ultime. Ciò significa che i numeri che iniziano con la cifra 1 sono cercati e usati molto più spesso degli altri.
- Questa idea viene ripresa e formalizzata nel 1938 dal fisico e ingegnere Frank Benford. Analizzando oltre 20.000 insiemi di dati reali (dalle lunghezze dei fiumi alle popolazioni delle città) conferma questa strana e controintuitiva regolarità, che da allora porta il suo nome.



Frank Benford
(1883-1948)

Obiettivo didattico. Comprendere due idee profonde e controintuitive:

- 1) gli eventi casuali indipendenti "non hanno memoria";
- 2) i dati reali, a differenza di quelli inventati, lasciano delle "impronte digitali" statistiche prevedibili.

La legge di Benford (in sintesi). In molti insiemi di dati del mondo reale, la prima cifra **non è distribuita a caso**.

- Il numero **1** è la cifra iniziale circa il **30%** delle volte.
- Il numero **9**, invece, lo è meno del **5%** delle volte.

Un'applicazione: come smascherare una frode?

La mente umana, quando inventa dei numeri, tende a distribuire le cifre in modo più o meno uniforme, perché questo *ci sembra* più "casuale".



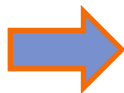
Attenzione: Se le prime cifre nei dati di un bilancio, di una spesa elettorale o di un esperimento scientifico non seguono la legge di Benford, è molto probabile che siano state inventate o manipolate.

La legge di Benford e il problema delle sequenze casuali nel lancio di una moneta svelano una debolezza fondamentale della nostra intuizione, ovvero:

I **dati autentici** possiedono delle «**irregolarità**» **statistiche** che la mente umana ignora.



- Nei lanci di una moneta, queste irregolarità sono le **lunghe strisce dello stesso risultato**.
- Nei dati numerici, sono una **forte prevalenza di cifre basse** come l'1.



È possibile scoprire una frode non perché i dati siano palesemente assurdi, ma al contrario, perché sono **"troppo perfetti"**, privi delle stranezze e delle imperfezioni statistiche tipiche della realtà.

Lasciando la parola a Emma Castelnuovo...

Maschio o femmina? Testa o croce?

Cominciamo da quando si nasce.

Si sente dire: «Hanno avuto tre femmine; ora ci riprovano. È più probabile, ora, che venga un maschietto».

«No, non è vero; però...» C'entra, in tutto questo, la probabilità, e dunque la matematica; ma come?

Passiamo a un gioco, quello di «testa e croce», anche se giocare è un atto certo meno nobile di quello di nascere.

Lancio una moneta: può venire «testa» o «croce». È chiaro che la probabilità di avere «testa» (e così «croce») è il 50% ossia $\frac{1}{2}$, se la moneta è «onesta», cioè non pesa di più da una parte che dall'altra.

La rilancio. È venuto «testa» per 3 volte. Ora (non si dice, ma si pensa – non nascondiamocelo!) sarà più probabile che venga «croce». È vero? Ma no, perché la moneta non ha memoria, e nemmeno si mette a fare i dispetti, e perciò ogni volta è come se fosse la prima volta: ogni lancio non tiene conto del lancio precedente.

Lo stesso accade per il gioco del lotto. Il 34 non era uscito sulla ruota di Napoli per ben 143 settimane. La gente diceva: «La prossima volta esce sicuramente; conviene puntare sul 34!». E invece no, anche il gioco del lotto non ha memoria: ogni volta è come se fosse la prima volta.

[Castelnuovo 1993, p. 49]

Il paradosso del compleanno (R. von Mises, 1939)



Richard von Mises
(1883-1953)

Spunto storico. Richard von Mises, matematico ebreo austriaco, si è occupato anche della teoria delle probabilità. Trasferitosi negli USA per mettersi al riparo dall'avanzata del nazismo in Europa, nel 1939 propone il famoso problema del compleanno:

Qual è la probabilità che due persone di un gruppo casuale festeggino il compleanno lo stesso giorno?
Il problema è noto come il «paradosso del compleanno» perché il suo risultato è ben diverso da ciò che ci si aspetterebbe.

Problema. State organizzando una festa e volete che ci siano almeno due persone con lo stesso compleanno (cioè nate lo stesso giorno dello stesso mese, ma non necessariamente nello stesso anno).

Dal momento che non conoscete le date di nascita degli invitati, quante persone dovrete invitare perché la probabilità che due di loro abbiano lo stesso compleanno sia almeno del 50%? E quante ne dovrete invitare per averne quasi la certezza?



Il paradosso del compleanno: da von Mises al foglio di calcolo



1. Presentazione del paradosso del compleanno

- Breve discussione sull'affermazione e raccolta delle risposte intuitive degli studenti (come 366 persone!)
- La risposta di von Mises: ***Bastano 23 persone per avere il 50% di probabilità che due di loro compiano gli anni lo stesso giorno e bastano 57 persone per fare arrivare la probabilità al 99%, cioè quasi alla certezza.***

Per capirlo, partiamo da un problema più semplice: il lancio di un dado.

2. Impostazione dei calcoli: il metodo dell'evento contrario

- Impostazione collettiva della soluzione del problema. Conviene ragionare sulla probabilità dell'evento contrario:

Qual è la probabilità che TUTTE le persone in un gruppo abbiano compleanni DIVERSI?

Immaginiamo di far entrare le persone nella stanza della festa una alla volta e calcoliamo la probabilità che abbiano tutti un compleanno diverso, ovvero:

$P(\text{nessuna coincidenza})$



Escludiamo, per semplicità, gli anni bisestili per cui ragioniamo su **365 giorni**.

Il paradosso del compleanno: da von Mises al foglio di calcolo

Persone	Situazione	Fattore	$P(\text{nessuna coincidenza})$
1	Ha 365 giorni "liberi" su 365	$\frac{365}{365}$	$\frac{365}{365} = 100\%$
2	Ha 364 giorni "liberi" su 365.	$\frac{364}{365}$	$\left(\frac{365}{365}\right) \cdot \left(\frac{364}{365}\right) \approx 99,7\%$
3	Ha 363 giorni "liberi" su 365.	$\frac{363}{365}$	$\left(\frac{365}{365}\right) \cdot \left(\frac{364}{365}\right) \cdot \left(\frac{363}{365}\right) \approx 99,2\%$
...	... e così via...		
n	Ha $365 - n + 1$ giorni "liberi" su 365.	$\frac{365 - n + 1}{365}$	$\left(\frac{365}{365}\right) \cdot \left(\frac{364}{365}\right) \cdot \left(\frac{363}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{365 - n + 1}{365}\right)$

■ Per ogni persona aggiunta, si moltiplica il risultato per una frazione sempre più piccola ($362/365$, $361/365$, ecc.). Questo fa sì che la probabilità di "nessuna coincidenza" crolli molto velocemente.

■ Arrivati alla **23ª persona**, la probabilità che tutti abbiano compleanni diversi è scesa a circa il **49,3%**.

La probabilità che almeno due persone condividano il compleanno è salita a $100\% - 49,3\% = \mathbf{50,7\%}$.

Ecco perché 23 persone sono il «numero magico» per superare il 50%!

Il paradosso del compleanno: da von Mises al foglio di calcolo

- Proseguendo con lo stesso calcolo, con **57 persone** la probabilità di non avere coincidenze diventa quasi nulla (circa l'1%), rendendo la probabilità di avere almeno un compleanno in comune pari al **99%**.

3. Passaggio al foglio di calcolo di calcolo

Per visualizzare l'«effetto valanga» di questo calcolo, è molto efficace utilizzare un foglio di calcolo.

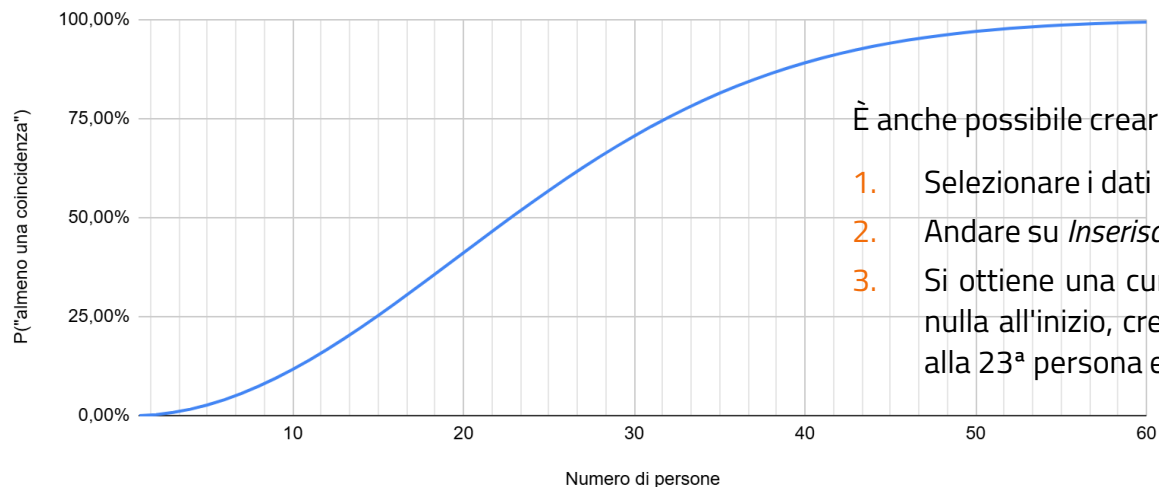
Probabilità che la n -esima persona abbia un compleanno diverso da tutte le $n - 1$ precedenti
Probabilità cumulativa che tutte le persone abbiano compleanni diversi

	A	B	C	D	E
	N. di persone	P("compleanno diverso")	P("nessuna coincidenza")	P("almeno una coincidenza")	%
1	1	1	1	0	0,00%
2	2	0,997260274	0,997260274	0,002739726027	0,27%
3	3	0,9945205479	0,9917958341	0,008204165885	0,82%
4	4	0,9917808219	0,9836440875	0,01635591247	1,64%
5	5	0,9890410959	0,9728644263	0,0271355737	2,71%
6	6	0,9863013699	0,9595375164	0,04046248365	4,05%
7	7	0,9835616438	0,9437642969	0,0562357031	5,62%
8	8	0,9808219178	0,9256647076	0,07433529235	7,43%
9	9	0,9780821918	0,9053761661	0,09462383389	9,46%
10	10	0,9753424658	0,8830518223	0,1169481777	11,69%
11	11	0,9726027397	0,8588586217	0,1411413783	14,11%
12	12	0,9698630137	0,8329752112	0,1670247888	16,70%
13	13	0,9671232877	0,8055897248	0,1944102752	19,44%
14	14	0,9643835616	0,776897488	0,223102512	22,31%

Il paradosso del compleanno: da von Mises al foglio di calcolo

Istruzioni per la costruzione il foglio di calcolo

- Colonna A [N. di persone]: Inserire i numeri da 1 a 60.
- Colonna B [P("compleanno diverso")]: In B2 inserire la formula $= (365 - A2 + 1) / 365$ e trascinarla in basso.
- Colonna C [P("nessuna coincidenza")]: In C2 inserire $= B2$. In C3 inserire $= C2 * B3$ e trascinare la formula in basso.
- Colonna D [P("almeno una coincidenza")]: In D2 inserire $= 1 - C2$,
- Colonna E [%]: in E2 inserire $= D2$, formattare come *Percentuale* e trascinare in basso.



È anche possibile creare un **grafico** per visualizzare l'andamento.

1. Selezionare i dati delle colonne A ed E (o A e D).
2. Andare su *Inserisci > Grafico* e scegliere *Grafico a linee*.
3. Si ottiene una curva a "S" che mostra come la probabilità, quasi nulla all'inizio, cresca rapidamente superando il 50% esattamente alla 23ª persona e arrivando quasi al 100% prima della 60ª.

Il paradosso del compleanno: da von Mises al foglio di calcolo

4. La spiegazione del paradosso: il problema delle strette di mano

- Perché la nostra intuizione sbaglia? Perché non pensiamo al numero di coppie possibili all'interno del gruppo.
- L'analogia perfetta è il problema delle strette di mano.

$$n = 23$$

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} = \frac{23 \cdot 22}{2} = 253$$

Con 23 persone, le coppie possibili non sono 22, ma ben 253!

- Ogni coppia rappresenta una "chance" che si verifichi una coincidenza. Con 253 "occasioni" in gioco, non è più così sorprendente che almeno una vada a segno.
- La soluzione del paradosso: non bisogna pensare di confrontare il compleanno di una singola persona con tutti gli altri, ma di «controllare» tutte le possibili coppie del gruppo.

Il problema delle strette di mano.

Se in una stanza ci sono 3 persone (A, B, C), quante strette di mano si scambiano se tutti si stringono la mano a vicenda?

- A stringe la mano a B e a C (2 strette di mano)
- B stringe la mano a C (1 stretta di mano in più)
- Totale: 3 coppie possibili (A-B, A-C, B-C)

E se le persone fossero 4 (A, B, C, D)?

- A-B, A-C, A-D (3)
- B-C, B-D (2)
- C-D (1)
- Totale: 6 coppie possibili

La formula per calcolare il numero di coppie in un gruppo di n persone è

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$



Bibliografia essenziale

- Anichini, G., Giacardi, L., Luciano, E.** [a cura di] **(2015)**. *Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica*. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà». «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI» (1) 8 fasc. n.3. [Link](#)
- Boyer, C.B. (1976)**. *Storia della matematica*. ISEDI., Milano.
- Bottazzini, U., Freguglia, P., Toti Rigatelli, L. (1992)**. *Fonti per la storia della matematica : aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilità, logica*. Sansoni, Firenze.
- Castelnuovo, E. (1993)**. «Pentole, ombre, formiche». *In viaggio con la matematica*. La Nuova Italia, Firenze.
- David, F.N. (1998)**. *Games, gods and gambling: a history of probability and statistical ideas*. Dover, Mineola.
- De Finetti, B. (1930)**. *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*. «Bollettino dell'UMI» (1) 9 fasc. n.5, pp. 258-261. [Link](#)
- De Finetti, B. (1967)**. *Il saper vedere in matematica*. Loescher, Torino.
- Dupont, P. (1985)**. *Primo incontro con la probabilità. Storia e didattica*. S.E.I., Torino.
- Giacardi, L. (2023)**. *Le 'battaglie' di Federico Enriques in difesa della humanitas scientifica e le ricadute sull'insegnamento della matematica*. «Scientia» 1 n.2, pp. 73-126. [Link](#)
- Graunt, J. (1662)**. *Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the Bills of mortality*. Roycroft, London. Disponibile su [Internet Archive](#).
- Moscovich, I. (2015)**. *Matemagica. Il grande libro dei giochi*. Rizzoli, Milano.
- Rossi, C. (1999)**. *La matematica dell'incertezza: didattica della probabilità e della statistica*. Zanichelli, Bologna.
- Rosso, R. (2023)**. *Storia della probabilità*. Università degli Studi, Pavia. [Link](#)

X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM
per Insegnanti di Matematica

Grazie

Se interessati a sperimentare qualcuna di queste attività in
classe, contattatemi:

elena.scalambro@unito.it

La Thuile 27-30 Agosto 2025



Unione
Matematica
Italiana



Commissione Italiana
per l'Insegnamento
della Matematica

Con il patrocinio di:

Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Comune di
La Thuile

