

X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM
per Insegnanti di Matematica

Insegnare Matematica costruendo significati

La Thuile 27-30 Agosto 2025



Con il patrocinio di:



Trame di significato: percorsi in continuità tra infanzia e primaria

CAROLA MANOLINO ricercatrice UniVdA

VALENTINA VENUTI insegnante scuola primaria e tutor SFP UniVdA

MARIE CLAIRE COURTHOD insegnante scuola SS1° RAVA

Un esempio di progettazione

Le figure piane

UNA RIFLESSIONE CRITICA

Un esempio di progettazione ... le fasi

... una riflessione critica

Fase introduttiva (5 min): utilizzo di Classroom Screen per la condivisione dell'Agenda del giorno

Fase 1 (10 min): Lezione introdotta tramite una canzone relativa alle figure geometriche, per coinvolgere Marco, che dimostra interesse rispetto ai contenuti digitali (LIM)

Fase 2 (20 min): Gioco di realtà. Classe divisa in 4 gruppi, la docente chiama un gruppo alla volta e chiede loro di cercare all'interno dell'aula due oggetti che richiamano la forma richiesta – 3 min a gruppo, scandito dalla clessidra

Fase 3 (25 min): Schede di valutazione, distribuite a ciascun alunno e lette ad alta voce.

Filastrocca delle forme

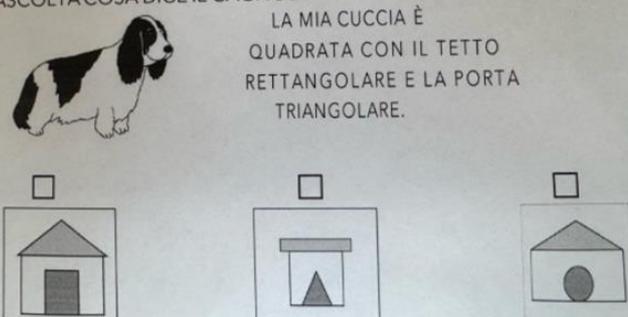
<https://youtu.be/2mJfIYalddw?si=pqAJU8Hk2T8kA3iE>



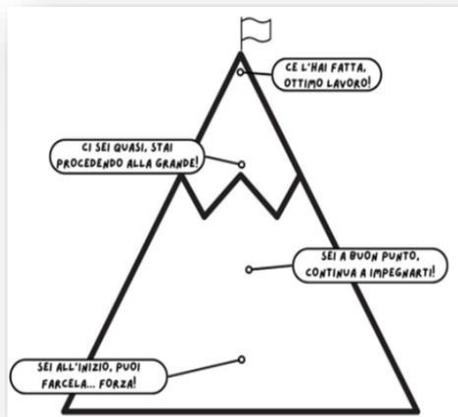
Un esempio di progettazione ... la valutazione

... una riflessione critica

11. ASCOLTA COSA DICE IL CAGNOLINO E INDICA CON UNA X LA SUA CUCCIA.
LA MIA CUCCIA È
QUADRATA CON IL TETTO
RETTANGOLARE E LA PORTA
TRIANGOLARE.

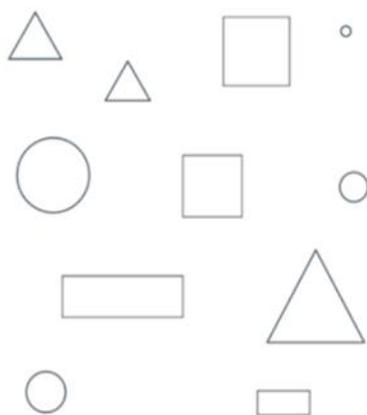


The illustration shows a dog on the left and three house-like shapes on the right. Each house has a square roof, a rectangular body, and a triangular door. The first house has a triangular roof, a rectangular body, and a triangular door. The second house has a square roof, a rectangular body, and a triangular door. The third house has a square roof, a rectangular body, and a circular door.



LE FORME

COLORA: I **QUADRATI** DI **ROSSO**, I **TRIANGOLI** DI **BLU**, I **CERCHI** DI **GIALLO** E I **RETTANGOLI** DI **VERDE**



A collection of various geometric shapes including triangles, squares, rectangles, circles, and a small dot, intended for a coloring activity.

Riflessione: analisi del materiale

Le nostre riflessioni

BENVENUTI E BENVENUTE !! Questa
lavagna è un possibile spazio per
dare vita al nostro laboratorio di id...

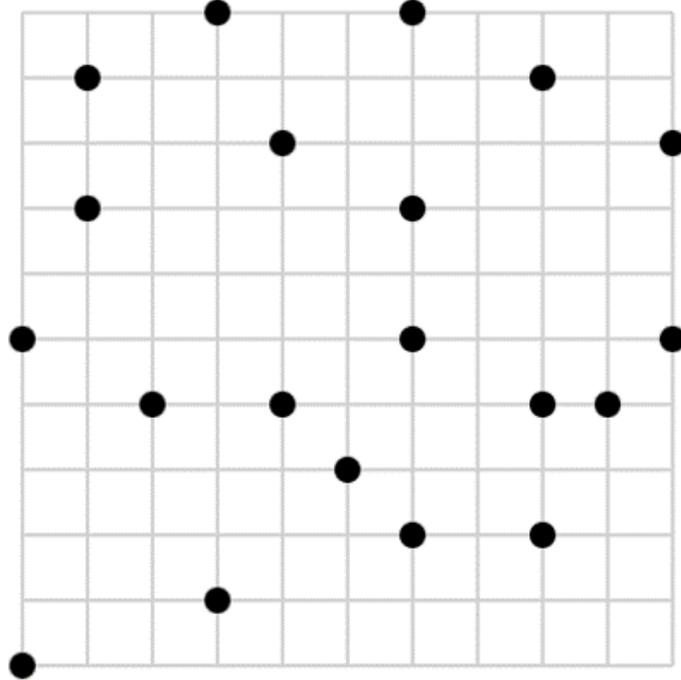
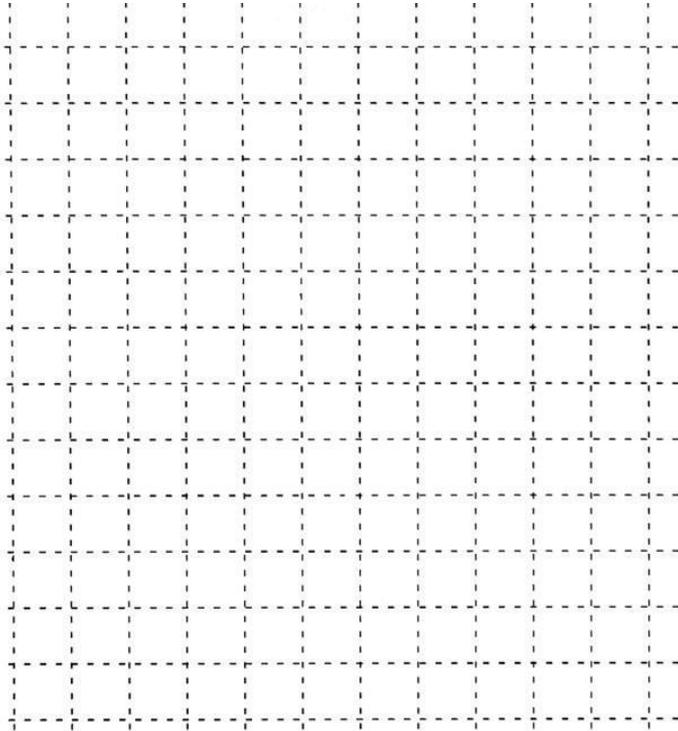


Un esempio di progettazione

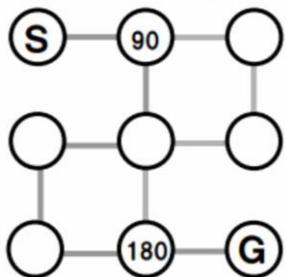
Zukei puzzle (e Lesson Study)

UNA RIFLESSIONE CRITICA

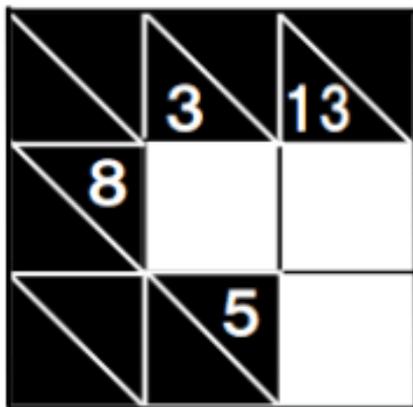
Zukei Puzzle



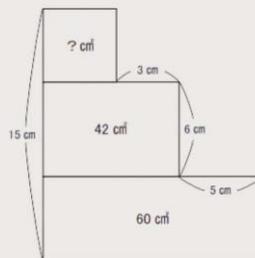
ANGLE MAZE PUZZLES



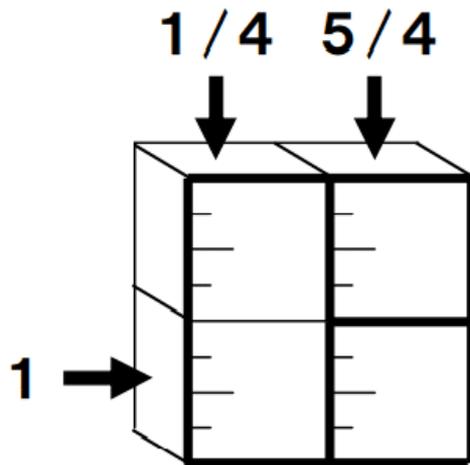
NAOKI INABA



AREA MAZE PUZZLES

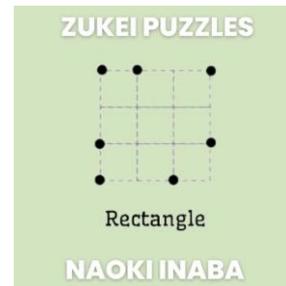


NAOKI INABA

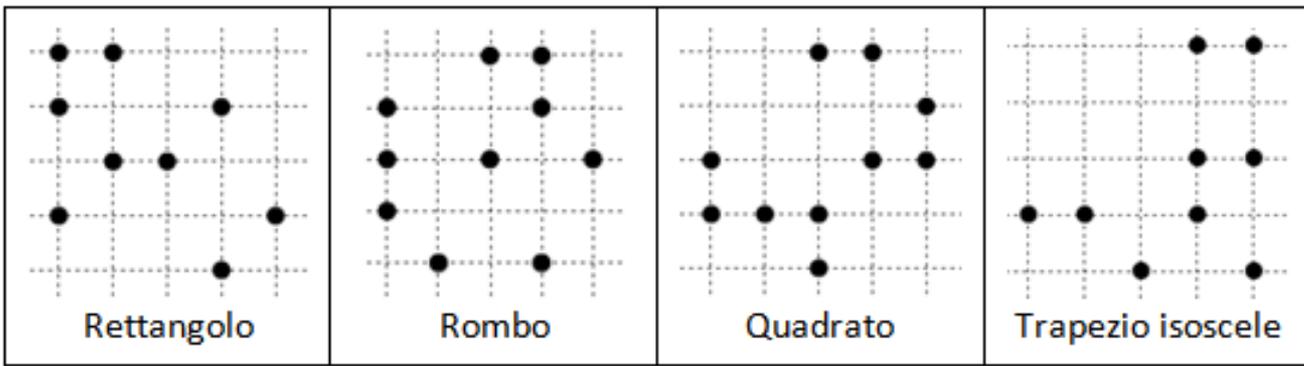


ZUKEI PUZZLE

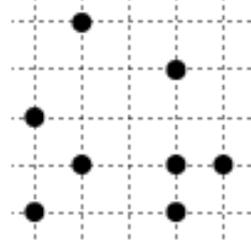
Ideati dal giapponese Naoki Inaba autore di “puzzle” e rompicapi di logica e matematica



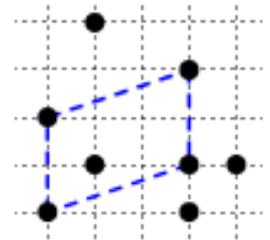
<https://mathequalslove.net/naoki-inaba-puzzles/>



Esempio.
Trova il parallelogrammo.



Dallo schema...



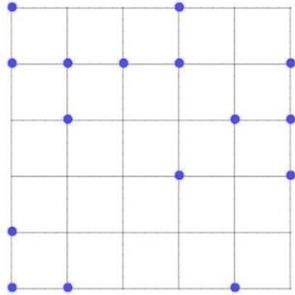
alla soluzione.

<https://utenti.quipo.it/base5/diario2018.htm>
http://inabapuzzle.com/study/zukei_q.pdf

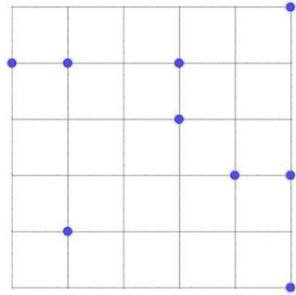
Ora tocca a voi...



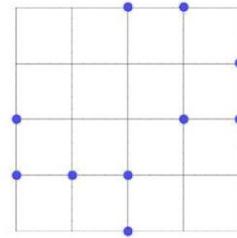
QUADRATO



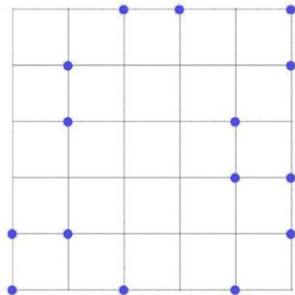
PARALLELOGRAMMA



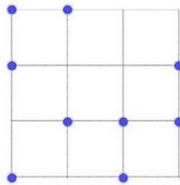
QUADRATO



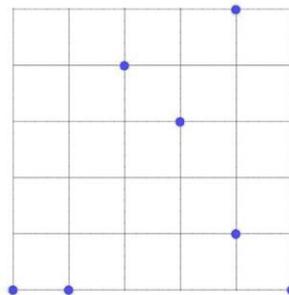
RETTANGOLO



RETTANGOLO



TRIANGOLO RETTANGOLO



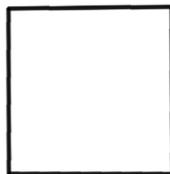
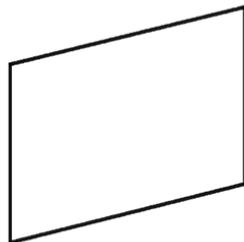
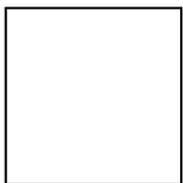
TROVA IL POLIGONO

Osservate le seguenti griglie.
Siete in grado di **trovare** il **poligono** indicato che ha per vertici 4 punti?

oppure per vertici 3 punti?

Come fate ad **affermare con certezza** che il poligono trovato sia proprio quello richiesto?

ZUKEI PUZZLE



MASCHERINE TRASPARENTI

Realizzate su carta lucida
e ritagliate.

Consegnate agli alunni su
richiesta



Obiettivi della lezione

- Individuare e riconoscere le figure poligonali nel piano quadrettato (lato quadretto di 1 cm, superficie quadretto di 1 cm²) anche in posizioni non prototipali

Finalità dell'osservazione

- Indagare se gli alunni sono vincolati alla visualizzazione di figure in posizioni prototipali
- Indagare se e come l'utilizzo delle mascherine trasparenti può agevolare la visualizzazione di poligoni sulle griglie

Cosa si osserva

- quali strumenti vengono usati
- quali movimenti vengono effettuati (spostamento del foglio, spostamento del corpo)
- verbalizzazioni degli alunni (cosa stanno facendo e difficoltà)
- gestualità utilizzata (cosa hanno osservato, come hanno visualizzato il poligono)

Fasi

Lavoro individuale (20 min)

- Individuazione/visualizzazione e tracciamento dei poligoni su scheda individuale
 - consegna della scheda (10 min)
 - consegna delle mascherine (10 min)
- Ritiro scheda

Lavoro in piccolo gruppo (10 min)

- Tracciamento dei poligoni su copia condivisa della scheda
 - consegna della scheda e delle mascherine se richieste

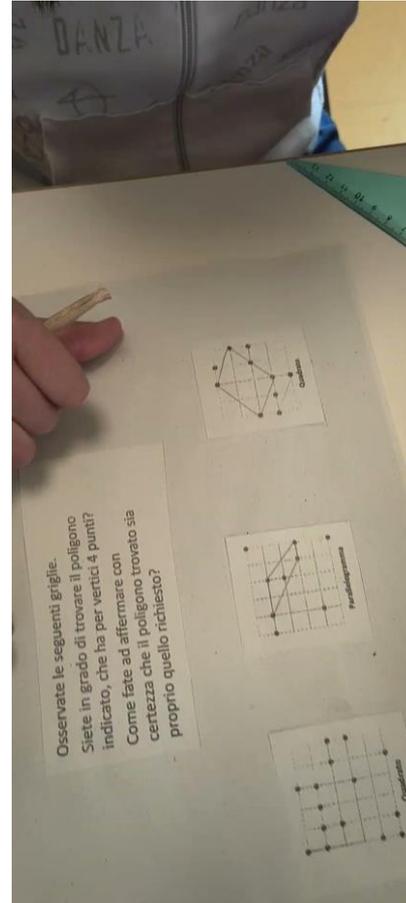
Lavoro collettivo (20 min)

- Condivisione e correzione
- Ritiro scheda

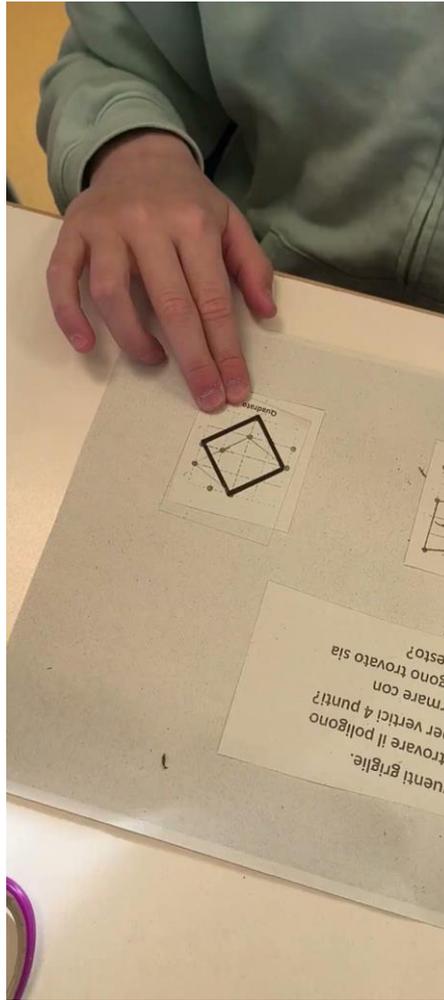


TENTATIVI senza utilizzo delle MASCHERINE

- tentativo di disegnare un quadrato (è un quadrilatero)
- ruota foglio
- cancella un lato
- traccia un altro lato
- osserva
- non è un quadrato (è un trapezio)
- cancella nuovamente
- gira il foglio
- (abbandona - per ora)

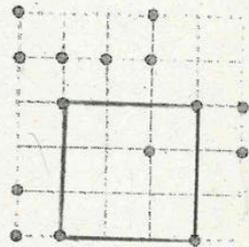


TENTATIVI con ausilio delle MASCHERINE

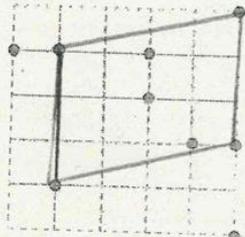


Mancata permanenza nella memoria visuo-spaziale dei **poligoni** in posizione **non prototipica**

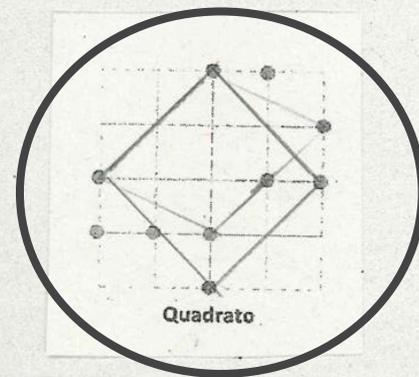
QUADRATI



Quadrato



Parallelogramma



Quadrato

OSSERVAZIONI

Quando l'alunna ha terminato di tracciare il poligono la compagna chiede
"è un quadrato?"

(silenzio e riflessione...)

l'alunna che lo ha tracciato chiede

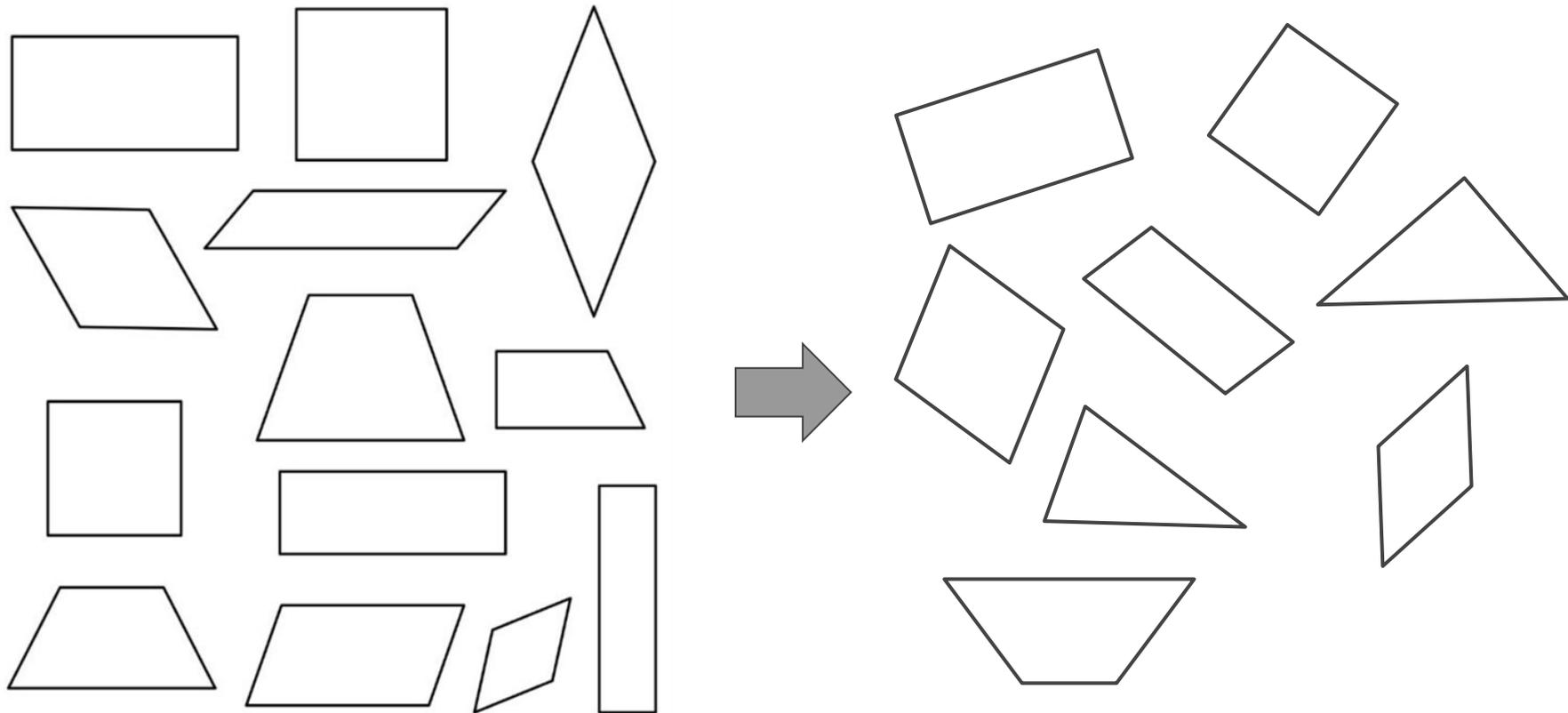
"Ma questo qua è un quadrato?"



Permanenza della proprietà di congruenza dei lati, ma mancato controllo dell'ampiezza degli angoli

posizione PROTOTIPICA

**E quindi
cosa fare?**



ESERCITARE LA VISUALIZZAZIONE NON PROTOTIPALE!

RETTANGOLI

“Andiamo sui rettangoli?”

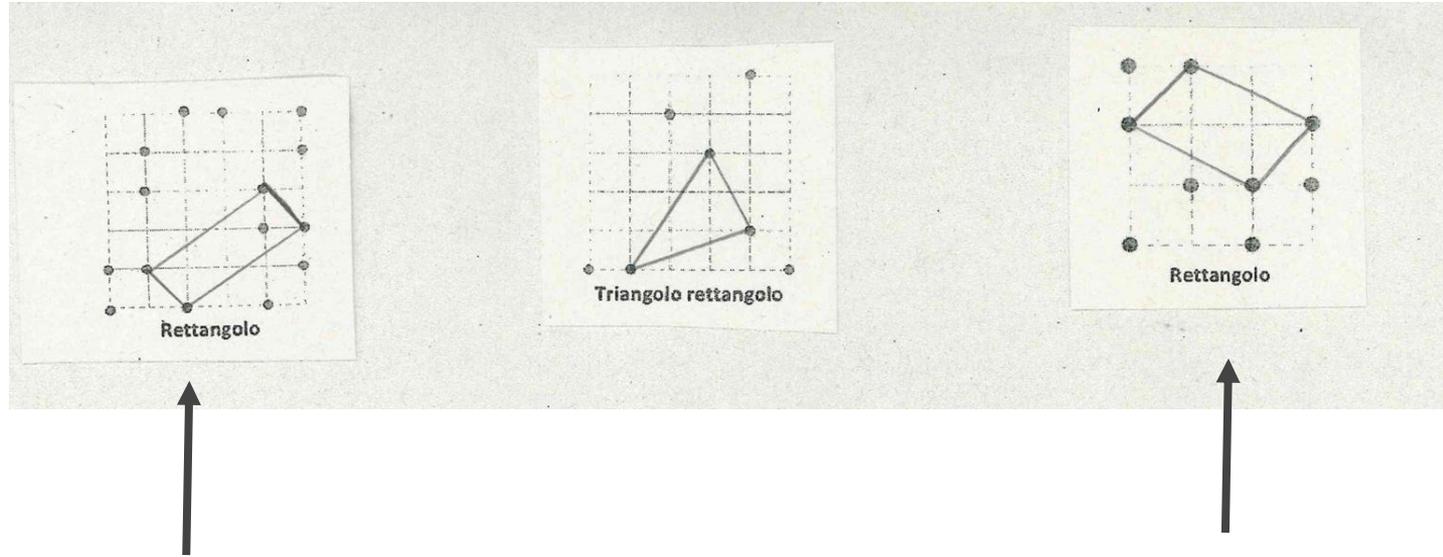
Erano più difficili!

Perché?

Erano storti!

Non tutti.

Uno era dritto, dritto!”

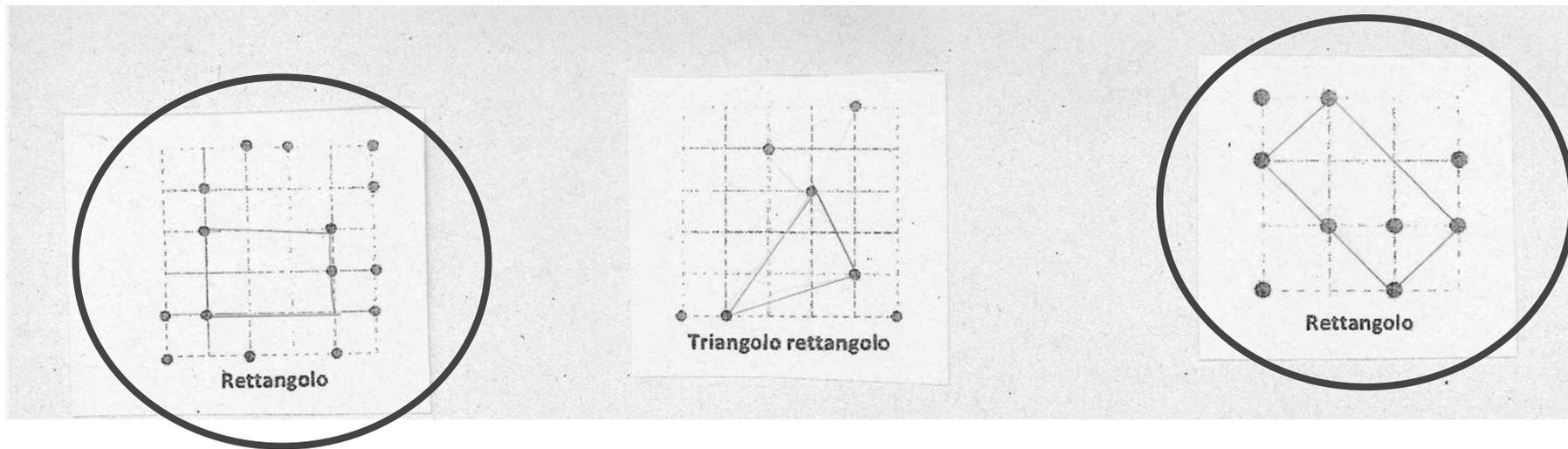


“Ma come fai a dire che sia proprio un **rettangolo**?”

Ha 4 lati e 4 angoli.....retti...

Però un rettangolo era dritto e l'altro storto

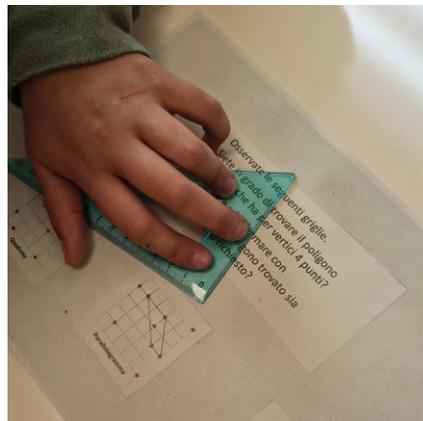
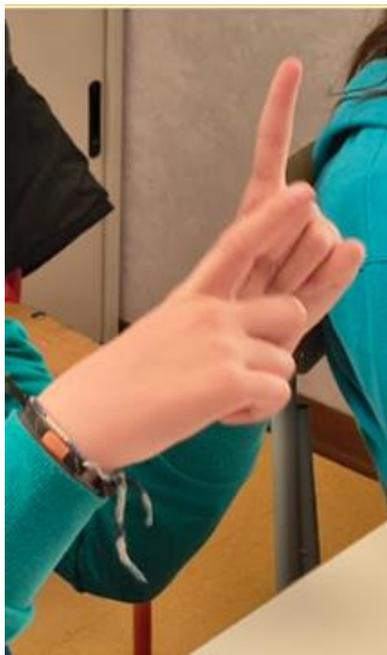
Però assomiglia proprio ad un rettangolo, anche se storto



“e come fai a verificare che siano **angoli retti?**”

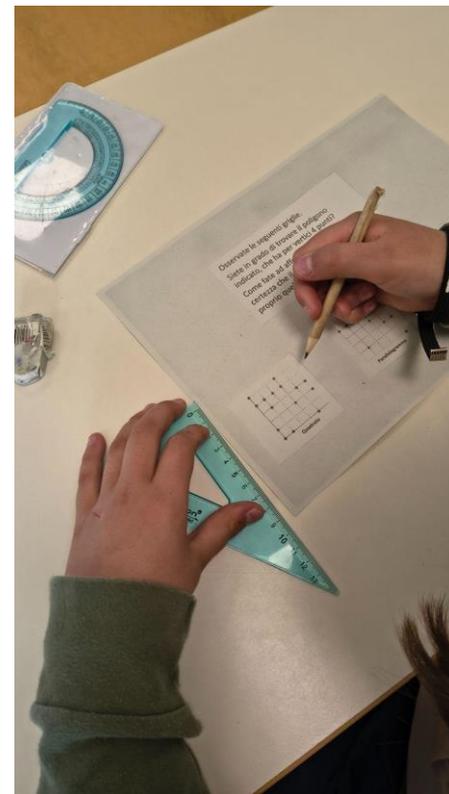
“Sono così”

(simulano un angolo retto con il pollice e l'indice della mano)



“Ho messo il vertice nell'angolo e ho guardato se i lati combaciavano”

“Uso la squadretta”





Dopo la verifica, da parte dell'alunna con
l'ausilio della squadretta dell'angolo retto

“Ma quindi è giusto?”

Più o meno!

(...) (risate e sorrisi)

“E quindi è di 90° ?”

Un centimetro più, un centimetro meno! ”

Dopo le osservazioni sul RETTANGOLO una delle alunne aggiunge

“Se fosse un QUADRATO...

“Se è appoggiato sul lato è davvero un quadrato...ma se è appoggiato sulla punta, cioè sul vertice, allora è un rombo”

Osserva lo sguardo dell'insegnante che non fornisce un feedback immediato (a fatica)
Una compagna aggiunge

“ma sarà come il rettangolo...che sia dritto o storto è sempre un quadrato...anche se sembra un rombo”

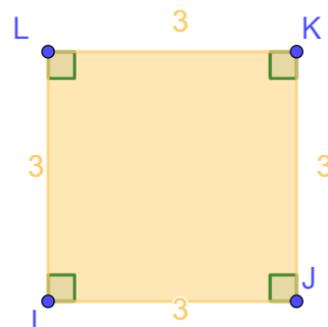
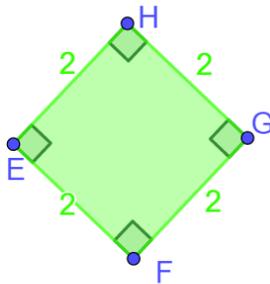
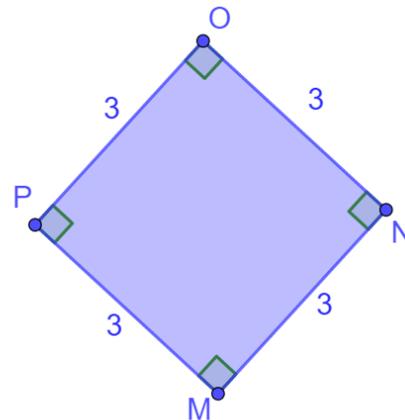
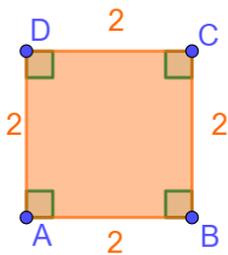
una altra alunna dice:

“ma noi lo chiamavamo rombo con *(nome dell'insegnante)*”

un altro alunno:

“non può essere un rombo perchè non ha le diagonali”

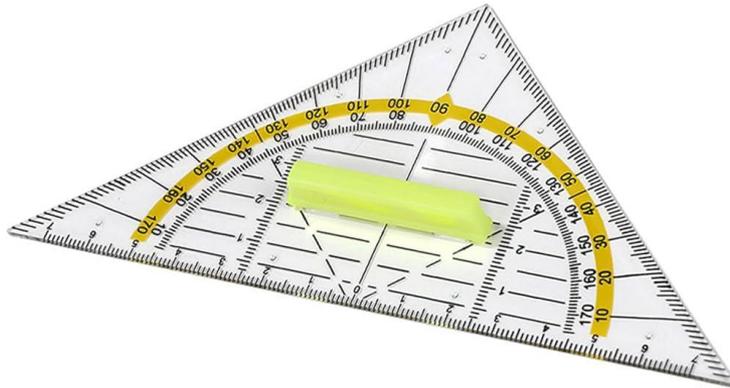
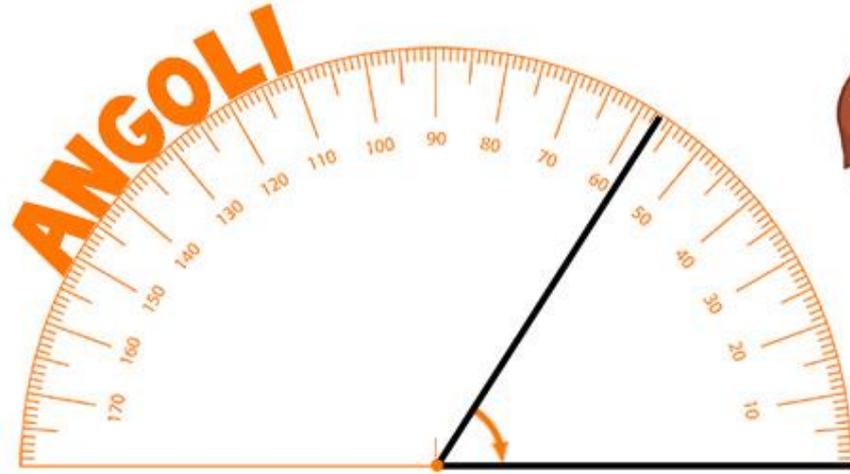
**“Se è appoggiato sul lato
è davvero un quadrato...
ma se è appoggiato sulla
punta, cioè sul vertice,
allora è un rombo”**



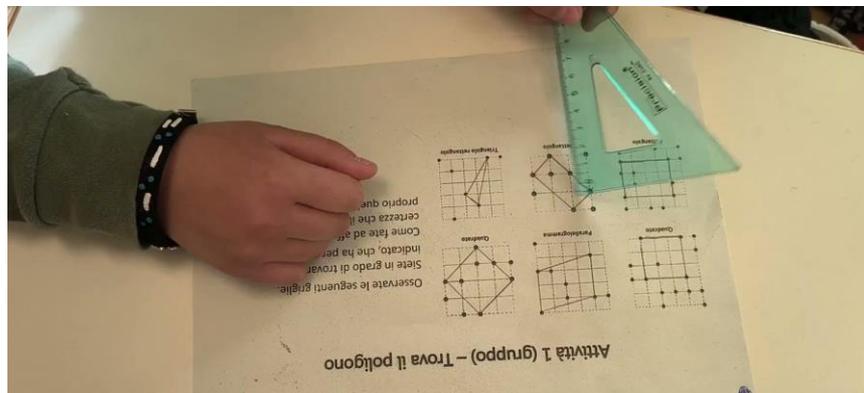
FARE LA PACE CON GLI ANGOLI!

E quindi è di 90° ?

“Un centimetro più,
un centimetro
meno”



“Parallelogramma e rettangolo storto”



(...)

Non erano dritti, erano paralleli
e quindi era un parallelogrammo

e quindi adesso cosa avete fatto?

Abbiamo fatto un rettangolo

e come fate a dire che è un rettangolo?

perchè ha 2 lati paralleli...
a 2 a 2...

e come fate a dire che sono paralleli?

sono così e così

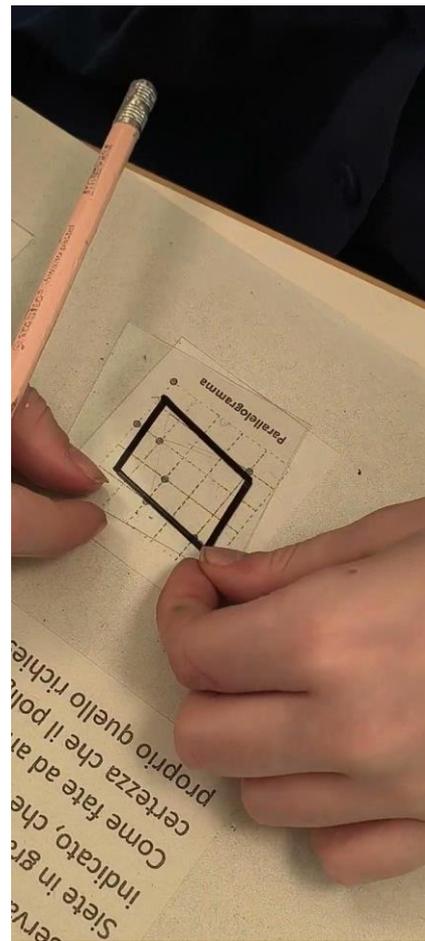
“Il parallelogramma che non vede”

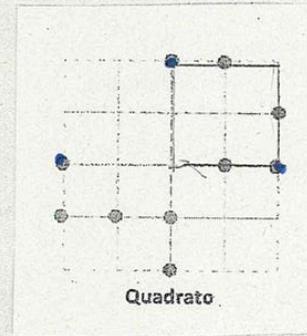
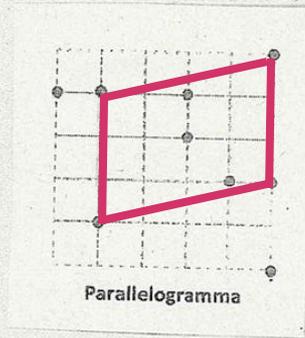
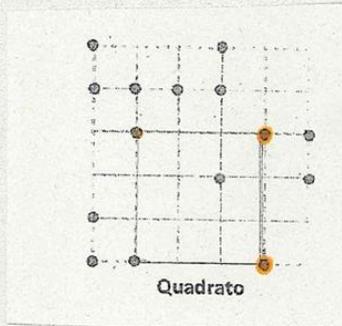
“Prova a metterlo dritto!”

“Giralo”

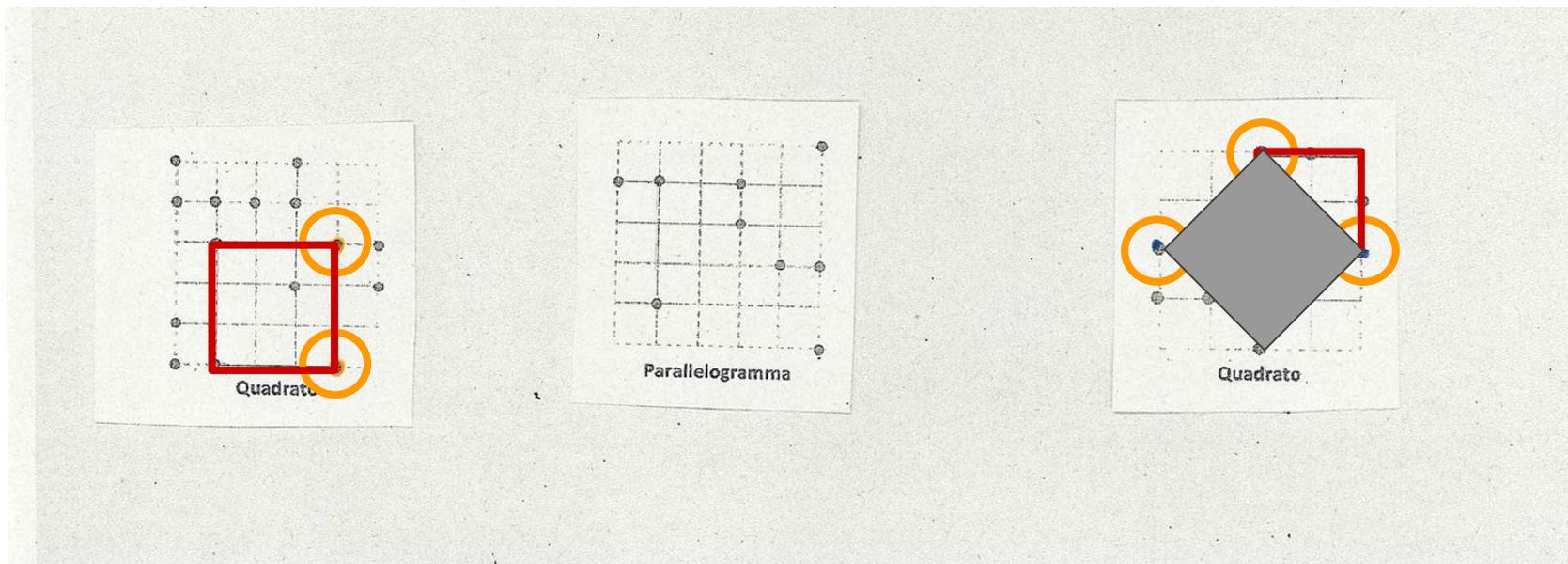
“Un vertice deve stare lì”

*0-20 secondi
da 2:30 a fine video*



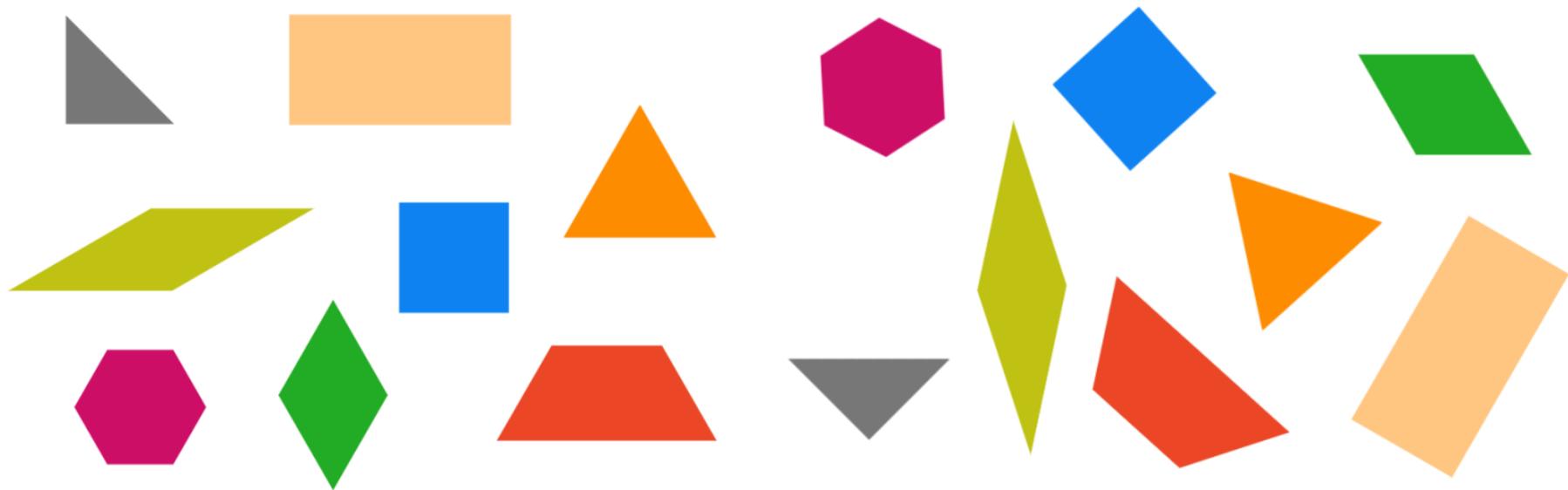


Laboratorio matematico e inclusione



Dal laboratorio matematico alla creazione di significati

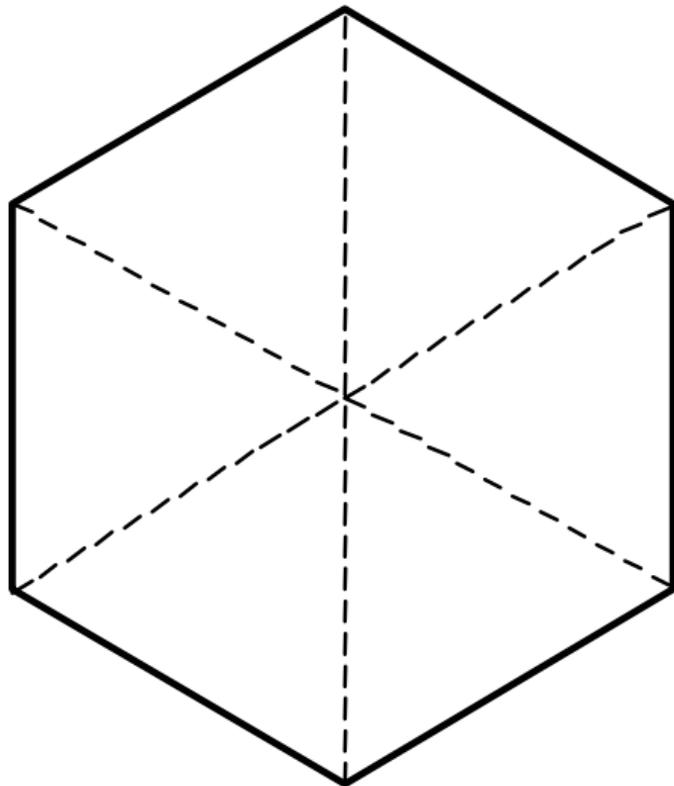
L'importanza della progettazione fine e dell'osservazione didattica!



L'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali

Tratto da Sbaragli S. (2006).

Sbaragli S. (Ed.) *La Matematica e la sua Didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo*, Castel San Pietro Terme, 23.09.2006. Roma: Carocci.



«Che cosa vedi?»

Em.: «Vedo triangoli... sei».

I.: «Un esagono».

R.: «Dei trapezi».

Em.: «È sempre quello che vedevo io, solo che te lo stai spostando...»



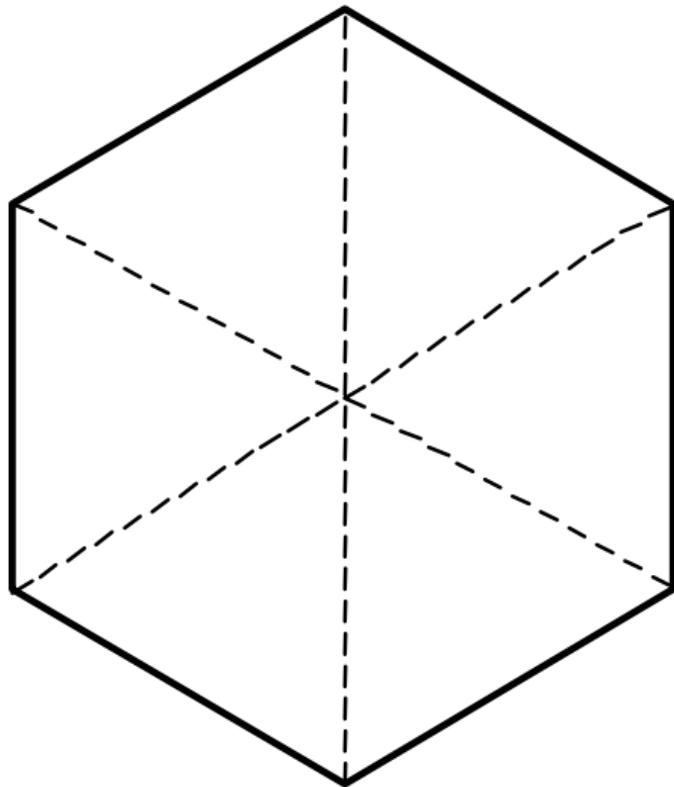
«Che cosa vedi?»

Em.: «Vedo triangoli... sei».

I.: «Un esagono».

R.: «Dei trapezi».

Em.: «È sempre quello che vedevo io, solo che te lo stai spostando...»



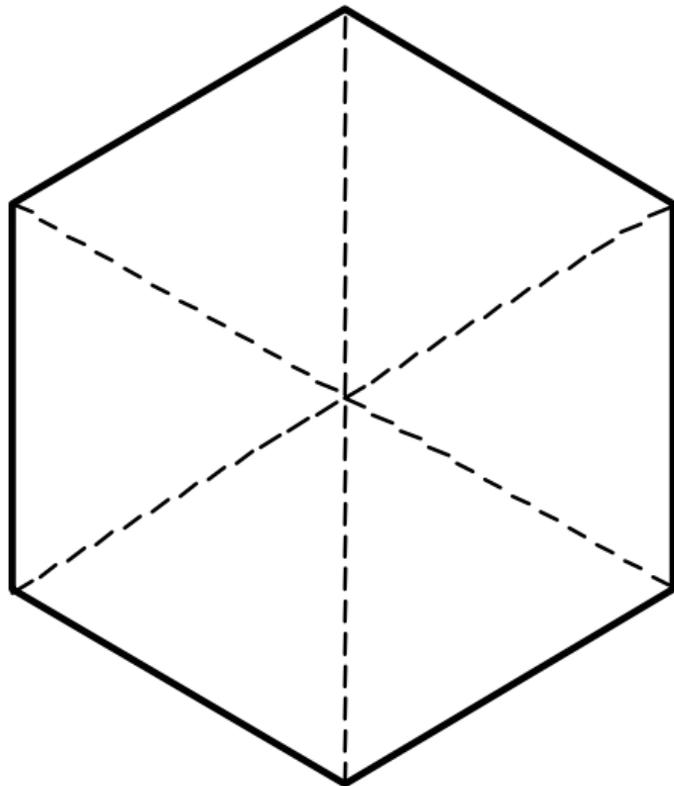
«Che cosa vedi?»

M.: «lo vedo i quadrati che sono le facce del cubo».

C.: «Anch'io vedo le facce del cubo che sono quadrate».

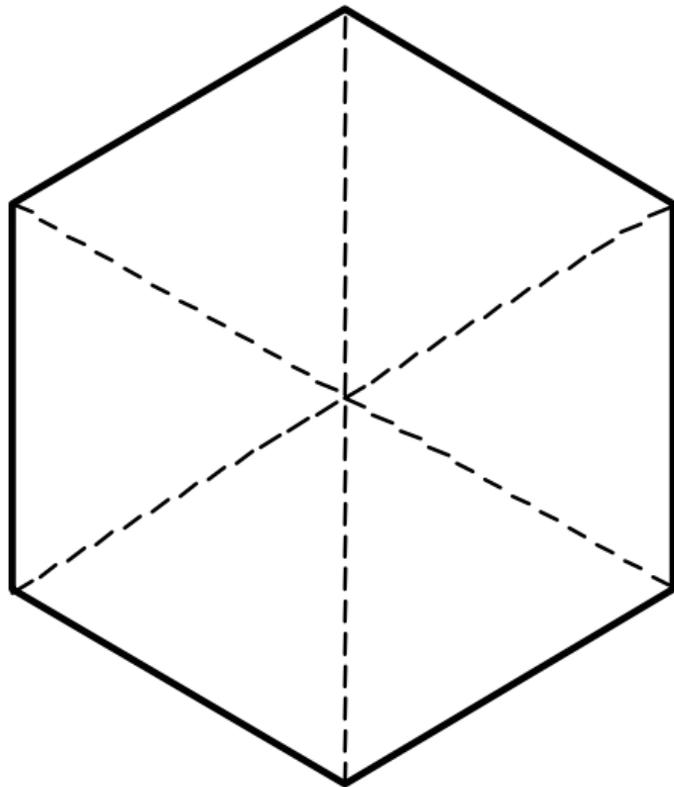
Ins.: «Quanti quadrati vedete?».

G.: «Vedo all'interno del cubo i sei quadrati che ha detto la Claudia».



Per riuscire a vedere i sei quadrati (le sei facce del cubo), è necessario **far prevalere l'aspetto concettuale su quello figurale**.

Occorre entrare nel contesto tridimensionale e conoscere le caratteristiche concettuali dell'«oggetto cubo». L'immagine, se pensata nel piano, può essere interpretata in modo diverso.

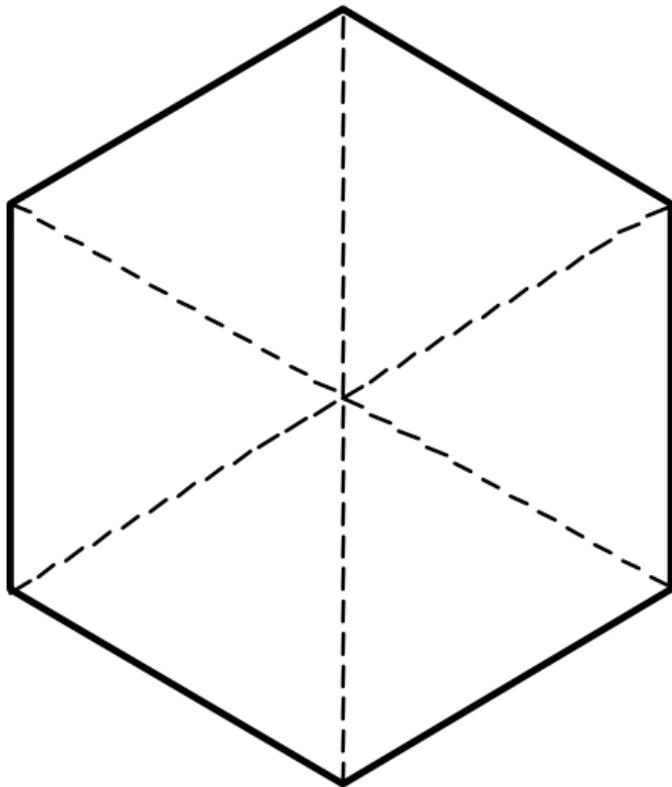


«Che cosa vedi?»

Rudi: «Ma io vedo 3 parallelogrammi».

Em.: «Ma li hai messi in un modo che sembrano le 3 facce di un cubo, non vedi? Quindi sono quadrati, perché il cubo ha facce quadrate. Lo vedi il cubo?».

R.: «Ah, sì».



Ins.: «Ma se pensate a queste figure nel piano sono parallelogrammi o rombi?».

El.: «Per essere un parallelogramma deve avere almeno due lati opposti uguali e due lati opposti uguali... Se ci sono due lati opposti uguali che sono diversi dagli altri due lati opposti uguali è un parallelogramma, ma se ci sono due lati opposti uguali e due lati opposti uguali che sono uguali, allora è un rombo».

Il.: «Ma, un attimo... dove c'era un rombo io vedo una piramide».

Ins.: «Una piramide? Spiegaci bene che cosa vedi».

La visualizzazione

e il ruolo del disegno

Gli aspetti legati alla visualizzazione, al disegno e alla costruzione di figure:

- si intrecciano agli altri (aspetto pratico e teorico)
- hanno **grandi potenzialità** sia rispetto ad altri nuclei della matematica, sia rispetto allo studio di altre discipline (educazione all'immagine, all'arte e alle nuove tecnologie).

Per la geometria, la visualizzazione costituisce una vera e propria porta di ingresso per il bambino nei suoi **primi passi di *matematizzazione* degli aspetti spaziali della realtà.**

Il ruolo del disegno nella didattica della geometria è tuttavia complesso, perché se da un lato è un **supporto necessario** al suo apprendimento, dall'altro lato può diventarne persino un **ostacolo**, come la ricerca ha da tempo messo in luce.

Per discutere questo importante aspetto, partiamo dal considerare cosa è un **concetto geometrico** e come si collega alle sue rappresentazioni grafiche, i disegni.

Disegni e concetti geometrici

La definizione Invarianti e Regolarità

Da un punto di vista matematico, un concetto geometrico, come ogni altro concetto matematico, è derivato dalla sua **definizione**, che include *un insieme minimale di proprietà necessarie e sufficienti che devono essere soddisfatte da ogni esemplare, affinché sia considerato un esempio di tale concetto.*

Data una certa definizione, si possono avere diverse rappresentazioni grafiche di un concetto, ottenute per esempio attraverso disegni in ambiente carta e matita o con strumenti digitali, come i software di geometria dinamica.

In quest'ottica, occorre imparare ad osservare gli **invarianti** e le **regolarità**, ossia ciò che **accomuna le figure**.

A volte i libri di testo vanno nella direzione contraria, e sottolineano differenze che dal punto di vista descrittivo sono rilevanti, ma dal punto di vista geometrico possono esserlo molto meno...

I prototipi

Filastrocca delle forme???

In contrasto con il modo di procedere tipico della matematica, si osserva che gli studenti spesso usano una rappresentazione particolare del concetto, **un prototipo**, come criterio per classificare tutti gli esempi.

A volte si sceglie come esemplare prototipico per una classe di figure:

- **La figura con la lista più lunga di attributi**

Esempio: un **triangolo equilatero** per rappresentare un triangolo generico, un **quadrato** per rappresentare un quadrilatero,

...

- **Si disegnano e usano prevalentemente solo alcune rappresentazioni specifiche**

Esempio: sempre triangoli acutangoli: questo, nel caso delle altezze di triangoli, può portare a identificare o tracciare le altezze solo nei casi in cui esse sono interne a essi, oppure limitatamente ai casi in cui risultano verticali (in quanto perpendicolari a una base orizzontale).

Queste scelte possono avere delle conseguenze negative importanti nel processo di apprendimento della geometria.

La distanza tra «figura» e «disegno»

Nei suoi studi sui ragionamenti geometrici Laborde (1993) ha individuato l'**ostacolo figura-disegno**, che emerge nelle situazioni in cui un *disegno* isolato è l'unico rappresentante di una figura, intendendo per **figura** il concetto geometrico nel suo insieme (ossia il referente teorico e le sue rappresentazioni).

Laborde afferma che c'è **sempre** una distanza tra la figura e il disegno che la rappresenta, in quanto:

- **alcune proprietà del disegno sono irrilevanti (attributi non critici di una figura)**

Esempio: quando si disegna un triangolo acutangolo per indicare un triangolo qualsiasi



- **gli elementi di una figura hanno una variabilità che è assente nel singolo disegno:**

Infatti, ogni volta che si disegna una certa figura, si sceglie implicitamente o esplicitamente come fissare alcune proprietà (es: nel disegno i lati sono diversi, ma nella figura geometrica considerata potrebbero anche essere uguali)

- **un singolo disegno può rappresentare diverse figure,**

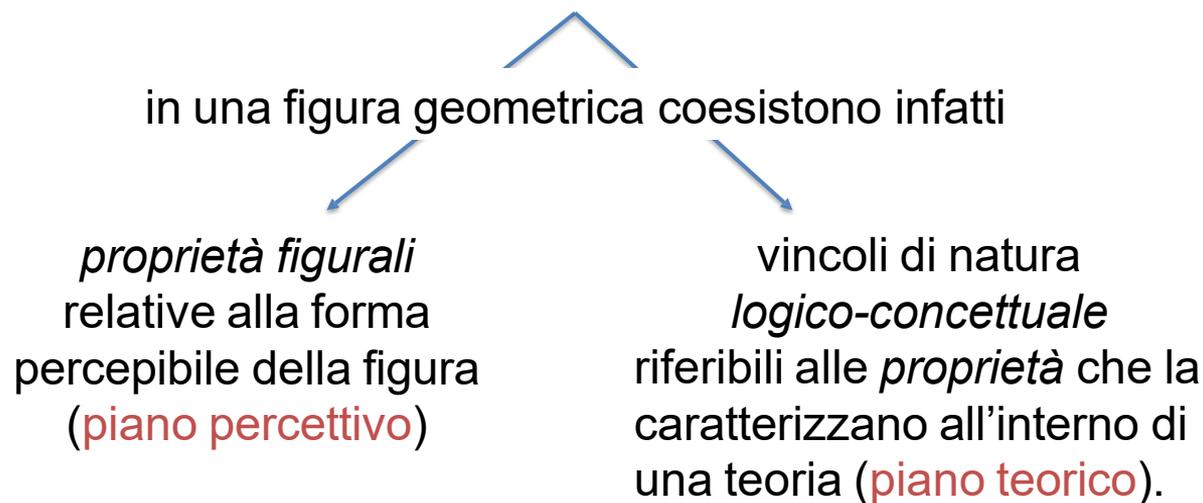
Esempio: potrebbe rappresentare un triangolo rettangolo, ma anche un triangolo scaleno



Se questa distanza non viene presa in considerazione in modo esplicito dalla didattica, si rischia che gli studenti nell'affrontare attività geometriche si basino **unicamente** sulle **proprietà spazio-grafiche** ricavate dalla percezione dei disegni, anziché sulle proprietà che caratterizzano le figure rappresentate.

La nozione di **CONCETTO FIGURALE**

Fischbein (1993) propone di considerare una figura geometrica come un **concetto figurale**, sottolineando con questa terminologia una **doppia natura**:



Nei processi di esplorazione e problem solving, un'immagine deve essere **manipolata sotto il controllo di una definizione**

L'attività geometrica consiste in una miscela di osservazione empirica e di deduzione teorica, coinvolgendo sia il vedere e il fare, sia il conoscere.

Nell'insegnamento-apprendimento della geometria si può partire da una *visualizzazione iconica*, che è il modo naturale di vedere e che consiste nel *riconoscere un oggetto in quanto ha forma simile a un esemplare noto*,

ma occorre sviluppare le abilità e competenze necessarie per passare a un tipo diverso di visualizzazione, che viene anche chiamata *visualizzazione non-iconica* (Duval, 2005) e che richiede di *considerare un disegno come una delle possibili rappresentazioni di un concetto/figura geometrico, caratterizzato dalle sue proprietà*.

Lo sviluppo di questo tipo di visualizzazione non è naturale e richiede una didattica specifica, fin dai primi anni di scolarizzazione.

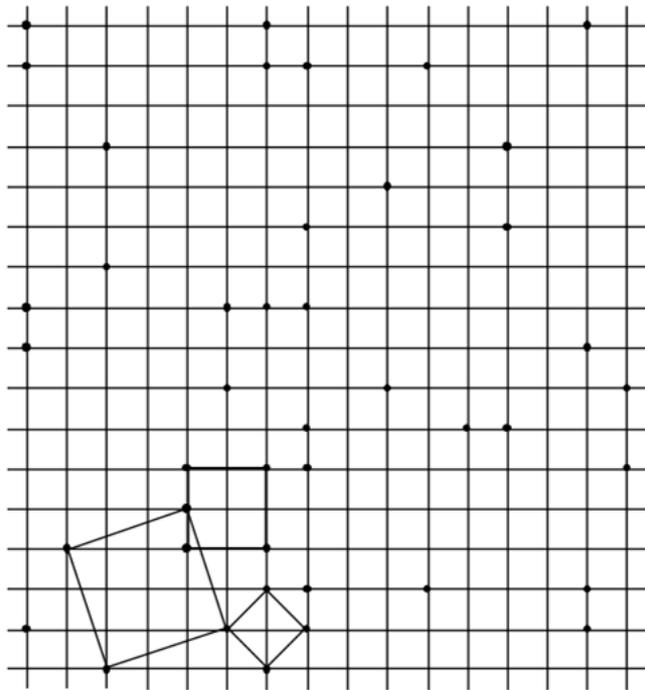
Un approfondimento

«guarda che quella è delle medie...»

verticalità

5. QUADRATI NASCOSTI (Cat. 3, 4, 5) ©/ARMT/2002 - 10⁰ - finale

Trovate tutti i quadrati i cui quattro vertici sono dei punti ben evidenziati di questa griglia:



In basso a sinistra sono già stati disegnati tre quadrati.

Quanti altri quadrati nascosti ci sono nella griglia?

Disegnateli usando colori differenti

Trova tutti i quadrati i cui 4 vertici sono dei punti ben evidenziati di questa griglia

Cat. 3, 4, 5

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: proprietà del quadrato

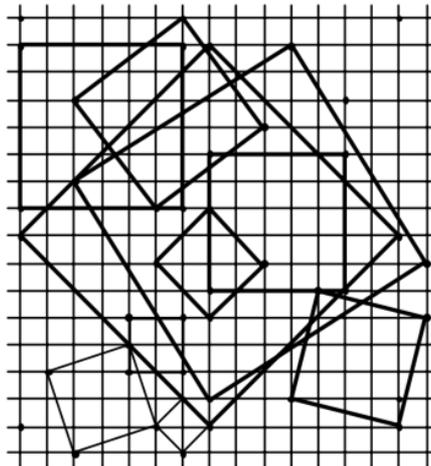
Analisi del compito

- Cercare i quadrati che è possibile visualizzare immediatamente (per esempio quelli di piccole dimensioni i cui lati o le cui diagonali sono su rette della griglia).
- Rendersi conto che la ricerca esige dei metodi più precisi: conteggi o strumenti quali la riga e la squadretta e intraprendere un esame sistematico, punto per punto o coppie di punti, oppure lavorare per tentativi, a caso.
- Disegnare i sette quadrati (si veda la pagina successiva).

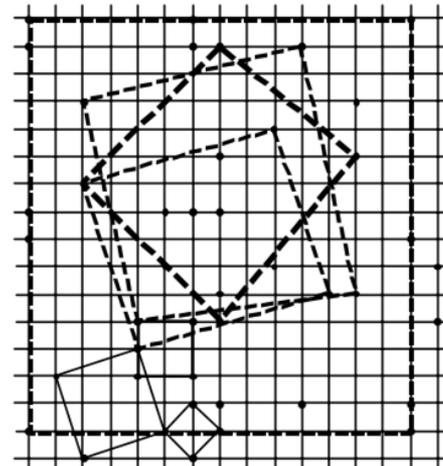
Livello : 3 - 4 - 5

Origine : Suisse romande

Le sette soluzioni:



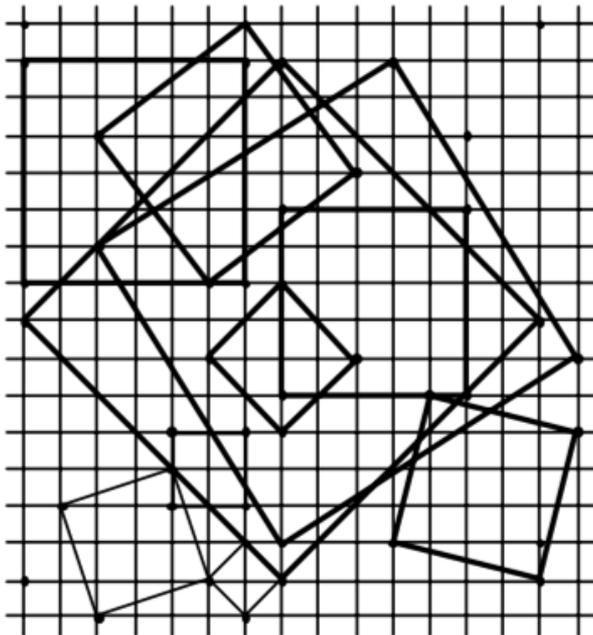
Qualche quadrilatero che può essere confuso con dei quadrati:



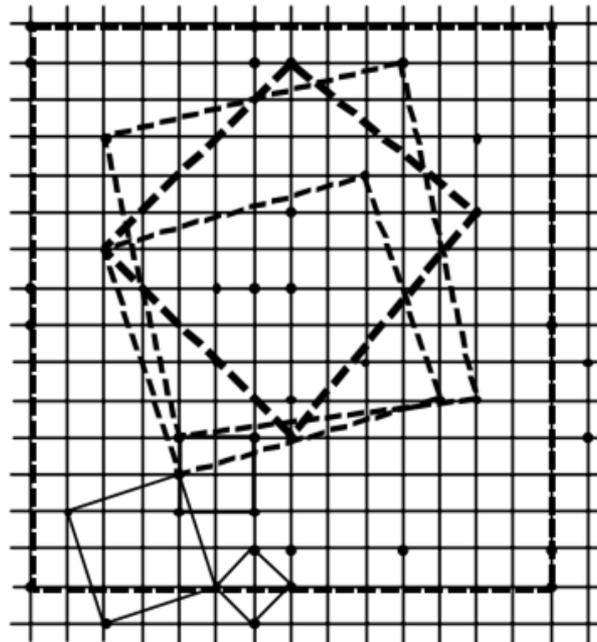
Livello : 3 - 4 - 5

Origine : Suisse romande

Le sette soluzioni:



Qualche quadrilatero che può essere confuso con dei quadrati:



Le risposte e spiegazioni degli alunni

"2 quadrati dritti, uno di lato 6 e uno di lato 5"

10^o RALLY MATEMATICO TRANSALPINO – FINALE

maggio 2002 ©ARMT2002 p. 5

5. Quadrati nascosti (Cat. 3, 4, 5)

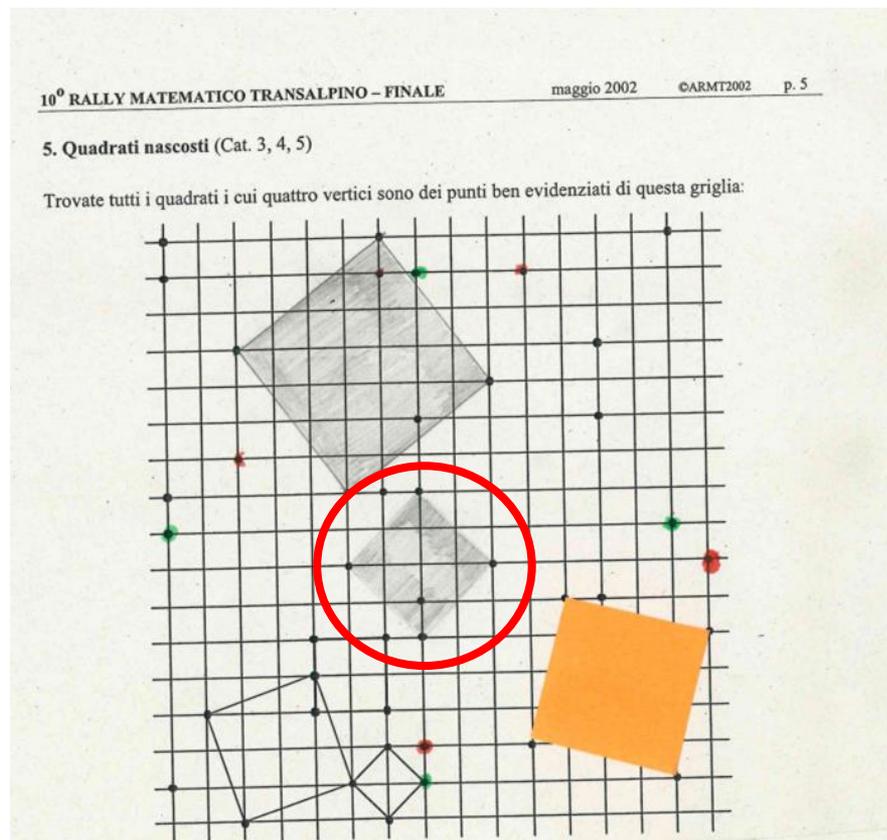
Trovate tutti i quadrati i cui quattro vertici sono dei punti ben evidenziati di questa griglia:

The image shows a 10x10 grid of points. Two squares are highlighted in orange: a 6x6 square on the left and a 5x5 square on the right. A black square is drawn at the bottom left, with vertices at (3,2), (5,3), (4,5), and (2,4) in a 0-indexed coordinate system starting from the top-left corner.

Le risposte e spiegazioni degli alunni

“3 quadrati storti (ruotati) uno con lato 2 e gli altri con il lato che non si può misurare”

(in realtà sarebbero 2 diagonale-quadretto)



Le risposte e spiegazioni degli alunni

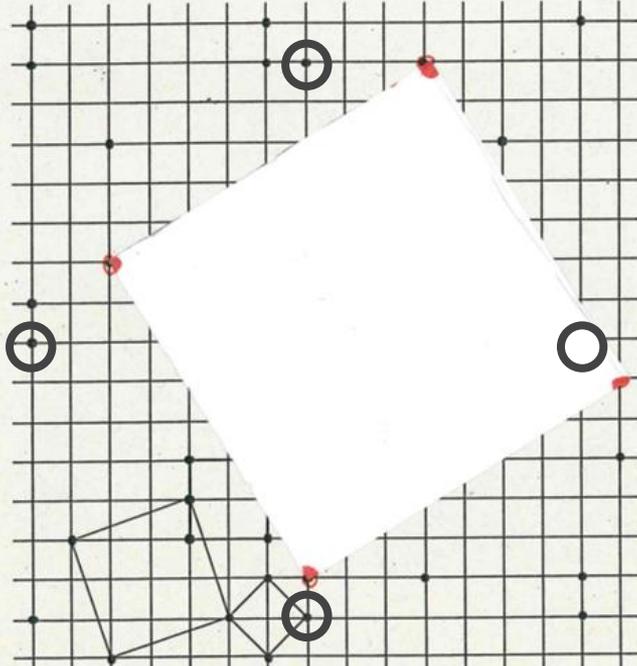
“questo quadrato grande”

10^o RALLY MATEMATICO TRANSALPINO – FINALE

maggio 2002 ©ARMT2002 p. 5

5. Quadrati nascosti (Cat. 3, 4, 5)

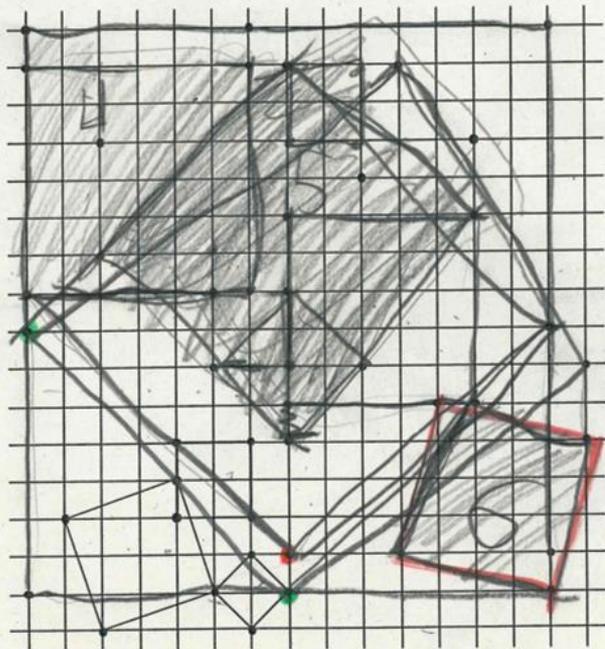
Trovate tutti i quadrati i cui quattro vertici sono dei punti ben evidenziati di questa griglia:



The image shows a 10x10 grid of points. A large white square is drawn, rotated 45 degrees, with its four vertices marked by red dots. Four other vertices are marked by black circles with a dot in the center. A small black square is also visible at the bottom left of the grid.

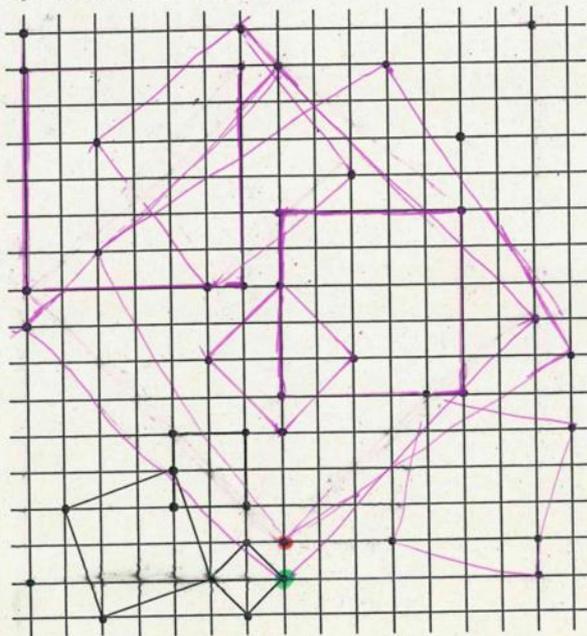
5. Quadrati nascosti (Cat. 3, 4, 5)

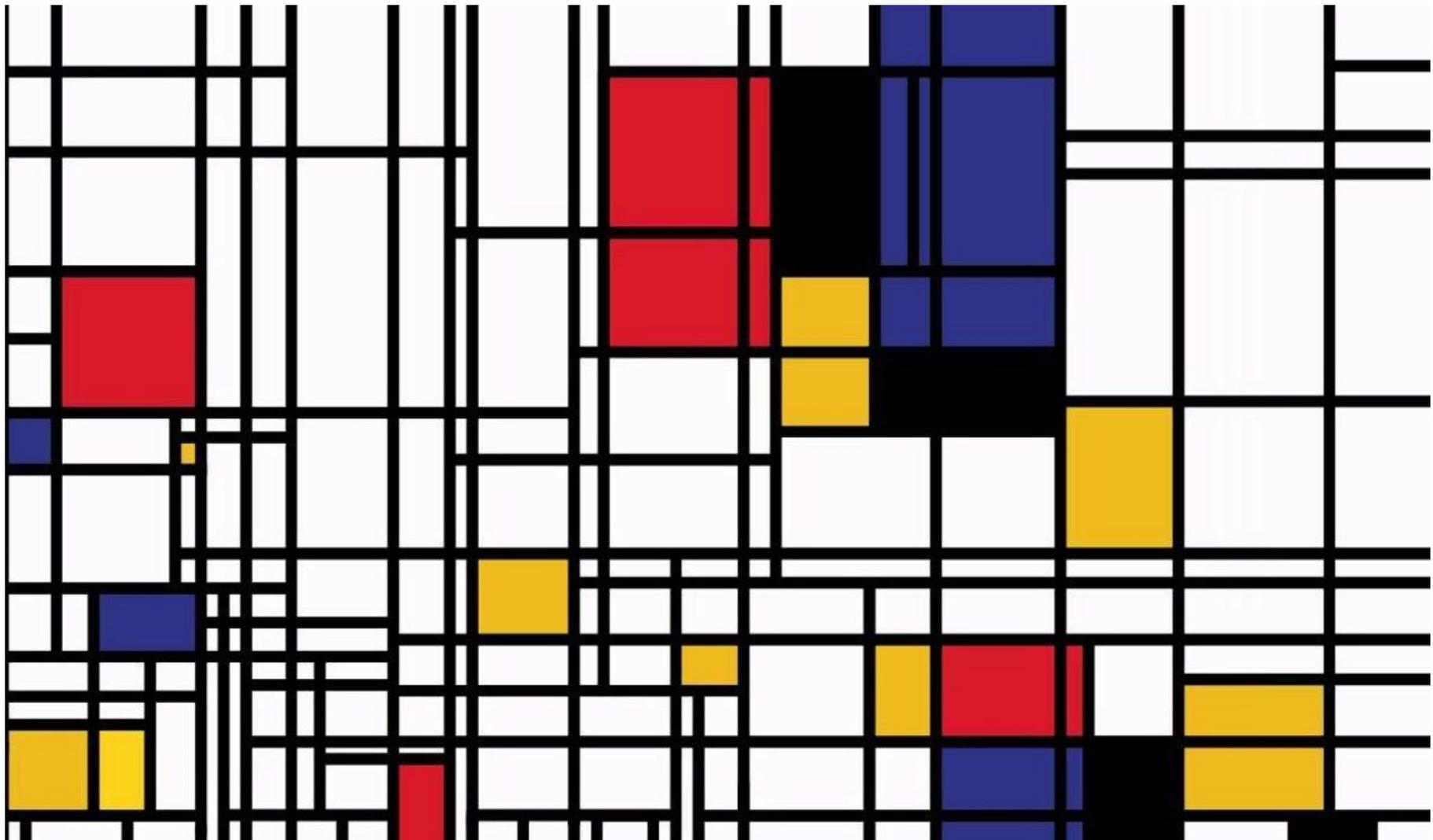
Trovate tutti i quadrati i cui quattro vertici sono dei punti ben evidenziati di questa griglia:



5. Quadrati nascosti (Cat. 3, 4, 5)

Trovate tutti i quadrati i cui quattro vertici sono dei punti ben evidenziati di questa griglia:







X Scuola Estiva AIRDM | UMI-CIIM
per Insegnanti di Matematica

Grazie

c.manolino@univda.it

v.venuti@univda.it

m.courthod@mail.scuole.vda.it

La Thuile 27-30 Agosto 2025



Commissione Italiana
per l'Insegnamento
della Matematica

Con il patrocinio di:

Regione Autonoma
Vallée d'Aoste



Regione Autonoma
Valle d'Aosta



Comune di
La Thuile

