



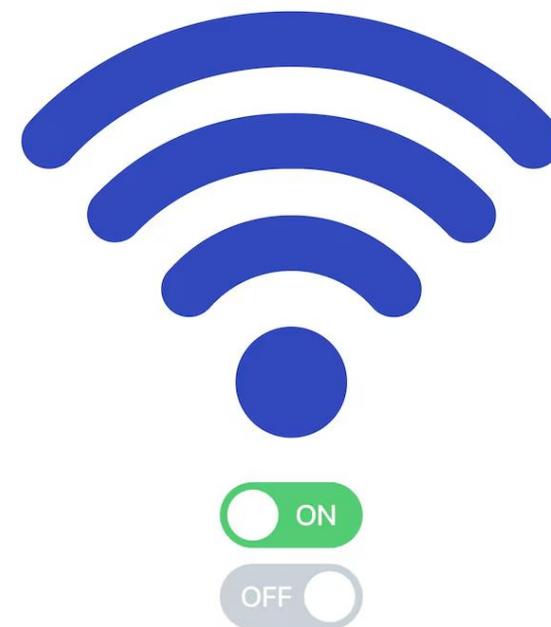
Personae in GeoGebra: un approccio embodied alle funzioni

Ornella Robutti, Andrea Gherzi
Dipartimento di Matematica, Università di Torino



PRIMA DI COMINCIARE...

Oggi serviranno...



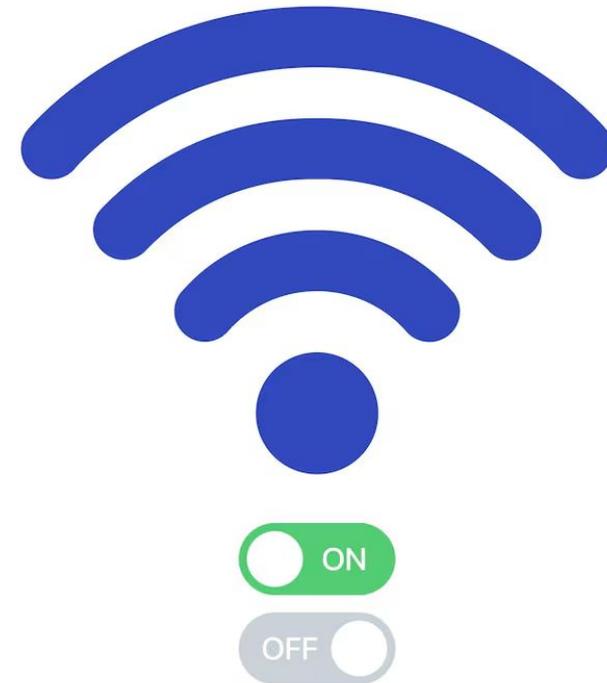
INTERNET

Rete:

TH Planibel Hotel

Password:

th-resorts.com



PER CONOSCERCI MEGLIO



CORNICE ISTITUZIONALE

Le funzioni nelle Indicazioni Nazionali e nella Linee Guida

Le funzioni e le loro rappresentazioni hanno un ruolo centrale per motivi formativi e culturali:

- 1) sono lo strumento principe per la **costruzione di modelli** che descrivono fenomeni reali, diventando così un ponte tra realtà e astrazione matematica;
- 2) permettono di sviluppare capacità di analisi, sintesi, formalizzazione e rappresentazione, potenziando le **competenze trasversali**;
- 3) permettono di sfruttare, in maniera naturale, una vasta gamma di **multimodalità di rappresentazioni**, valorizzando la trasferibilità delle competenze;
- 4) creano le basi per l'**interdisciplinarietà** favorendo l'interconnessione con metodi e contenuti di altre discipline.

LABORATORIO DI MATEMATICA

Il laboratorio di matematica non costituisce un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di **indicazioni metodologiche trasversali**, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente **finalizzate alla costruzione di significati matematici**.

UMI, 2003



LABORATORIO DI MATEMATICA

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto **un insieme strutturato di attività** volte alla **costruzione di significati** degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge **persone** (studenti e insegnanti), **strutture** (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), **idee** (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della **bottega rinascimentale**, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.



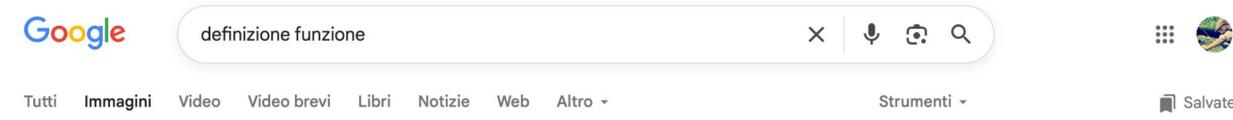
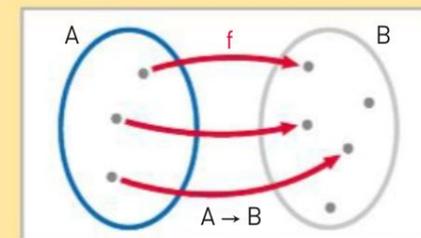
UMI, 2003

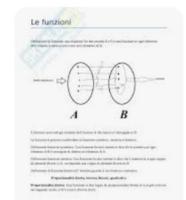
FUNZIONI: DAI LIBRI DI TESTO...

Definizione 8.1. Dati due insiemi A e B non vuoti, una *funzione* f è una *legge* che associa a ogni elemento di A un ben elemento definito di B .

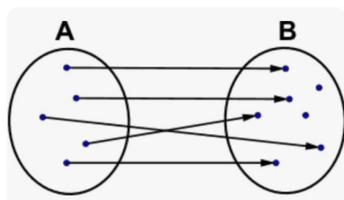
DEFINIZIONE

Una relazione dall'insieme A all'insieme B è una **funzione** se a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B .

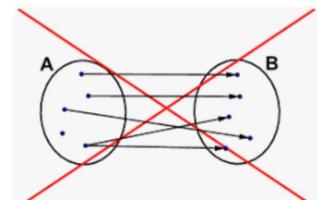




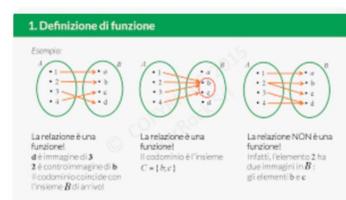
Skuola.net
Funzioni: definizioni...



YouMath
Cos'è una funzione: definizione, rappresentazione...

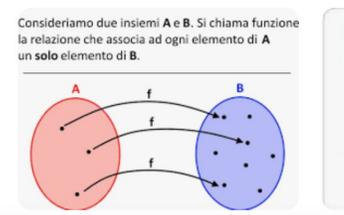


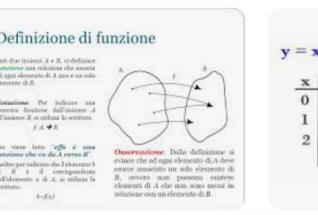
YouMath
Cos'è una funzione: definizione, rappresentazione...

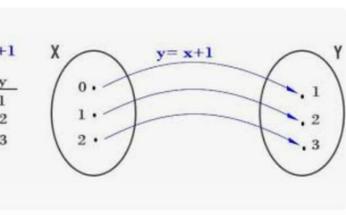


Virgilio Sapere
Funzioni numeriche e funzioni definite a tratti









Definizione nel linguaggio insiemistico:

una funzione f da A in B è considerata come un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste un solo $b \in B$ tale che $(a,b) \in f$



SULLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE COME RELAZIONE TRA INSIEMI

«Per quanto riguarda le definizioni: L'introduzione del concetto di funzione insiemistica come un particolare tipo di relazione è **poco giustificata sia dal punto di vista didattico che epistemologico**. A livello di scuola secondaria sono sufficienti definizioni informali [...].

Ai livelli scolastici superiori, quando la nozione di relazione viene studiata per sé stessa, la definizione di Peano può essere discussa e gli studenti dovrebbero essere portati a **discriminare tra i ruoli e i significati dei concetti di relazione e funzione in matematica**».



Sierpinska, 1992, p. 57

SULLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE COME RELAZIONE TRA INSIEMI

«[...] la storia suggerisce che la definizione di funzione data nel linguaggio insiemistico è il **risultato di una lunga evoluzione** di cui il movimento e la dinamicità sono stati non solo i punti di partenza, ma anche le caratteristiche salienti per tanto, tanto tempo.

Richiedere a studenti di un biennio di scuola secondaria **di partire dalla definizione** data nel linguaggio **insiemistico** potrebbe essere **azzardato**: forse i molti problemi noti nella letteratura specifica relativamente all'acquisizione del concetto di funzione potrebbero dipendere da questa possibile inopportunità didattica».



Paola, 2003, p. 552

[https://youtu.be/DNyRDQdOYLQ?
si=zvJ53d-pHfLisYik](https://youtu.be/DNyRDQdOYLQ?si=zvJ53d-pHfLisYik)

DIVERSI APPROCCI ALLA FUNZIONE

Funzione come macchina input – output

➡ Approccio alla funzione orientato all'**azione**.

Funzione come particolare corrispondenza

➡ Approccio alla funzione orientato al **processo**.

Funzione come espressione variabile, come covariazione

➡ Approccio alla funzione orientato all'**oggetto**.



Slavit, 1997

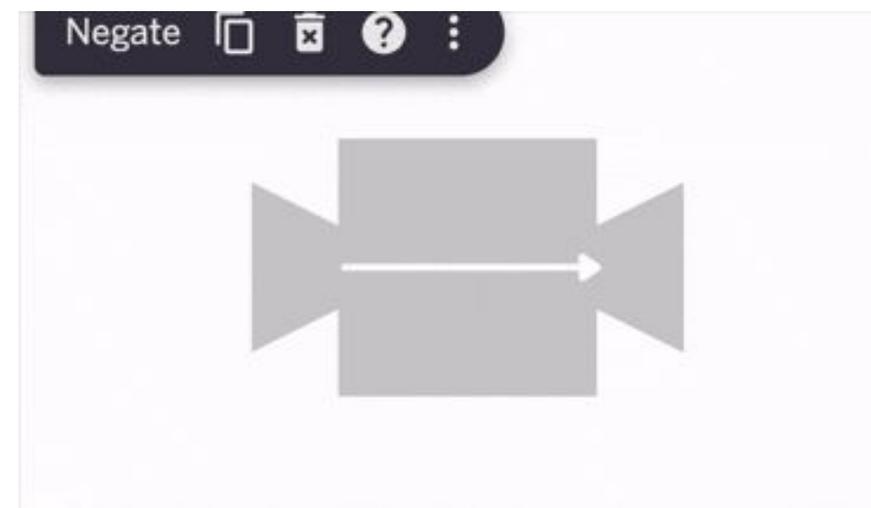
MACCHINA INPUT-OUTPUT

Approccio orientato all'**azione**

Sosteniamo una maggiore enfasi nel far acquisire agli studenti l'uso del linguaggio delle funzioni, al fine di sviluppare la capacità di parlare delle **funzioni come entità che accettano input e producono output**. Inoltre, sosteniamo un approccio più concettuale all'insegnamento delle funzioni inverse e della composizione:

- l'inclusione di compiti che richiedono giudizi simultanei su interi intervalli di valori di input o output;
- lo sviluppo della capacità degli studenti di elaborare mentalmente un continuum di valori di input, immaginando i cambiamenti nei valori di output;
- sforzi espliciti per promuovere, al momento opportuno dal punto di vista dello sviluppo, anche le capacità di ragionamento covariazionale.

Drijvers, 2012



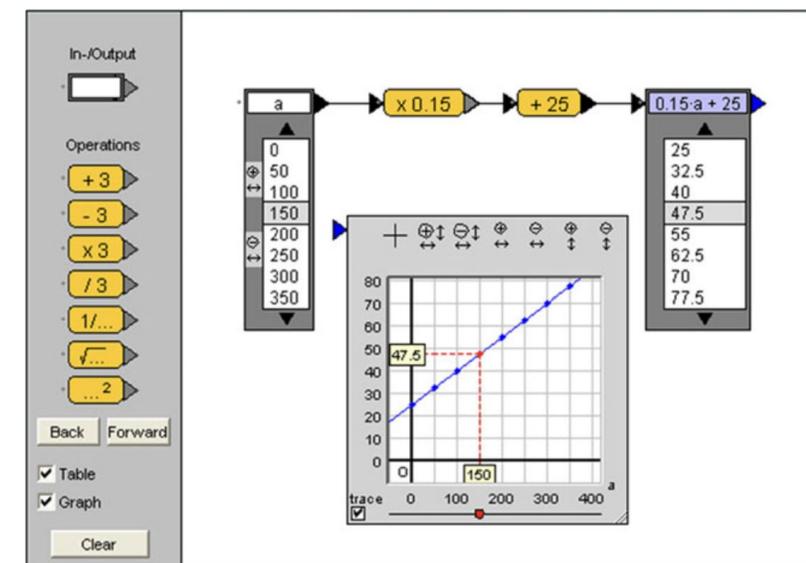
CORRISPONDENZA RELAZIONALE

Approccio orientato al **processo**

«La comprensione completa di una data attività di trasformazione eseguita su una funzione, costituita da **relazioni causali** e di **dipendenza** che esistono tra le **variabili** dipendenti e indipendenti».

Slavit, 1997, p. 262

È una sorta di **generalizzazione dell'approccio input-output**, esteso al concetto di **variabile e di rapporto causa - effetto**.



Drijvers, 2012

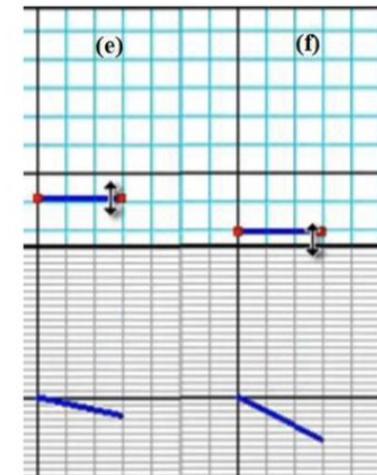
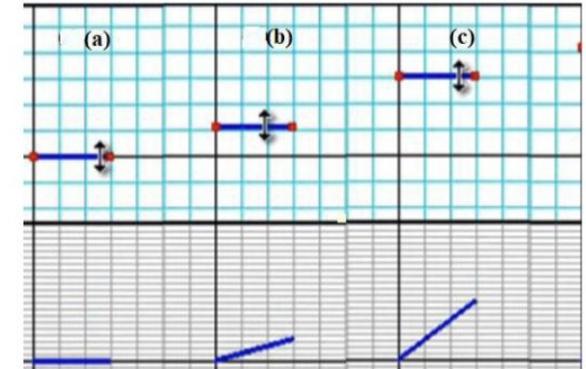
COVARIAZIONE

Approccio orientato all'oggetto

«Un altro approccio alle funzioni riguarda la comprensione del **modo in cui cambiano le variabili** dipendenti e indipendenti. L'analisi, la manipolazione e la comprensione delle relazioni tra quantità variabili illustrano la visione della covariazione.

Le **proprietà visive** delle funzioni percepite nelle loro **rappresentazioni** grafiche portano a una tipologia di analisi in cui si utilizzano nozioni quali “ripidità” e “distanziamento”.»

Slavit, 1997, p. 263

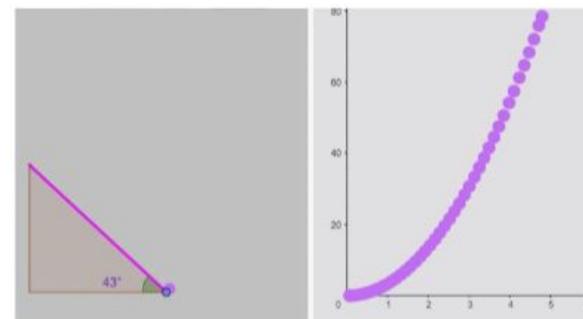


Shternberg et al., 2004

COVARIAZIONE

Approccio orientato all'oggetto

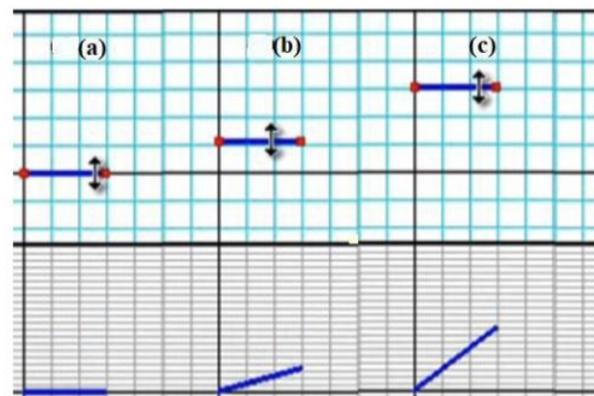
«Un altro approccio alle funzioni riguarda la comprensione del **modo in cui cambiano le variabili** dipendenti e indipendenti. L'analisi, la manipolazione e la comprensione delle relazioni tra quantità variabili illustrano la visione della covariazione.» Slavit, 1997, p. 263



Carlson et al., 2022

«La capacità di immaginare in modo adeguato le **relazioni tra due oggetti** matematici **variabili.**» Arzarello, 2019

«The natural and designed worlds display a multitude of temporary and permanent **relationships among objects** and circumstances, where **changes** occur within systems of interrelated objects or in circumstances where the elements **influence one another.**» OECD-PISA, 2022



Shternberg et al., 2004

APPROCCIO ORIENTATO ALLE PROPRIETÀ

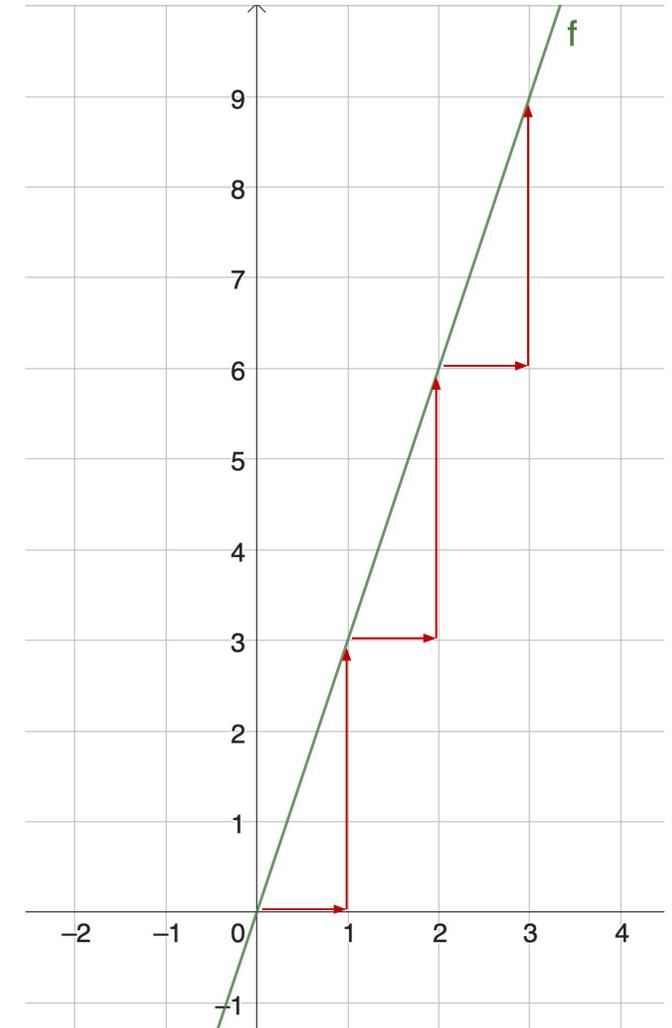
Slavit propone un ulteriore approccio, basato sulla crescita funzionale e sulla definizione di funzione come covariazione.

Il punto di vista orientato alle proprietà si differenzia da quello orientato all'oggetto in quanto si pone meno enfasi sul modo in cui le variabili cambiano e più sulle **proprietà che risultano da tali cambiamenti**.

Slavit, 1997

«Si tratta di un approccio molto simile a quello di Newton, che pensava a grandezze variabili in funzione del tempo. [...] **sono le variazioni della variabile dipendente che danno un'idea delle caratteristiche della funzione**».

Paola, 2003



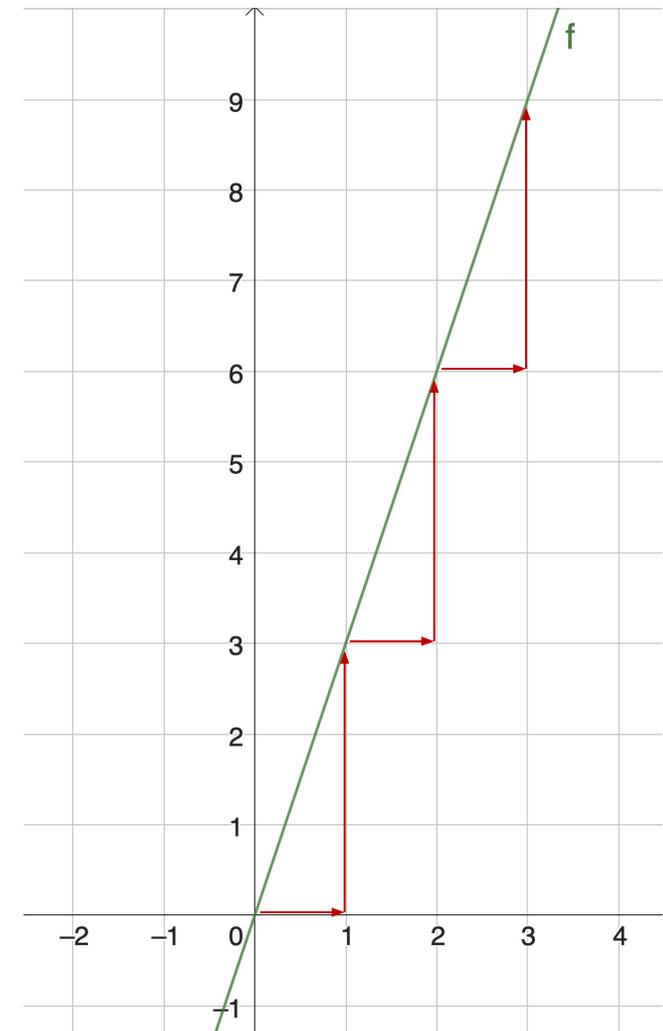
APPROCCIO ORIENTATO ALLE PROPRIETÀ

Slavit propone **un ulteriore approccio**, basato sulla crescita funzionale e sulla definizione di funzione come covariazione.

«Il punto di vista orientato alle proprietà si differenzia da quello orientato all'oggetto in quanto si pone meno enfasi sul modo in cui le variabili cambiano e più sulle **proprietà che risultano da tali cambiamenti**.

Una visione della funzione orientata alle proprietà prevede la **graduale consapevolezza** delle specifiche **proprietà di crescita** di natura locale e globale **di una funzione**, seguita dalla capacità di riconoscere e analizzare le funzioni identificandone la presenza o l'assenza.»

Slavit, 1997



IL PROGETTO TransEET



TransEET

Transforming **E**ducation with **E**merging **T**echnologies

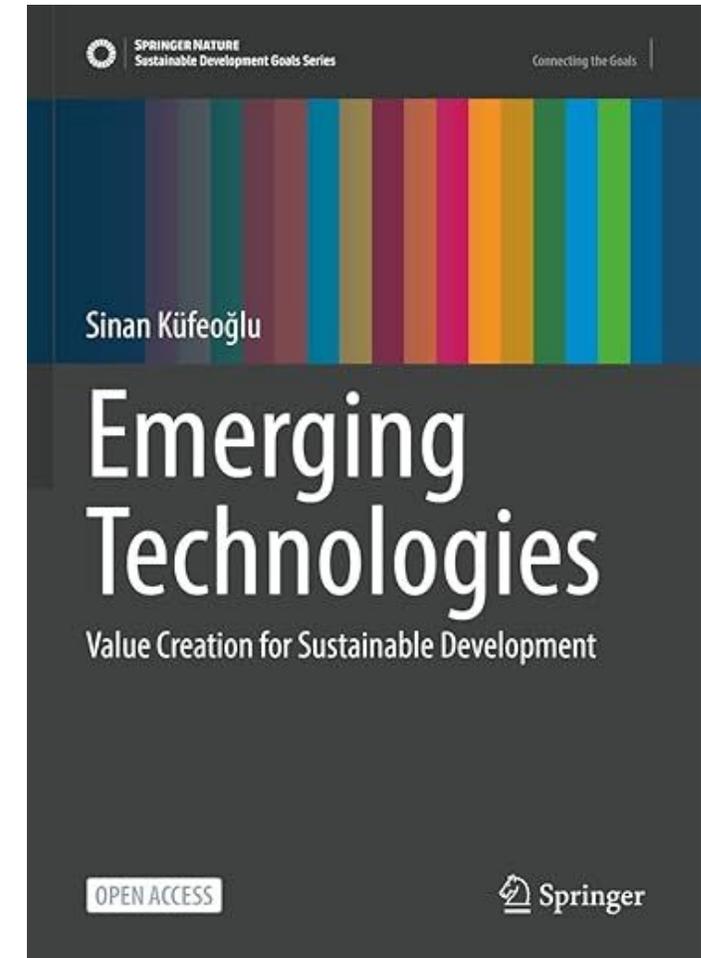


Dipartimento di
Matematica
"Giuseppe Peano"

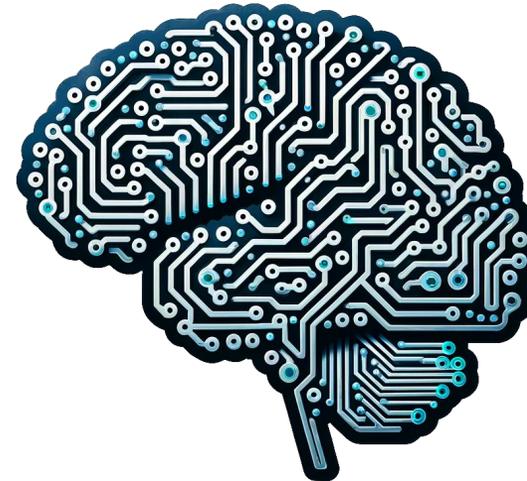
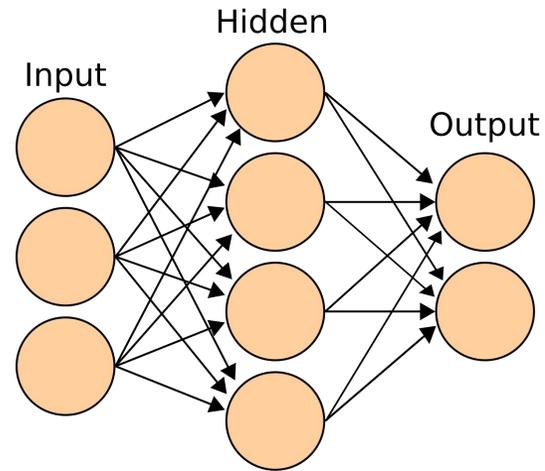
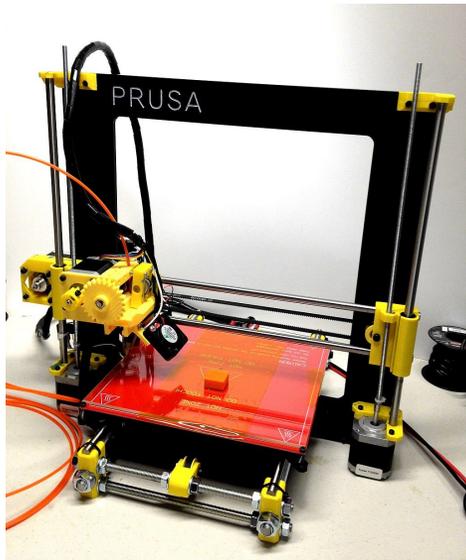


TECNOLOGIE EMERGENTI: COSA SONO?

“Le tecnologie emergenti sono quelle il cui sviluppo e le cui aree di applicazione sono ancora in rapida espansione e il cui potenziale tecnico e di valore è ancora in gran parte irrealizzato.” (Küfeoğlu, 2020)



TECNOLOGIE EMERGENTI: QUALI SONO?

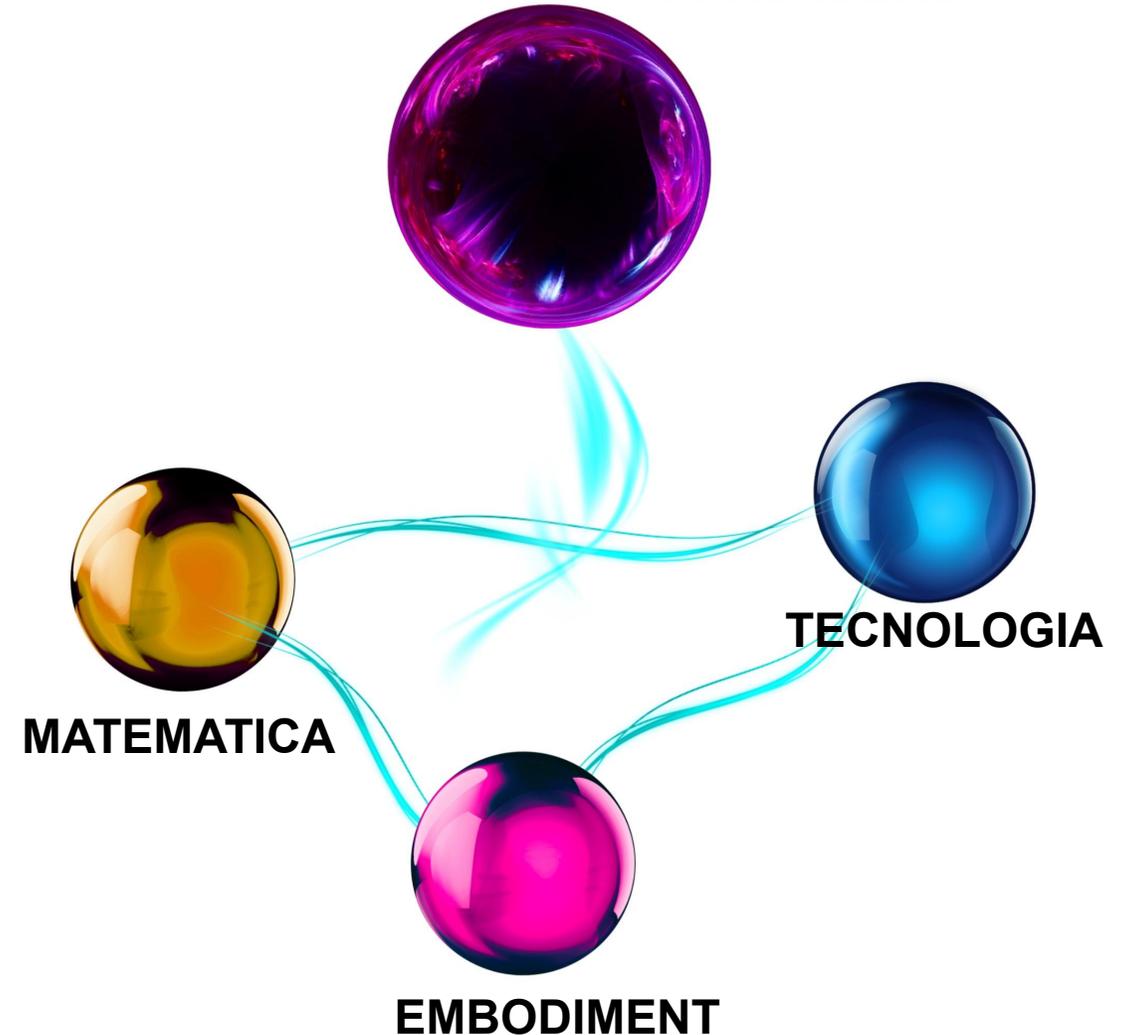


ECCONE ALCUNE

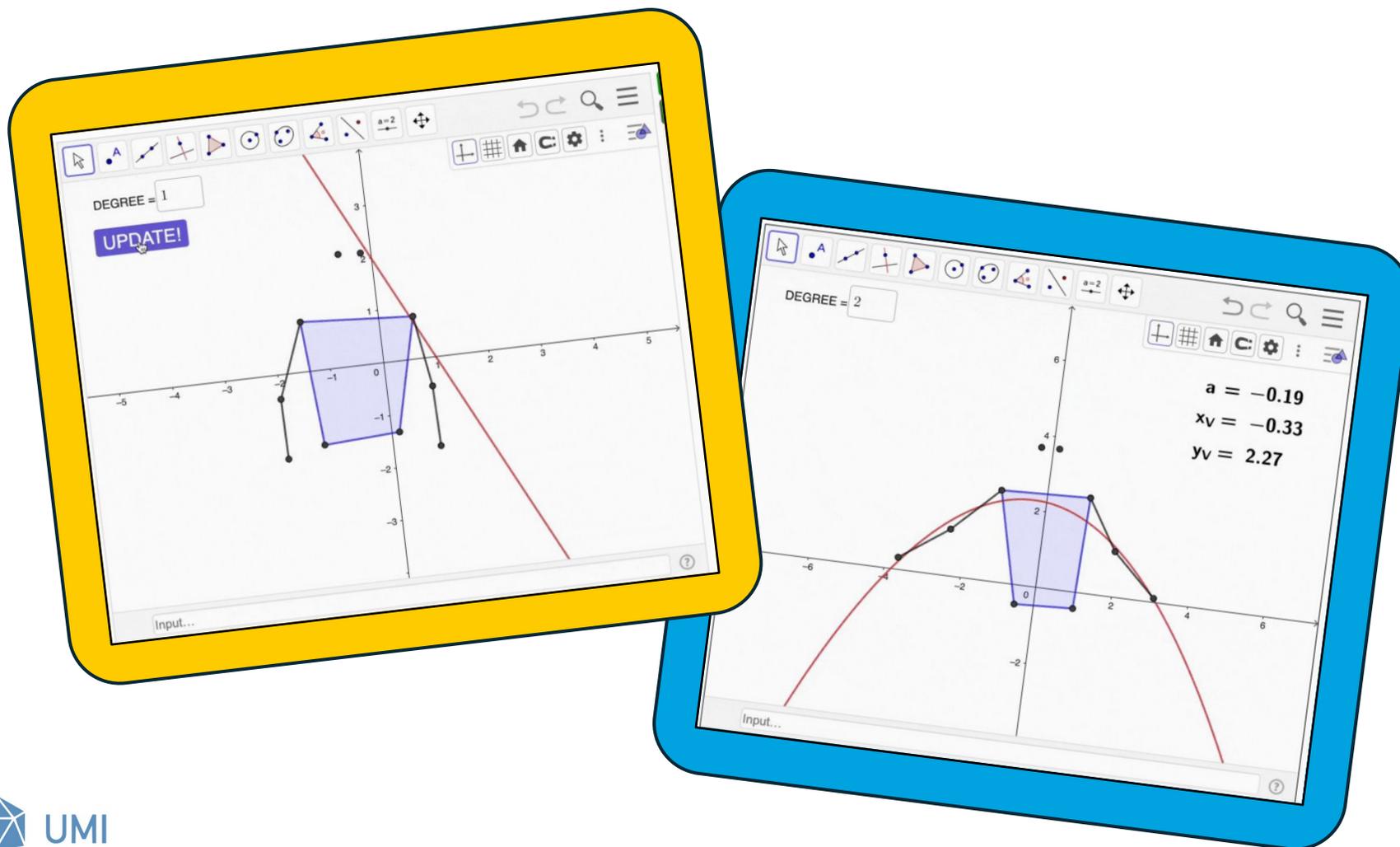
TRASFORMARE L'APPRENDIMENTO

NUOVI MODI DI
APPRENDERE

- **Matematica:** la conoscenza matematica degli studenti, già posseduta e da sviluppare; in questo caso: le funzioni
- **Embodiment:** le rappresentazioni del corpo e la loro concettualizzazione tramite pose e movimenti
- **Tecnologia:** PoseNet + GGB: GeoGebra+



BENVENUTI NEL MONDO DI GGB+

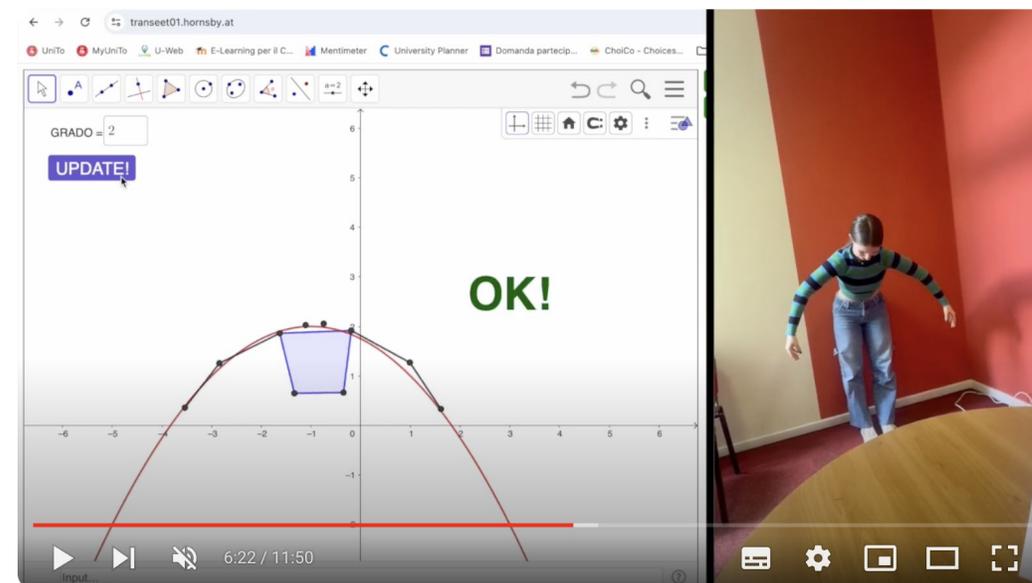


GEOGEBRA PLUS (GGB+)

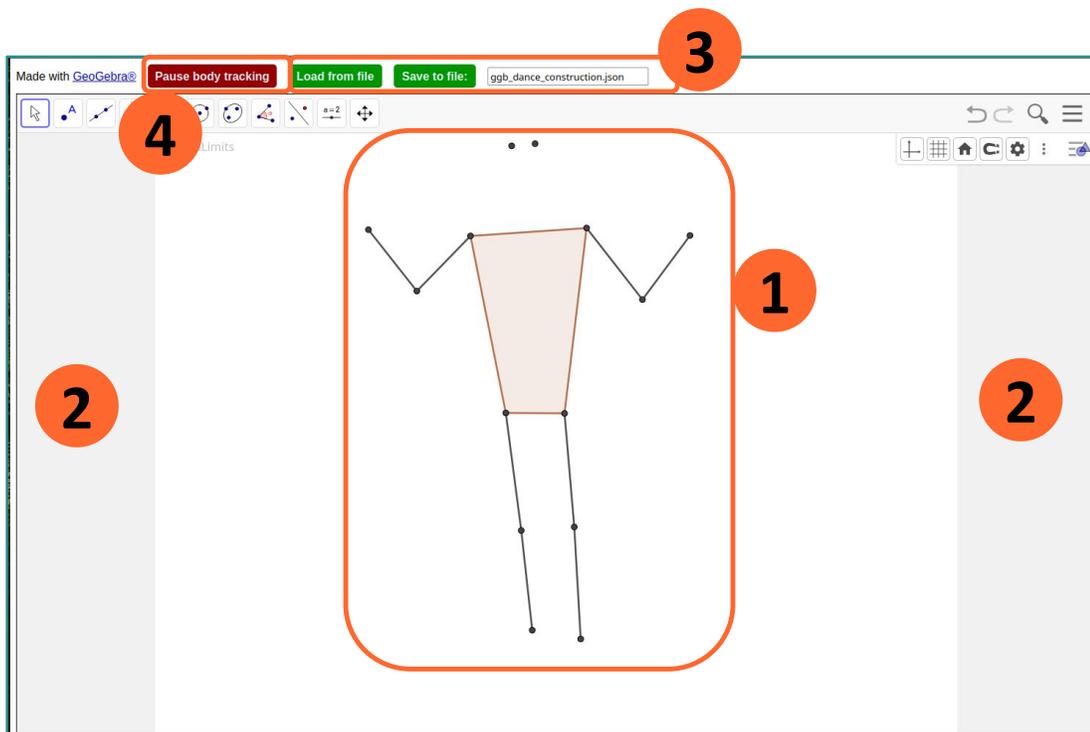
GGB+, sviluppato da David Hornsby (JKU) e Andrea Gheresi (UNITO), è un software basato su GeoGebra in cui gli utenti possono **manipolare** direttamente oggetti matematici **attraverso** la rappresentazione virtuale e dinamica del **proprio corpo**.

Attraverso una rete neurale addestrata al riconoscimento della posizione (PoseNet), GGB+ consente di rappresentare determinati punti del corpo dell'utente (ad es. gomiti, occhi, caviglie) nella vista grafica di GGB come oggetti di GGB con cui è quindi possibile...

... controllare le rappresentazioni di oggetti matematici attraverso i movimenti del corpo!



INTERFACCIA DI GGB+



- 1 L'avatar è invariante alla traslazione e alla dilatazione della finestra (la webcam è sempre centrata sullo schermo).
- 2 Quando il rapporto della telecamera non corrisponde al rapporto della finestra, i bordi non accessibili all'avatar sono evidenziati in grigio.
- 3 Menu per il salvataggio e il caricamento delle applet.
- 4 Possibilità di avviare e interrompere il tracciamento del corpo.

GEOGEBRA

1. MIRROR



GET

2. COEFFICIENTS



LEVEL 3. UP



FEEDBACK CONCLUSIVO



DIVERSI APPROCCI ALLA FUNZIONE

Funzione come macchina input – output

➡ Approccio alla funzione orientato all'**azione**.

Funzione come particolare relazione/corrispondenza

➡ Approccio alla funzione orientato al **processo**.

Funzione come espressione variabile, come covarianza

➡ Approccio alla funzione orientato all'**oggetto**.



Slavit, 1997