Unione Matematica Italiana

CIIM Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica

AIRDM

Problemi e giochi matematici per le competenze argomentative

29 agosto 2024

La Thuile

Bernardo Nannini

bernardo.nannini@unifi.it

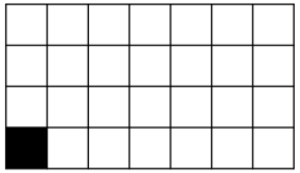
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

DIMAI DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "ULISSE DINI"

COSA CI ASPETTA OGGI

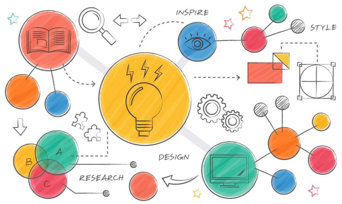
- Argomentare e dimostrare a scuola

    - Il gioco *Chomp-tagli*

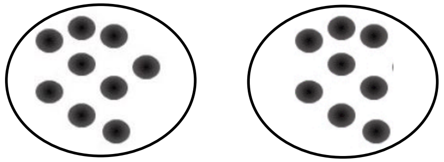


- Attività a piccoli gruppi

- Discussione e analisi collettiva



- Riflessioni teoriche



- Il gioco Nim

Argomentazione (e dimostrazione) a scuola….

Traguardi per lo sviluppo di competenze alla fine della scuola secondaria di I grado

[…] produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite […]
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di un'argomentazione corretta.

Obiettivi per la terza classe della scuola secondaria di primo grado – ITALIANO

Argomentare la propria tesi su un tema affrontato nello studio e nel dialogo in classe con dati pertinenti e motivazioni valide

Indicazioni per i “Nuovi Licei” (2010)

La capacità di esprimersi ed **argomentare in forma corretta e in modo efficace** sono [infatti] competenze che le Indicazioni propongono **come obiettivo di tutti**

Linee guida per “Nuovi istituti tecnici” (2010)

Al termine dell’obbligo d’istruzione, gli studenti acquisiscono le abilità necessarie per applicare i principi ed i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica, **nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie ed altrui**

Quinto anno liceo classico, mese di novembre…

Secondo voi quante diagonali ha un poligono con 10 lati?
E uno con 100 lati?
Discutetene in gruppo!

Secondo voi quanto fa la somma dei primi 100 numeri dispari?
Discutetene in gruppo!

Qualsiasi sia il numero naturale *n* scelto, l'espressione $n^2 + n + 41$ dà come risultato un numero primo. Vero o falso?
Discutetene in gruppo!

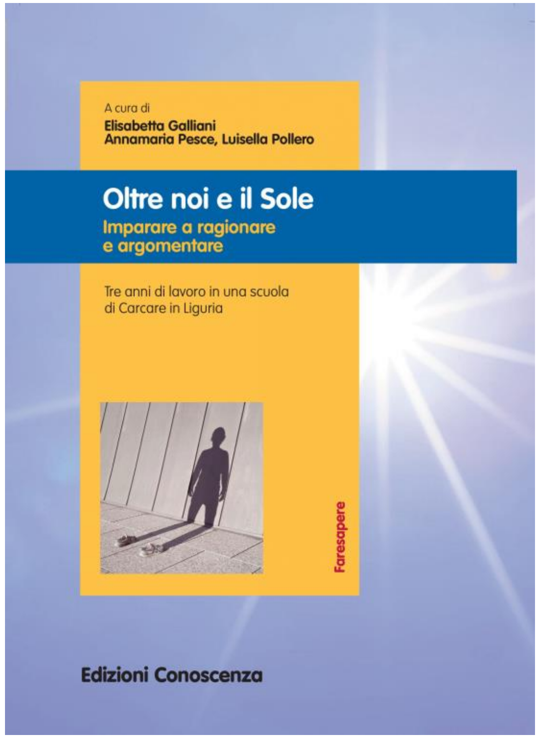
Francesca:

«L'attività riguarda più la logica che l'uso della matematica canonica che si studia alla scuola superiore. La difficoltà è che bisogna affidarsi alla logica e al metodo di ragionamento piuttosto che all'uso di leggi matematiche. La difficoltà maggiore, per me, è stata quella di dovermi adattare a una matematica "fuori dagli schemi", almeno per quello che ho studiato a scuola.»

Argomentazione (e dimostrazione) a scuola….

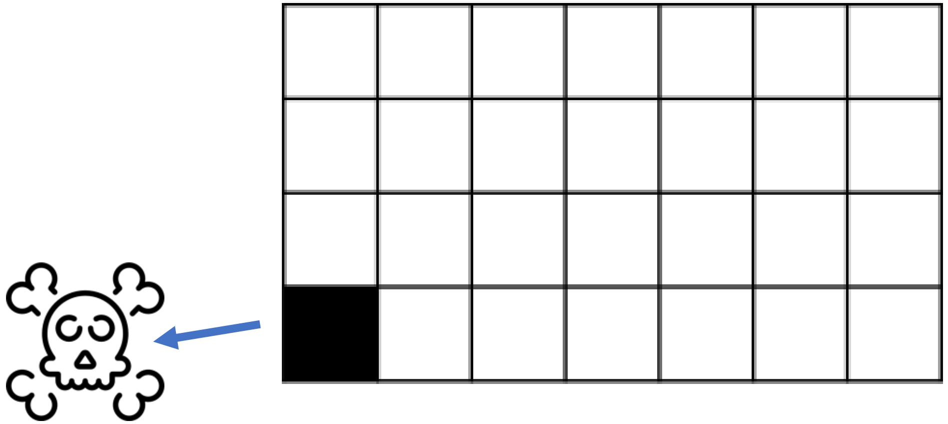
Obiettivo didattico raggiungibile o utopia?

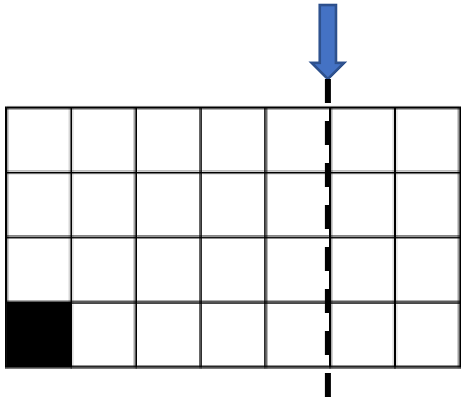
Argomentare e dimostrare come problema didattico
M.A. Mariotti.
Collana Convergenze
UMI-CIIM



Oltre noi e il sole. Imparare a ragionare e argomentare.
E. Galliani, A. Pesce, & L. Pollero. Edizioni Conoscenza

IL GIOCO *CHOMP-TAGLI*

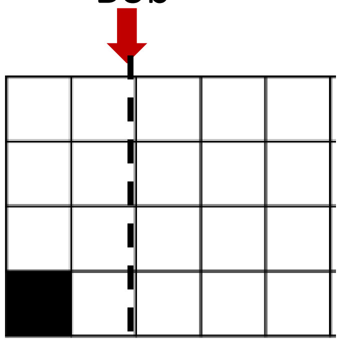


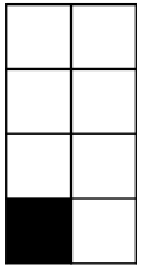


Regole del gioco

Si gioca in due giocatori, sulla stessa tavoletta di cioccolato.

A turno, ciascun giocatore effettua un **taglio verticale o orizzontale lungo la quadrettatura**, dividendo la tavoletta in due parti e mangia la parte di tavoletta tagliata che non contiene il quadretto avvelenato.





Si continua a giocare finché uno dei due giocatori non rimane con solamente il quadretto avvelenato. Il giocatore che si trova in questa situazione ha perso la partita.

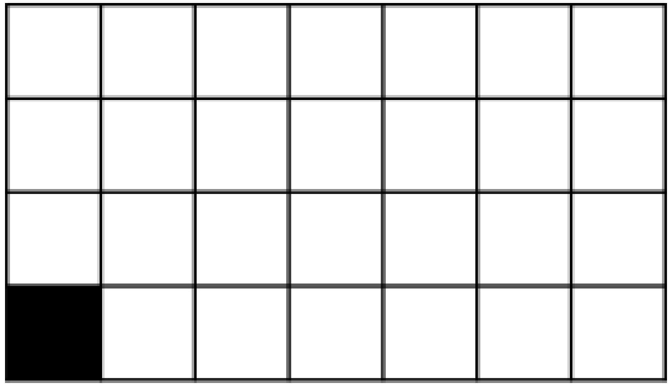
IL GIOCO *CHOMP-TAGLI*

Regole del gioco

Si gioca in due giocatori, sulla stessa tavoletta di cioccolato

A turno, ciascun giocatore effettua un taglio verticale o orizzontale lungo la quadrettatura, dividendo la tavoletta in due parti e mangia la parte di tavoletta tagliata che non contiene il quadretto avvelenato.

Si continua a giocare finché uno dei due giocatori non rimane con solamente il quadretto avvelenato. Il giocatore che si trova in questa situazione ha perso la partita.



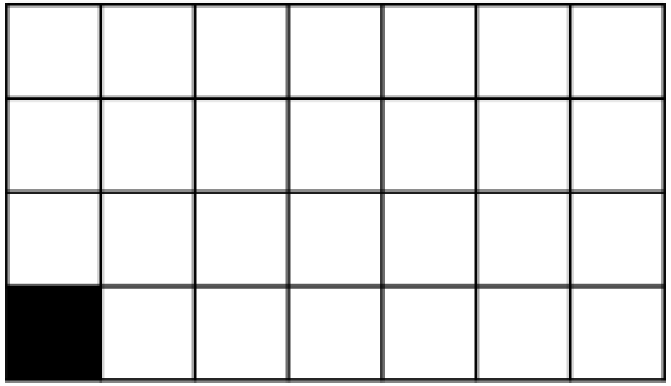
4

7

__Attività 1__

A coppie, provate a giocare alcune partite

IL GIOCO *CHOMP-TAGLI*

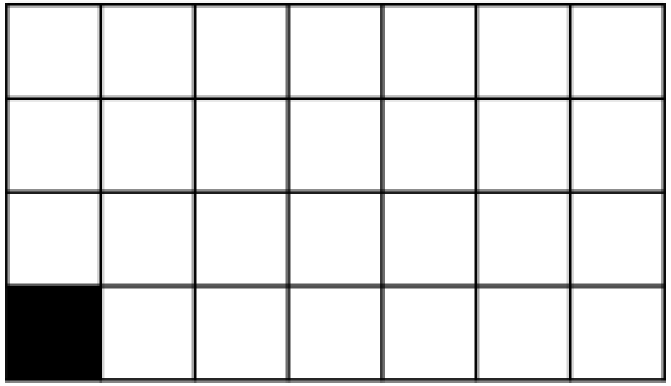


__Attività 2__

A gruppi di 4 persone discutete del gioco (riflettere su strategie che portano a vincere, strategie che portano a perdere, configurazioni particolari della tavoletta, …).

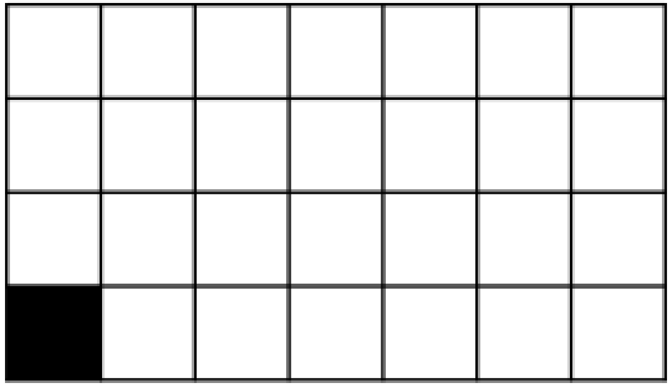
Se durante la vostra discussione vi sembra di scoprire qualcosa, __scrivetelo__ su un foglio.

IL GIOCO *CHOMP-TAGLI*



Siamo in grado di dare (e giustificare) una possibile soluzione al gioco?

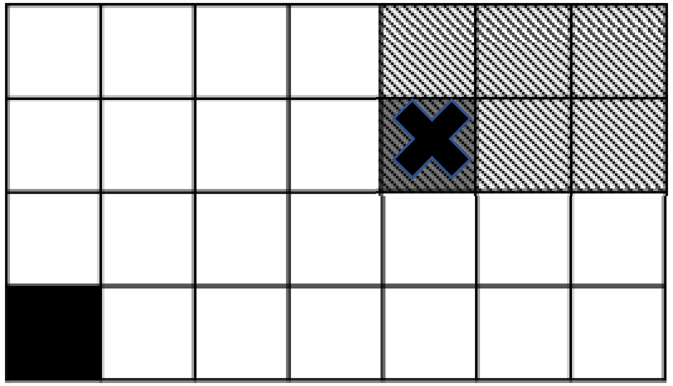
IL GIOCO *CHOMP* – UNA VERSIONE PIÙ COMPLESSA

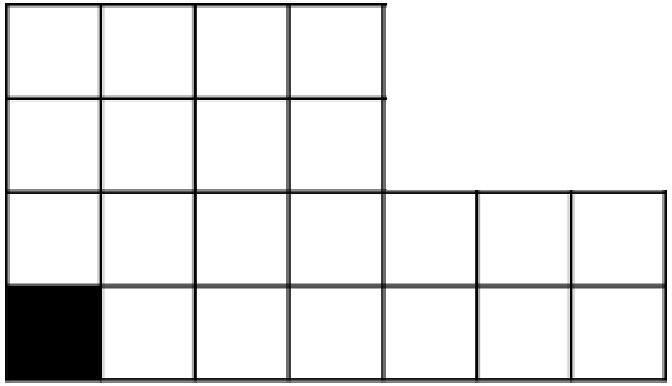


Regole del gioco

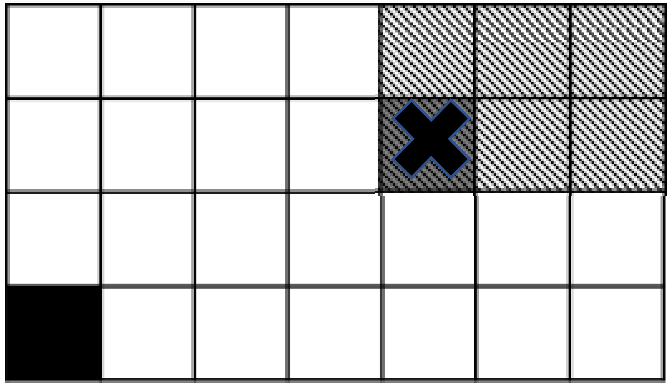
Le stesse della versione *Chomp-tagli*, però i tagli che un giocatore può effettuare sono leggermente diversi:

- Si seleziona un quadretto qualsiasi.
- Si taglia la tavoletta così da eliminare tutti i quadretti tutti i quadretti che si trovano più a destra o più in alto di esso, compresi quelli che si trovano più a destra e più in alto.





IL GIOCO *CHOMP* – UNA VERSIONE PIÙ COMPLESSA



Si può dimostrare che il primo giocatore ha sempre una strategia vincente.

La dimostrazione è una dimostrazione di esistenza non costruttiva.

Ad oggi non si conosce una strategia vincente per questa versione del gioco *Chomp*.

Ci sono però alcune soluzioni parziali…

[Cornel University - Chomp Game]

- Se la scacchiera è quadrata, *n* x *n*

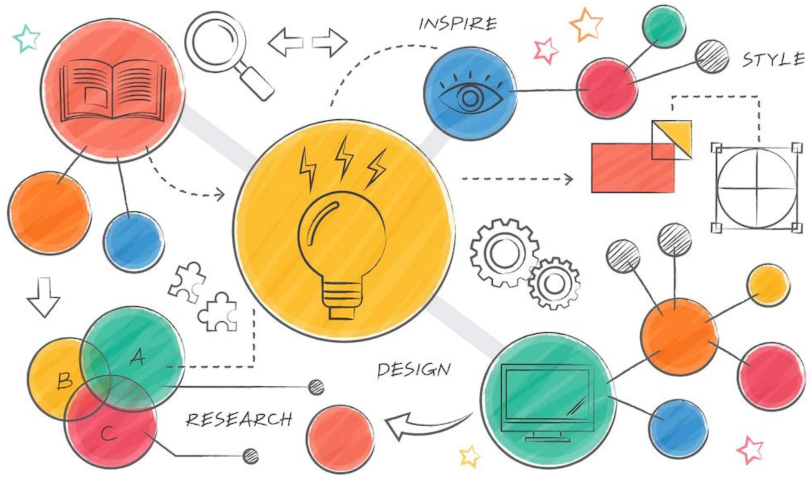
- Se la scacchiera ha dimensione 2 x *n*

Per un'analisi di questo e altri giochi…

Giochi e percorsi matematici
E. Delucchi, G. Galiffi, L. Pernazza.
Collana Convergenze UMI-CIIM

RIFLESSIONI TEORICHE

La ricerca, nazionale e internazionale, in didattica della matematica, così come la normativa scolastica (Indicazioni Nazionali) sono concordi **nell'assegnare un ruolo di rilevanza ai processi argomentativi nell'apprendimento matematico (e non).**



$m3 + n5$

$m, n \geq 0$

$8 \longrightarrow \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}$

$t > 8$ $\qquad$ $t-1$

$t - 1 = m3 + n5 \longrightarrow n \geq 1$

$1 = 2 \cdot 3 - 5$

RIFLESSIONI TEORICHE

Cosa è una «dimostrazione matematica» in didattica della matematica?
Cosa è un’argomentazione in didattica della matematica?
Qual è la relazione tra le due?

Centralità della questione epistemologica

Tra i ricercatori in Didattica della Matematica, esiste un significato condiviso dell’espressione “(mathematical) proof”?

“Currently the situation of our field of research is quite confusing, with profound differences in the ways to understand what is a mathematical proof within a teaching-learning *problématique* but differences which remain unstated. (Balachef, 2008)

M. A. Mariotti, 2020

https://www.youtube.com/watch?v=ZVgCVZRAo2U

ARGOMENTAZIONE E DIMOSTRAZIONE:
UNA DEFINIZIONE OPERATIVA

Un dibattito sempre aperto che anima la ricerca in didattica della matematica è quello che ruota intorno ai significati di ‘Argomentazione’ e ‘Dimostrazione’, e alla loro relazione reciproca.

Un’utile definizione operativa di ***Argomentazione*** è stata data da Douek (1999, 2002, 2007):

> *“First, it denotes the individual or collective process that produces a logically connected, but not necessarily deductive, discourse about a given subject. […] Second, it points at the text produced through that process.”* (2002, p. 304)

Douek, inoltre, introduce il termine *Argument,* adottando la definizione in the Webster’s dictionary: “A reason or reasons offered for or against a proposition, opinion or measure” (citato in 2002, p.304).

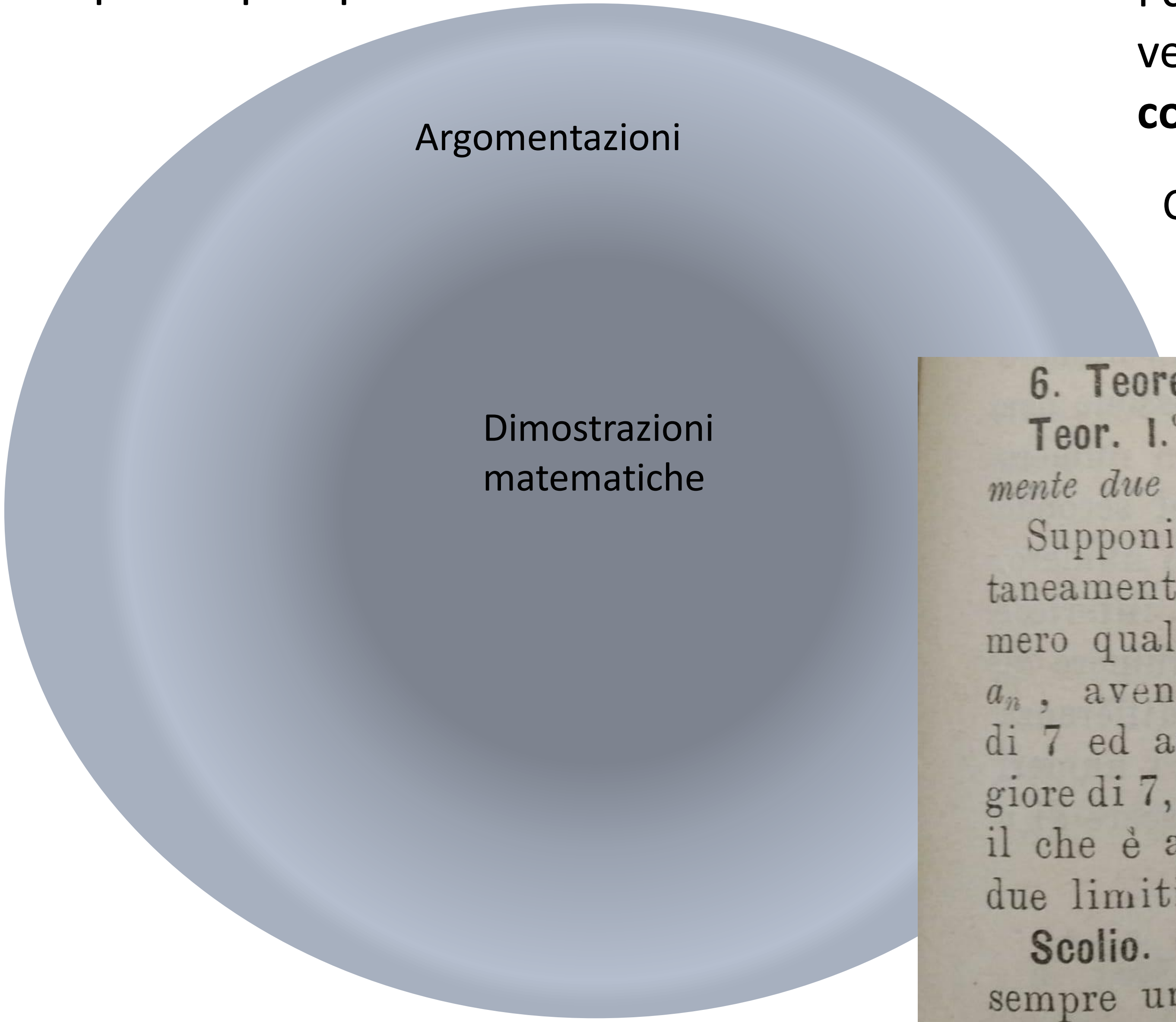
In linea con ciò dunque:

> “*An ‘argumentation’ consists of one or more logically connected arguments*” (2002, p. 304).

Con il termine **Mathematical Proof**, invece, Douek intende una particolare e specifica forma di argomentazione: “**what in the past and today is recognized as such by people working in the mathematical field”** (1998, p.128)

> *“This approach covers Euclid’s proof as well as the proof published in high school mathematics textbooks, and current modern-day mathematicians’ proofs, as communicated in specialized workshops or published in mathematical journals.”* (1998, pp. 128-129)

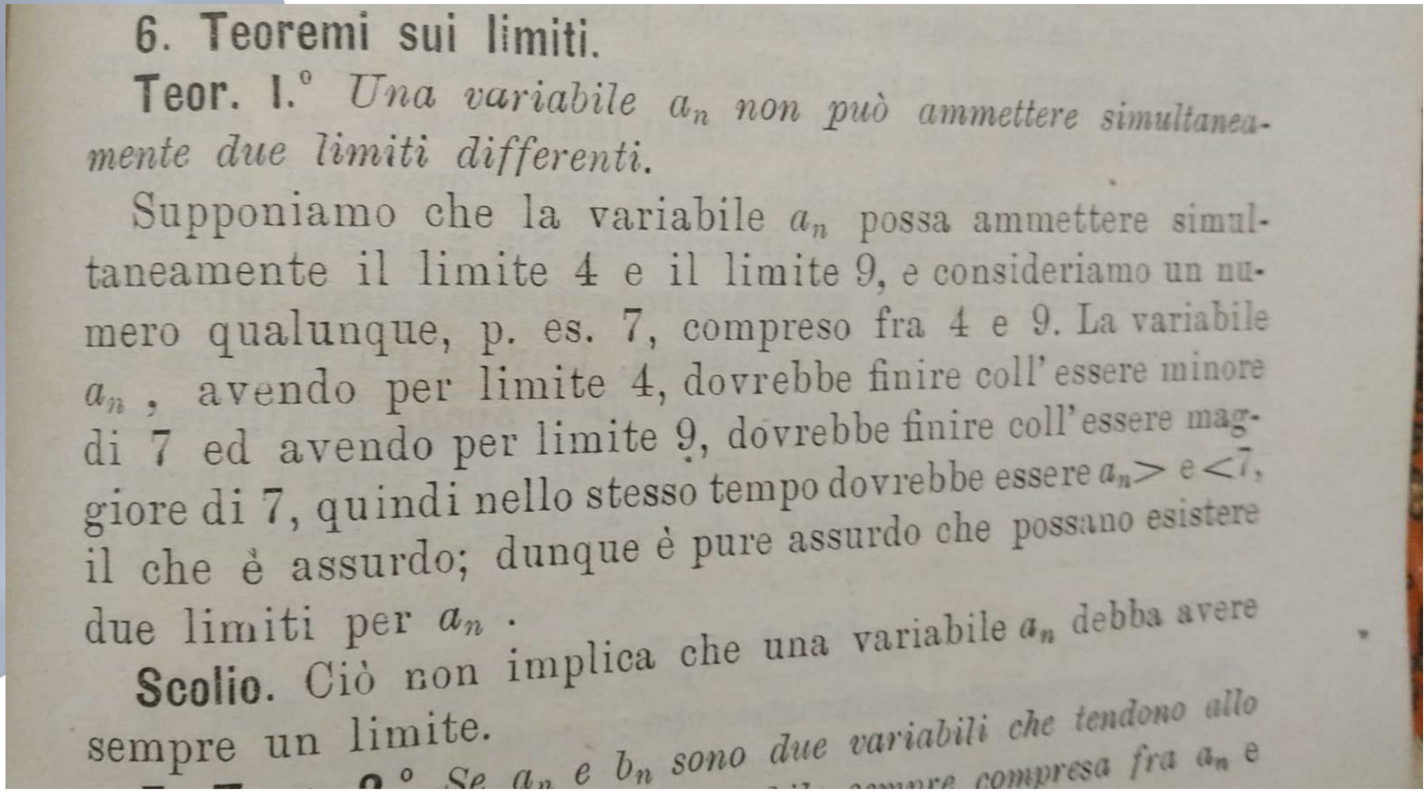
In questa prospettiva…



I confini sono sfumati. Questi vengono discussi e decisi dalla **comunità di riferimento**.

Chi fa ricerca in matematica

Classe di studenti con l’insegnante di matematica



6. Teoremi sui limiti.

Teor. I.° *Una variabile a_n non può ammettere simultaneamente due limiti differenti.*

Supponiamo che la variabile a_n possa ammettere simultaneamente il limite 4 e il limite 9, e consideriamo un numero qualunque, p. es. 7, compreso fra 4 e 9. La variabile a_n, avendo per limite 4, dovrebbe finire coll’essere minore di 7 ed avendo per limite 9, dovrebbe finire coll’essere maggiore di 7, quindi nello stesso tempo dovrebbe essere $a_n >$ e <7, il che è assurdo; dunque è pure assurdo che possano esistere due limiti per a_n.

Scolio. Ciò non implica che una variabile a_n debba avere sempre un limite.

Se a_n e b_n sono due variabili che tendono allo … *sempre compresa fra a_n e*

Argomentazione e dimostrazione matematica

“una relazione complessa, produttiva e inevitabile”

(P. Boero, La lettre de la preuve, 1999)

Boero (1999) osserva come per l’esperto, l’attività matematica di produzione di congetture e costruzione di dimostrazioni sia caratterizzata da **molteplici fasi**. Queste presentano caratteristiche molto diverse tra loro e sono segnate da **una continua dialettica** tra:

- Processi deduttivi e non deduttivi
- Dimensione personale e comunitaria

RIFLESSIONI TEORICHE

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

(2) Formulazione dell’enunciato.

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

(5) Costruzione della dimostrazione.

«Esplorazione della situazione problematica, identificazione di "regolarità", identificazione di condizioni che assicurano il verificarsi di tali regolarità, identificazione di argomenti che assicurano la plausibilità della congettura prodotta, ecc.). Questa fase appartiene alla dimensione privata del lavoro dei matematici»

Induzioni empiriche

Analogie

Processi abduttivi

RIFLESSIONI TEORICHE

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

(2) Formulazione dell’enunciato.

«attenendosi a convenzioni circa l'organizzazione del testo (questa fase di solito conduce a un testo che può essere reso pubblico)»

Convenzioni linguistiche

Convenzioni Matematiche

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

(5) Costruzione della dimostrazione.

RIFLESSIONI TEORICHE

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

(2) Formulazione dell’enunciato.

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

(5) Costruzione della dimostrazione.

«Elaborazioni di natura euristica, semantica (o anche formale) sui possibili legami tra ipotesi e tesi; identificazione di argomenti appropriati per la validazione dell'enunciato e individuazione di possibili legami tra essi (questa fase di solito appartiene alla dimensione privata del lavoro dei matematici)»

RIFLESSIONI TEORICHE

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

(2) Formulazione dell'enunciato.

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

(5) Costruzione della dimostrazione.

«Selezione e concatenazione deduttiva di argomenti di natura teorica e coerenti tra loro, spesso guidate da analogie con situazioni simili o svolte in opportuni casi particolari (questa fase è spesso ripresa quando i matematici presentano il loro lavoro ai colleghi in modo informale - o anche in presentazioni pubbliche come i seminari)»

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

(2) Formulazione dell'enunciato.

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

(5) Costruzione della dimostrazione.

«Organizzazione degli argomenti concatenati in una dimostrazione accettabile secondo gli standard matematici correnti. Questa fase conduce alla produzione di un testo da pubblicare. Possiamo rilevare che gli standard matematici che regolano tale produzione non sono assoluti - essi possono differire tra oggi e un secolo fa, o tra un testo per il liceo e un testo di livello universitario»

RIFLESSIONI TEORICHE

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

(2) Formulazione dell'enunciato.

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

(5) Costruzione della dimostrazione.

Didatticamente rilevante che gli studenti facciano esperienza di queste fasi, opportunamente declinate in contesti e attività appropriate.

La sola attività di riproduzione di dimostrazioni prodotte da altri di enunciati eteroposti (*Teorema di Pitagora*, *Irrazionalità di* $\sqrt{2}$, *Teorema degli zeri…*), rischia di lasciare agli studenti un'esperienza estremamente limitata di cosa possa significare Argomentare e Dimostrare in matematica.

RIFLESSIONI TEORICHE

Fasi del processo dimostrativo (Boero, 1999)

(1) Produzione di una congettura.

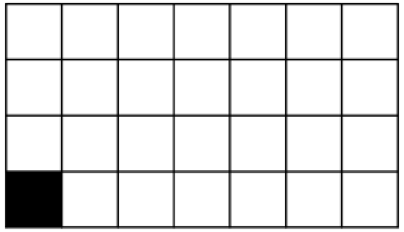
(2) Formulazione dell'enunciato.

(3) Esplorazione del contenuto (e dei limiti di validità) della congettura.

(4) Preparazione alla dimostrazione.

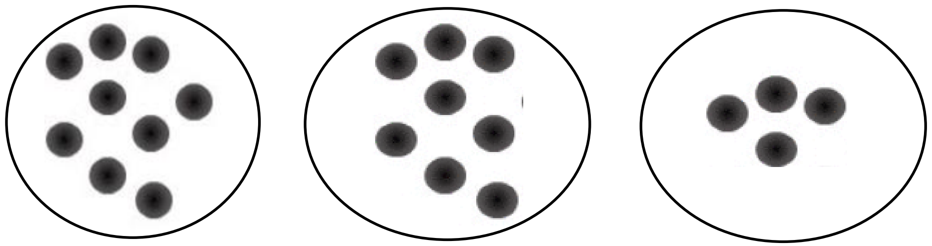
(5) Costruzione della dimostrazione.

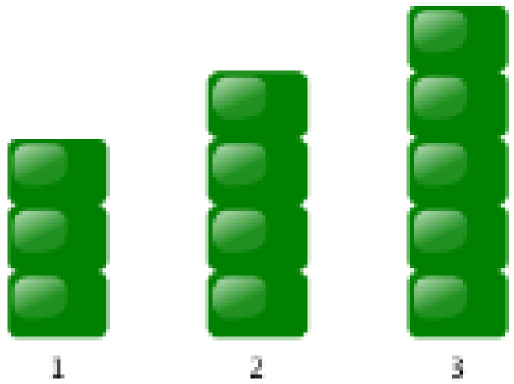
Riflettiamo sull'attività svolta con il gioco *Chomp-tagli.*

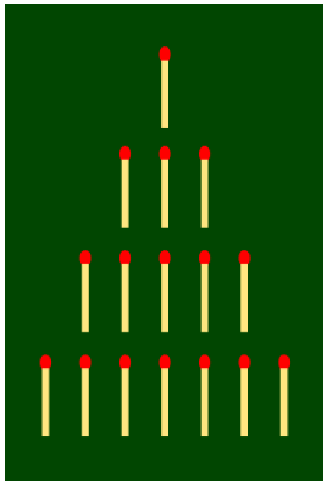


Quali delle seguenti fasi vi è sembrato di aver vissuto? In quali occasioni?

IL GIOCO *NIM*





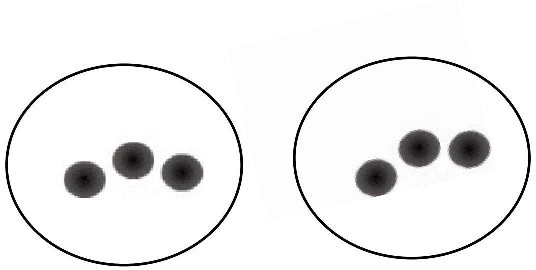


Regole del gioco

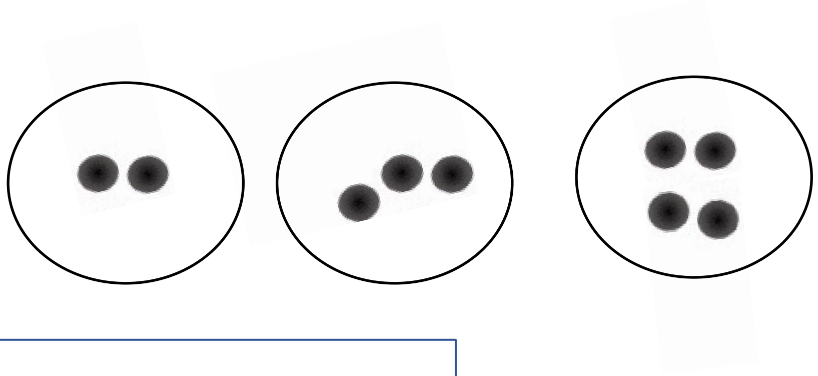
Si gioca in due giocatori. A turno, ciascun giocatore leva una quantità di oggetti a sua scelta da uno dei contenitori. Almeno un oggetto va sempre levato ad ogni turno.

Si continua a giocare finché uno dei due giocatori riesce a levare l’ultimo degli oggetti ancora rimasti in gioco. Questo giocatore ha vinto la partita.

Situazione 1



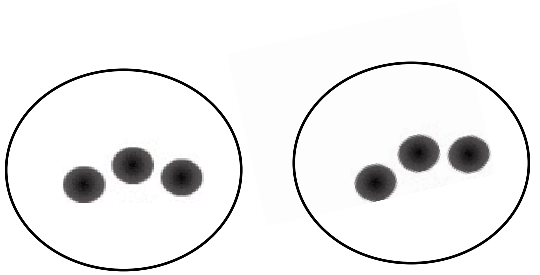
Situazione 2



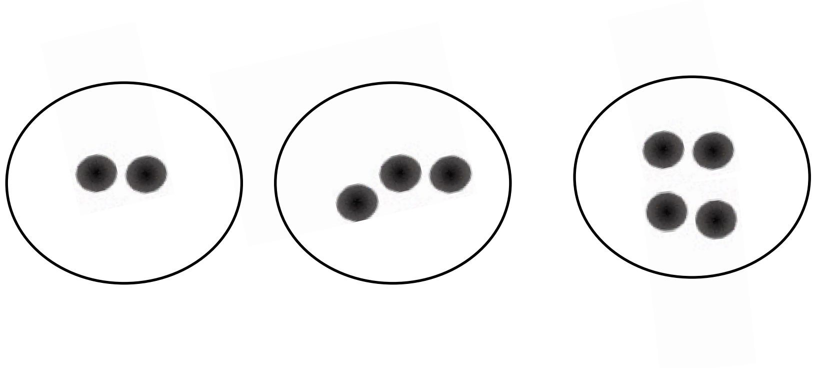
Attività 1

A coppie, provate a giocare alcune partite nelle due situazioni.

Situazione 1



Situazione 2



<u>Attività 2</u>

A gruppi di 4 persone discutete del gioco (riflettere su strategie che portano a vincere, strategie che portano a perdere, configurazioni particolari, possibili generalizzazioni…).

Se durante la vostra discussione vi sembra di scoprire qualcosa, <u>scrivetelo</u> su un foglio.

Possibili scelte metodologiche per attività in classe (per promuovere diversi processi)

Attività

Un giocatore sceglie da quale configurazione iniziale partire, l'altro giocatore sceglie chi dei due giocatori comincia.

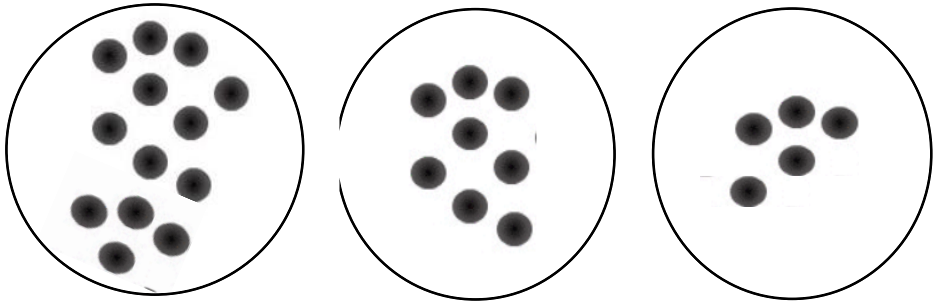
(Riflessione su collegamento tra posizione di partenza e strategia vincente)

Attività

Sfida a squadre. I componenti di ciascuna squadra si sfidano a vicenda (oppure a turno si estrae un rappresentante).

(I processi comunicativi diventano cruciali perché ogni squadra vuole che tutti i propri partecipanti sappiano giocare bene)

IL GIOCO *NIM*



Situazione 3

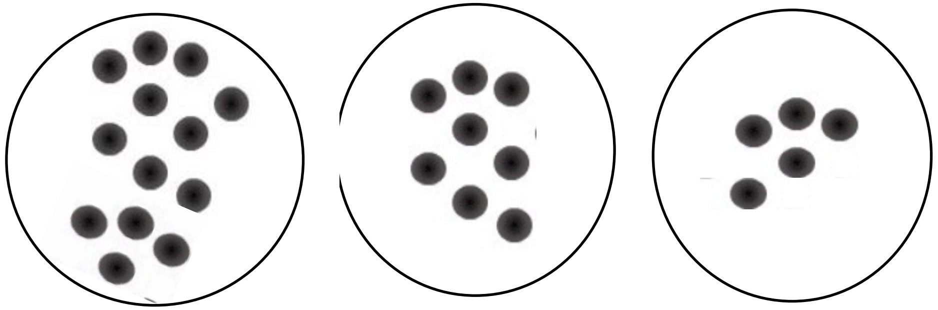
N contenitori contenenti rispettivamente $k_1, \dots, k_N$ oggetti

Per una trattazione generale:

https://en.wikipedia.org/wiki/Nim

E. Delucchi, G. Galiffi, L. Pernazza (2008)
https://link.springer.com/book/10.1007/978-88-470-2616-2

IL GIOCO *NIM*



Situazione 3
N contenitori contenenti rispettivamente $k_1, \dots, k_N$ oggetti

Per una trattazione generale:

https://en.wikipedia.org/wiki/Nim

E. Delucchi, G. Galiffi, L. Pernazza (2008)
https://link.springer.com/book/10.1007/978-88-470-2616-2

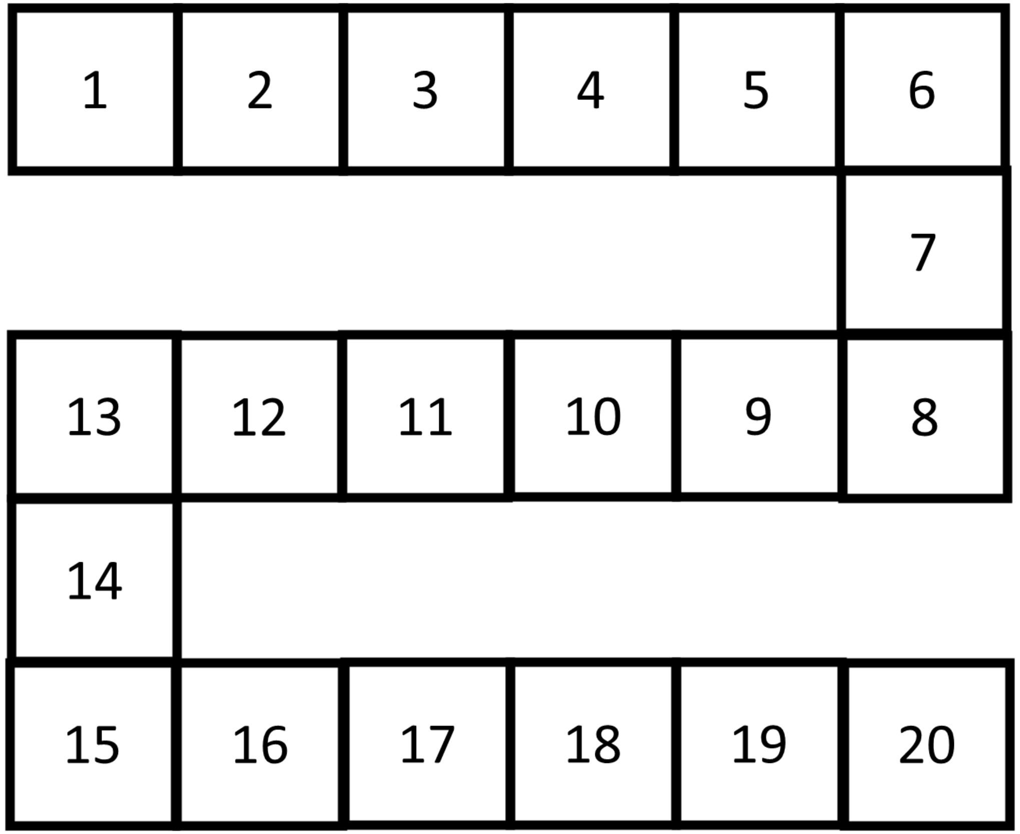
È probabile che abbiate percepito una **distanza** (forse anche fastidiosa) **tra le argomentazioni** che avevate prodotto durante le esplorazioni nei casi precedenti **e la dimostrazione generale** che abbiamo visto successivamente

Rottura dell'unità cognitiva (discontinuità) tra argomentazione e dimostrazione
(Boero et al., 1996)

LA CORSA AL 20

Regole del gioco

Si gioca in due giocatori, con una sola pedina. Il primo giocatore posiziona la pedina sulla casella 1 o sulla casella 2. Ogni giocatore, a turno, sposta la pedina avanti di una o di due caselle. Il giocatore che riesce ad arrivare sulla casella 20 ha vinto.



Varianti del gioco

- Si può cambiare la distanza tra partenza e traguardo o la lunghezza massima di ciascuna mossa (ad esempio, il primo che arriva a 100 con passo 1-10, da giocare a mente).

- Una volta sola a partita un giocatore può passare senza fare nessun movimento.

Problemi e giochi matematici per le competenze argomentative

29 agosto 2024

La Thuile

Bernardo Nannini

bernardo.nannini@unifi.it