

# Conoscenza interpretativa per rendere gli errori davvero generativi

Maria Mellone

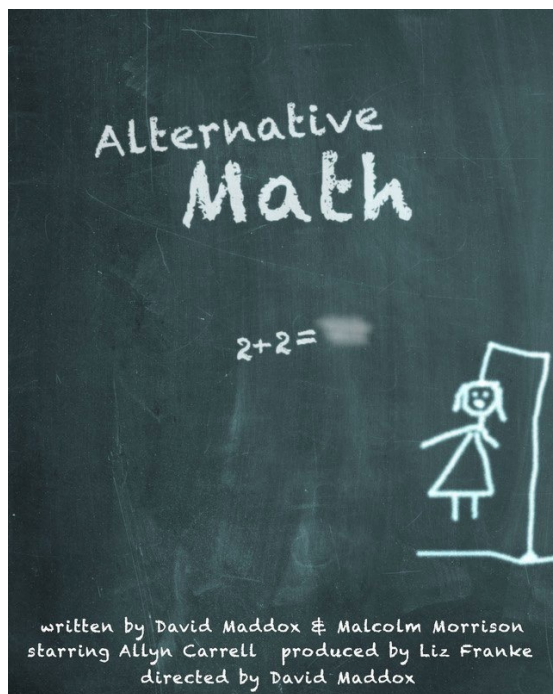
Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»

Università degli Studi di Napoli Federico II



28-31 Agosto 2024- La Thuille (AO)

IX SCUOLA ESTIVA UMI CIIM – AIRDM 2024



Regista: David Maddox  
Anno: 2017

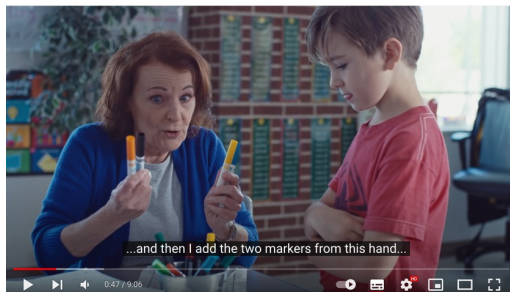
<https://www.youtube.com/watch?v=Zh3Yz3PiXZw>

“Mentre la commedia del cortometraggio si basa sull'applicazione della logica delle **verità alternative** a qualcosa di consensuale come i fatti matematici, l'ironia è che l'insegnante offre poco più che **autorità** e **dogmatismo** per legittimare la sua posizione, che alla fine non dissipano ma invitano ad un ulteriore scetticismo.”

(Kollosche, 2022)

Analizziamo i tre momenti in cui l'insegnante è chiamata a 'giustificare' la sua posizione:

### 1. Confronto con l'allievo



L'insegnante spiega all'allievo perché  $2+2$  fa 4 utilizzando dei pennarelli.

## 2. Confronto con i genitori dell'allievo



“Lo dice la matematica”

## 3. Confronto con il consiglio di istituto



“C'è solo una risposta corretta”



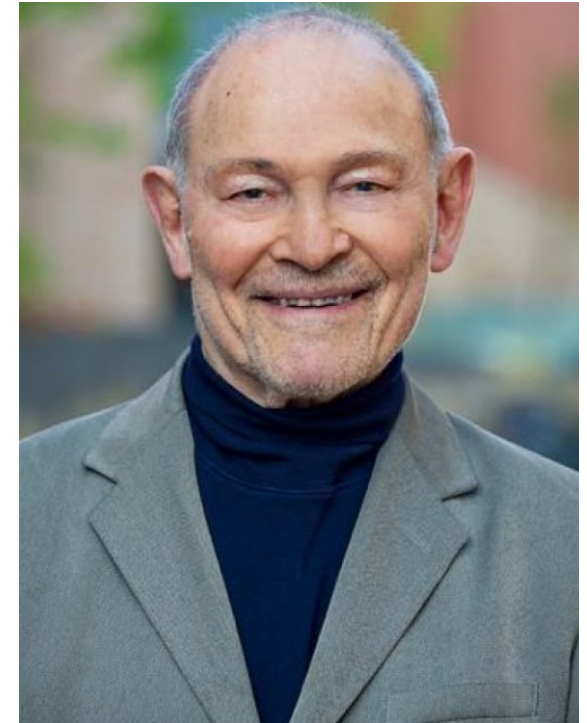
*Come giustifichereste che  $2+2=4$ ?*

*E che  $74+26=100$ ?*

# Rappresentazioni numeriche VS quantità

“Un calcolo numerico, per dire la somma di due numeri, non riguarda la comprensione di cosa significa sommare. Piuttosto, dati due numeri  $A$  e  $B$  in un sistema di notazione  $S$ , un calcolo è una costruzione di una rappresentazione di  $A+B$  nello stesso sistema di notazione  $S$ . Ecco, se è logicamente corretto rispondere che “ $2+11$ ” è «13», non è altrettanto corretto rispondere a “cos’è  $2+11$ ?” con “calcola  $2+11$ ”.

L’importante è notare che le quantità non sono la stessa cosa dei loro nomi numerici e questa confusione a volte può essere fuorviante”.



(Bass, 2016)

# The number sense

“La mia ipotesi è che il senso del numero sia una categoria di conoscenza biologicamente determinata.

I numeri appaiono come una delle fondamentali dimensioni in accordo con le quali il nostro sistema nervoso percepisce il mondo esterno. Così come i colori, la posizione nello spazio fanno parte del nostro modo di guardare perché alcuni circuiti del nostro cervello così ci predispongono, nello stesso modo le quantità numeriche ci vengono imposte con forza da circuiti specializzati nel lobo parietale inferiore. Le strutture del nostro cervello definiscono le categorie in accordo con le quali noi apprendiamo il mondo attraverso la matematica”.



S. Dhaene

## Quattro tipi di evidenza

- La presenza di forme preliminari di aritmetica negli animali.
- La precoce presenza di competenze aritmetiche nei bambini durante i primi mesi di vita indipendentemente da altre abilità.
- L'esistenza di un'omologia tra le abilità nei procedimenti numerici di animali, bambini nei primi mesi di vita, adulti.
- l'ipotesi che la corteccia intraparietale di entrambi gli emisferi è associata con la rappresentazione e l'acquisizione di conoscenza riguardo ai numeri e alle loro relazioni.



## La presenza di forme preliminari di aritmetica negli animali:

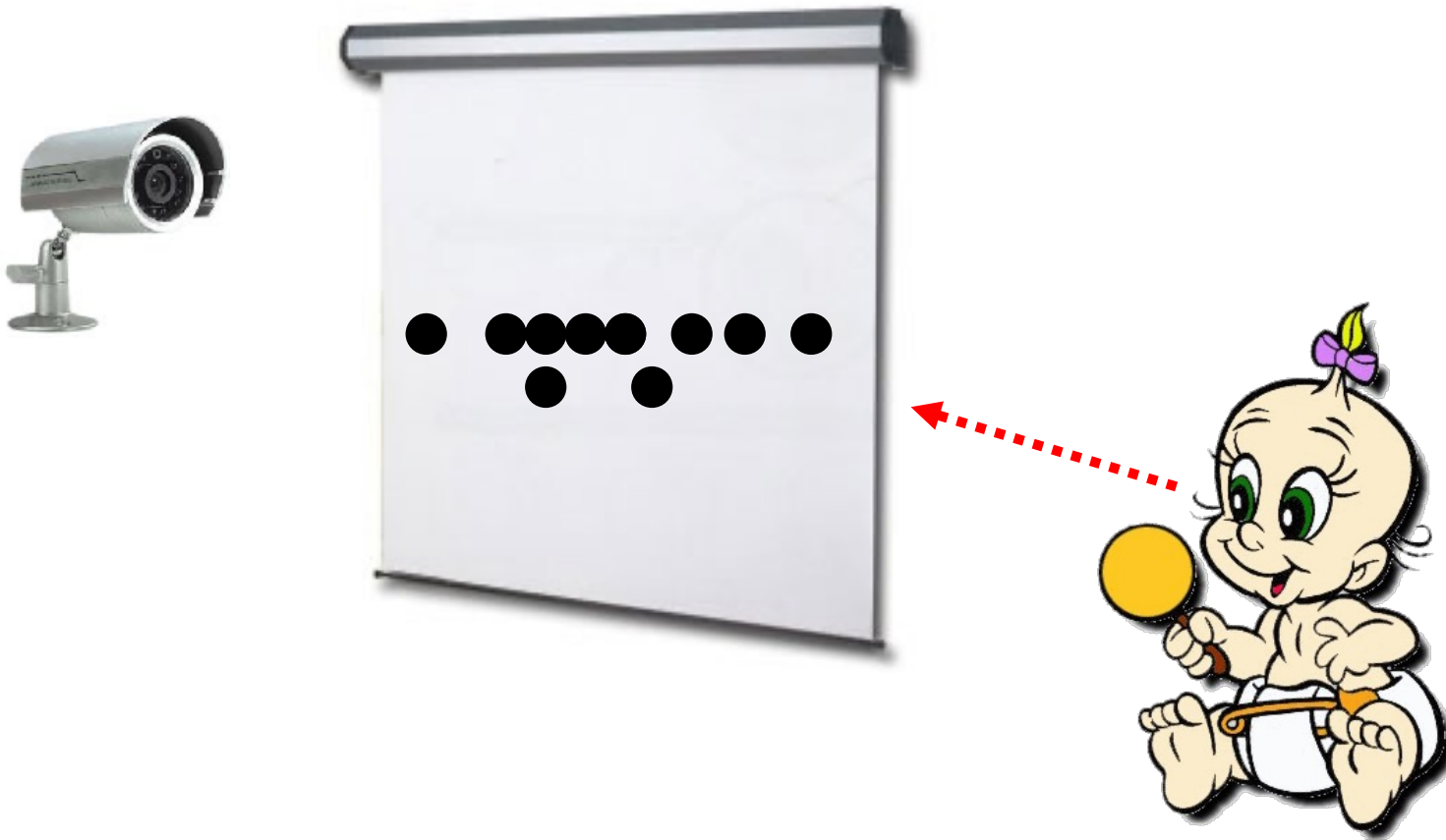
Sono molti gli studi nei quali si fa riferimento alle abilità elementari di aritmetica che caratterizzano gli animali. D'altra parte sono immaginabili i vantaggi, e quindi le conseguenti ripercussioni sull'evoluzione biologica, del saper riconoscere la numerosità di certe collezioni, sia nelle ricerca di cibo, che nel riconoscere predatori e anche nelle dinamiche di accoppiamento.

**Quindi pressioni evuzionistiche hanno permesso l'interiorizzazione di rappresentazioni numeriche nel cervello di varie specie animali.**

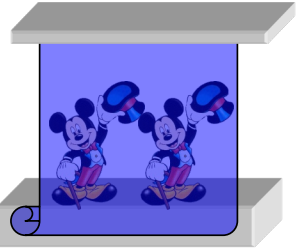
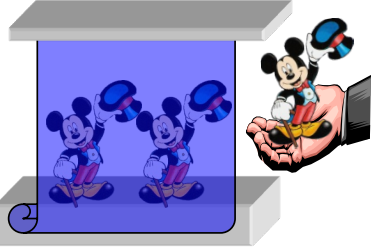
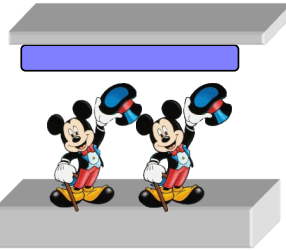
La precoce presenza di competenze aritmetiche nei bambini durante i primi mesi di vita:

Nei bambini molto piccoli appare evidente già a 6-7 mesi di vita la capacità di discriminare visivamente collezioni di oggetti di differenti quantità numeriche. Tale capacità inoltre si trasporta anche a contesti diversi dalla visualizzazione di insiemi di oggetti infatti è stata mostrata anche la capacità di distinguere parole costituite da due o tre sillabe.

Esperimento di Starkey & Cooper, 1980 e Strauss & Curtis, 1981



**Altri esperimenti di Wynn (1992) hanno dimostrato che i bambini posseggono capacità rudimentali per fare addizioni e sottrazioni tra numeri piccoli.**

	<p>In questo esperimento i bambini sono portati di fronte ad un teatrino sul cui palcoscenico vi sono 1 o 2 pupazzi. Poco dopo i pupazzi vengono nascosti da un sipario.</p>
	<p>A questo punto gli sperimentatori aggiungono o sottraggono un pupazzo, in modo visibile</p>
	<p>Se al rialzarsi del sipario, il risultato delle operazioni non è quello giusto, cioè se il numero dei pupazzi non è quello previsto, i bambini mostrano una visibile reazione di sorpresa.</p>





L'esistenza di un'omologia tra le abilità nei procedimenti numerici di animali, bambini, adulti:

- **Effetto distanza:** se la distanza tra i numeri decresce anche la performance relativa alla sua identificazione decresce.
- **Effetto grandezza:** se la stessa distanza è rapportata a numeri più grandi la performance decresce.

**Tutti i bambini** hanno delle fisiologiche rappresentazione della quantità, nascono quindi equipaggiati dal nucleo dei significati delle quantità numeriche. La successiva esposizione ad un dato linguaggio, come ad una data cultura o ad una data educazione matematica permettono l'acquisizione di competenze e sfere addizionali come il lessico delle parole matematiche, o l'insieme di cifre per la notazione scritta, o le procedure per i calcoli a più cifre, e così via. Non solo queste abilità devono essere interiorizzate; ma più di tutto hanno bisogno di essere **coordinate, integrate** con la già biologicamente esistente rappresentazione concettuale dell'aritmetica!!!!



S. Dahaene



Podcast “Matematica al plurale. Oltre il pregiudizio voci dalla didattica”:

<https://umi.dm.unibo.it/2024/05/18/matematica-al-plurale-oltre-il-pregiudizio-voci-dalla-didattica/>





Se, anche secondo le neuroscienze, tutti nascono provvisti del «pallino della matematica» e se per ogni essere umano l'attività di capire è autonomamente motivata e quindi non necessita di una sollecitazione esterna:



Come è possibile che la scuola, sebbene abbia come obiettivo proprio quello di promuovere un'attività auto-motivante come il capire, spesso fallisca soprattutto nell'educazione matematica, che è una componente essenziale del capire?

# Un nodo

Insegnanti e studenti [...] non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri **“compromessi delle risposte corrette”**.

In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette.

(Gardner, 2002)



Proponi di calcolare  $51-17$  a un gruppo di allievi e raccogli i seguenti protocolli scritti.

(Alda)

$$\begin{array}{r} \phantom{5} 4 \phantom{1} \phantom{11} \\ \phantom{5} \cancel{5} \phantom{1} \phantom{11} \\ - \phantom{5} 1 \phantom{1} 7 \\ \hline \phantom{5} 3 \phantom{1} 4 \end{array}$$

(Helena)

$$\begin{array}{r} \phantom{5} 6 \phantom{1} \phantom{11} \\ \phantom{5} \cancel{5} \phantom{1} \phantom{11} \\ - \phantom{5} 1 \phantom{1} 7 \\ \hline \phantom{5} 5 \phantom{1} 4 \end{array}$$

(Bruno)

$$\begin{array}{r} \phantom{5} \phantom{1} \phantom{11} \\ \phantom{5} \phantom{1} \phantom{11} \\ - \phantom{5} \cancel{2} 1 \phantom{1} 7 \\ \hline \phantom{5} 3 \phantom{1} 4 \end{array}$$

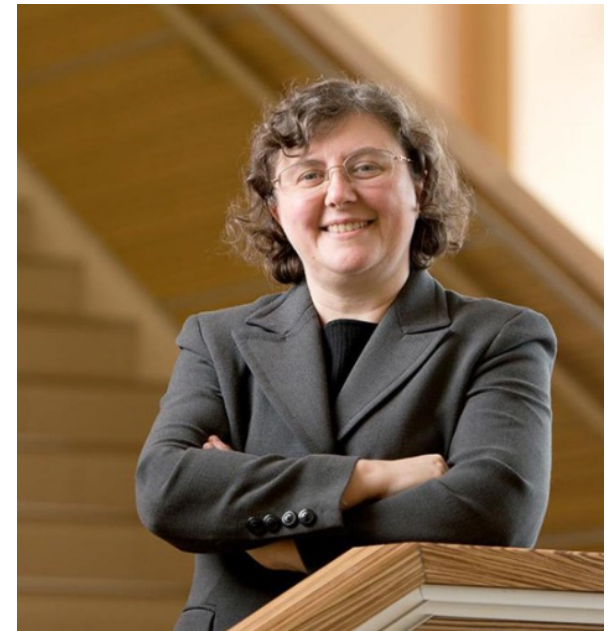
(Cláudia)

$$\begin{array}{r} \phantom{5} 5 \phantom{1} \\ - \phantom{5} 1 \phantom{1} 7 \\ \hline \phantom{5} 5 \phantom{1} 4 \\ - \phantom{5} 2 \phantom{1} 0 \\ \hline \phantom{5} 3 \phantom{1} 4 \end{array} \quad 17 + 3 = 20$$

- Indica quali procedimenti ritieni matematicamente corretti e quali incorretti. In entrambi i casi spiega il perché della tua valutazione;
- Per ciascuna delle risposte spiega cosa proporresti all'allievo come feedback.

# Errore come errare ...

Lo studente che sta commettendo un errore può essere visto come una persona che si perde durante il suo percorso: se ha un incontro importante entra in uno stato di ansia, ma, d'altra parte, se è un turista che visita nuovi luoghi, il suo perdersi rappresenta un'opportunità per scoprire luoghi che altrimenti non avrebbe potuto conoscere (Borasi, 1994).





## Sulla la rappresentazione posizionale decimale

Il grande matematico Carl Friedrich Gauss parlava del fallimento di Archimede nell'inventare una notazione posizionale come una delle più grandi calamità della storia delle scienze.

Questa affermazione del *Principe della matematica*, così veniva chiamato Gauss, aiuta a riflettere sul fatto che i grandi matematici del passato manipolavano rappresentazioni numeriche molto meno potenti di quelle che gli attuali bambini di 8 anni sono invitati a maneggiare con disinvoltura. Questo ci impone di curare con attenzione la mediazione didattica che permetta ai bambini di riflettere sul funzionamento di una rappresentazione numerica che molti danno per scontato e di sviluppare consapevolezza rispetto alla sua potenza.



Johann Friedrich Carl Gauss  
(1777 – 1855).

# Focus sui “perché”

Le difficoltà in matematica vengono spesso peggiorate dalla **perdita di senso** di quello che si fa.

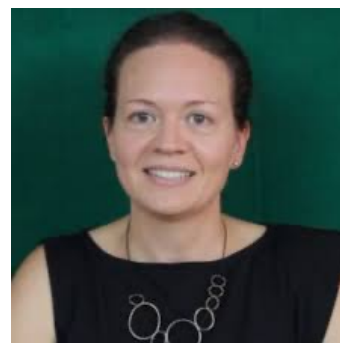
Due sono le convinzioni alla base di questo lavoro:

1. lavorare sul senso delle cose in matematica, non è solo il «bello» di questa disciplina, ma anche il modo migliore per costruire competenza matematica e fornire strumenti ai bambini per superare le difficoltà;
2. si può e si deve lavorare sul senso fin dall’inizio della scuola primaria.

(Baccaglino-Frank, Di Martino, Mellone, Munarini, Ramploud, 2021, p. 7)



**ARTEFATTI INTELLIGENTI**  
**DIREZIONE ANNA BACCAGLINI-FRANK**  
Dal fare al sapere: Artefatti intelligenti per costruire significati matematici.



Anna Baccaglini Frank  
Università di Pisa



Pietro di Martino  
Università di Pisa

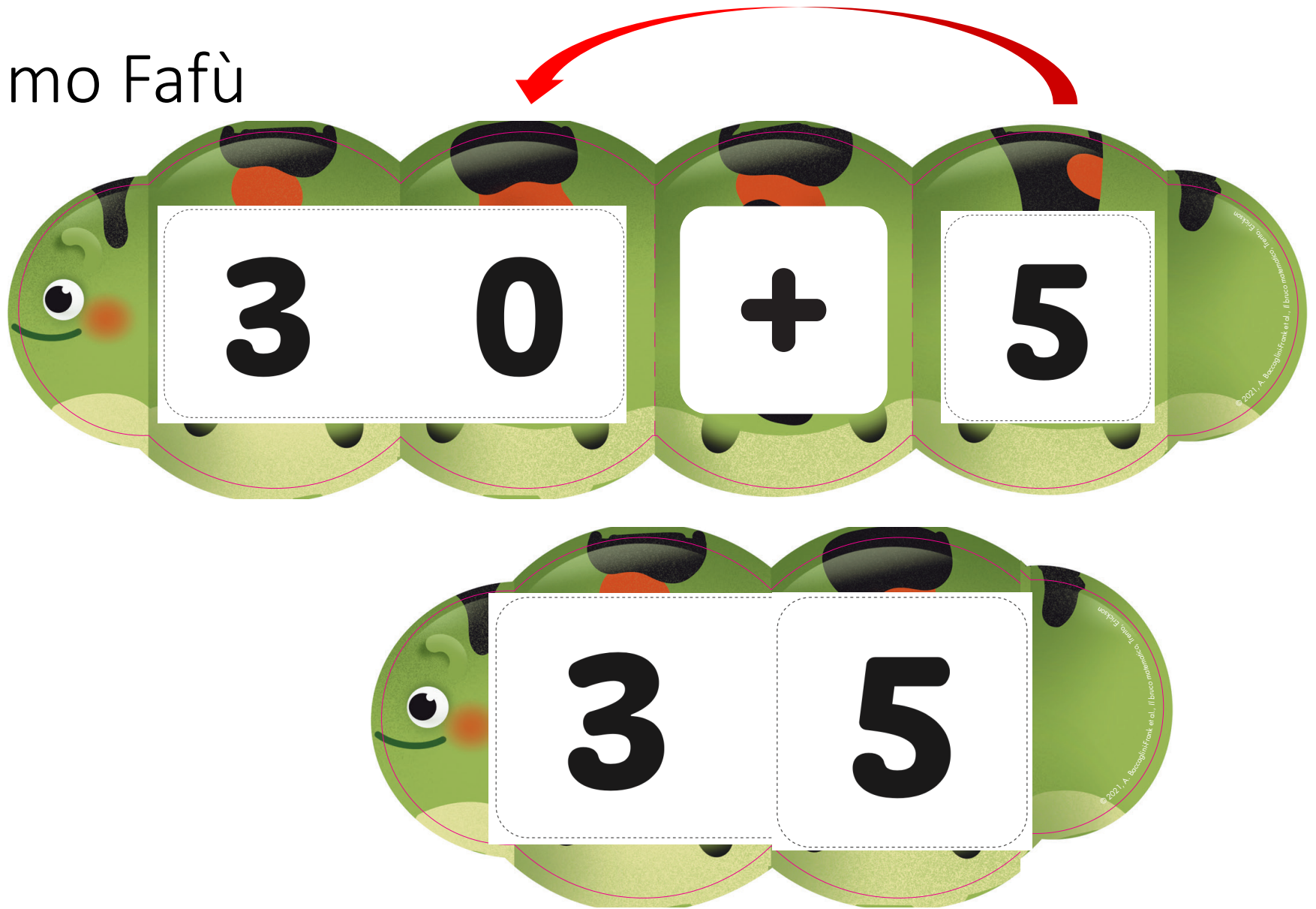


Alessandro Ramploud  
Università di Pisa



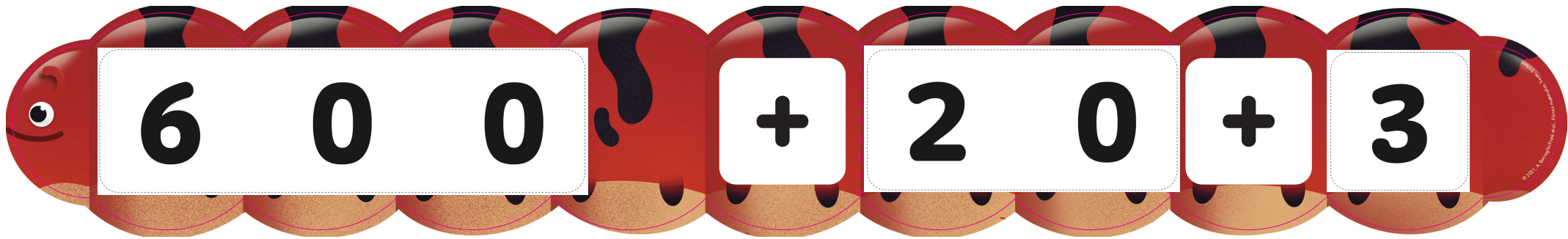
Roberta Munarini  
Scuola primaria Reggio Emilia

Esploriamo Fafù





...anche nella versione più lunga



Dai numeri naturali e le loro rappresentazioni (tutt'altro che naturali), facciamo un salto e riflettiamo un po' sui numeri razionali.

C'è a chi piacciono ...



... nella loro rappresentazione decimale

*“A me piacciono sia i numeri interi che decimali: i decimali di più perché sono come me: precisi ma incompleti!”*

(Ardone V., 2023, *La grande meraviglia*, p. 10)



... e chi li detesta nella loro rappresentazione frazionaria

## UNA STORIA DI QUATTRO PARTI

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

Risolvi l'esercizio e motiva la tua risoluzione

**Liberamente tratto dal libro i linguaggi della Matematica Bill Barton (2021)**

Un' insegnante di scuola secondaria di primo grado propone il seguente problema:

Le soluzioni proposte dagli alunni:



JOHNNY

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1+3}{4+8} = \frac{4}{12}$$

MERE

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8+8} = \frac{5}{16}$$

TOM

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1 \times 3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}$$

PHILIPPA

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$

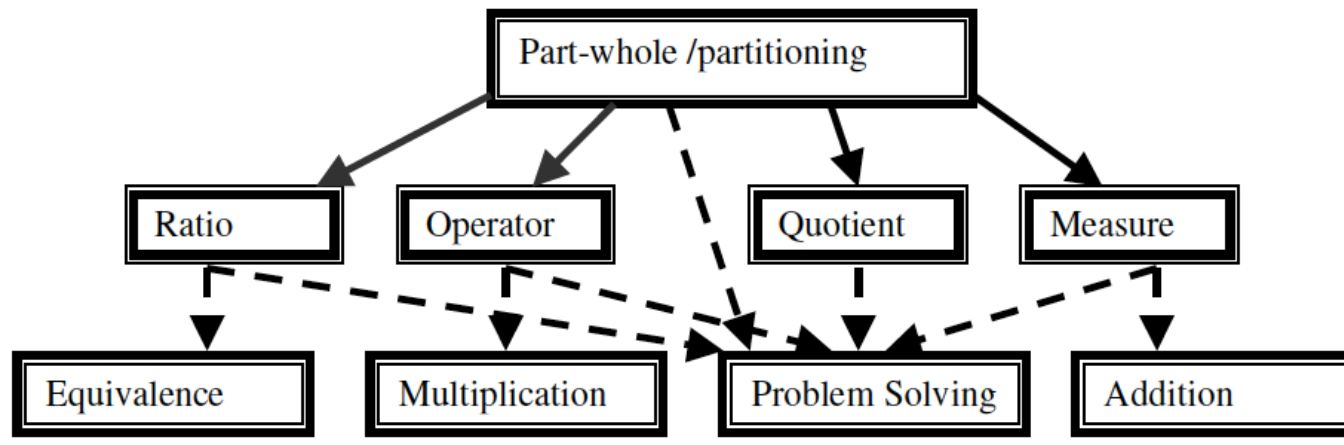


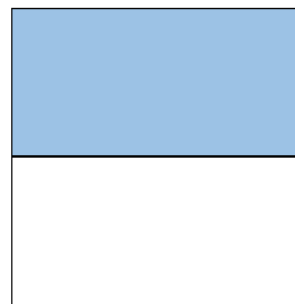
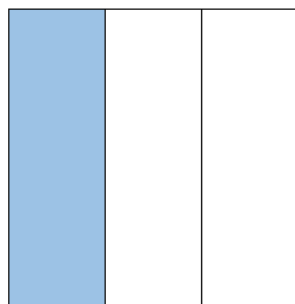
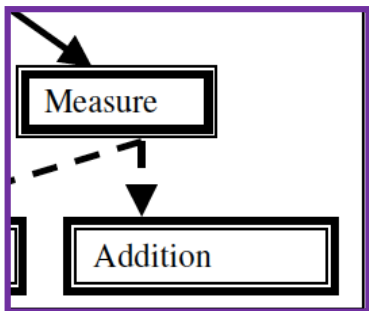
***Che interpretazione daresti a questi procedimenti? Quali feedback?***

## Le frazioni sono difficili (K. Hart, 1985)

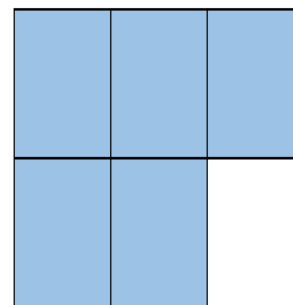
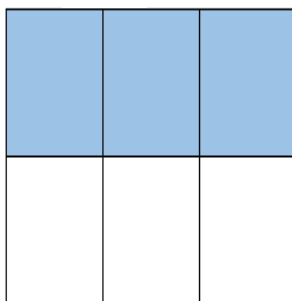
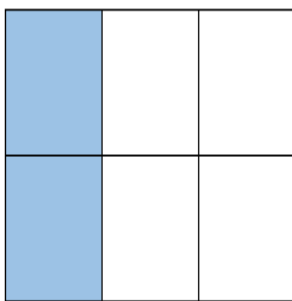
Una delle cause è certamente legata al fatto che i numeri razionali hanno molte rappresentazioni, ma anche molti significati: frazioni, numeri decimali, classi di equivalenza di frazioni, rapporti, operatori moltiplicativi, elementi di un campo quoziente infinito ordinato, misure o punti sulla retta numerica (vedi Hart 1985). Durante gli anni della scuola gli studenti incontrano più volte i numeri razionali, ovviamente solo secondo alcune di queste accezioni, ma, come quando un attore sapientemente truccato diventa irriconoscibile, gli studenti non riescono a riconoscerli, non riescono da soli a rendersi conto che c'è una sola astrazione matematica sottostante.

Charalambus e Pitta-Pantazi (2005) hanno identificato contesti di significato per la frazione:





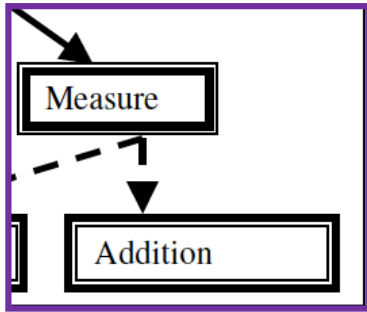
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$



$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} =$$

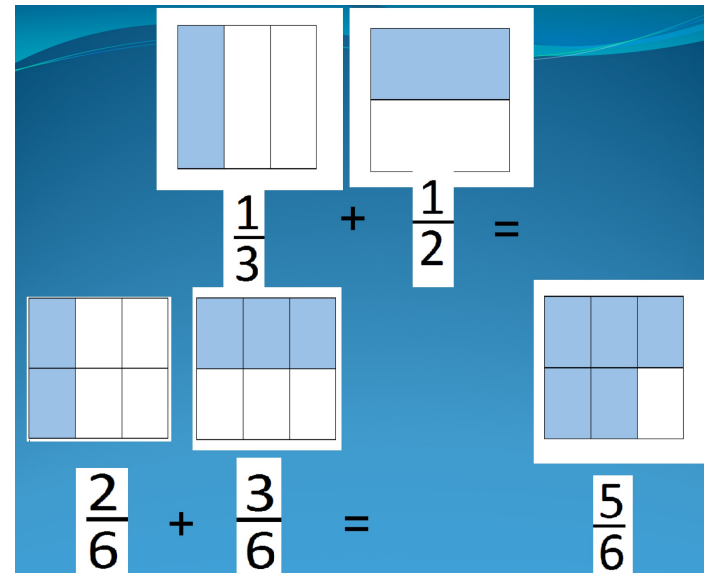
$$\frac{5}{6}$$





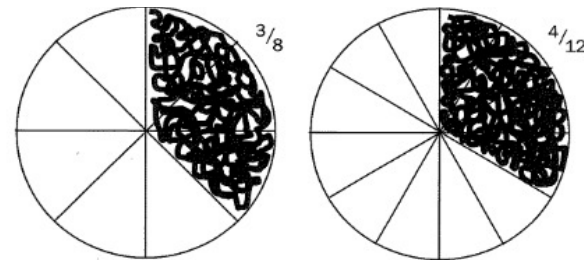
**Somma:**

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$





L'insegnante nota che Johnny ha fatto una cosa ragionevole, anche se sbagliata. Per provare a farglielo capire disegna due cerchi e gli chiede di colorare sia i  $\frac{3}{8}$  sia il risultato della somma,  $\frac{4}{12}$ .



Si vede bene che  $\frac{4}{12}$  è più piccolo di  $\frac{3}{8}$

**Insegnante:**" Come puoi aggiungere qualcosa a  $\frac{3}{8}$  e avere come risultato un valore più piccolo?".

**Johnny:**" Questo è proprio ciò che vorrei sapere, perché ieri ci hai dato un test. C'erano due parti, A e B. Nella parte A c'erano quattro domande e io ne ho fatta una giusta. Mia madre e mio padre erano arrabbiati con me perché ho fatto solo un quarto di risposte giuste. Ma nella parte B ho dato tre risposte giuste su otto. Ho fatto molto meglio, e tu hai detto che ciascuna domanda valeva un punto. Allora come mai quando sommo i miei punteggi, un quarto più tre ottavi, ottengo meno? Ho fatto bene l'addizione, ho risposto correttamente a quattro domande su dodici totali ".

L'insegnante rimane stupita da questa giustificazione.

**Insegnante:**" Bene, ma purtroppo questo non è il modo in cui sommiamo le frazioni. I voti del test non sono vere frazioni".



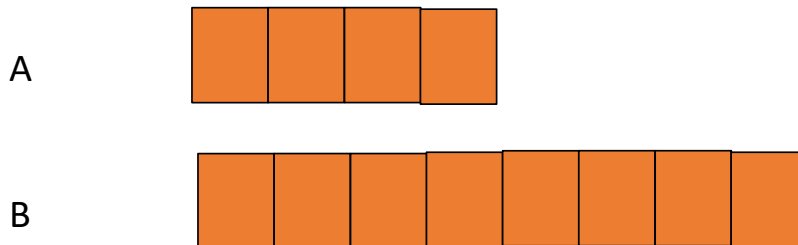
La risposta dell'insegnante è secca e sbrigativa.  
Cosa avremmo potuto integrare alle sue parole?

L'insegnante pesa tutte le domande in egual modo dando 1 come punteggio.

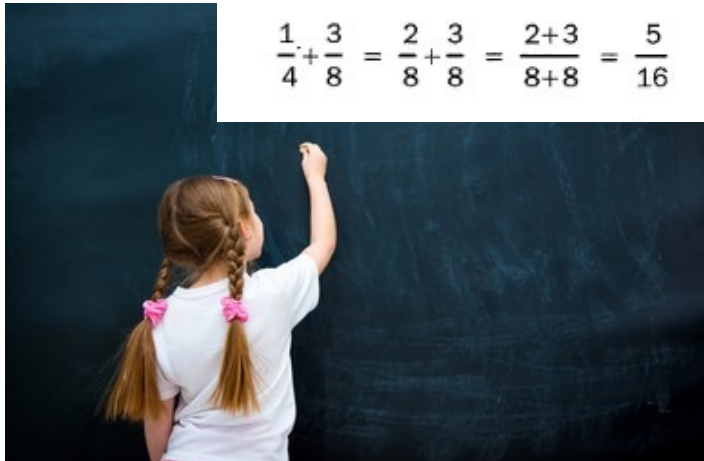
Johnny cerca di sommare la frazione che rappresenta la risposta corretta del test A riferendosi ad A come intero:  $\frac{1}{4}A$ ,

alla frazione che rappresenta le risposte corrette al test B riferendosi ad B come intero:  $\frac{3}{8}B$

$$\frac{1}{4}A + \frac{3}{8}B \text{ dove } A \text{ e } B \text{ sono diversi, in particolare } B = 2A$$



Le frazioni, in questo contesto rappresentano parti di due interi diversi. Johnny ha risposto correttamente a 1 domanda su 4 e 3 domande su 8 ed è vero che questo significa che ha risposto in modo corretto complessivamente a 4 domande su 12, ma questa operazione non corrisponde alla somma tra frazioni che è un'operazione matematica che segue delle regole sintattiche specifiche, in particolare non possiamo sommare frazioni che si riferiscono a due interi diversi (ad uno stesso referente/unità di misura).



**Insegnante:** “Molto bene Mere. Sai che quando sommiamo le frazioni devi scrivere con lo stesso denominatore. E sì, un quarto equivale a due ottavi. Poi sommi. Ma perché sommi sia il numeratore che il denominatore”.

**Mere** :“Perché mi veniva la risposta giusta”.

L' insegnante ricorre nuovamente ai cerchi e al disegno, mostrando che 5/16 è ancora più piccolo di 4/12.

Mere

**Mere:** “Ma è la risposta giusta, io conosco questa somma. Il mio papà è per un quarto Maori e la mia mamma lo è per tre ottavi. Io sono loro figlia e sono Maori per cinque sedicesimi”.

L'insegnante ora inizia a capire il problema.

**Insegnante** " Bene, hai ragione quando si tratta di sommare genealogie, ma questo non è il modo in cui hanno concordato di sommare le frazioni.”

Mere accetta di buon grado, ma è ancora confusa.

***Insegnante*** " Bene, hai ragione quando si tratta di sommare genealogie, ma questo non è il modo in cui hanno concordato di sommare le frazioni."

La risposta dell'insegnante è ancora una volta secca e sbrigativa.  
Come avremmo potuto arricchire le sue parole?

Le frazioni in matematica hanno delle regole specifiche per la loro somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

In questo contesto le frazioni rappresentano la discendenza Maori di ognuno dei genitori e chiedersi che discendenza Maori ha Mere sapendo che suo padre è "per 1/4" Maori e sua madre è "per 3/8" equivale a sommare le frazioni e poi farne la media:

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{8}}{2} = \frac{\frac{5}{8}}{2} = \frac{5}{16}$$

L'insegnamento efficace della matematica richiede di essere in grado di interpretare la fonte di un errore matematico. Inoltre, questo è un lavoro che gli insegnanti devono fare rapidamente, spesso al volo, perché in un'aula vivono una pluralità di idee da parte degli studenti.

*“In breve, un insegnante ha bisogno di conoscere più e differente matematica, non di meno.”* (Deborah Loewenberg Ball)





**Insegnante:** "Qui l'errore è chiaro. Hai moltiplicato quando avresti dovuto sommare. Non occorre il cerchio per dimostrare che  $\frac{3}{32}$  è una frazione ancora più piccola, quindi non può essere il risultato di questa addizione."

**Tom:** "Ho fatto quello che mi hai detto. Ci hai sempre detto che la parola "e" significa addizione. L'altra sera stavo guardando mia sorella più grande fare i suoi compiti di matematica e lei stava lavorando con le probabilità ed è venuta fuori esattamente questa somma in un problema: 'Un ragazzo entra in una caffetteria. Sa che la probabilità di prendere il cibo che vuole è un quarto e la probabilità di sedersi vicino ad un amico è di tre ottavi. Qual è la probabilità che possa prendere ciò che desidera e sedersi vicino ad un amico?'."

Mia sorella ha detto che dobbiamo moltiplicare per avere la risposta ed è ciò che ho fatto. So che è la risposta è giusta perchè abbiamo guardato in fondo al libro. Ha anche senso perchè la possibilità che entrambe le cose accadano è molto piccola"



Tom ha detto che, mentre la sorella faceva i compiti di probabilità, ha imparato che la parola "e" corrisponde in questo caso ad una moltiplicazione nel caso di due eventi indipendenti. Ad esempio, se la probabilità di prendere il cibo desiderato è  $1/4$  e la probabilità di sedersi vicino a un amico è  $3/8$ , la probabilità che entrambe le cose accadano è data dalla moltiplicazione di queste probabilità, ovvero:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$$

La procedura di moltiplicare le probabilità dei due eventi indipendenti per ottenere la probabilità combinata dei due eventi si basa sulla definizione stessa di probabilità e su come si combinano i risultati degli eventi. Infatti dati due eventi A e B indipendenti, la probabilità che entrambi gli eventi accadano è il prodotto delle loro probabilità individuali

Tom ha detto che, mentre la sorella faceva i compiti di probabilità, ha imparato che la parola "e" corrisponde in questo caso ad una moltiplicazione nel caso di due eventi indipendenti. Ad esempio, se la probabilità di prendere il cibo desiderato è  $1/4$  e la probabilità di sedersi vicino a un amico è  $3/8$ , la probabilità che i due eventi si verifichino "contemporaneamente" è data dalla moltiplicazione delle probabilità di occorrenza dei singoli eventi, ovvero:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

La procedura di moltiplicare le probabilità dei due eventi indipendenti per ottenere la probabilità congiunta dei due eventi è dovuta alla formula della probabilità composta

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B),$$

che a sua volta si basa sulla definizione di probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

con  $A$  e  $B$  eventi non quasi impossibili (con probabilità diversa da zero). Infatti, dati due eventi  $A$  e  $B$  indipendenti,  $P(A|B) = P(A)$  e  $P(B|A) = P(B)$ , per cui la probabilità che entrambi gli eventi accadano è il prodotto delle loro probabilità

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

# Errore come errare ...

- ✓ Utilizzare gli errori come “trampolini di lancio per la ricerca”,
- ✓ Mettere da parte l’obiettivo di correggere l’errore,

Modello *inquiry* – basato sull’inchiesta a partire dagli errori – tende ad introdurre incertezza nei contenuti matematici studiati, allo scopo di generare “**dubbi positivi**” negli studenti per stimolarli e condurli a formulare domande, congetture ed esplorazioni



Insegnante



"Bene, mi avete sorpreso. Johnny, Mere e Tom, ognuno di voi mi ha presentato una situazione nella quale il proprio metodo di addizionare le frazioni ha significato in quello specifico contesto. Il punto è che le situazioni che avete scelto non sono quelle modellizzate dalle 'addizioni' nell'insieme dei numeri razionali rappresentate come frazioni. C'è un altro modo di sommare le frazioni ed è quella che dobbiamo imparare. Philippa mostraci..."

Philippa è la preferita e l'insegnante sa che ha sempre la risposta giusta. Anche in questo caso Philippa ha sommato correttamente le frazioni.

**Philippa:** "Io sono l'unica che l'ha fatto male" singhiozza. "Pensavo di aver imparato il metodo giusto, ma quando lo guardo non ha senso. Posso capire che si debba scrivere un quarto come due ottavi, ma non c'è ragione di sommare solo i numeri sopra e non quelli sotto. Perché si fa così? Tutti gli altri hanno dato una ragione per quello che hanno fatto e io no."



L'insegnante decide di rimandare la spiegazione.  
Tira un sospiro di sollievo quando suona la campanella e se ne va.

# Errore come errare ...

Lo studente che sta commettendo un errore può essere visto come una persona che si perde durante il suo percorso: se ha un incontro importante entra in uno stato di ansia, ma, d'altra parte, se è un turista che visita nuovi luoghi, il suo perdersi rappresenta un'opportunità per scoprire luoghi che altrimenti non avrebbe potuto conoscere (Borasi, 1994).



## UN TIPO D'ERRORE MOLTO FREQUENTE TRA GLI STUDENTI

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{7} = \frac{9}{11}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{7}{10}$$

Ci sono situazioni di vita reale che possono essere descritte da questo modo di effettuare l'addizione?

In un gioco: ieri ho vinto  
2 volte su 3 oggi 5 volte su  
7

Vittoria: 7 volte su 10 partite giocate

$$[ \text{E non } \frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{29}{21} ]$$

Quello che potrebbe essere stato inizialmente considerato un errore evidente può essere accettato in determinate condizioni

# Conoscenza Interpretativa

Combinando l'idea di una conoscenza matematica specializzata coinvolta e richiesta per l'insegnamento con l'approccio agli errori e il ragionamento non standard come opportunità di apprendimento, definiamo la conoscenza interpretativa come una conoscenza matematica profonda e ampia che consente agli insegnanti di supportare gli studenti nella costruzione delle loro conoscenze matematiche a partire dai propri ragionamenti e produzioni, non importa quanto non-standard o errati possano essere. IK completa la conoscenza di errori tipici o strategie di soluzioni, con la conoscenza della possibile fonte di errore tipico e la conoscenza del possibile uso degli errori nel senso sviluppato da Borasi

(Di Martino, Mellone, Ribeiro, 2019).



## John Mason

«noticing»

Un buon docente deve saper individuare quelle particolari situazioni in cui risulta può utilizzare **soluzioni alterative** (rispetto alle procedure standard) o **sbagliate degli studenti** per supportare lo sviluppo di nuova conoscenza matematica

## Brent Davis

### **ASCOLTO VALUTATIVO:**

insegnamento convenzionale, le **risposte** degli studenti vengono catalogate meccanicamente come «**giuste**» o «**sbagliate**»

### **ASCOLTO INTERPRETATIVO:**

l'attività principale dell'insegnante si sposta attraverso il «**dare senso**» alle risposte degli allievi

### **ASCOLTO ERMENEUTICO:**

**fusione tra ruoli insegnante/studente.**

Durante l'attività di classe, l'insegnante s'immerge totalmente nella discussione con gli alunni mettendo da parte i propri schemi convenzionali di insegnamento e promuovendo pratiche che possono evolvere

*man mano che ogni singola lezione procede*

L'educazione matematica è profondamente intrecciata al perseguimento di equità nella società del futuro. Con questo obiettivo è necessario assumere atteggiamenti privi di arroganza e prepotenza in ambito educativo (e non solo), in particolare nell'educazione matematica.

D'Ambrosio con la parola equità non si riferisce al principio per il quale la matematica può e deve essere appresa da tutti gli studenti. Questo principio è in continuità con la società attuale, competitiva ed esclusiva, che utilizza strumenti di selezione subordinati anche alla matematica. Questa concezione di equità incorpora, necessariamente, la figura dell'**escluso**.

L'ideale che D'Ambrosio difende è **l'assenza dell'escluso**.



Ubiratan D'Ambrosio  
(Brasile, 1932-2021)

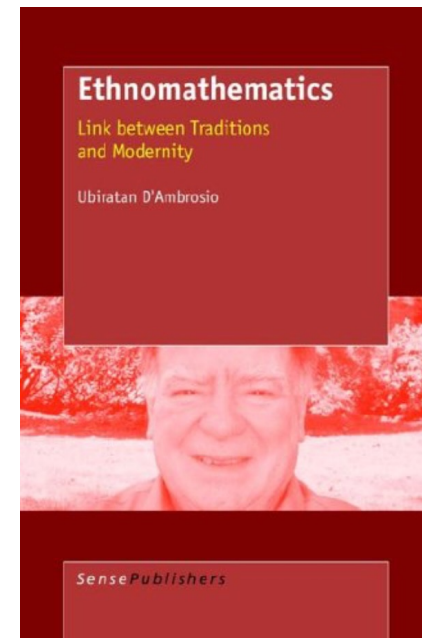
*«La globalizzazione oggi è inevitabile dato che viviamo in una civiltà dominata dal mercato del capitale. L'obiettivo dei sistemi educativi dovrebbe essere coerente con la ricerca di alternative, non con la riproduzione del modello attuale. Il nuovo modello troverebbe supporto in una nuova matematica che gioca un ruolo fondamentale nella ricerca di un nuovo ordine economico»*

Il filone di ricerca dell' **Etnomatemática** parte dal riconoscere l'inciviltà del processo di colonizzazione del sud-americana attraverso le «spedizioni scientifiche» del 18° e 19° secolo, durante le quali le terre colonizzate furono soggiogate anche culturalmente con opere di "rieducazione" linguistica e scientifica. A questo processo viene contrapposta «l'impresa di decolonizzazione», non intesa come rifiuto della "Matematica Accademica", ma piuttosto come un suo affinamento attraverso i valori dell'umanità, del rispetto, della solidarietà, della cooperazione e dell'educazione alla PACE.

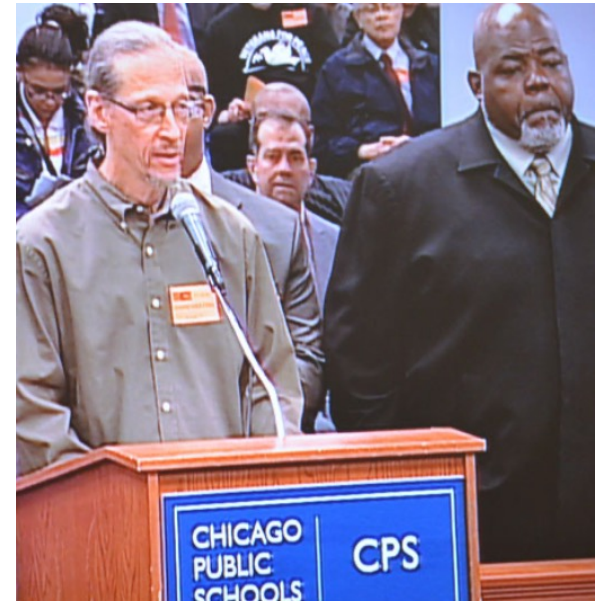
The absolute priority of our mission as educators is to obtain PEACE in future generations. We cannot forget that these generations will live in a multicultural environment, that their relations will be intercultural and that their education will



Ubiratan D'Ambrosio  
(Brasile, 1932-2021)



Gutstein suggerisce che un elemento chiave della pedagogia critica consiste nel coinvolgere studenti in indagini approfondite dei fenomeni, "investigando quali interessi vengono tutelati e chi ne trae beneficio", in altre parole "ricerca sistematica delle cause profonde dell'ingiustizia". E conclude: "l'educazione dovrebbe, soprattutto, sviluppare esseri umani completi, etici e amorevoli, che si preoccupino e agiscano nel mondo per la pace e la giustizia. Se è così, allora la questione di come e perché utilizziamo ciò che impariamo deve essere parte di tutto ciò che facciamo nel campo dell'istruzione" (Gutstein, 2006 citato in Coles 2023)



*...Non posso intendere la pratica educativa se non come una totalità complessa e contraddittoria. Io penso all'importanza di tutti i componenti di questa pratica, ma riconosco, perché la pratica educativa è esclusivamente umana, che l'importanza dell'educatore è straordinaria. Ed è per questo che un educatore creatore, un educatore liberato o in processo di liberazione, un educatore che si mette in gioco, si avventura, che non ha paura della libertà, un educatore capace di amare, di amare anche lo stesso processo di educazione, di amare la propria pratica, un educatore così inventa e reinventa ogni giorno i metodi, le tecniche, è capace di creare dove apparentemente non esisteva nulla.*

*Questo è il tipo di educatore che dovremmo aiutare ad esistere!*

Da «Dialoghi con Paulo Freire» (1989)

