



Unione  
Matematica  
Italiana



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Informazione  
e Matematica



## XXXVI CONVEGNO UMI-CIIM AQ2022

**La Matematica come valore essenziale della crescita personale e sociale:  
La sfida educativa per l'inclusione**

# Educare all'argomentazione: una sfida per tutti?

Rossella Garuti

## sapere *come* vs sapere *perché*

«Noi conosciamo fatti e possediamo un sapere su di essi soltanto quando, contemporaneamente, sappiamo perché i giudizi corrispondenti sono veri. Altrimenti parliamo di sapere intuitivo o implicito, di un sapere pratico di *come* si fa qualcosa. Ci si può benissimo intendere di qualcosa senza sapere che cosa è che costituisce queste competenze. Invece l'esperto sapere qualcosa è implicitamente legato a un *sapere perché* e rimanda, per questo, a potenziali giustificazioni»

(J. Habermas, 2001).



Jürgen Habermas

## sapere *come* vs sapere *perché*

«Concentrandosi sul *cosa* e tralasciando il *perché*, la matematica si riduce a un guscio vuoto. L'arte non sta nella "verità", ma nella spiegazione, nell'argomentazione. È l'argomentazione stessa che dà alla verità il suo contesto e determina ciò che viene realmente detto e significato. *La matematica è l'arte della spiegazione.* Se si nega agli studenti l'opportunità di impegnarsi in questa attività di porre i propri problemi, di fare le proprie congetture e scoperte, di sbagliare, di essere creativamente frustrati, di avere un'ispirazione e di mettere insieme le proprie spiegazioni e prove si nega loro la matematica stessa». (Lockhart, 2002) [enfasi nell'originale]



Paul Lockhart

# L'argomentazione nei Documenti ufficiali



## INDICAZIONI (2012)

- Traguardi del primo ciclo
- Ambiti

La matematica...contribuisce a sviluppare capacità di comunicare, e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. (p.49)



- Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici [primaria]
- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri [primaria]
- Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e definizione) [sec. di primo grado]
- Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta [sec. di primo grado]

# Le radici: matematica per il cittadino 2001

## Curricoli UMI 2001

Nuclei di processo:

- **Argomentare e congetturare**
- Misurare
- Risolvere e porsi problemi

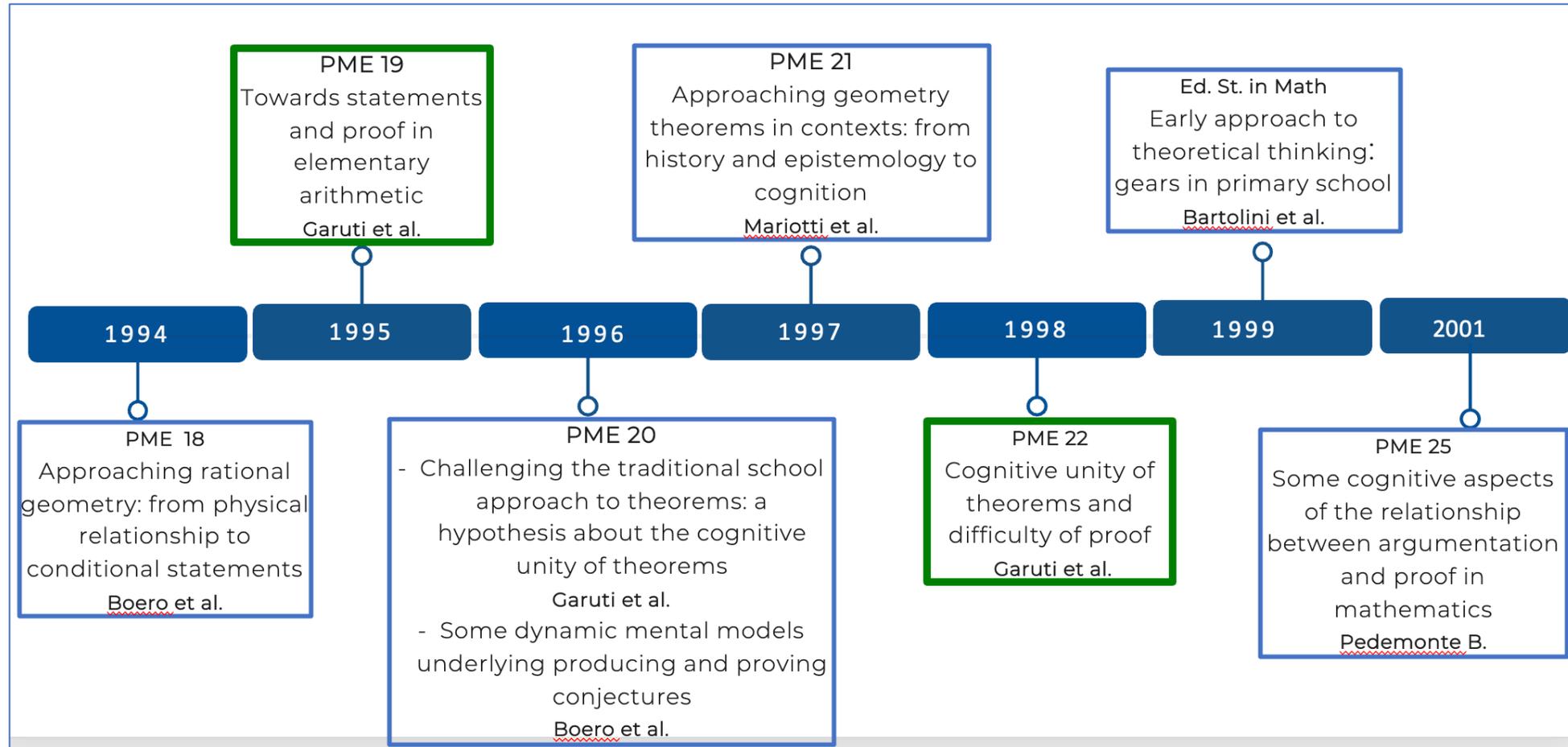


## Curricoli UMI 2001

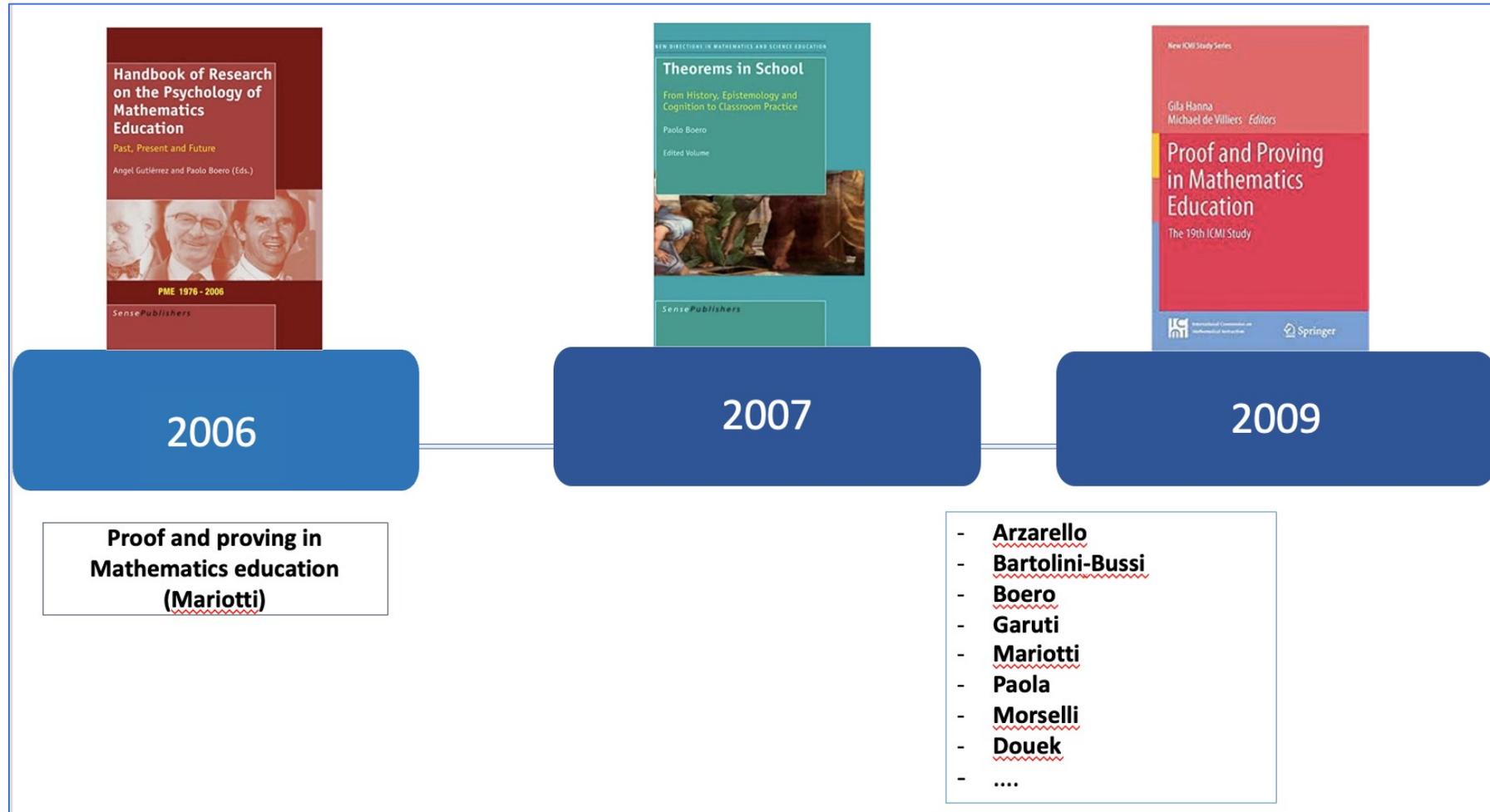
Nel nucleo di processo “**argomentare e congetturare**” si considerano quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico [...]

In tutte le attività è essenziale la mediazione del **linguaggio naturale**, sia parlato che scritto: essa deve sempre precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica.

# Le radici: la ricerca in didattica (in Italia)



# Le radici: la ricerca in didattica (in Italia)



# Dalle Indicazioni al QdR INVALSI



- .....
- Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri [V primaria]
- Produce argomentazioni in base alle proprie conoscenze [III sec. di I grado]
- Sostiene le proprie convinzioni portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni [III sec. di I grado]

QdR Matematica  
2018



CONOSCERE

RISOLVERE PROBLEMI

ARGOMENTARE

# L'argomentazione nelle prove INVALSI



## QDR INVALSI (rivisto 2018)

- Ambiti
- Processi o dimensioni
- Traguardi I e II ciclo

- **Conoscere**
- **Risolvere problemi**
- **Argomentare**

## NON SI PUÒ VALUTARE

- capacità di *esplorare* una situazione problematica;
- capacità di *produrre* un'ipotesi o una congettura;
- capacità di *confrontarsi* con gli altri



No, we cannot!

## SI PUÒ VALUTARE

- capacità di *scegliere* l'affermazione corretta e di *individuare* una giustificazione di essa tra quelle proposte;
- capacità di *scegliere* l'affermazione corretta e *produrre* una giustificazione di essa



Yes, we can!

# Due esempi (V primaria)

## Item a risposta chiusa

D5. Le frazioni  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{15}{40}$  sono equivalenti?

Nella tabella che segue indica la sola argomentazione che giustifica la risposta corretta.

| No, perché ... |   | Sì, perché ... |  |
|----------------|---|----------------|--|
| A.             | <input type="checkbox"/> i numeratori e i denominatori sono diversi | C.             | <input type="checkbox"/> sia nella prima frazione sia nella seconda frazione il numeratore è minore del denominatore               |
| B.             | <input type="checkbox"/> 3 è minore di 15 e 8 è minore di 40        | D.             | <input type="checkbox"/> se si moltiplicano per 5 sia il numeratore sia il denominatore della prima frazione si ottiene la seconda |

*scegliere* l'affermazione corretta e di *individuare* una giustificazione di essa tra quelle proposte

## Item a risposta aperta

D19. Laura dice:

“Se moltiplichi per 2 un numero naturale e dal risultato sottrai 1, ottieni sempre un numero pari”.

Laura ha ragione?

Sì, Laura ha ragione perché .....

.....

.....

No, Laura non ha ragione perché .....

.....

.....

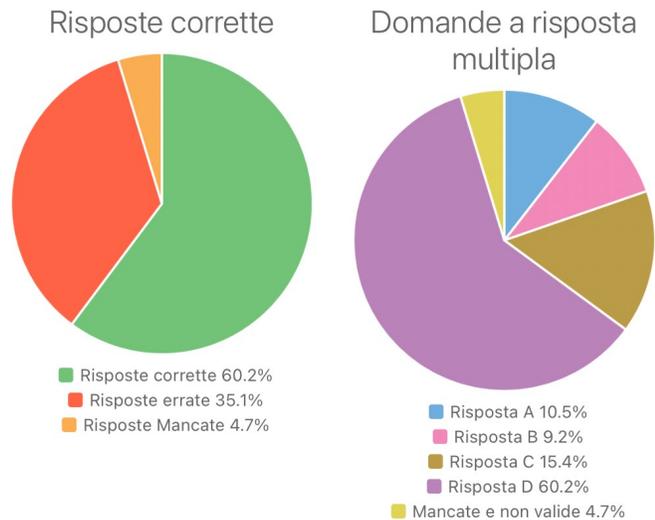
*scegliere* l'affermazione corretta e *produrre* una giustificazione di essa o un controesempio

# Due esempi (V primaria)

D5. Le frazioni  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{15}{40}$  sono equivalenti?

Nella tabella che segue indica la sola argomentazione che giustifica la risposta corretta.

Risultati nazionali



D19. Laura dice:

“Se multipli sempre un

Laura ha ra

Sì, Lau

.....

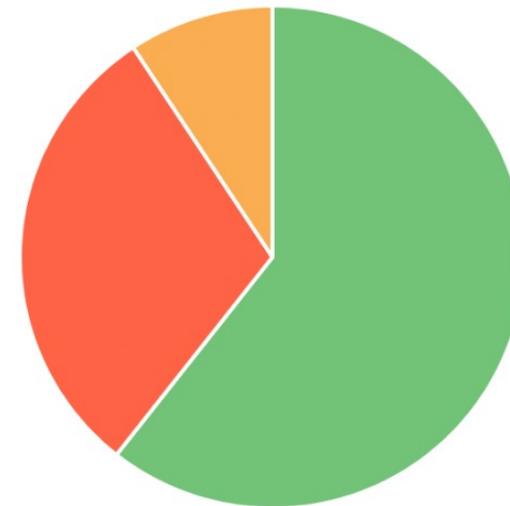
.....

No, La

.....

.....

Risposte corrette



sottrai 1, ottieni

.....

.....

.....

.....

.....

.....

scegliere l'af

ustificazione di



# Alcuni esempi dagli studenti sull'item aperto

No, Laura non ha ragione perché SE FAI  $2 \times 4 =$   
 $8 - 1 = 7$ . 7 È DISPARI OPPURE  
 $3 \times 2 = 6 - 1 = 5$ . 5 È DISPARI

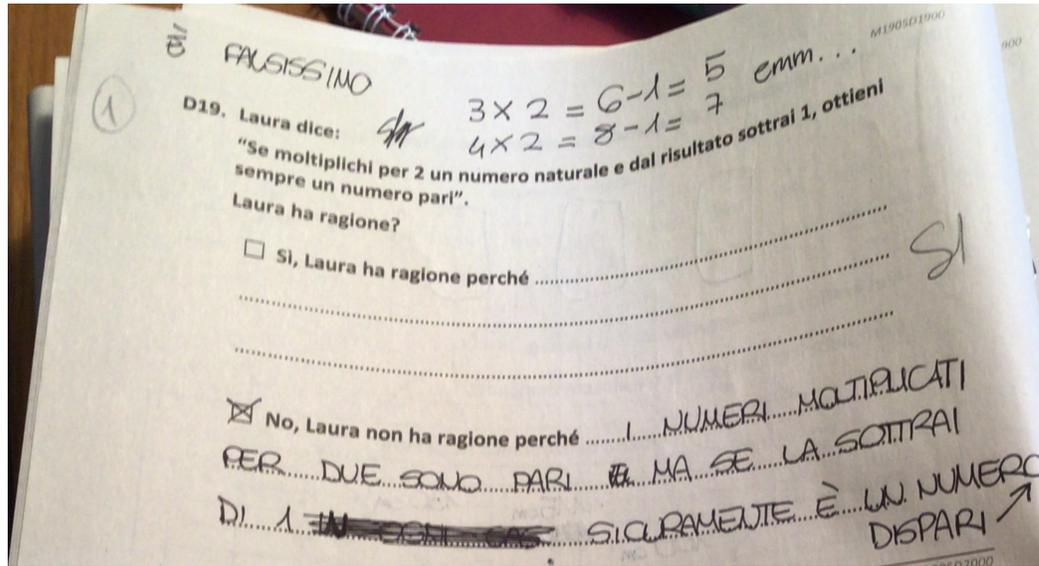
CONTROESEMPIO

No, Laura non ha ragione perché SE MOLTIPLICHI  
QUALUNQUE NUMERO A 2 ~~DI~~ VE DIVENTA UN  
NUMERO PARI MENO UNO UN NUMERO DISPARI

GENERALIZZAZIONE

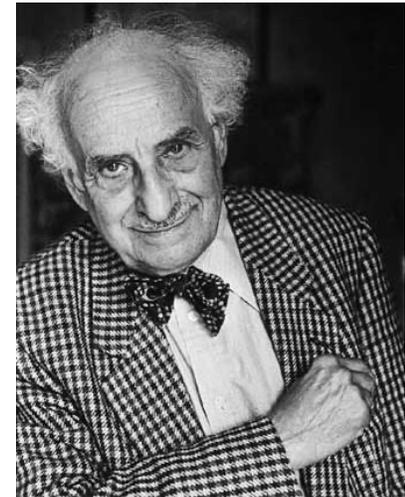


# Alcuni esempi dagli studenti



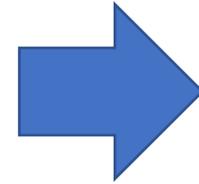
«Gli studenti tendono a dire *tutta* la verità, come si fa in un dibattito processuale, e non *solo* la verità come si fa in matematica»

(H. Freudenthal)



# Una criticità: la difficoltà di item argomentativi

- ✓ Alla scuola primaria gli item argomentativi spesso non superavano il 50-60% di risposte corrette
- ✓ Nelle prove CBT in genere gli item argomentativi si collocavano al livelli dal 3 in su (su una scala da 1 a 5)

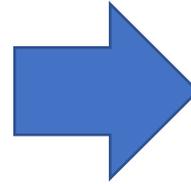


## PROBLEMA:

- È possibile costruire item argomentativi che possano collocarsi nei livelli 1 e 2?
- Quali caratteristiche devono avere (coerenza, verità,...)?

# Una criticità: la difficoltà di item argomentativi

- ✓ Alla scuola primaria gli item argomentativi spesso non superavano il 50-60% di risposte corrette
- ✓ Nelle prove C BT in genere gli item argomentativi si collocavano al livelli dal 3 in su (su una scala da 1 a 5)



## COMPITO:

Se è vero che l'ARGOMENTAZIONE è una competenza di cittadinanza, allora è

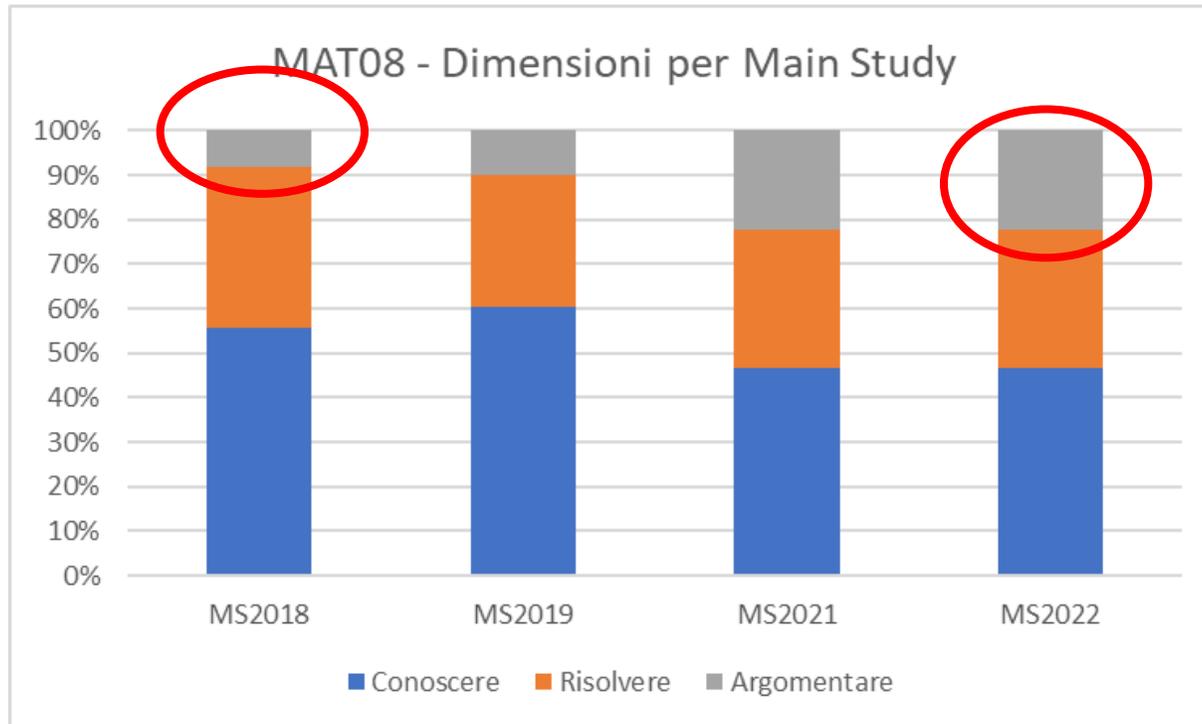
❖ doveroso

e

❖ necessario

costruire item che possano descrivere questa competenza a tutti i livelli di apprendimento

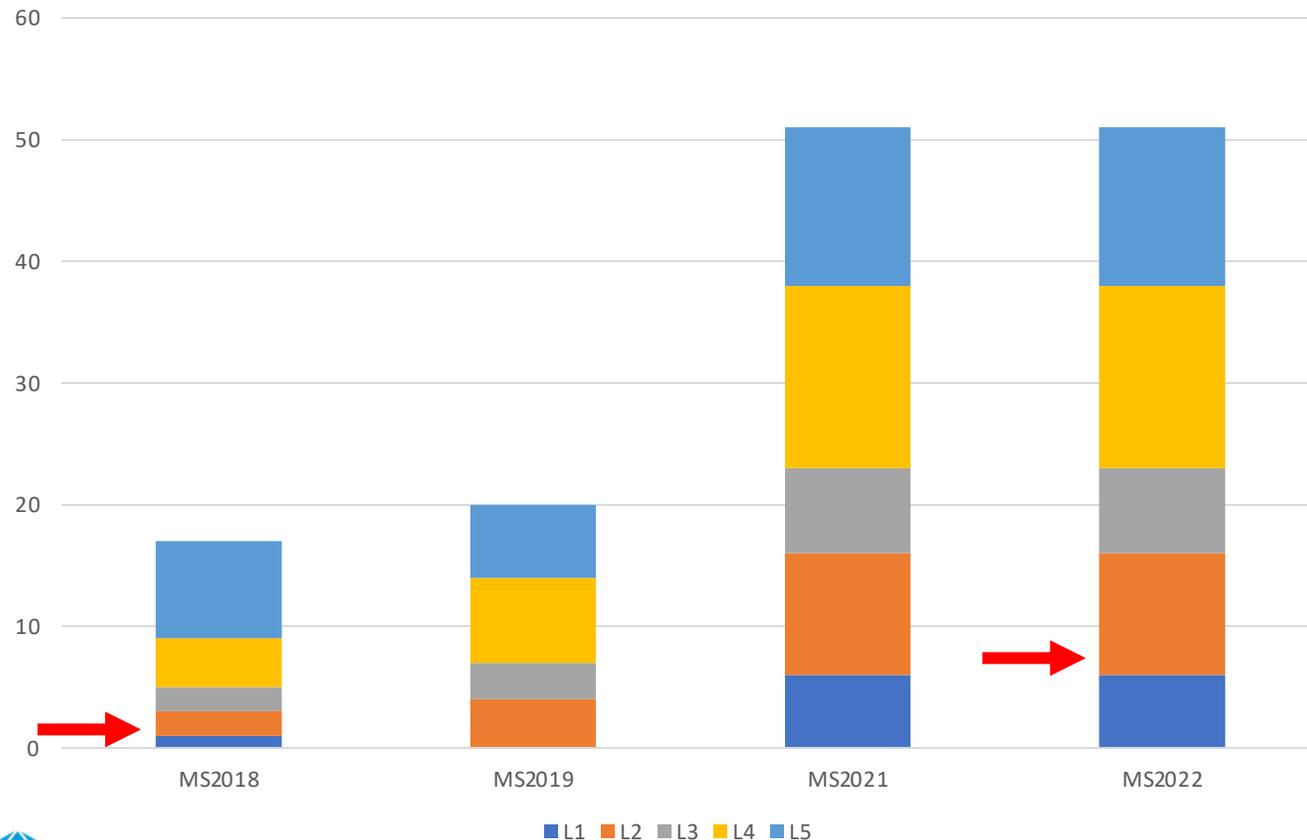
# L'evoluzione degli item dal 2018 al 2022 (sec. di I gr.)



Dal 2018 al 2022 gli item argomentativi per la classe III secondaria di I grado sono triplicati passando dall'8% al 22%

# L'evoluzione degli item dal 2018 al 2022 (sec. di I gr.)

## MAT08 - Argomentare: livelli per Main Study



Dal 2018 al 2022 sono aumentati sensibilmente gli item argomentativi che si collocano ai livelli 1 e 2.



C'è ancora molto da fare, soprattutto per quello che riguarda il Livello 3 che rappresenta la fascia nella quale si colloca la media del studenti che dovrà essere maggiormente rappresentato

# L'argomentazione in classe: alcune piste

## Quali situazioni proporre?

- Aperte
- Complesse
- Sfidanti
- ....

## Quali condizioni la favoriscono?

- Discussione matematica
- Laboratorio di matematica
- Gioco voci-eco
- ....

# Situazioni aperte...

Sperimentazione in I sec. di primo grado



*Supponi di avere un certo insieme di numeri naturali; a tutti gli elementi dell'insieme applica la trasformazione  $+ 1$ . Che effetto produce la trasformazione?*

*Spiega con cura la tua congettura.*

## Scopi

- Produrre e confrontare congetture in campo aritmetico;
- Identificare ed esprimere in forma condizionale proprietà aventi carattere di generalità;
- Giustificare proprietà attraverso il ragionamento



# Situazioni aperte...

Alcuni enunciati prodotti



- *se ho l'insieme 2,3,4, esso diventa l'insieme 3,4,5,*
- *quando l'insieme contiene dei numeri che terminano per 9, la trasformazione +1 li trasforma in numeri che terminano per 0 e hanno una cifra in più*
- *se sono pari diventano dispari, se sono dispari diventano pari*

Particolare, ma poco significativo

Particolare, significativo, non del tutto vero (CONTROESEMPIO)

Generale, significativo, condizionale

## Un testo molto ricco: Yleni

**Se applico** la trasformazione +uno (1) tutti i numeri che sono PARI si trasformano cioè diventano DISPARI, e se aggiungo uno (1) a un numero DISPARI si trasforma a un numero PARI, **perché** i numeri sono alternati a DISPARI a PARI, cioè il numero 1 è DISPARI e il numero 2 è PARI e così avanti i numeri sono sempre alternati.

**Per esempio** 1,5,19,15 e 31 sono numeri DISPARI e se aggiungo + 1 a tutti questi numeri diventano PARI, si trasformano così 1-2,5-6,19-20, 15-16, 31-32.

**Tutti** i numeri PARI che sono 6,18,24 se gli aggiungo +1 diventano DISPARI. Li trasformo così 18-19, 6-7, 24-25. Io ho capito così dalla mia osservazione.

**La regola è** così  $D+1=P$   $P+1=D$        $D-1=P$        $P-1=D$

ENUNCIATO

GIUSTIFICAZIONE

ESEMPI

GENERALIZZAZIONE

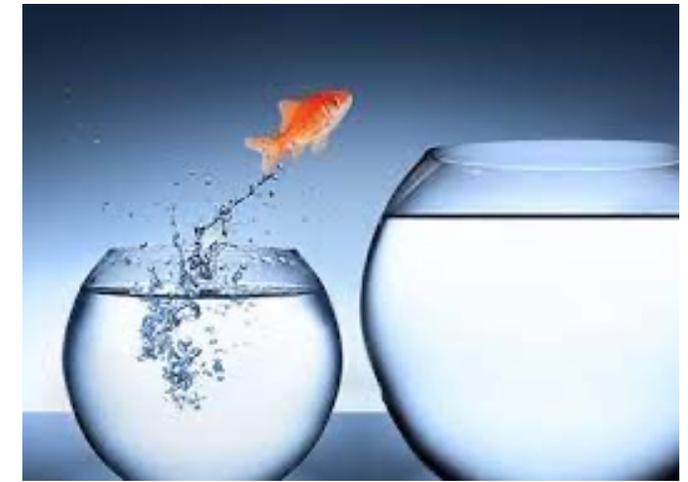
# Situazioni sfidanti...

Una congettura INASPETTATA

*Se aggiungo 1 cambia il divisore, 365 è  
divisibile per 5, mentre 366 non è divisibile per 5*  
[Daniela]



**Cambiano tutti divisori o solo alcuni ?**



Di fronte a una  
congettura inaspettata  
e parziale l'insegnante  
**COGLIE L'ATTIMO**  
e rilancia



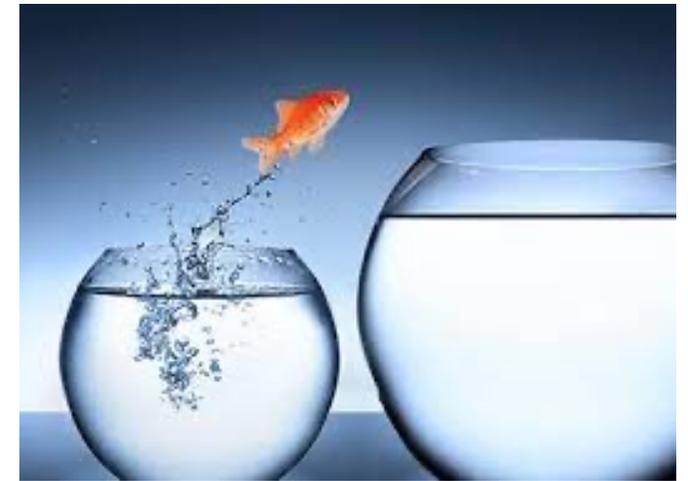
# Situazioni sfidanti...

Una congettura INASPETTATA

*Se aggiungo 1 a un numero naturale cambiano tutti i divisori, eccetto l'1.*



**Sarà vera per tutti i numeri naturali? Perché?**



Di fronte a una  
congettura inaspettata  
e parziale l'insegnante  
**COGLIE L'ATTIMO**  
e rilancia



## Qualcuno prova per numeri “grandi”

Provo con un numero grande

1354 ha come divisori 1-1354-2-677

1355 ha come divisori 1-1355-5-271

$$1354:1=1354$$

$$1355:1=1355$$

$$1354:2=677$$

$$1355:2= /$$

$$1354:3= /$$

$$1355:3= /$$

$$1354:4= /$$

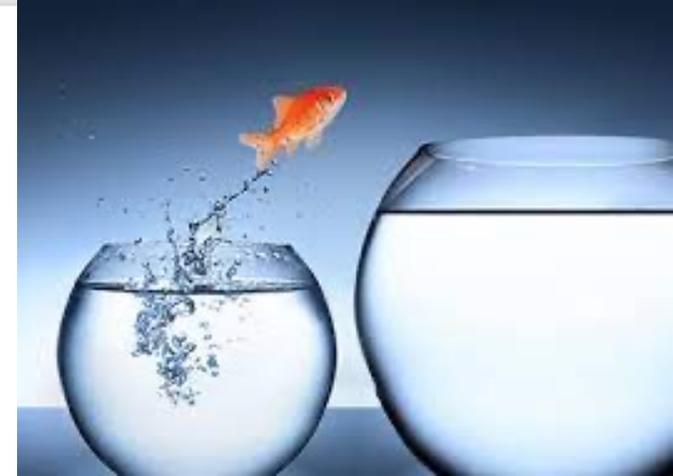
$$1355:4= /$$

$$1354:5= /$$

$$1355:5=271$$

...solo l'1 è in comune, allora è vero

**[Deborah]**

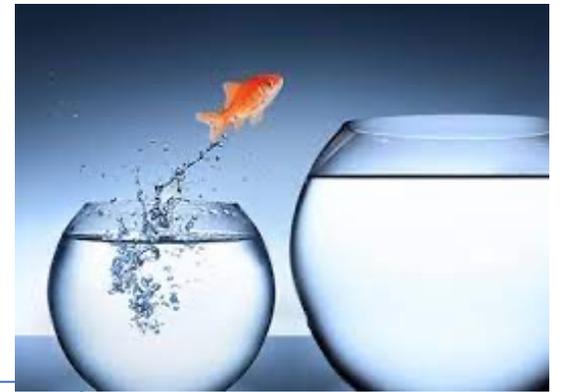


### ARGOMENTAZIONE (implicita)

Se è vero per numeri grandi allora è vera sempre !



## Qualcuno prova e giustifica per tipologie di numeri



### **Numeri primi**

11-12; 17-18

13-14; 23-24

Fra un primo e il suo precedente o il suo successivo non ci possono essere divisori comuni perché un numero primo ha come divisori solo 1, che abbiamo escluso all'inizio, e se stesso che varia da numero a numero  
**[Li Gong]**

### **Parità**

34-35; 35-36;

36-37;

Un numero non può avere divisori in comune con il suo successivo perché uno è pari e uno è dispari  
**[Enzo]**



## Esplorazione e giustificazioni generali

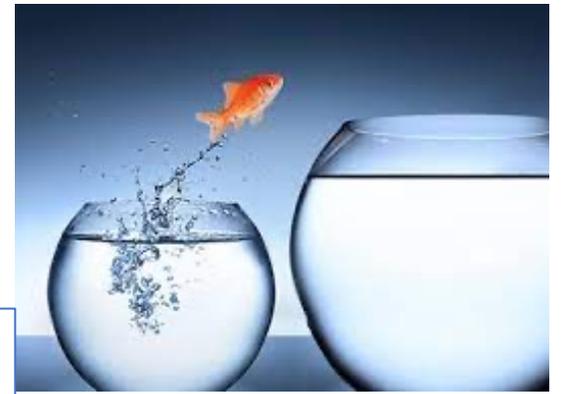
### ESPLORAZIONE

$$\begin{array}{ll} 15:1=15 & 16:1=16 \\ 15:2=/ & \\ 15:3=5 & 16:3= 5 \text{ r.1} \\ 15:4=/ & \\ 15:5=3 & 16:5= 3 \text{ r.1} \\ 15:6=/ & \\ 15:7=/ & \\ \dots & \\ 15:15=1 & 16:15= 1 \text{ r.1} \end{array}$$

### ARGOMENTAZIONE

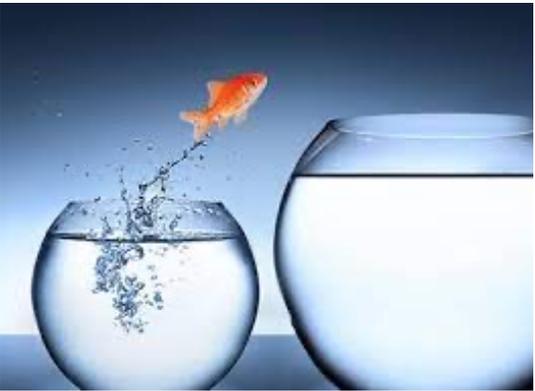
Questo enunciato è vero perché tra un numero e il suo successivo o precedente si aggiunge o toglie 1, quindi il divisore del primo numero non potrà andare bene per il suo successivo perché l'unità aggiunta **costituisce il resto**; l'unità è divisore di tutti perché essendo un'unità sta tante volte quante è il numero nel numero stesso. Ad esempio  $15:3=5$  e  $16:3=5$  resto 1

**[Daniele]**

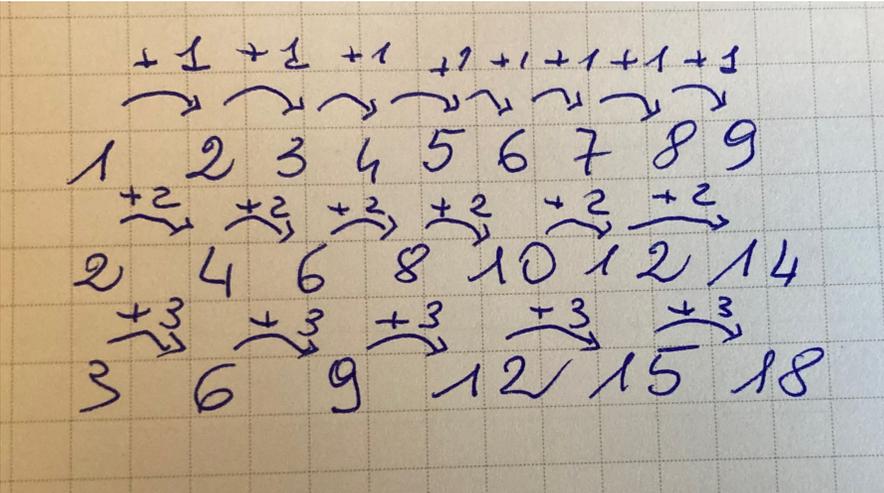




# Esplorazione e giustificazioni generali



## ESPLORAZIONE



## ARGOMENTAZIONE

Nelle numerazioni, a parte quella dell'1 che è **una catena senza buchi**, non è possibile che ci siano numeri consecutivi perché i multipli di un numero derivano dal numero di partenza che si aggiunge via via, perciò è impossibile che due multipli siano numeri consecutivi

[ Lucia ]



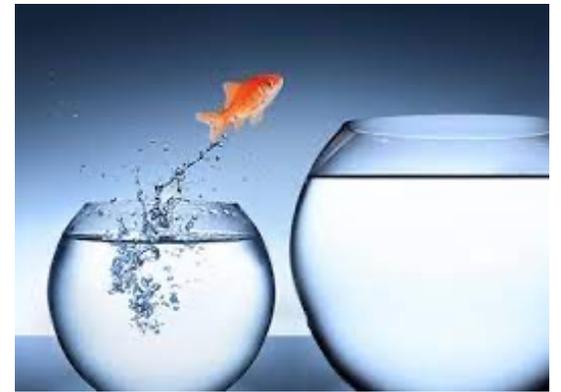
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Informazione  
e Matematica

In seguito.....

Alla luce di questa analisi nelle sperimentazioni successive il problema è stato posto agli allievi nel seguente modo:



*Cosa succede ai divisori di un numero quando si aggiunge 1 al numero stesso?*

*Cambiano? Cambiano tutti? Perché?*

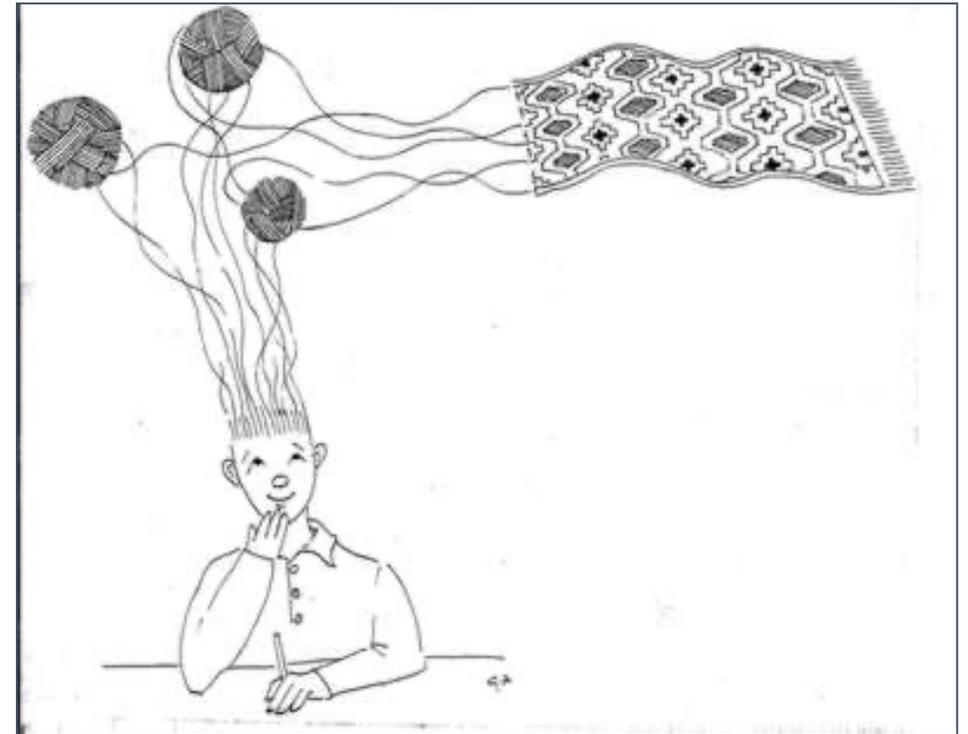
*Scrivi con cura le tue osservazioni e giustifica la tua congettura.*



# Cosa ci dice questo esempio?

Che una situazione problematica ricca e complessa favorisce l'esplorazione della situazione stessa, la produzione di congetture e la ricerca di argomenti a sostegno o contro una certa congettura.

Nella successiva fase di giustificazione l'alunno si collega a questo processo in modo coerente collegando alcuni argomenti prodotti durante la costruzione della congettura.



# Cosa ci dice questo esempio?

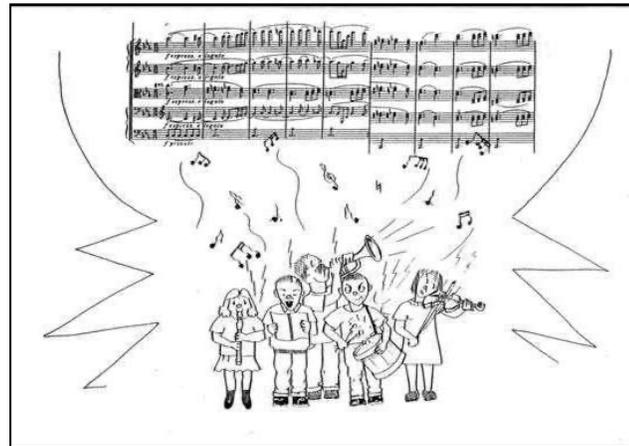
Se la costruzione di una giustificazione trae vantaggio dalla fase di produzione di una congettura è opportuno allora, almeno all'inizio, proporre situazioni che favoriscano questo aspetto piuttosto che produrre o ripetere giustificazioni di enunciati già pronti.



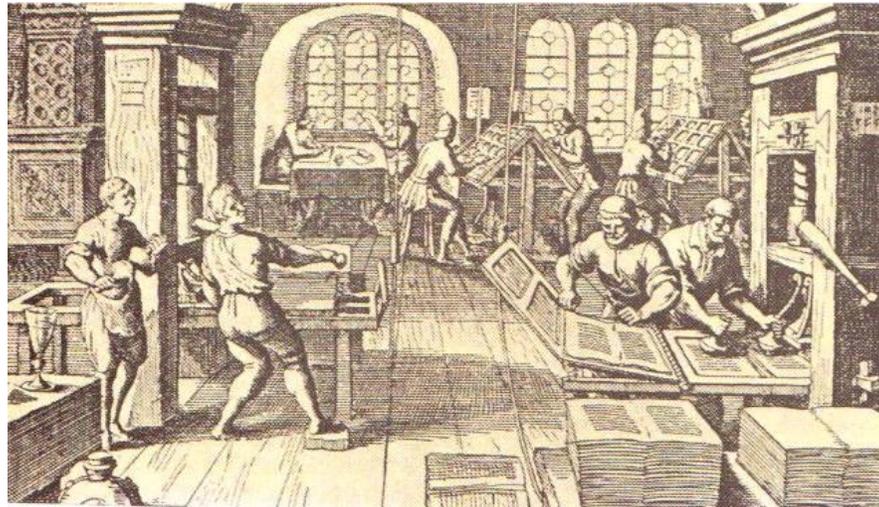
# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?

## Discussione matematica

Una discussione matematica, orchestrata dall'insegnante, è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento apprendimento (Bartolini Bussi, 1995).



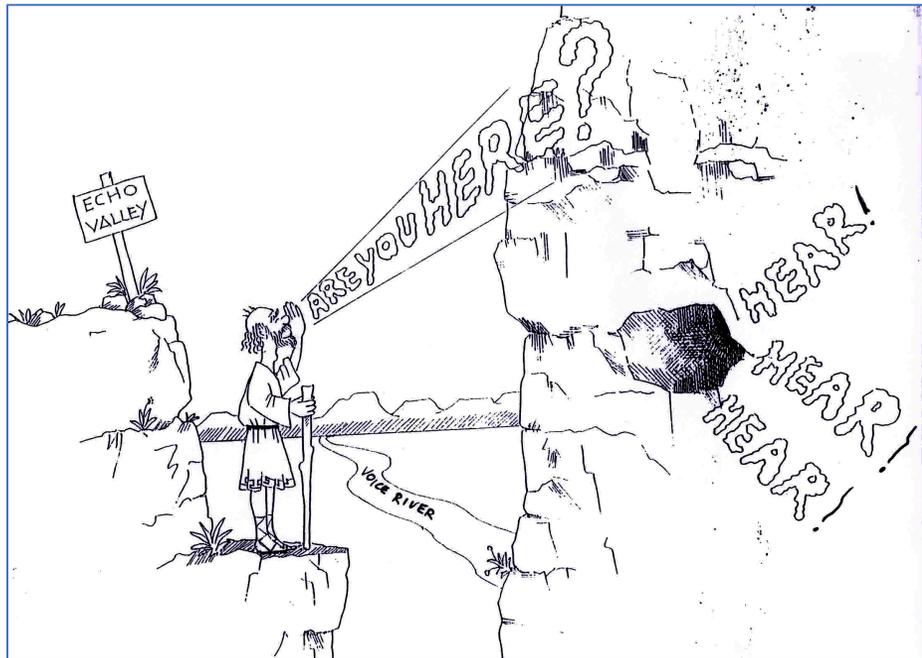
# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?



## Laboratorio di matematica

Inteso, sia come luogo fisico sia come momento in cui l'allievo è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte [...], costruisce significati porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive

# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?



## Il gioco voci-eco

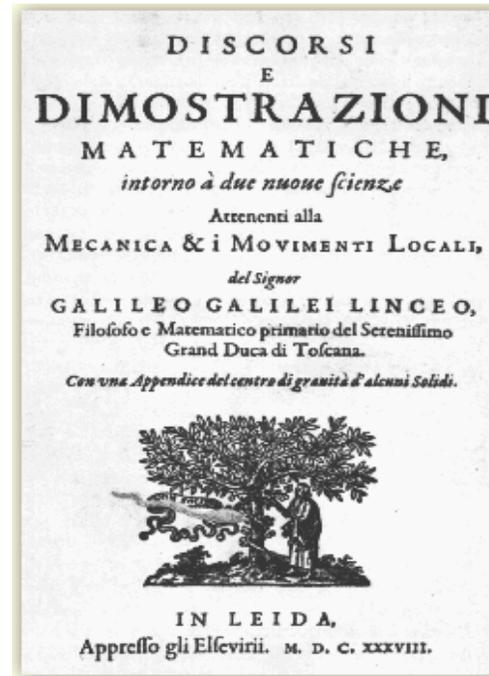
Il gioco VOCE-ECO consiste in una particolare metodologia didattica che mira all'appropriazione delle “voci” storiche da parte degli allievi (sotto la guida dell'insegnante) e, attraverso consegne specifiche, alla successiva richiesta di produzione di “echi”.

(Boero-Garuti, 2002)

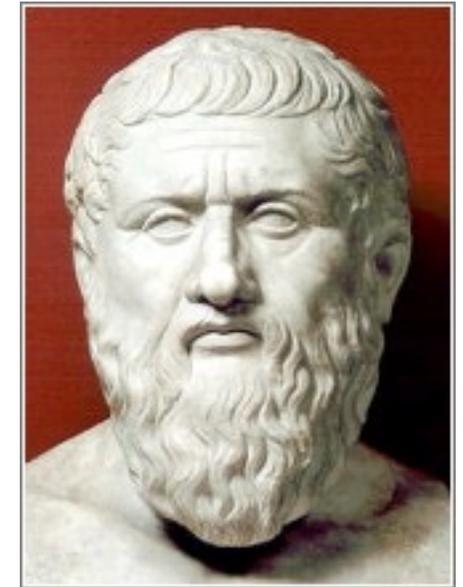
# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?

## VOCI

Espressioni verbali significative dal punto di vista scientifico che rappresentano in modo denso e comunicativo importanti salti nell'evoluzione del pensiero matematico e scientifico. Ognuna di queste espressioni trasmette un contenuto, un'organizzazione del discorso e l'orizzonte culturale nel quale è inserita.



Galileo (1638)



Platone il dialogo del Menone

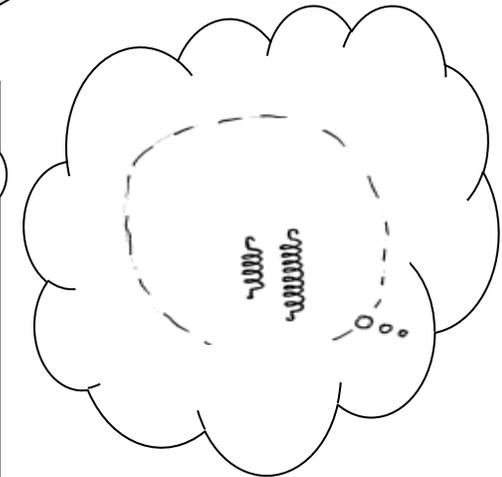


# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?

## ECO

Attraverso specifiche richieste da parte dell'insegnante, lo studente tenta di connettersi alla voce producendo un'eco, cioè un legame con la voce esplicitato da un discorso.

Scrivi un dialogo alla maniera di Galileo su...



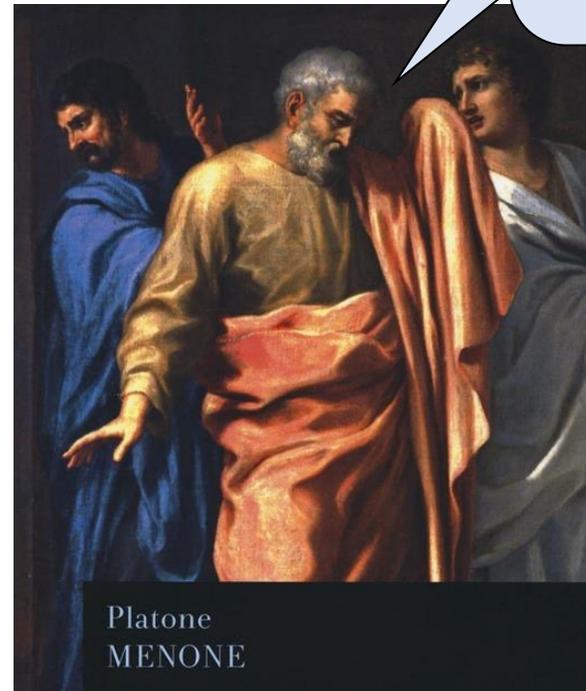


# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?

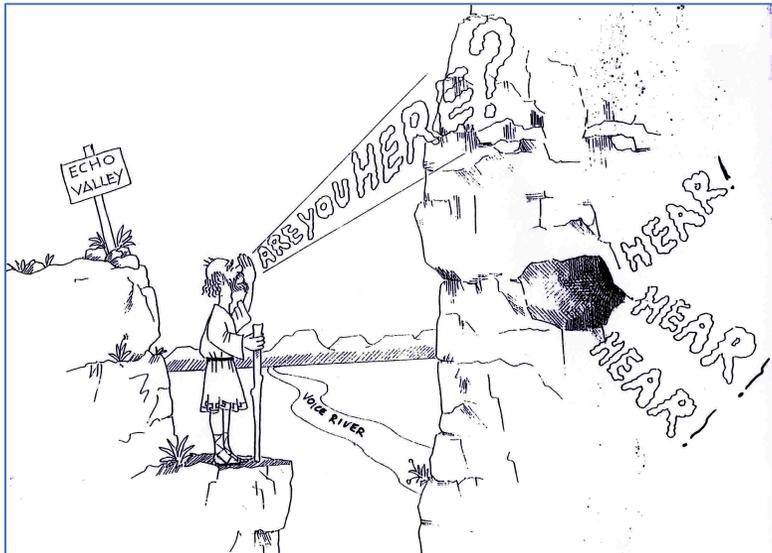
## ECO

Attraverso specifiche richieste da parte dell'insegnante, lo studente tenta di connettersi alla voce producendo un'eco, cioè un legame con la voce esplicitato da un discorso.

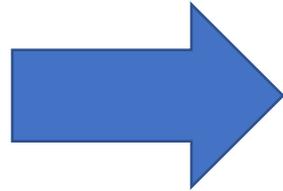
Scrivi un dialogo  
alla maniera di Platone  
sul seguente  
errore...



# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?



Dal gioco voci-eco (2002)



Progetto Educare alla  
razionalità (Boero, 2022)

# Quali condizioni favoriscono l'attività argomentativa?



- Saper argomentare è una competenza che va costruita nel **tempo** (*lasciare agli allievi tutto il tempo necessario per strutturare pensieri, per avere delle curiosità...*)



- Si basa anche sul **rispetto** e sulla **fiducia** verso sé e verso gli altri (*io ho il diritto di essere ascoltato, io sono capace di ascoltare, ho il diritto di sbagliare, ...*)



- L'insegnante è un **esempio** (*stabilisce rapporti con tutti, organizza tempi e spazi, costruisce consegne mirate...*)

# E infine perché l'argomentazione per tutti?

- Perché gli allievi riconoscano il **peso concreto delle parole**
- Perché capiscano che alle parole corrispondono azioni e intenzioni, che si può **agire con il discorso**, proprio perché gli **enunciati “vincolano”**
- Perché comprendano che occorre essere **responsabili di ciò che si dice o non si dice**
- Perché inizino a vedere le **implicazioni pratiche delle teorie**



F. Ferri, maestra  
«**Valore etico e sociale  
dell'argomentazione**»

