Spunti dalla storia dei logaritmi

Riccardo Rosso

Dipartimento di Matematica, Università di PAVIA

Una scoperta epocale

- Anton VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (1900-03)
- Volume I: *Dall'antichità fino all'invenzione dei logaritmi*
- Volume II: *Dall'invenzione dei logaritmi al presente*

> The invention of logarithms came on the world as a bolt from the blue (John Fletcher MOULTON)

> The miraculous powers of modern computation are largely due to the invention of logarithms (Florian CAJORI)

- Charles NAUX: *Histoire des Logarithmes de Neper a Euler*
- Volume I: *La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables*
- Volume II: *La promotion des logarithmes au rang de valeur analytique*

Partiamo dalla fine...

- Leonhard EULER (EULERO, 1707-1783)

- *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748):

"il logaritmo di un qualsiasi numero y è quell'esponente della potenza a^z tale che a^z è uguale ad y"

Antefatto: la legge degli esponenti

Archimede (287(?)-212 a.C.), *Arenario*

- Proporzione continuata a partire dall'unità

$$a_0 = 1, a_1 = q, a_2 = q^2, a_3 = q^3, ...(a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = ...)$$

$$a_m \times a_n = a_{m+n} \Rightarrow q^m \times q^n = q^{m+n}$$

Al prodotto di elementi di una progressione geometrica corrisponde la somma degli esponenti che formano una progressione aritmetica

Antefatto: la legge degli esponenti

- Nicholas CHUQUET (1445-1488)
- *Triparty en la Science des Nombres* (1484).

> Similmente, il prodotto di 4, che è il secondo numero per .8. che è il terzo numero dà 32 che è il quinto numero..... In questa considerazione si manifesta un segreto proprio dei numeri proporzionali. Cioè che moltiplicando per se stesso un numero della proporzione se ne ottiene un altro avente denominazione doppia. Ad esempio, moltiplicando 8 qui è terzo per se stesso si ottiene 64 che è sesto. E moltiplicando per se stesso 16 che è quarto si ottiene 256, che è ottavo. E moltiplicando 128, che è settimo della proporzione per 512 che è il nono termine si ottiene 65536 che è il sedicesimo termine.

Antefatto: la legge degli esponenti

Michael STIFEL (1487 ca-1567), *Arithmetica Integra* (1544)

- estende la legge ad esponenti negativi

1. Nelle progressioni aritmetiche l'addizione corrisponde alla moltiplicazione in quelle geometriche.....

2. La sottrazione nelle [progressioni] aritmetiche corrisponde alla divisione nelle geometriche....

3. La moltiplicazione semplice (cioè di un numero per un numero) quando sia eseguita in una [progressione] aritmetica, corrisponde alla moltiplicazione di un numero per se stesso nelle progressioni geometriche. Così alla moltiplicazione per due in progressioni aritmetiche corrisponde la moltiplicazione quadrata in quelle geometriche....

4. La divisione eseguita in progressioni aritmetiche corrisponde alle estrazioni di radici nelle progressioni geometriche.

Il peso dei calcoli

Operazioni *critiche*: moltiplicazione con molte cifre, estrazioni di radici

Per alleviare la fatica:

Tavole numeriche

Tabula Tetragonica (1592), Giovanni Antonio MAGINI (1555-1617)

Contiene tutti i quadrati degli interi da 1 ad 11000

Come si usa per calcolare $\sqrt{43} = 6.55743...$

$$(6557)^2 = 42994249 \qquad : 10^6 \qquad \sqrt{42,994249} \approx \sqrt{43} \simeq 6,557$$

Il peso dei calcoli

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

Trasformano prodotti in somme

Il peso dei calcoli

Bastoncini di NEPERO (*Rabdologia*, 1617)

Come si usano per eseguire 357×249

$$357 \times 249 = ?$$

	3	5	7	
$357 \times 2 = 714$	0 / 6	1 / 0	1 / 4	← 2
	0 / 9	1 / 5	2 / 1	
$357 \times 4 = 1428$	1 / 2	2 / 0	2 / 8	← 4
	1 / 5	2 / 5	3 / 5	
	1 / 8	3 / 0	4 / 2	
	2 / 1	3 / 5	4 / 9	
	2 / 4	4 / 0	5 / 6	
$357 \times 9 = 3213$	2 / 7	4 / 5	6 / 3	← 9

$$\begin{array}{r} 3213 \\ 1428 \\ 714 \\ \hline 88893 \end{array}$$

Un prodotto è ridotto ad una somma

Legame con la matematica “mercantile”?

Luca PACIOLI: *Summa de Arithmetica* (1494)

> A voler sapere ogni quantità a tanto per 100 l’anno, in quanti anni sarà tornata doppia tra utile e capitale, tieni per regola 72, a mente, il quale partirai per l’interesse, e quello che ne viene in tanti anni sarà raddoppiato. Esempio: quando l’interesse è a 6 per 100 l’anno, dico che si parta 72 per 6; ne viene 12 e in 12 anni sarà raddoppiato il capitale.

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x = 2$$

Nascita dei logaritmi

Chi? John Napier (Nepero, 1550-1617) [Jobst Bürgi (1552-1632)]

Quando?

• 1614, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, ejusque usu, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi & expeditissimi explicatio.*

Contiene definizioni, risultati principali ed applicazioni.

• 1617 *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*

Contiene definizioni, *dimostrazioni* e i dettagli sulla costruzione delle tavole.

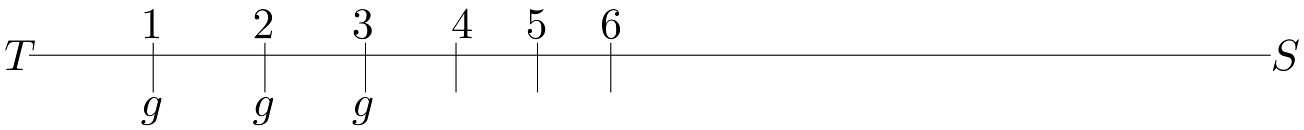
Che cosa è (o non è) un logaritmo neperiano

Definizione poggia su un modello *cinematico*

Si considerano due punti: a, mobile di moto *uniforme* (*arithmeticus*) su una semiretta bi

g, mobile di moto *geometrico* su un segmento ST di lunghezza finita $R = 10^7$: sinus totus, raggio della circonferenza trigonometrica.

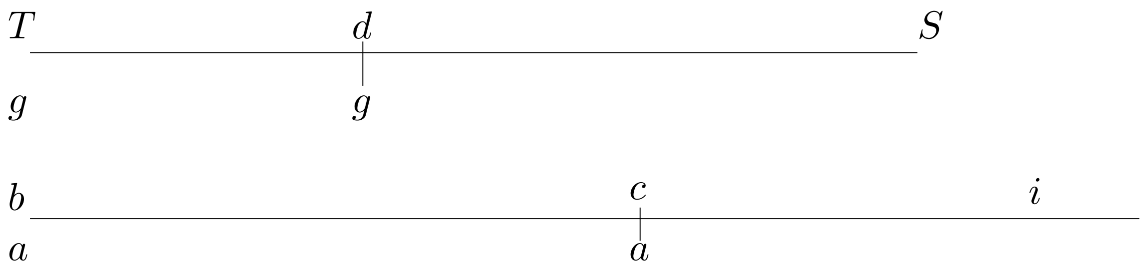
g, partendo da T, percorre in tempi uguali segmenti di lunghezza proporzionale alla sua distanza da S.



$$T1 = \beta TS \quad 12 = \beta 1S, \quad 23 = \beta 2S, \quad 34 = \beta 3S, ...$$

$T1$, 12, 23, ..., percorsi tutti nello *stesso* intervallo di tempo.

TS, $1S$, $2S$, $3S$,...formano una progressione geometrica.



$y(t) := bc$, $x(t) := dS$

$y(0) = 0$, $x(0) = R$, entrambi con la stessa velocità v_0

Definizione: il logaritmo neperiano di dS è pari a bc: $y = \mathrm{nl}\,(x)$.

Conseguenza: $\mathrm{nl}\,(R) = \mathrm{nl}(10^7) = 0$ mentre $\mathrm{nl}\,(1) = 161180957 \neq 0$.

Proprietà fondamentale: Se $a : b = c : d$ allora

$$\mathrm{nl}\,(a) - \mathrm{nl}\,(b) = \mathrm{nl}\,(c) - \mathrm{nl}\,(d)$$

proportionatorum sinuum sunt aequi-differentes artificiales.

$ab : a = b : 1 \qquad \Rightarrow \mathrm{nl}\,(ab) = \mathrm{nl}\,(a) + \mathrm{nl}\,(b) - \mathrm{nl}\,(1) \neq \mathrm{nl}\,(a) + \mathrm{nl}\,(b) \qquad$!!!

Perché ?

Ogni teorema di trigonometria era scritto come proporzione in cui uno dei termini era il sinus totus R

$$R : a = b : c$$

Passando ai logaritmi (neperiani)

$$\mathrm{nl}\,(c) = \mathrm{nl}\,(a) + \mathrm{nl}\,(b)$$

si recupera la trasformazione di prodotti in somme.

In termini moderni

$$y(x) = \mathrm{nl}\, x = R(\ln\, R - \ln\, x) = \ln\left(\frac{R}{x}\right)^R = R \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{R}$$

$R = 1 \Rightarrow \qquad \mathrm{nl}\,(x) = \log_{\frac{1}{e}} x$

Riassumendo....

- NEPERO introduce i logaritmi come funzione diretta
- Sistema logaritmico: progressione aritmetica associata ad una progressione geometrica
- Importanza del modello cinematico per i logaritmi di NEPERO
- Non si può parlare propriamente di una base per i logaritmi neperiani: la base naturale per i logaritmi neperiani è $\frac{1}{e}$.

Passaggio di consegne

- Henry BRIGGS (1561-1630)

  > Con i suoi nuovi ed ammirabili logaritmi, Nepero, signore di Merchiston, mi ha impegnato anima e corpo. Spero di incontrarlo la prossima estate, a Dio piacendo, perché non ho mai letto un libro che mi sia piaciuto più di questo e mi abbia fatto meravigliare di più.

- Prime modifiche al sistema neperiano

Passaggio di consegne

- *Arithmetica Logarithmica* (1624)

  Non c'è da sorprendersi che questi logaritmi siano diversi da quelli che l'illustrissimo signor Barone di Merchiston pubblicò nel suo Canon mirifici. Infatti, mentre ne stavo spiegando la dottrina agli uditori delle mie lezioni pubbliche a Londra presso il Gresham College, compresi che sarebbe stato molto più agevole se, fermo restando il valore 0 per il logaritmo del seno totale (come nel Canon mirifici), si fosse attribuito il valore 10000000000 al logaritmo della decima parte del seno totale, cioè al seno di 5 gradi, 44 primi, 21 secondi e scrissi a tal proposito all'autore stesso (Nepero) e non appena nel corso dell'anno sono stato libero dagli impegni didattici, mi sono recato ad Edimburgo dove sono stato accolto da lui in modo estremamente cordiale e mi sono trattenuto per un mese intero. Mentre stavamo discutendo del cambiamento da apportare ai logaritmi, disse che anche lui riteneva opportuno e che lo avrebbe desiderato operare: quelli di cui aveva curato l'edizione erano destinati ad essere sostituiti da altri più comodi cui avrebbe lavorato compatibilmente con gli impegni e lo stato di salute. Egli riteneva di dover apportare questo cambiamento: che 0 fosse il logaritmo dell'unità e 10000000000 quello del seno totale: proposta che non potei far altro che riconoscere come di gran lunga la più comoda.

Abbandonati dunque quelli che avevo già preparato, su suo consiglio iniziai a pensare seriamente al loro calcolo: l'estate successiva ho nuovamente raggiunto Edimburgo per mostrargli i logaritmi contenuti in quest'opera. Mi sarei recato da lui molto volentieri l'estate successiva per la terza volta, se Dio avesse voluto lasciarlo ancora in vita.

La scelta finale

- *Arithmetica Logarithmica* (1624)

  Assegnato il valore al logaritmo dell'unità, procediamo ad un altro numero di uso molto frequente e sommamente necessario, ed attribuiamogli un logaritmo comodo che sia ad un tempo molto facile da descrivere ogni volta che serve e da tenere a mente. Nessun numero sembra più indicato allo scopo che il dieci, il cui logaritmo sia 1,00000,00000,0000.

Origine di un nome

Logaritmo è vocabolo composto da rapporto e numero, quasi a dire numero di rapporti; ciò che ben esprime la realtà delle cose.

(Nicolaus MERCATOR, Logarithmotechnia, 1668)

Wilhelm MATZKA (1850) logaritmo è l'accostamento di $\lambda o\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa o\varsigma$ ed $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu o\varsigma$: numeri per il calcolo (*zum Rechnen dienliche*).

Origine di un nome

- dividere un rapporto $A : C$ in rapporti uguali

$$A : B = B : C,$$

- A e C hanno rapporto *duplicato* rispetto ad $A : B$.

$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \left(\frac{A}{B}\right)^2$$

$$A : B = B : C = C : D = D : E \cdots$$

- proporzioni continue

$$\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \left(\frac{A}{B}\right)^3 .$$

Il virtuosismo di BRIGGS

- Calcolare $10^{\frac{1}{2^n}}$ (fino a $n = 54$, con 32 cifre decimali)

$$10^{\frac{1}{2^n}} = 1 + b_n \qquad \text{e} \qquad 10^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1 + b_{n+1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \simeq \frac{1}{2}\,.$$

$$\ell_n = \mathrm{bl}\,(10^{\frac{1}{2^n}}) \qquad \text{e} \qquad \ell_{n+1} = \mathrm{bl}\,(10^{\frac{1}{2^{n+1}}})$$

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{1}{2}$$

- per n sufficientemente grande ($n \geq 51$)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\,.$$

- Estendere questa proprietà ad altri numeri

Logaritmi e musica

- il rapporto tra le frequenze tra due suoni separati da un'ottava è $2 : 1$
- **Problema.** Suddividere l'ottava in 12 parti uguali
- Problema "logaritmico": inserzione di medi proporzionali

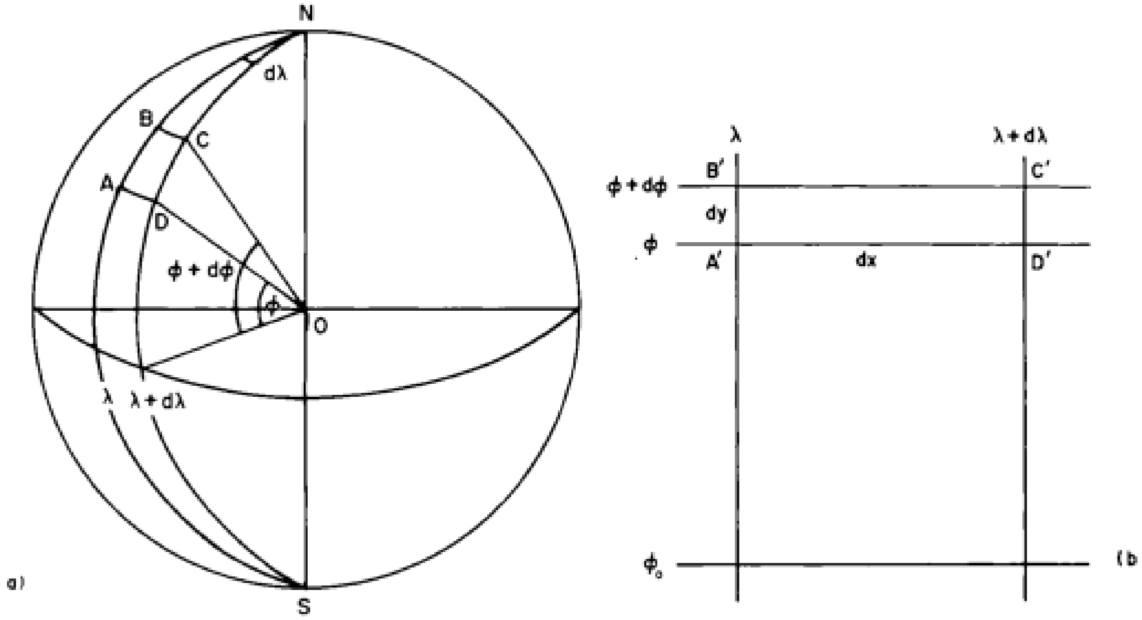
$$x^{12} = 2$$

- DESCARTES, MERCATOR, NEWTON,...

La navigazione matematica

- Il contesto della scoperta dei logaritmi
- Interessi matematici sotto Elisabetta I
- il lavoro dei matematici
- Il Gresham College
- Edward WRIGHT (1561-1615)
- Edmund GUNTER (1581-1626)
- Henry BRIGGS

La proiezione di MERCATOR



- distorsioni lungo i paralleli

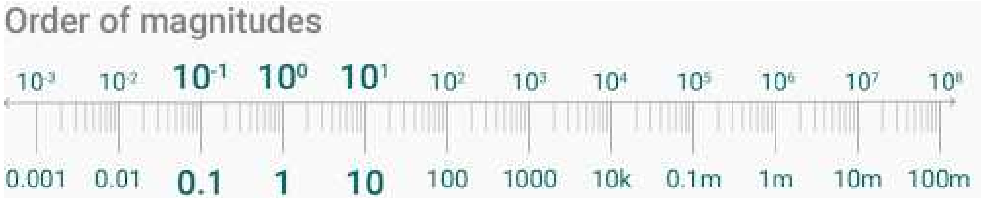
La proiezione di MERCATOR

- Edward WRIGHT:*Certaine Errors in Navigation Corrected* (1599)
- Fornisce una tavola per le correzioni equivalente a calcolare

$$f(\varphi) := \int_0^{\varphi} \sec\alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

Scale logaritmiche

- Edmund GUNTER (1623)



- Regolo calcolatore
- William OUGHTRED (1574-1660)

Il regolo calcolatore

- Okay, Houston, we've had a problem here...