



Unione  
Matematica  
Italiana



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Informazione  
e Matematica



## XXXVI CONVEGNO UMI-CIIM AQ2022

**La Matematica come valore essenziale della crescita personale e sociale:  
La sfida educativa per l'inclusione**

# *Il progetto ArAI* Riflessioni su genesì e struttura del progetto e sulle sue ricadute nel mondo della scuola

**Nicolina A. Malara**  
[nicolina.malara46@gmail.com](mailto:nicolina.malara46@gmail.com)

## Le premesse

**Il progetto ArAl** affonda le sue radici nell' humus culturale che si era determinato a cavallo negli anni ottanta e novanta del secolo scorso nell'ambito dei Nuclei di Ricerca Didattica (NRD) promossi dal CNR e dall'allora MPI.

Gli NRD erano stati concepiti per promuovere **il rinnovamento dell' insegnamento della matematica nella scuola**, dalla primaria alla secondaria superiore, **operando sul campo**, attraverso:

- la costituzione di **gruppi di studio tra ricercatori universitari ed insegnanti con rapporto paritetico** per
  - **l'approfondimento critico di problemi di insegnamento/ apprendimento** messi in luce dalla ricerca internazionale
  - la realizzazione nelle classi di **percorsi didattici innovativi** secondo gli indirizzi di: a) la ricerca internazionale, b) i nuovi programmi per la scuola dell'obbligo o delle proposte di programmi della scuola superiore.



## Premesse al progetto ArAI

- Sono stati i nostri primi studi di didattica dell'algebra svolti a livello di **scuola media** nella prima metà degli anni 90 con insegnanti coordinati da L. Gherpelli e con R. Iaderosa, riguardanti:
  - Modellizzazione e problem solving algebrico
  - Argomentazione su esplorazioni numeriche e dimostrazione di proprietà
  - Rappresentazioni numeriche, analogie e differenze tra rappresentazioni nel passaggio dalla struttura additiva a quella moltiplicativa

Tali studi hanno messo in luce negli allievi una visione operativa dell'aritmetica ed evidenziato loro difficoltà nel confronto tra rappresentazioni numeriche, nel riconoscimento di equivalenze e più in generale nella individuazione di relazioni

Dalle riflessioni sui nostri studi e sui risultati consolidati dalla ricerca , abbiamo maturato le convinzioni circa

- **La necessità di rifondare l'insegnamento dell'aritmetica nella scuola primaria** in ottica relazionale/prealgebrica
- L'importanza di **valorizzare gli apporti che l'introduzione anticipata del linguaggio algebrico offre all'insegnamento-apprendimento dell'aritmetica** sul piano teorico/concettuale
- la validità di costruire **una visione intrecciata tra aritmetica ed algebra** (superamento della storica sequenzialità didattica)
- **Il Seminario Nazionale** da noi tenuto nel 1997

## Le occasioni

- **Il distacco di Giancarlo Navarra all'Università** di Modena presso il Dipartimento di Matematica per due semestri (anni 1996/97, 1997/98) nell'ambito di un mio progetto di ricerca sulla didattica dell'algebra che gli ha consentito:
  - **uno studio organizzato e sistematico della letteratura**
  - **La realizzazione di prime ricerche a livello di scuola primaria**
- **Il progetto Europeo ELTMAPS** sui problemi del passaggio scuola primaria e scuola secondaria inferiore (1998-2003)
- **Il progetto nazionale S&T** dell'INDIRE (2001-03)
- **L'accorato appello** fatto agli insegnanti di scuola secondaria in una conferenza plenaria al convegno UMI-CIIM su **Matematica e applicazioni** (Orvieto, 1998) dal relatore, professore di ingegneria del Politecnico di Torino, sulla assoluta necessità che gli studenti imparino a modellizzare

La prima edizione del

## ***Il progetto ArAl***

**(1998-2003)**

è in lingua inglese

Viene realizzata nell'abito del

Progetto Europeo

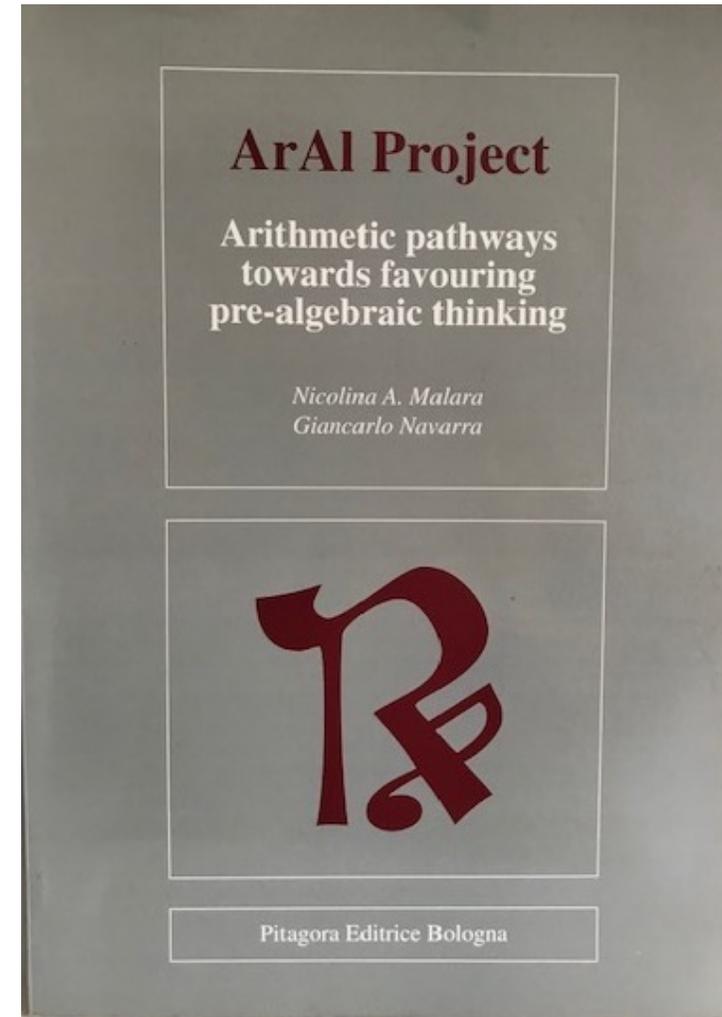
***ELTMAPS***

*Effective Learning and Teaching of  
Mathematics from Primary to*

*Secondary School*

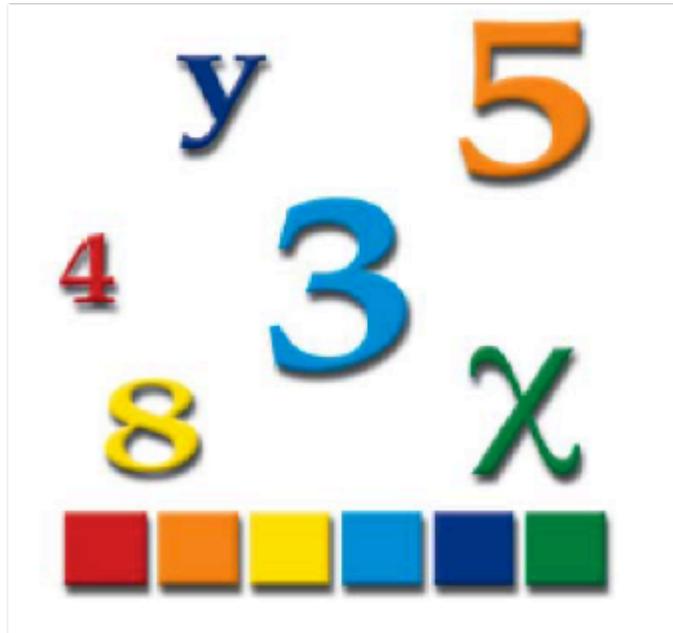
*Roheampton Institute*

*London University*



## Il Progetto ArAl

L'edizione italiana vede il contributo di A. Giacomini



Dal 2003 il progetto si estende con il significativo contributo di parecchi insegnanti di scuola dell'infanzia, di scuola primaria e di scuola secondaria inferiore

[www.progettoaral.it](http://www.progettoaral.it)

Gruppo  
Progetto ArAl  
su facebook

## ***Il progetto ArAI***

.

**Propone una rivisitazione dell'aritmetica in chiave relazionale ed un'introduzione all'algebra di tipo linguistico e metacognitivo, attuata con modalità socio-costruttive**

E' concepito:

- **in verticalità dalla primaria alla secondaria inferiore, con enfasi sulla primaria**, ed in collegamento con la scuola dell'infanzia e secondaria superiore.
- aperto **ad espansioni ed approfondimenti**

E' strutturato come **un sistema integrato di innovazione nelle classi e formazione degli insegnanti** che si sviluppa a due livelli:

- **didattico**, attraverso attività innovative di tipo pre-algebrico nelle classi accompagnate dall'analisi degli apprendimenti.
- **formativo**, attraverso processi di studio con/per gli insegnanti basati sulla condivisione delle pratiche di classe per affinare attitudini e comportamenti (incontri di lavoro, scambi via web, e-mail, ...).

## Elementi matematici chiave nello sviluppo del progetto

- **la simmetria** del segno di uguaglianza;
- **la pluralità di rappresentazioni** di un numero;
- il confronto di espressioni numeriche, **riconoscimento/justificazione di equivalenze tra espressioni senza effettuare calcoli**;
- **l'oggettivazione delle proprietà delle operazioni aritmetiche** attraverso l'analisi di procedimenti risolutivi di problemi;
- **lo studio di problemi verbali algebrici** attraverso l'introduzione delle lettere per rappresentare i valori numerici dei dati incogniti
- **l'individuazione e rappresentazione di leggi di corrispondenza** in situazioni realistiche o in sequenze figurali e numeriche
- **esplorazioni numeriche, individuazione di regolarità, formulazione di congetture ed eventuale dimostrazione** (raccordo scuola secondaria inf./sup.)

L'ipotesi di fondo del progetto è che i modelli mentali propri del pensiero algebrico debbano essere costruiti sin dalle prime classi della scuola primaria, quando l'alunno incontra i concetti base dell'aritmetica

***puntando alla costruzione di un nuovo linguaggio***

di cui l'alunno si impadronisce - con modalità analoghe a quelle con cui apprende il linguaggio naturale - iniziando dai significati delle sue formule (cioè dai suoi aspetti ***semantici***) e gradualmente strutturandole nella loro impalcatura ***sintattica***.

Gli allievi vengono messi in situazione e guidati a:

- **rilevare regolarità, individuare relazioni ed in vari casi a cogliere il generale nel particolare**

Ad essi viene devoluta

- **la formulazione in linguaggio naturale** di frasi esprimenti le relazioni individuate in termini generali
- **la rappresentazione mediante lettere** delle quantità coinvolte (incognite, indeterminate o variabili)
- **la costruzione di formule** di traduzione in linguaggio matematico delle frasi da loro espresse in linguaggio naturale
- **l'interpretazione di traduzioni formali** prodotte dai compagni

***Gli allievi sono i principali attori*** di questo articolato processo che caratterizza quello che noi chiamiamo

## ***Il Balbettio algebrico***

Le riflessioni collettive guidate dall'insegnante di confronto sui significati delle frasi elaborate dai singoli portano gli allievi a:

- conquistare la corretta formulazione algebrica di una frase
- Iniziare a manipolare sintatticamente formule appoggiandosi alle regole dell'aritmetica ed a usare consapevolmente le parentesi
- Arrivare gradualmente a padroneggiare gli aspetti sintattici del linguaggio algebrico



Costrutti linguistici del quadro teorico del progetto ArAI, fondativi per indurre negli allievi modi di vedere in aritmetica funzionali alla generalizzazione ed alla rappresentazione algebrica, sono stati da noi espressi in termini di dualità, precisamente:

- **Le rappresentazioni canonica / non canonica di un numero**
- **rappresentazioni trasparenti / opache** (in riferimento ad un dato contesto o in relazione a certi obiettivi)
- **Processo / prodotto**
- **Rappresentare / risolvere**

## La dualità rappresentazione canonica / non canonica di un numero

Essa permette agli studenti di **concepire sullo stesso piano:**

- la rappresentazione canonica di un numero, cioè la rappresentazione simbolica del suo nome,
- le espressioni numeriche che lo abbiano come risultato, espressioni che noi chiamiamo rappresentazioni non canoniche del numero
- per esempio le espressioni  $3+4$ ,  $2\times 3+1$ ,  $10-3$  sono rappresentazioni non-canoniche del numero 7.

## La dualità rappresentazione canonica / non canonica di un numero

L' accettazione di una pluralità di rappresentazioni per un numero porta gli studenti:

- ad imparare a riconoscere rappresentazioni diverse di uno stesso numero, ad esprimere e giustificare la loro uguaglianza osservando ed esplicitando le relazioni tra i loro termini
- a superare la concezione unidirezionale del segno di uguaglianza, dominante e molto diffusa tra gli allievi della primaria
- a superare l' automatico comportamento di 'chiudere' espressioni numeriche mutandole in eguaglianza per ottenere il 'risultato', cosa che nel prosieguo porta gli studenti 'a chiudere' espressioni algebriche trasformandole in equazioni

**La dualità trasparente-opache** per le rappresentazioni non canoniche di un numero mette in luce che a seconda della situazione matematica in esame una rappresentazione può essere più 'trasparente' di altre, cioè più espressiva ed efficiente, perché dà l'opportunità di rendere evidenti relazioni numeriche nascoste.

Va sottolineato che **l'oggettivazione delle rappresentazioni non canoniche** di un numero, **i giochi di trasformazione tra di esse e le loro interpretazioni** anche in specifici contesti sono funzionali ad acquisire modi di vedere e flessibilità operative basilari per le esplorazioni numeriche, l'individuazione di proprietà e la loro giustificazione

**La dualità processo-prodotto** porta gli studenti a concepire la rappresentazione di un processo di calcolo come un oggetto matematico ed ad conquistare per un'espressione aritmetica la doppia visione di processo e prodotto

**La dualità rappresentare-risolvere** focalizza l'attenzione degli studenti sulla **rappresentazione** come azione chiave per oggettivare i procedimenti aritmetici posponendo i calcoli.

Lo slogan

## ***Prima rappresenta poi risolvi***

È usato nei problemi per:

- spostare l'attenzione dal risultato al processo
- allontanare l'enfasi sulle operazioni
- guidare lentamente gli allievi a passare dal livello cognitivo a quello metacognitivo.

Gli allievi sono chiamati ad

***evidenziare la struttura del problema ed a rappresentarla attraverso il linguaggio matematico***

Un altro importante aspetto del nostro approccio all'algebra riguarda

## **la traduzione tra linguaggi ed il rispetto delle regole**

Un punto critico per gli studenti è comprendere l'importanza di rispettare le regole del linguaggio aritmetico/algebrico.

Gli individui nell'apprendere il linguaggio naturale ne rispettano le regole per questioni di comunicazione, ma è difficile educare gli allievi a sviluppare un analogo comportamento in relazione al linguaggio aritmetico/algebrico.

Per sviluppare negli allievi la consapevolezza della necessità del rispetto delle regole si è concepita la figura di un mediatore, che si è rivelata molto efficace per motivare gli allievi

Si tratta di un ragazzino giapponese, Brioshi, amico di penna, che non conoscendo l'italiano ama comunicare in linguaggio matematico

La necessità di scrivere per Brioshi messaggi matematici indirizza gli allievi verso la formulazione di frasi matematiche, che vengono interpretate, discusse e corrette collettivamente prima della spedizione, analogamente l'interpretazione di frasi inviate da Brioshi conferma loro come l'uso appropriato dei segni eviti ambiguità interpretative



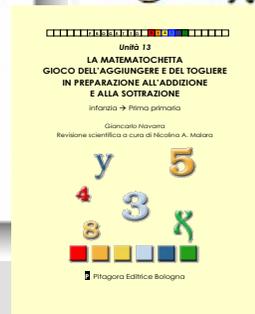
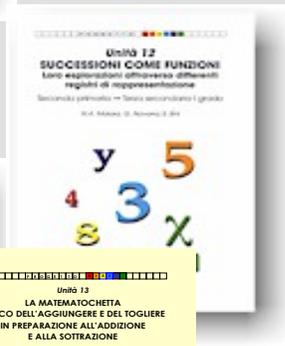
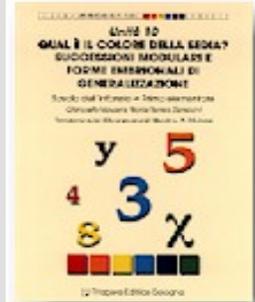
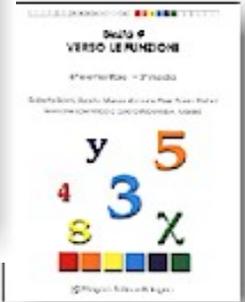
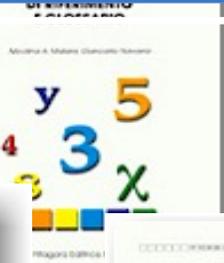
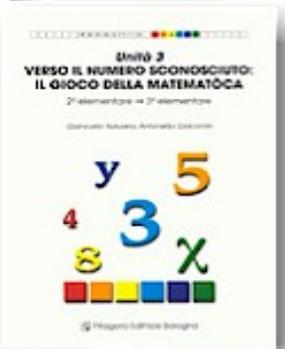
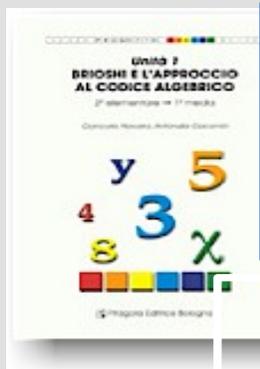
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Informazione  
e Robotica

# Progetto ArAl

## Libri per insegnanti e per le classi 2003-2018



# Un esempio di attività ArAI

PROGETTO ARAI

## Unità 9 VERSO LE FUNZIONI 5<sup>a</sup> elementare → 3<sup>a</sup> media

*Sandra Marchi, Romano Nasi, Paola Stefani, Roberta Fiorini*  
Revisione Scientifica a cura di Nicolina A. Malara



Pitagora Editrice Bologna

# Esplorazione di una situazione realistica



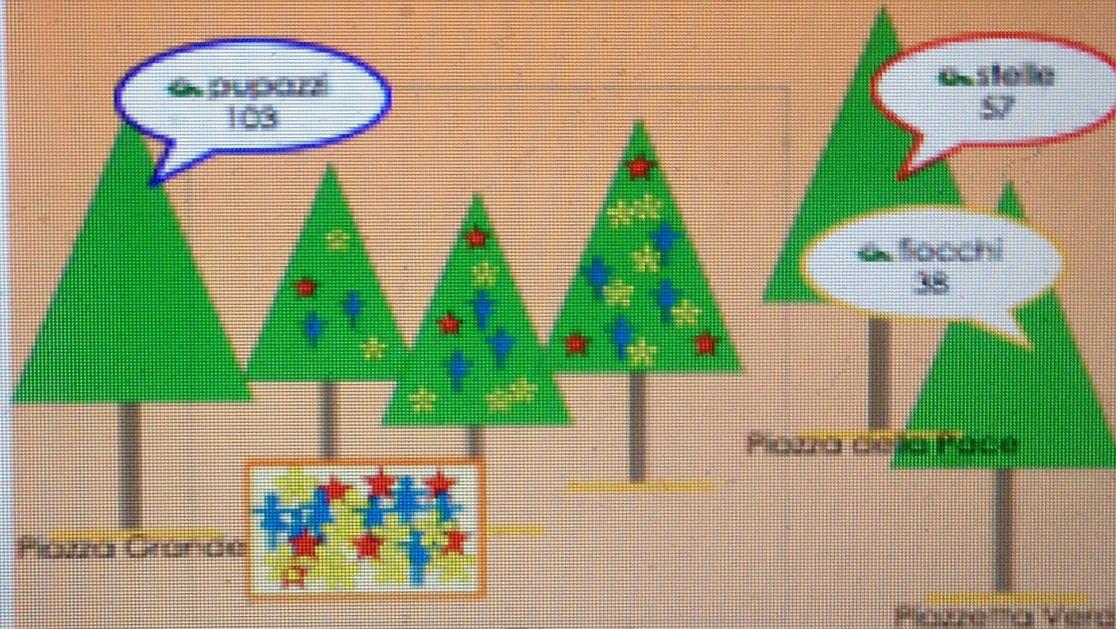
## Finalità

Portare gli allievi a:

- individuare relazioni tra coppie di quantità variabili
- generalizzare, esplicitare verbalmente ed in termini generali corrispondenze
- tradurre in linguaggio algebrico frasi in linguaggio naturale esprimendo corrispondenze
- Interpretare formule rappresentative di corrispondenze in relazione alla situazione in gioco
- coordinare rappresentazioni diverse di una stessa relazione

È Natale. Gianni lavora presso una ditta specializzata in addobbi natalizi di piazze e strade cittadine. Ha avuto l'incarico di preparare il materiale per decorare tre abeti, uno in Piazzetta Verdi, uno in Piazza della Pace e uno in Piazza Grande.

Il suo principale ha allestito la vetrina con tre piccoli alberi come modello delle decorazioni che realizza in città.



Il principale ha detto a Gianni:  
«La mia idea è piaciuta molto agli acquirenti. Ogni abete avrà i tre tipi di oggetti.»  
«Quanti di ogni tipo?», replica Gianni.  
«Se osservi i miei modelli puoi scoprirlo da solo. Attento! Non sbagliarti.»  
Gianni è un po' confuso. Aiutalo tu.

## La situazione da esplorare coinvolge tre variabili

Per rispondere alle domande poste gli allievi devono:

- Tabulare i dati ed individuare relazioni tra coppie di variabili
- esprimere verbalmente le relazioni trovate
- Collegare relazioni dirette ed inverse
- tradurre in linguaggio algebrico le varie frasi

# Dati tratti dai modellini in vetrina



Numero fiocchi: $f$	Numero pupazzi: $p$	Numero Stelle: $s$
2	2	1
4	3	2
6	4	3
...	.....	...

## Altri dati

Albero in piazza grande:

- **numero pupazzi 103**

Albero in piazza Verdi:

- **numero fiocchi 38**

Albero in piazza della pace:

- **numero stelle 57**

## Relazioni individuate, espresse in linguaggio verbale

**Variabili: num. pupazzi, num. stelle**

- **Il numero dei pupazzi** è uno in più del numero di stelle
- **Il numero delle stelle** è uno in meno del numero dei pupazzi

**Variabili: num. fiocchi, num. stelle**

- **Il numero dei fiocchi** è il doppio del numero stelle
- **Il numero delle stelle** è uguale alla metà del numero dei fiocchi

**Variabili: num. fiocchi, num. pupazzi**

- **Il numero dei fiocchi** è il doppio del numero dei pupazzi meno 2
- **Il numero dei pupazzi** è uno in più della metà del numero dei fiocchi

## Loro traduzione algebrica

**Variabili:  $p$  ed  $s$**

- $p = s + 1$
- $s = p - 1$

**Variabili:  $f$  ed  $s$**

- $f = 2 \times s$
- $s = f / 2$

**Variabili:  $f$  e  $p$**

- $f = 2 \times p - 2$
- $p = 1 + f / 2$

Il processo di confronto delle produzioni degli allievi è laborioso e risulta particolarmente complesso. In questa sezione si analizzano le formulazioni diverse di

Ad esempio, nel nostro caso si confrontano quello dei fiocchi e quello dei pupazzi

## 1. Il numero dei fiocchi

[formulazione ricavata dalle coppie (2, 2); (4, 3); (6, 4) e (8, 5) si ricava la coppia mediante il secondo, ponendo:

- Nel primo caso è il gioco interpretativo tra rappresentazioni numeriche analoghe che porta alla individuazione della corrispondenza, alla sua generalizzazione ed alla sua rappresentazione sia verbale che formale

- Nel secondo caso è la corretta composizione di rappresentazioni algebriche ed il gioco di interpretazioni tra registri algebrico e verbale che legittima l'equivalenza delle espressioni  $2p-2$  e  $2 \times (p-1)$

- **Il numero dei fiocchi è il doppio dell'antecedente del numero di pupazzi**

[formulazione ricavata dalle formule delle due precedenti relazioni:  $f = 2 \times s$  ed  $s = p-1$  attraverso 'il gioco del cambio', ossia sostituendo nella prima uguaglianza  $s$  con  $p-1$  ed ottenendo la formula  $f = 2 \times (p-1)$ ]

Piazza Grande

Piazzetta Verdi

In un cassetto della scrivania, il suo principale ripone foglietti in cui appunta le regole scelte per le decorazioni.  
«Forse lo ha fatto anche quest'anno» pensa Gianni ottimista.  
Apri il cassetto e trova 5 foglietti. Questi.

$f = s + 2$	$f = 2s$	$f = s + 1$	$s = f : 2$	
$p = 2s - 1$	$f = 2p - 2$	$p = s + 1$	$p = 2s$	$s = p - 1$

Ma quali sono le regole giuste? si chiede.  
Confronta le relazioni che hai trovato con quelle scritte sui foglietti e cerca di capire se ci sono anche i foglietti di quest'anno.

In questa situazione il focus è sulla interpretazione ed il confronto di scritture formali in relazione al fenomeno in esame

Gli allievi vengono posti in una situazione in cui devono ragionare sulle formule giustificando il perché esse siano valide oppure no.

Questo porta alla particolarizzazione delle formule e forza la visione delle lettere come variabili

Come si coglie dall'esempio mostrato, il ruolo dell'insegnante nell'attuare le attività del progetto è variegato e complesso

## Egli dovrà porsi

Nelle esplorazioni come:

- **partecipante alla pari** con gli allievi nel lavoro di classe indirizzandone tacitamente lo sviluppo
- **soggetto che indaga/modello**, stimolando negli allievi un atteggiamento speculativo e di ricerca
- **Guida pratica e strategica**, condividendo con i suoi allievi pensieri, ragioni

A livello meta come:

- **Guida riflessiva** nell'oggettivare processi, schemi, modelli.
- **Stimolo e sostegno** nello sviluppo di abilità cruciali, quali l'interpretazione e lo sviluppo di ragionamenti in termini algebrici
- **Attivatore di:**
  - **processi di pensiero** (ipotetici, interpretativi, previsionali, ...)
  - **processi di controllo e confronto di strategie**



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Informazione  
e Matematica

# La penetrazione del progetto nel mondo della scuola

- **Attività di formazione iniziale degli insegnanti** attraverso specifici laboratori nelle scuole di specializzazione all'insegnamento
- **Attività di formazione in servizio degli insegnanti** attraverso progetti regionali o provinciali con l'istituzione di reti di scuole e finanziamenti presso gli istituti polo, sparsi a macchia di leopardo su tutto il territorio nazionale
- **Il lavoro scientifico-organizzativo di G. Navarra capillare, e instancabile**, nelle classi, tra gli insegnanti, nel web, nel coordinamento di gruppi di studio, nella produzione di materiali per gli insegnanti ma anche nella strutturazione di **mostre di divulgazione del progetto, nella partecipazione a convegni per insegnanti**

## Scelte metodologiche rivelatesi efficaci

- **l'insegnante-ricercatore nelle classi come guida e modello** per docente ed allievi soprattutto nella scuola primaria
- **Le pratiche di riflessione sull'azione di classe altrui e proprie** attraverso i **diari multi-commentati**, la costante attenzione al modo di porsi ed al lessico dell' insegnante, il rimando ai costrutti linguistici del progetto ed al glossario
- **La formazione di docenti ArAI esperti** come elementi di riferimento negli istituti coinvolti nel progetto
- **I seminari e gli incontri annuali** di confronto collettivo tra insegnanti esperti delle reti di scuole e la raccolta dei contributi nei **Quaderni ArAI**
- **Le pratiche di condivisione sul web** di mini-video, diari di classe, progettazioni curricolari e **la formazione informale** (via sito e facebook)

La formazione è articolata in

- **studio teorico** (quadro teorico del progetto ArAI ed articoli di ricerca significativi per il raccordo aritmetica/algebra)
- **attività nelle classi supportata da un mentore** (esterno per gli insegnanti della secondaria, interno per quelli della primaria) **con focus sull'azione di classe dell'insegnante**

Essa è centrata su pratiche di **analisi critica di processi di classe** per:

- potenziare l'osservazione di sé nel vivo dell'azione
- imparare a prevedere possibili sviluppi di una situazione ed a fronteggiare situazioni non previste
- convertire/affinare il proprio modo di porsi con gli allievi ed imparare ad usare un linguaggio adeguato, **minimizzando l'uso di verbi operativi, quali 'fare', 'calcolare', 'trovare'...**

## Attività ArAI presenti in libri di testo

5 Collega con una freccia ogni frase alla sua scrittura in linguaggio matematico.

la somma di 15 e 9

il prodotto di 9 e 2

a 15 sottraggo 9

aggiungo 2 alla differenza fra 15 e 9

sottraggo 2 alla somma di 15 e 9

6 Scrivi a parole le frasi matematiche.

$63 - 12 \rightarrow$

$10 + 4 - 3 \rightarrow$

$5 \times 2 + 6 \rightarrow$

$3 \times 6 + 2 \times 4 \rightarrow$

$7 + 18 : 2 \rightarrow$

$15 - 9 + 2$

$15 - 9$

$15 + 9 - 2$

$9 \times 2$

$15 + 9$

Un  pesa quanto \_\_\_\_\_

2 Leggi, osserva e completa.

a. Sai che  $\triangle = 50 \text{ g}$

Quantità pesa un  ? \_\_\_\_\_

b. Sai che  $\square = 2 \text{ kg}$  Quanto pesa una  ? \_\_\_\_\_

Quantità pesa una  ? \_\_\_\_\_

Osserva e calcola il peso dei tre pacchi di cereali a sinistra.

Osserva e calcola il peso di 5 dolcetti.

ATEMATICA

da 'Giramondo' - classe IV (di Fassino e Hippoliti)



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Informazione  
e Matematica

## Ricadute del progetto sulla ricerca

## Gli studi sulla formazione degli insegnanti per introdurre nelle classi un insegnamento dell'aritmetica in prospettiva algebrica

- Malara, N.A. 2003, Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project, plenary lecture, *Proc. PME 27*, vol.1, 33-48
- Cusi, A., Malara N.A., 2008, Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences, *Quadrante*, vol. XVI, n.1, 57-80 (estende la mia regular lecture all'ICME)
- Cusi, A., Malara, N.A. e Navarra, G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives* (pp. 483-510).
- **Malara, N.A., Navarra, G . (2018) New Words and Concepts for Early Algebra Teaching: Sharing with Teachers Epistemological Issue in Early Algebra to Develop Students' early algebra thinking**, in Kieran C. (a cura di), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5 to 12 Year Olds*, (pp. 51-78), Berlino/New York: Springer

## Gli studi sulla formazione degli insegnanti in Early Algebra rivolti all'azione di classe

- Malara, N.A., 2008, **Methods and tools to promote a socio-constructive approach to mathematics teaching in teachers**, in Czarnocha, B., *Handbook of Teaching Research*, University of Rzeszów press, Rzeszów, 89-102, in versione italiana su *Università e Scuola*, anno XII, n. 2, 70-84
- Malara, N.A. , Navarra, G. 2009a, **The analysis of classroom-based processes as a key task in teacher training for the approach to early algebra**. In B. Clarke, B. Grevholm, and R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* Springer, Berlino, 235-262

## Gli studi sulla formazione degli insegnanti in Early Algebra rivolti all'azione di classe

- Cusi, A., Malara, N.A., 2012, Educational processes to promote, among teachers and in the classes, a linguistic approach to algebra: behaviours, difficulties and awareness emerged in teachers, In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.299-319). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cusi, A., Malara, N.A. (2015). **The intertwining between theory and practice: influences on ways of teaching and teachers'education**, in English, L. & Kirshner, D. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Third Edition (pp. 504-522) London: Taylor & Francis group

## Recentissimo e significativo contributo al progetto di G. Navarra

### Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni

Il libro è destinato ai docenti della scuola primaria e secondaria di primo grado e a quelli dell'infanzia, ma si rivolge anche alla scuola secondaria di secondo grado, ai ricercatori e ai formatori. È diviso in sei Parti. Cinque delineano le concezioni fondative di una didattica nella prospettiva dell'*early algebra*: le prime tre – *Metodologica, Sociale e Psicologica* – supportano lo sviluppo delle competenze linguistiche che, a loro volta, sostengono l'evoluzione di quelle *matematiche*. Nel loro insieme definiscono l'*impalcatura* del Progetto ArAl, promotore di una didattica innovativa dell'aritmetica e dell'algebra, considerato spesso complesso perché porta a rivedere conoscenze, convinzioni, abitudini. *Mette in crisi* ma allo stesso tempo propone nuovi scenari teorici, di contenuto e di metodo. Aiuta a capire che, *per formare alunni metacognitivi, è necessario diventare insegnanti metacognitivi*. Guida a comprendere che *un docente di matematica è, anche, un docente di linguaggio matematico*.

**Giancarlo Navarra** ha lavorato nel campo dell'educazione matematica come insegnante-ricercatore nella scuola secondaria di primo grado e come professore a contratto presso l'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia. Dagli anni '90 il suo principale campo di ricerca riguarda l'insegnamento e l'apprendimento dell'aritmetica e dell'algebra nella scuola del primo ciclo, con anticipazioni importanti alla scuola dell'infanzia. Ha avviato, assieme a Nicolina Malara, il Progetto ArAl, di cui è responsabile scientifico e coordinatore delle sperimentazioni a livello nazionale. È autore di più di cento pubblicazioni.



deaformazione.it

Un portale dedicato all'aggiornamento e alla formazione professionale degli insegnanti.

€ 33,00



UTET  
UNIVERSITÀ

Giancarlo Navarra



### Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni

Ruoli dell'insegnante nella costruzione  
di una classe pensante

UTET  
UNIVERSITÀ

## Sviluppi del progetto ArAI

Dal 2018 è in corso di sperimentazione un ampio studio di innovazione sulla didattica del problema che riguarda:

- aspetti logico-linguistici e di interpretazione
- l'intreccio problem solving e problem posing (verso la dimostrazione)
- Il coordinamento tra argomentazione e modellizzazione algebrica
- Il passaggio dall'argomentazione informale (presenza del soggetto e dell'azione) all'**argomentazione** impersonale-giustificativa di **comunicazione** (verso il testo matematico)

Malara, N. A. Bruno, N. (2019). Variazioni possibili attorno al problema nella scuola primaria: l'intreccio problem solving e problem posing. In D'Amore, B. *et al.*, *Incontri con la Matematica* n. 33, Pitagora Bologna

Malara, N. A., Telloni, A. I. (2022). An innovation project about the teaching of verbal problems in the early algebra frame, T.L. Tho *et al.* *TSG 17-ICME14 book* Springer

L'evoluzione dei nostri studi sia sul versante del problem solving e posing sia sull'early algebra ci ha portato nel tempo a maturare

***una visione ampia e ramificata  
della didattica del problema***

che contempla attività diverse, ciascuna con specifiche finalità, ma che insieme concorrono a costruire negli allievi una concezione di

***problema come 'core'  
di un sistema interconnesso di attività***

che coniuga

- *aspetti logico-linguistici e argomentativi*
- *problem solving e problem posing*
- *early algebra*

# Early Algebra



## **Il problem solving**

L'argomentazione del processo risolutivo: **passaggio dal registro descrittivo-procedurale al registro giustificativo-relazionale**

## **Il problem solving**

L'interpretazione del testo e sue rappresentazioni

- **l'oggettivazione dei dati e delle relazioni tra loro**
- **la connessione delle relazioni**

## **Il problem solving**

Costruzione di espressioni numeriche risolutive

**Interpretazione di espressioni e riconoscimento di equivalenze**

**I PROBLEMI  
VERBALI  
STANDARD**

**'CUORE' di un sistema interconnesso di  
attività**

**VERSO L'ALGEBRA**

Studio autonomo di *espressioni algebriche, equazioni, funzioni*

## **Il problem posing**

Costruzione di problemi diversi in uno stesso contesto  
Riconoscimento di problemi analoghi  
**Costruzione di problemi analoghi in contesti diversi**

## **Dal problem solving al problem posing**

**Variazione dei dati numerici di un problema e legittimità dei valori assegnati.** Costruzione delle corrispondenti espressioni risolutive

## **Il problem posing aritmetico**

Analisi di espressioni risolutive di un problema nate per variazione dei dati:  
**posizione e soluzione di nuovi problemi**

## Prospettive di sviluppo del progetto ArAI

Strutturazione di sequenze didattiche nell'ottica delle Unità ArAI relative a studi sperimentali tra scuola primaria e secondaria rivolte a:

- L'intreccio problem solving e problem posing in prospettiva algebrica
- Esplorazioni numeriche formulazione di congetture e dimostrazione in relazione con la divisibilità
- La costruzione ed armonizzazione dei concetti di: rapporto, proporzione, frazioni equivalenti/numero razionale, funzione di proporzionalità, con ampio riferimento a situazioni del reale ed alla modellizzazione algebrica
- La costruzione dei numeri relativi con attenzione a: il passaggio concreto/ astratto, la conquista della visione di numero relativo come coppia (segno, numero naturale), l'ordinamento e l'ampliamento della linea dei numeri, l'identificazione dei naturali con gli interi positivi, la definizione della moltiplicazione ed il ruolo delle proprietà aritmetiche.
- Il rilevamento di analogie e differenze tra strutture additiva e moltiplicativa nei naturali e negli altri ambiti numerici.



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DELL'AQUILA



DISIM  
Dipartimento di Ingegneria  
e Scienze dell'Ingegneria  
e Matematica

...  
*Il sole lentamente si sposta  
sulla nostra vita, nella paziente  
storia dei giorni che un mite  
calore accende, di affetti e  
di memorie*

...

(Attilio Bertolucci, *At home*)