XXXVI CONVEGNO UMI-CIIM AQ2022

La Matematica come valore essenziale della crescita personale e sociale:
La sfida educativa per l'inclusione

Lavorare con e per gli studenti in difficoltà in matematica in classe

Maurizio Berni
già docente di matematica (fino all'a.s. 18/19)
DS Istituto d'Istruzione Superiore SANTONI di Pisa

Elenchi e procedure

Il primo approccio nell'affrontare classi "deboli" (complessivamente, non solo in matematica) è quello di affidarsi a *procedure standardizzate*;

i contenuti su cui misurare le conoscenze sono costituiti da *elenchi*: elenchi di oggetti, elenchi di procedure

→ Ne risulta un'immagine *disarticolata* della disciplina, paradossalmente più difficile di un corpus organico di conoscenze legate tra loro

Questa difficoltà (affaticare le menti ad operare a lungo in un contesto caratterizzato da mancanza di senso) alimenta il circolo vizioso delle difficoltà in matematica

qualche esempio

ELENCHI

- Le frazioni si suddividono in: proprie, improprie, apparenti
- i numeri decimali (insieme numerico inesistente!!) possono essere limitati o illimitati; quelli illimitati possono essere periodici o aperiodici, e quelli periodici possono essere semplici o misti
- Le equazioni di secondo grado possono essere pure, spurie o complete
- …..

NB termini già "occupati" da significati nel linguaggio comune… che devono diventare "asettici", per non indurre evocazioni fuorvianti…

qualche esempio

PROCEDURE

La frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice è una frazione avente: - al numeratore la differenza tra l'intero numero scritto senza la virgola e la parte intera; - al denominatore tanti nove quante sono le cifre che compongono il periodo.

(https://www.youmath.it/lezioni/algebra-elementare/lezioni-di-algebra-e-aritmetica-per-scuole-medie/553-dalle-frazioni-a-numeri-decimali.html#:~:text=La%20frazione%20generatrice%20di%20un%20numero%20decimale%20periodico%20semplice%20%C3%A8,cifre%20che%20compongono%20il%20periodo. - ultimo accesso 18/08/22)

qualche esempio

ELENCHI

- Nel calcolo letterale si hanno *monomi* e *polinomi*; quando il polinomio è formato da due monomi si chiama *binomio*; con tre monomi *trinomio*, con quattro monomi *quadrinomio* e con più di quattro monomi polinomio senza ulteriori specificazioni
- prodotti notevoli (quadrati e cubi di binomi e di trinomi; somme e differenze di cubi; differenze di quadrati…)

NB Seguendo Prodi (matematica come scoperta), sarebbe sufficiente parlare di polinomi; l'introduzione precoce dei "prodotti notevoli" produce (a volte) abilità di calcolo, ma ostacola la consapevolezza dell'uso delle proprietà delle operazioni

qualche esempio

PROCEDURE

Elenchi di procedure per

- “eseguire” somme (e differenze) di monomi simili, somme (e differenze) di polinomi, moltiplicazioni di polinomi, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori, ecc. …

….dilatando a dismisura l’entità di un argomento, quello del cosiddetto “calcolo letterale”, a discapito del metodo matematico che è di indagine nell’affrontare problemi e non abilità nell’eseguire procedure

NB Prodi, “Matematica come scoperta” (I ed.) capitolo 9, pagg. 81-97 (su 275); altro libro di testo molto diffuso: pagg. 246-456 su 730 (esclusa geometria)

La sicurezza di una procedura

Non si tratta di rinunciare a priori alla “sicurezza” di una procedura, ma piuttosto di evitare che sia fine a se stessa, perché la parte difficile non è apprendere le singole procedure, ma legare le varie procedure (e gli elenchi) in un contesto di senso

Le singole procedure avulse da un contesto di senso non costruiscono competenze matematiche

al contrario, sono parte di una disciplina addestrativa di tipo esecutivo che nulla ha a che fare con la matematica

Problematizzare

Come facciamo a trasformare un numero decimale in frazione?

Bisogna che un suo multiplo intero sia intero… $ax = b \rightarrow x = \frac{b}{a}$

se il decimale è finito, in che modo possiamo fare? (moltiplicando per 10 si sposta la virgola…)

se il decimale è illimitato periodico cosa succede se provo a fare la stessa cosa? (primi paradossi dell'infinito…) … i decimali restano infiniti ma se la parte decimale è la stessa cosa altro si può fare?

… (sperimentare in classe)

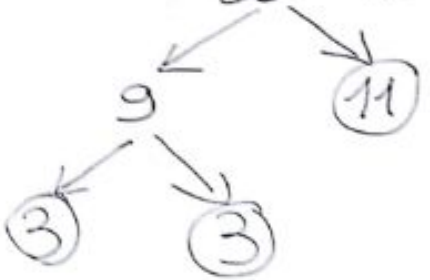
Problematizzare

$MCD = 2^0 \cdot 263^0 \cdot 3^0 \cdot 11^0$

$mcm = 2^3 \cdot 263 \cdot 3^2 \cdot 11$

$2104 = 2^3 \cdot 263 \cdot 3^0 \cdot 11^0$

$99 = 3^2 \cdot 11 \cdot 2^0 \cdot 263^0$



$x = 21,\overline{25}$

$100x = 2125,\overline{25}$

$$\begin{array}{r} 2125,\overline{25}\ - \\ 21,\overline{25} = \\ \hline 2104,00 \end{array}$$

$$\frac{\cancel{99}x}{\cancel{99}} = \frac{2104}{99}$$

~~2104~~
~~99~~
~~2005~~
~~1906~~
~~1807~~
~~25/24~~ = 1

Per lunedi:

$x = 14,\overline{12}$

Problematizzare

Che significa fare “calcolo letterale”?

In quali forme possono presentarsi i polinomi?

Quando posso considerare “uguali” o “equivalenti” due polinomi? (Proprietà delle operazioni in atto!! Cominciamo col proporre 125*123456789101112*8….)

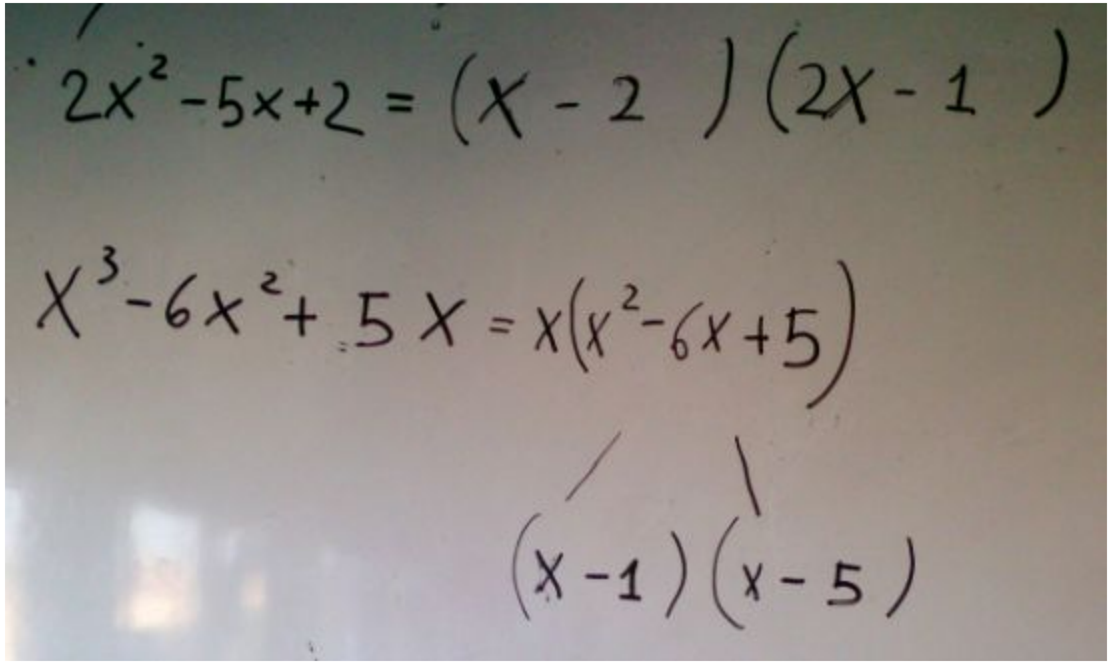
Vogliamo ottenere una forma particolare? Perché proprio quella e non altre?

“La scomposizione di polinomi in fattori: applicazioni di regole o scoperta?”

Qual è lo statuto matematico di una “regola”?

qualche esempio

Procedere per tentativi ed errori, indagine guidata (dal ragionamento…)



(Classe seconda agrario, dicembre)

Il ragionamento è difficile!

Il ragionamento è difficile, ma necessario, per dare un senso a ciò che si fa

Tuttavia esistono vari tipi di ragionamento

Quello logico-deduttivo richiede una maturazione di facoltà del pensiero che si sviluppano a età diverse (Piaget), più disciplina e allenamento, ma non è l'unico modo di ragionare (e forse neanche il più adatto "a digiuno", almeno in certi contesti)

Può essere "simulato" da studenti/sse "scolarizzati/e" che imparano a memoria una dimostrazione (compromesso delle risposte corrette)

Importanza dell'**argomentazione** come competenza di cittadinanza

Esempi di dimostrazioni imparate a memoria e non capìte (da me!)

- dimostrazioni dei criteri di uguaglianza dei triangoli
- dimostrazione del teorema di Talete applicando il criterio generale di proporzionalità:

"Condizione necessaria e sufficiente affinché le grandezze di due insiemi in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:

1) A grandezze uguali dell'uno corrispondano grandezze uguali dell'altro

2) Alla somma di due o più grandezze dell'uno corrisponda la somma di due o più grandezze dell'altro"

- …

argomentazione

Ci sono vari tipi di argomentazione. Quello forse più naturale è la narrazione; il susseguirsi di azioni nel tempo, in ordine cronologico.

Bruner, nel suo libro “La cultura dell’educazione”, parla espressamente di narrazioni anche nella scienza.

In tutti i tecnici del settore tecnologico c’è la disciplina “Tecnologie e tecniche di rappresentazione grafica” - un’occasione da non perdere

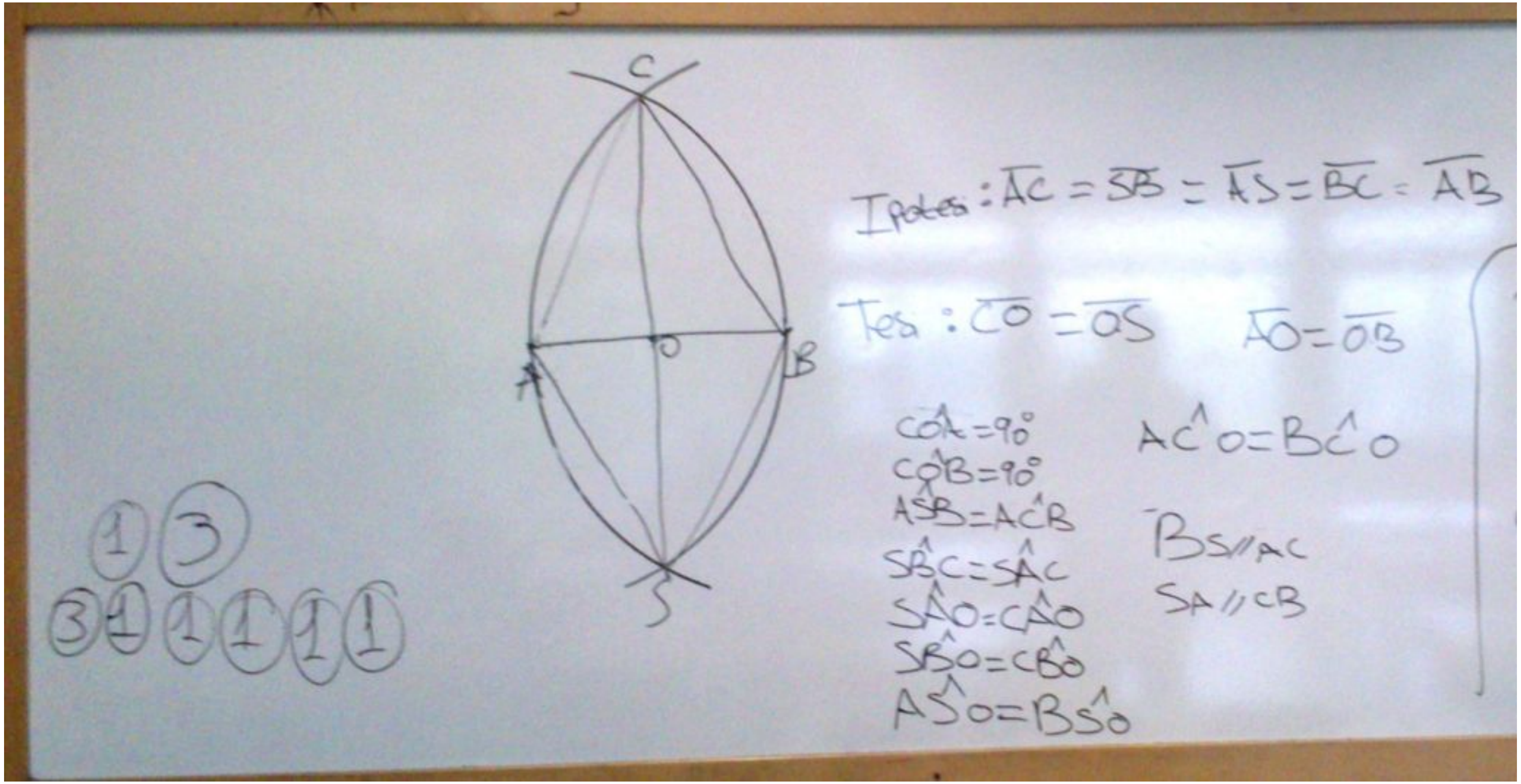
Nelle costruzioni geometriche con riga e compasso esplicitare le operazioni significa “scoprire” e applicare i primi tre assiomi di Euclide

argomentazione

1. Unire due punti con una linea retta
2. Prolungare un segmento
3. Descrivere una circonferenza dati un centro e un raggio (o un arco)

descrivere una costruzione con riga e compasso ordinando queste operazioni in sequenza temporale (che diviene in modo "naturale" anche una sequenza logica) significa sperimentare (e cominciare a riconoscere) la differenza tra ipotesi e tesi

argomentazione



argomentazione

Recuperare il carattere operativo della geometria euclidea non è un "adattamento al ribasso", è un'operazione culturale di recupero della realtà storica della geometria:

Proposizione I-1 degli Elementi di Euclide:

"Costruire un triangolo equilatero su una retta finita data."

Aprire l'originale invece dei libri di testo induce molte riflessioni.

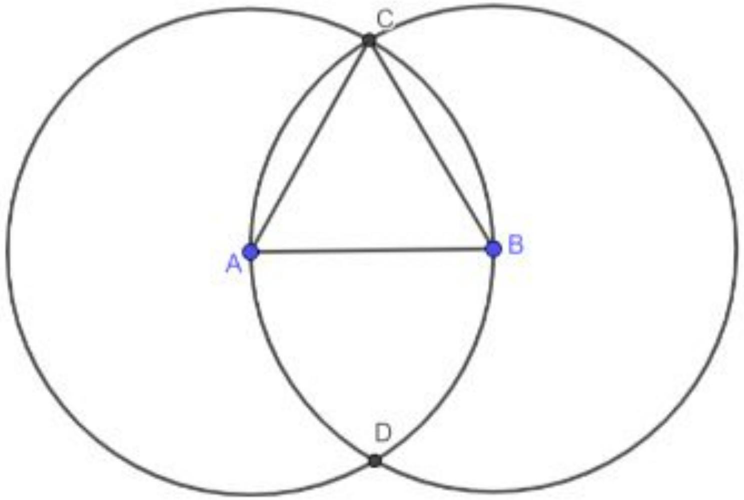
L'operazione didattica di una narrazione cronologica della costruzione assume uno spessore storico

argomentazione

1. Unisco due punti 

(postulato 1)
2. Costruisco due circonferenze di raggio AB e centri in A e B (postulato 3)
3. Chiamo C uno dei punti di intersezione delle due circonferenze, e unisco C con A e B (postulato 3)

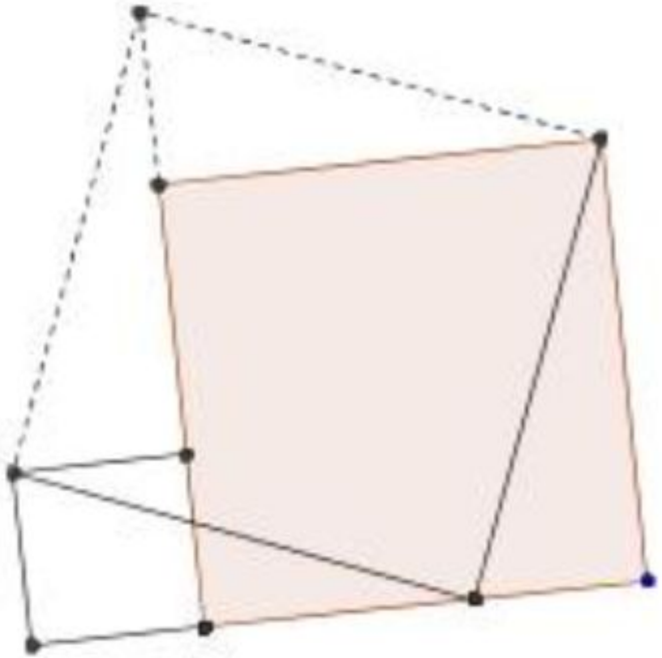
TESI: Il triangolo è equilatero.



Il problema dell’eredità

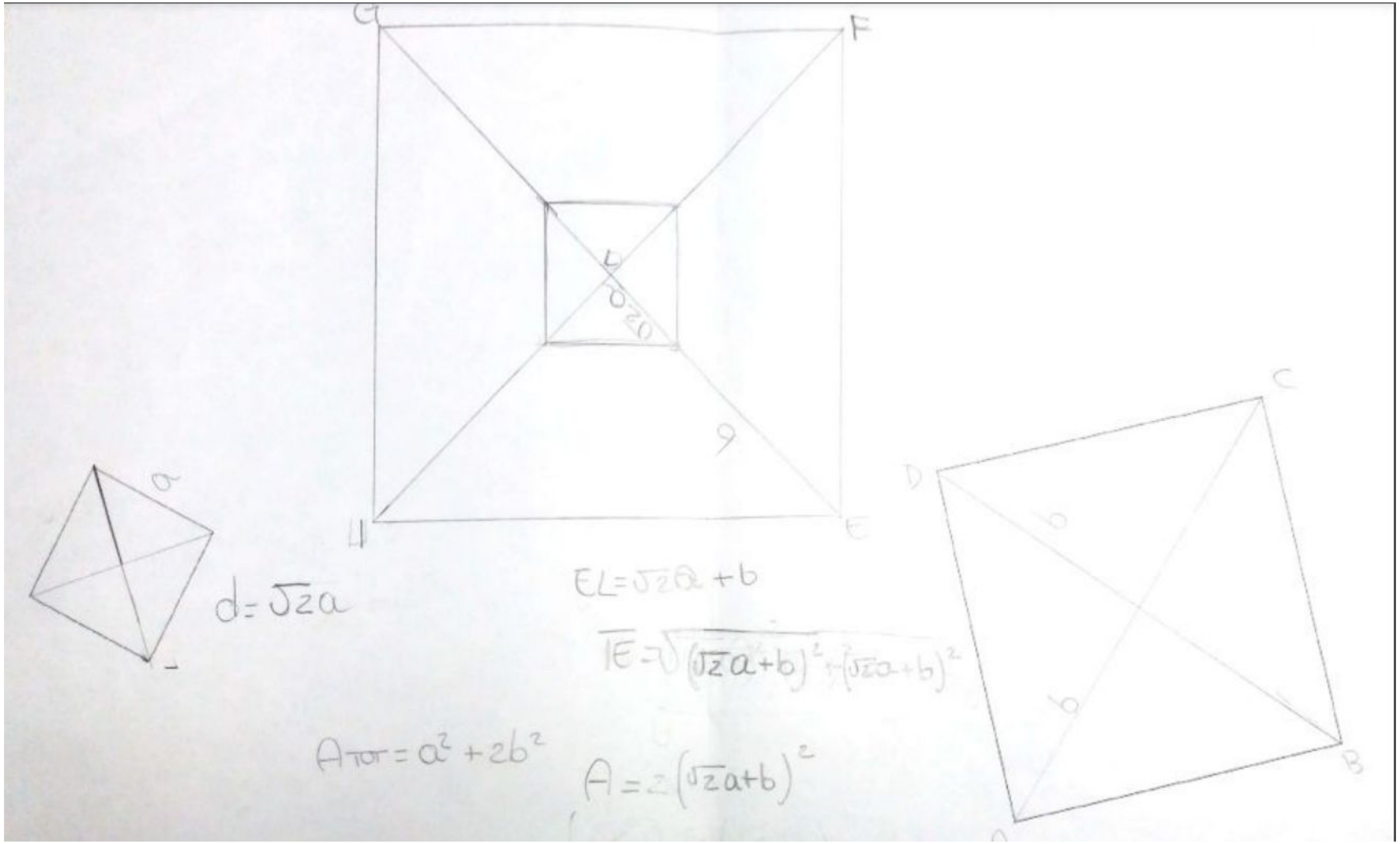
"Un contadino egiziano, Nilus, proprietario di un campo di forma quadrata, eredita alla morte del padre un altro campo, sempre di forma quadrata; con l'aiuto di uno scriba e di alcuni arpedonapti, desidera riunire i due appezzamenti, piuttosto distanti, in un unico campo, ancora di forma quadrata, che potrà coltivare più agevolmente. Se tu fossi lo scriba, che istruzioni daresti agli arpedonapti? Osservando il nuovo campo, Nilus non è convinto che la nuova superficie sia proprio la somma delle precedenti; in che modo cercheresti di convincerlo?"

Il problema dell’eredità



La soluzione “che vorrei”.... (semplificando al massimo!)

Il problema dell’eredità



Il problema dell'eredità

$$A = 2(\sqrt{2}a + b)^2$$

$$2\,(\sqrt{2}a + b)\cdot(\sqrt{2}a + b)$$

$$2\cdot(\sqrt{4}a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ab)$$

$$2\cdot(2a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab\cdot 2)$$

Il problema dell’eredità

Occorre essere consapevoli che le preconoscenze (in particolare quelle indotte in modo trasmissivo) costituiscono un inciampo nella costruzione delle nuove conoscenze con questa modalità; è una condizione con cui bisogna fare i conti (si pensi ai “pregiudizi” nel senso di Dewey).

Ma non va negata, bisogna interagirci (non ci sono ricette)

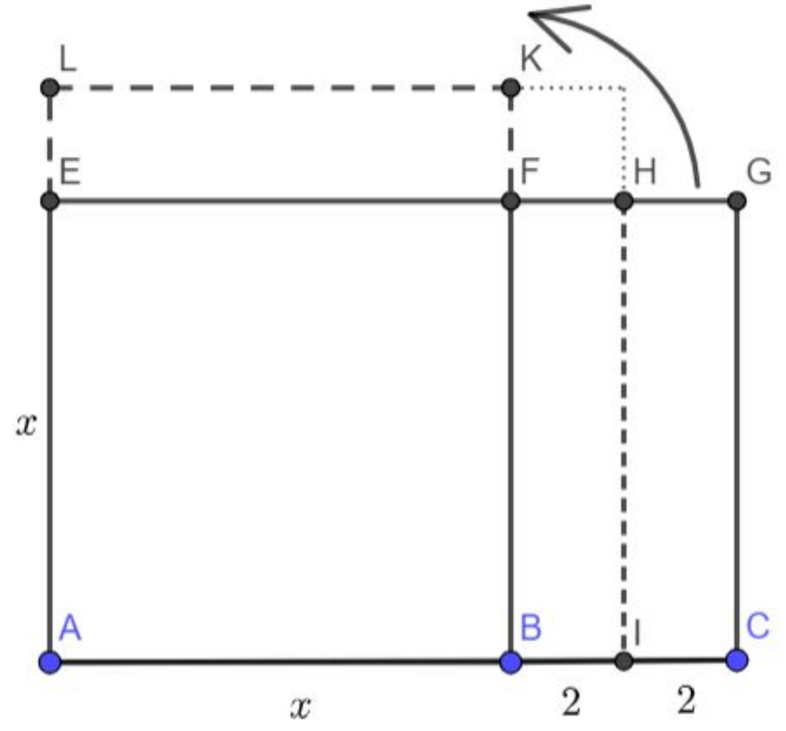
equazioni di II grado (senza formula)

In un rettangolo la base supera l'altezza di 4 cm, e l'area è 50 cm^2; quanto misurano la base e l'altezza del rettangolo?

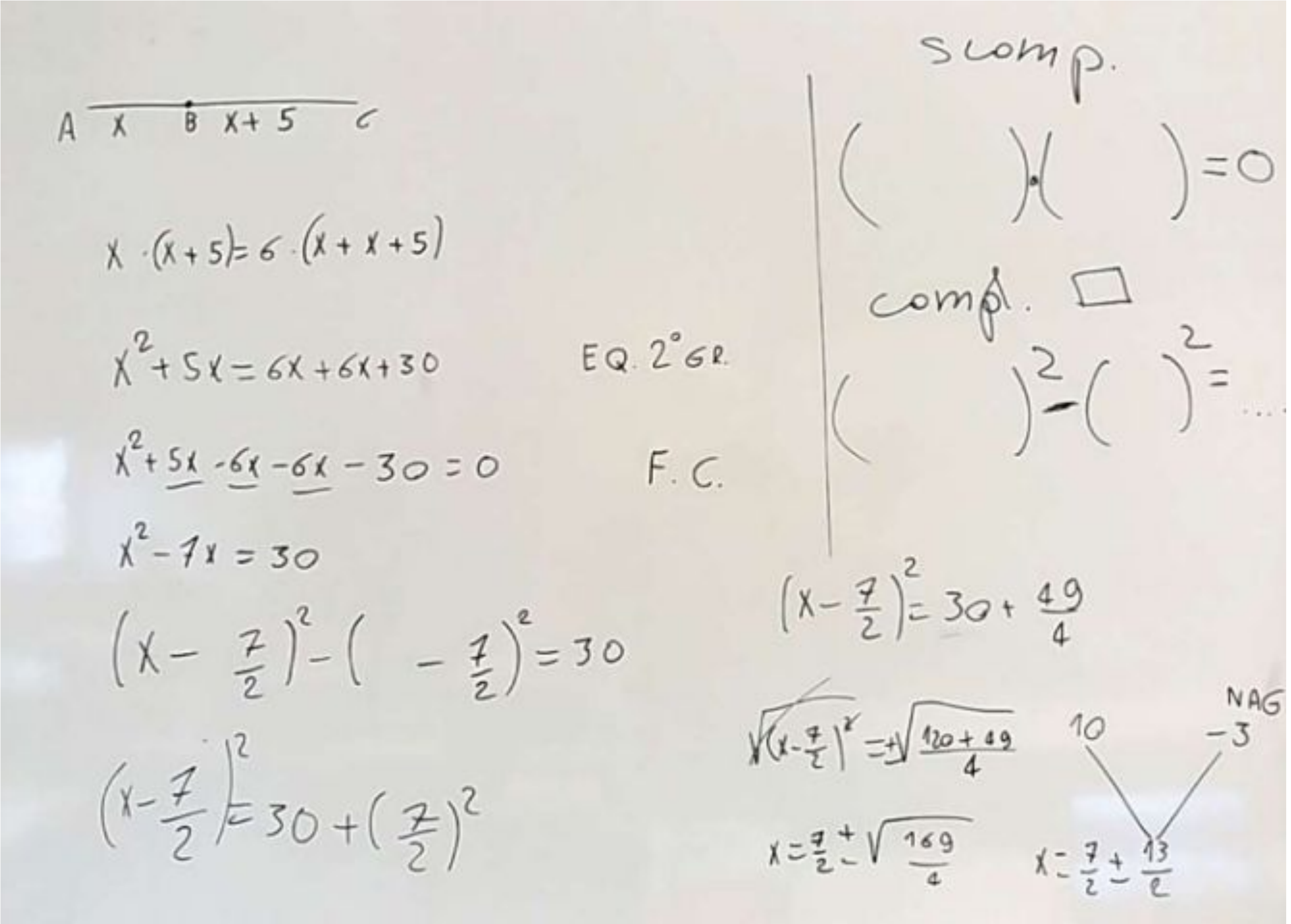
$$x(x+4)=50$$

"Per trovare la *x* devo farla comparire una volta sola…" (da uno studente…)

$$(x+2)^2-(2)^2=50$$



equazioni di II grado (senza formula)



Qual è la metà di 7???

Qual è il senso di applicare la “formula del delta” se non so fare la metà di 7???