



Unione
Matematica
Italiana



**L'insegnamento della matematica tra ricerca
didattica e prassi scolastica 2021/22**

COSTRUIRE SIGNIFICATI: IL CASO DELLE FRAZIONI

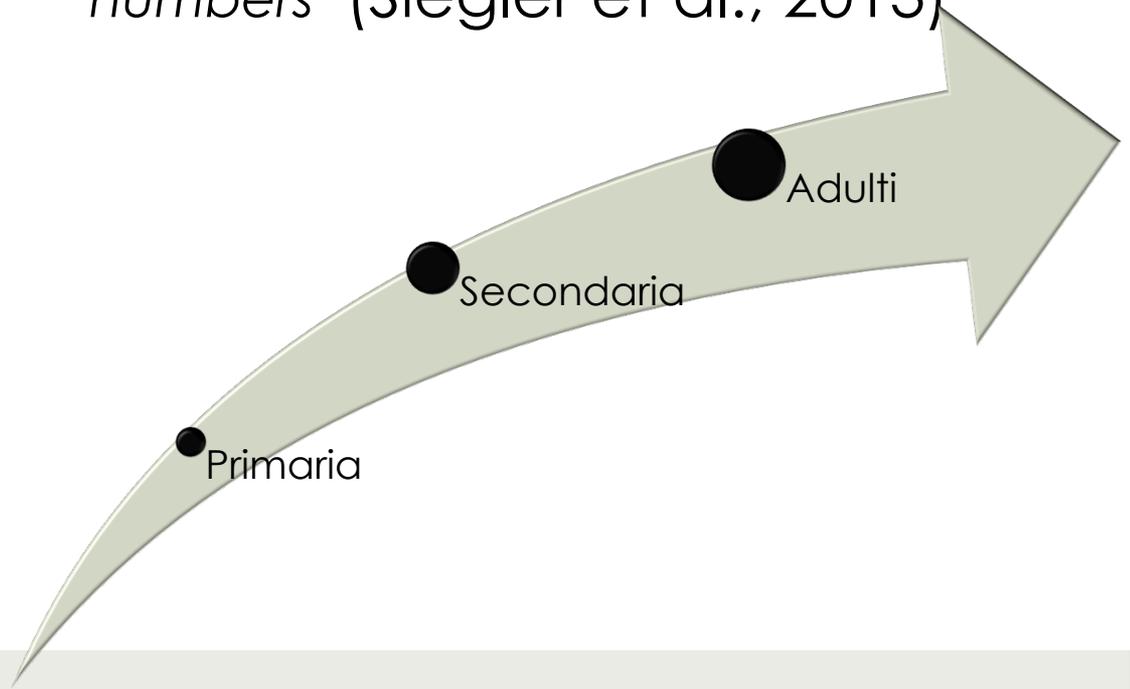
Elisabetta Robotti
Università di Genova
robotti@dima.unige.it

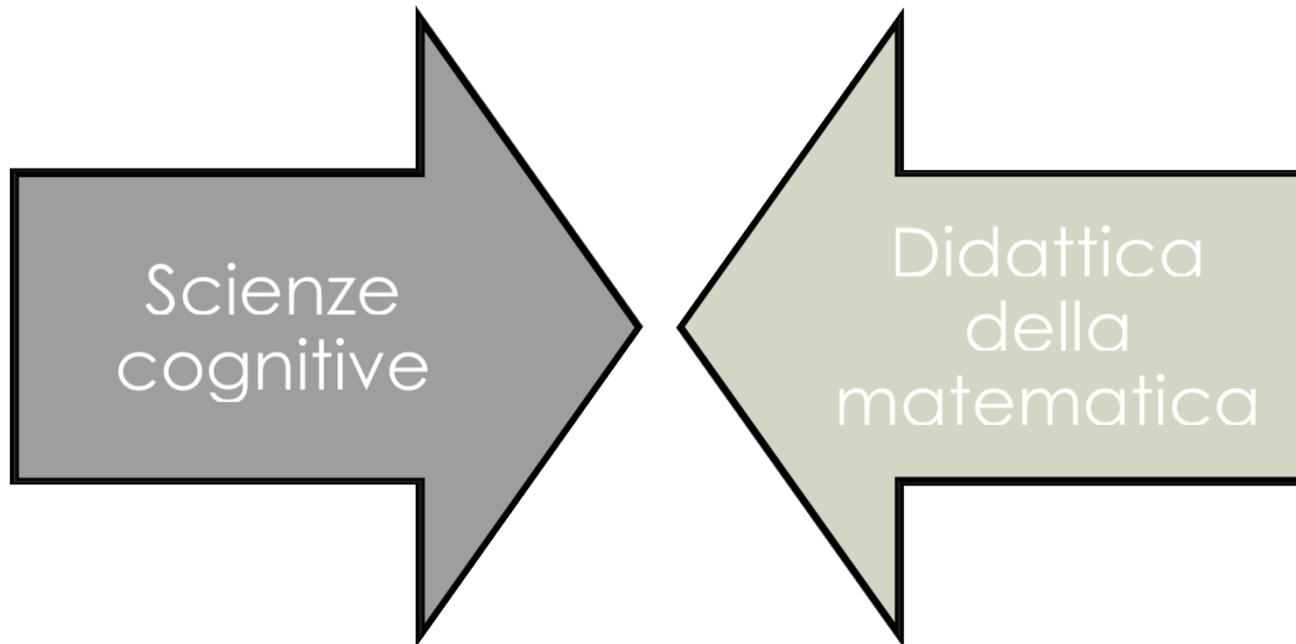
Giuditta Ricciardiello
Università di Bari
giuditta.ricciardiello@gmail.com

Marie Claire Courthod
Maria Ida Viglino (AO)
m.courthod@mail.scuole.vda.it



- Perché sono una delle principali difficoltà rilevate a livello nazionale (INVALSI) e internazionale (OCSE-PISA)
- Perché *“algebra proficiency is more closely related to conceptual knowledge of fractions than to conceptual knowledge of whole numbers”* (Siegler et al., 2013)





rappresentazioni

significati

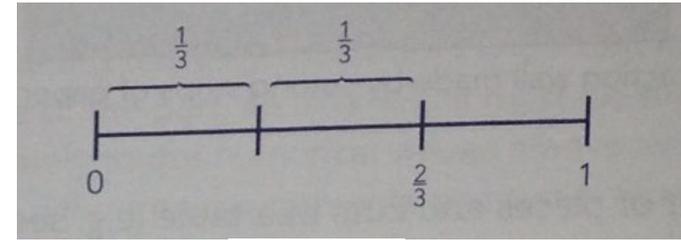
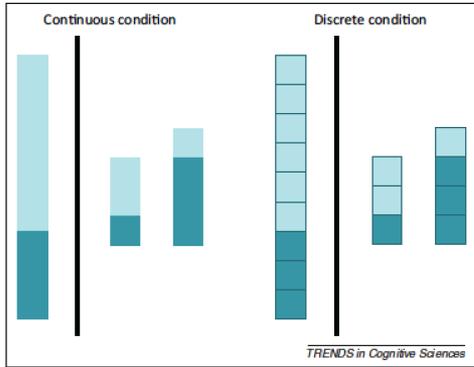
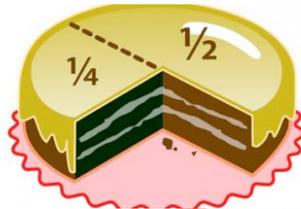


difficoltà

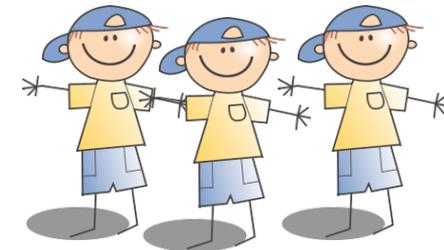
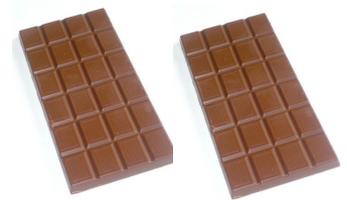
CONTENUTI DISCIPLINARI:
frazioni



Significati di frazione

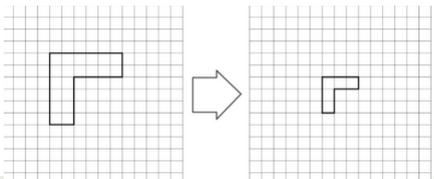


$$15\% = \frac{15}{100}$$



$$2:3 = 0,\overline{6}$$

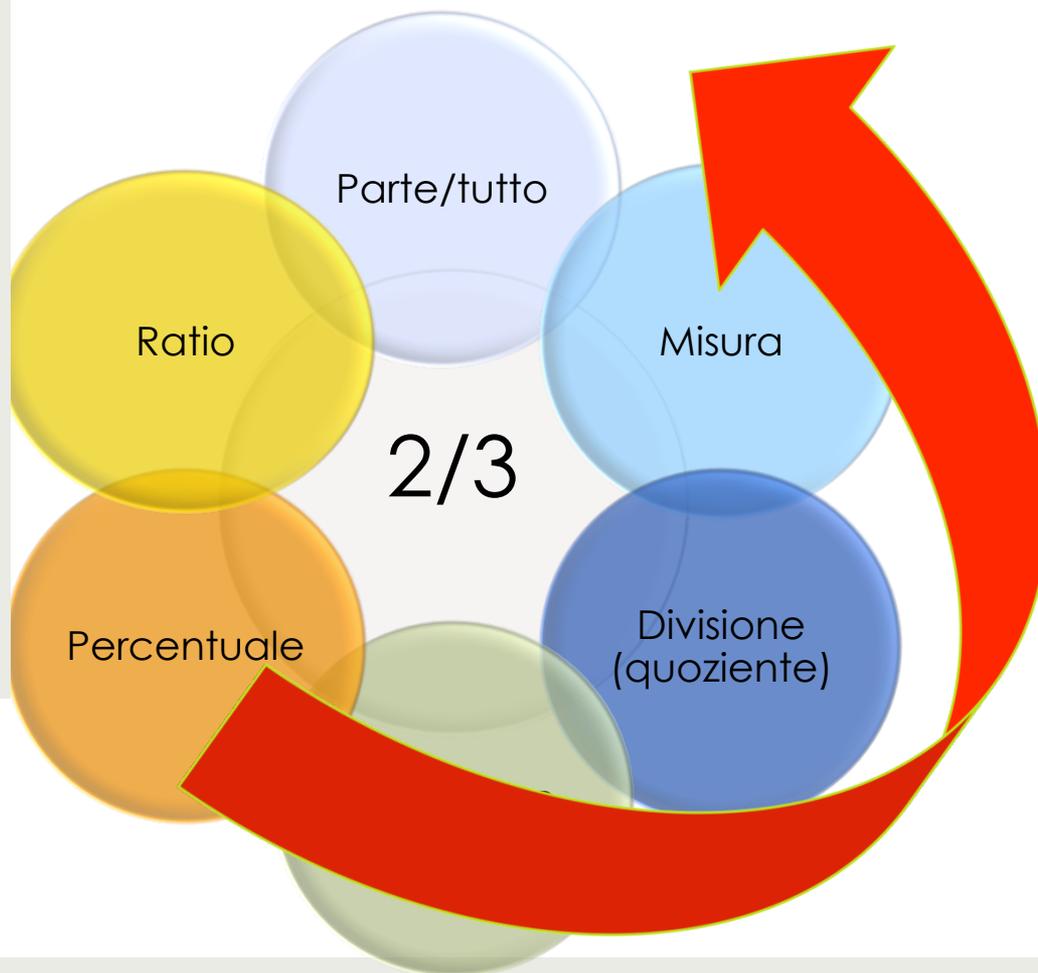
Opera su una quantità o su una misura:
 - 2/3 della classe resta a casa (2/3 di 12 bambini)



CONCETTO DI FRAZIONE

La comprensione del concetto dipende dalla comprensione di ciascuno dei suoi significati così come dalla loro connessione

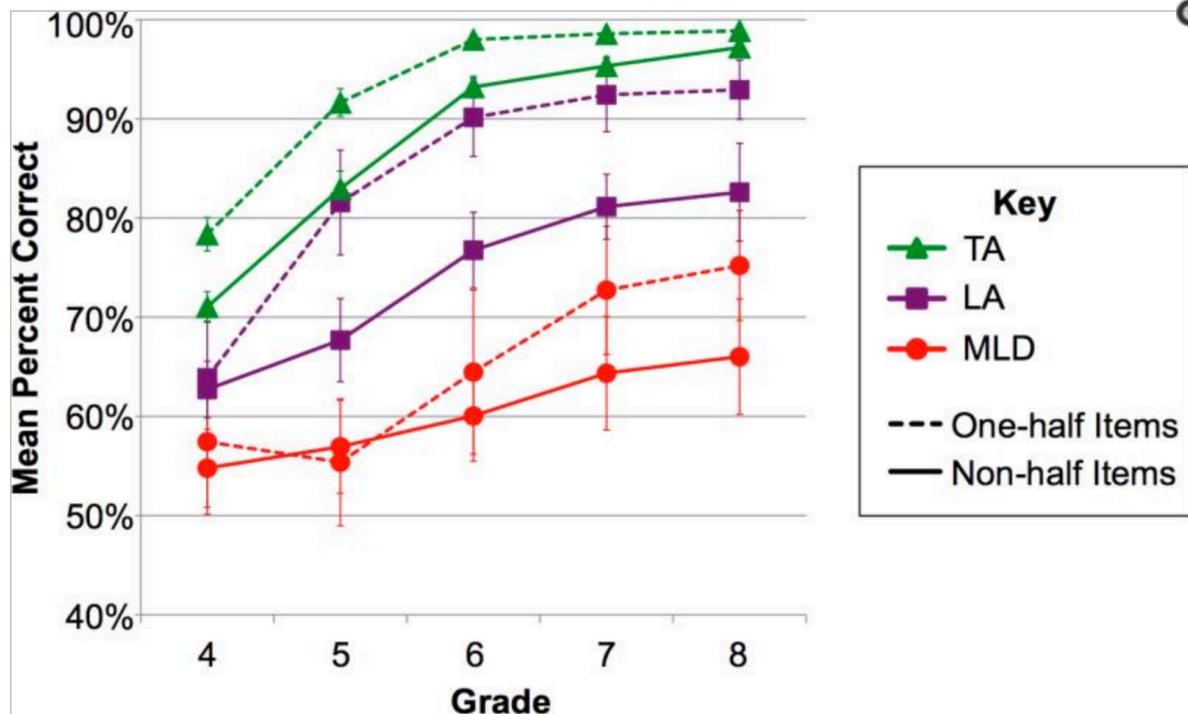
(Kieren, 1976).



cominciamo con...dividere
un'unità concreta in parti uguali.

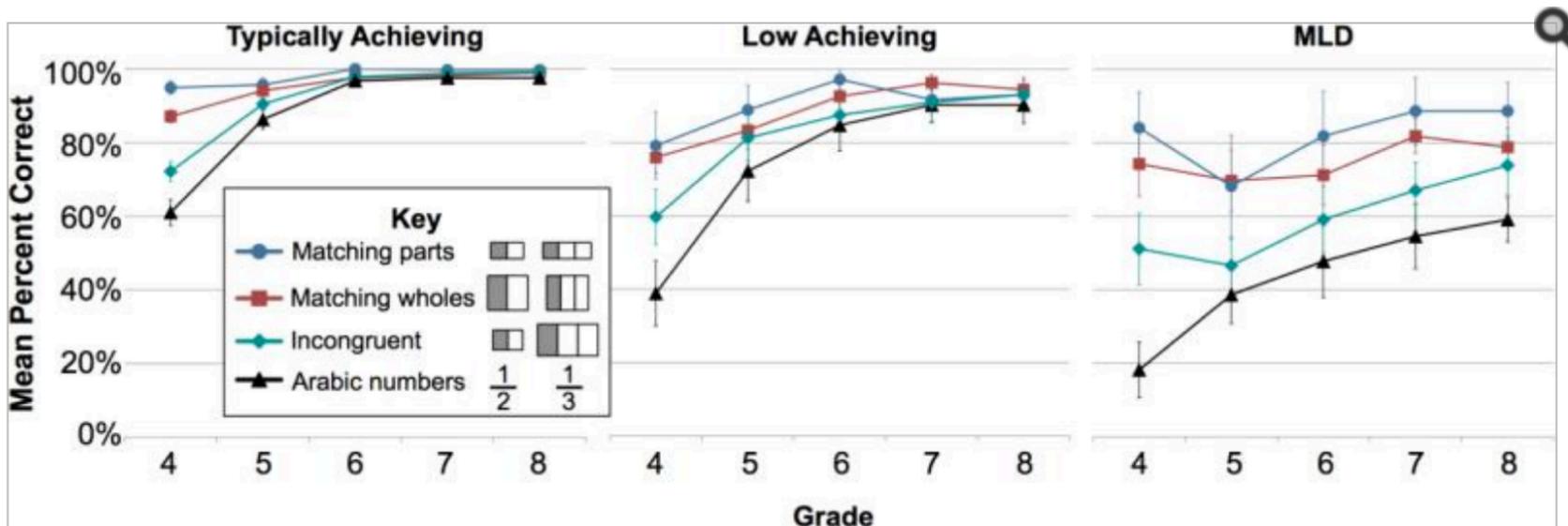


Premessa: il confronto di frazioni che includono $\frac{1}{2}$ ha risposte più facilmente corrette rispetto al confronto di frazioni che non includono $\frac{1}{2}$ (Mazzocco et al., 2013, pag 380).



Da un punto di vista didattico ha senso mantenere a lungo esempi che richiamano $\frac{1}{2}$

Quale relazione fra Rappresentazione usata e performance?



Mean accuracy rates (and standard error) across SymMCoF “one-half” items as a function of item format. TA = typically achieving; LA = low achieving; MLD = mathematical learning disability.

Bambini possono trarre beneficio da un uso continuato dei modelli visivi come una delle strategia migliori per sostenere l'apprendimento sulle frazioni e risolvere i problemi che coinvolgono frazioni

APPROCCIO MULTIMODALE

I processi cognitivi sono legati al sistema senso-motorio del cervello (*Gallese and Lakoff 2005*) e sono attività multimodali, cioè si realizzano tramite modalità diverse attivate contemporaneamente: fare, toccare, muoversi, vedere, ... , sono componenti essenziali dei processi di pensiero e del pensiero matematico (a tutti i livelli)

(*Arzarello et al. 2007; Nemirovsky 2003; de Freitas and Sinclair 2013; Radford 2014*)

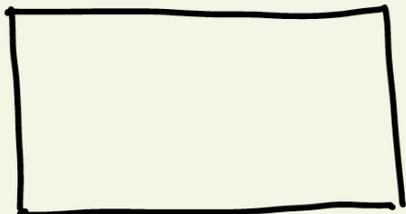
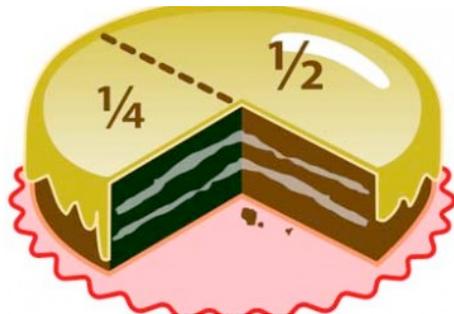


Riflessioni sulle rappresentazioni

Riflessione didattica con spunti dalle scienze cognitive

dividere un' *unità*: *ruolo dei modelli*

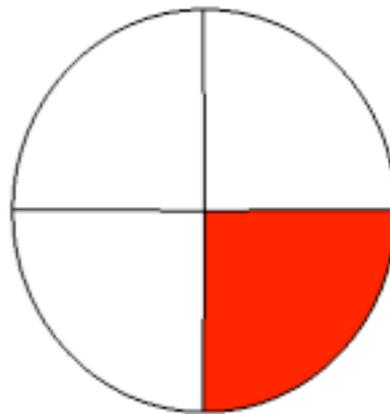
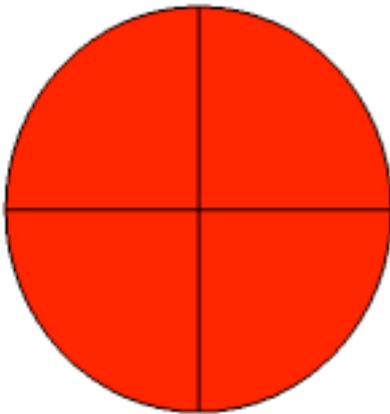
- Modelli continui
- Modelli discreti



difficoltà legate al
modello continuo

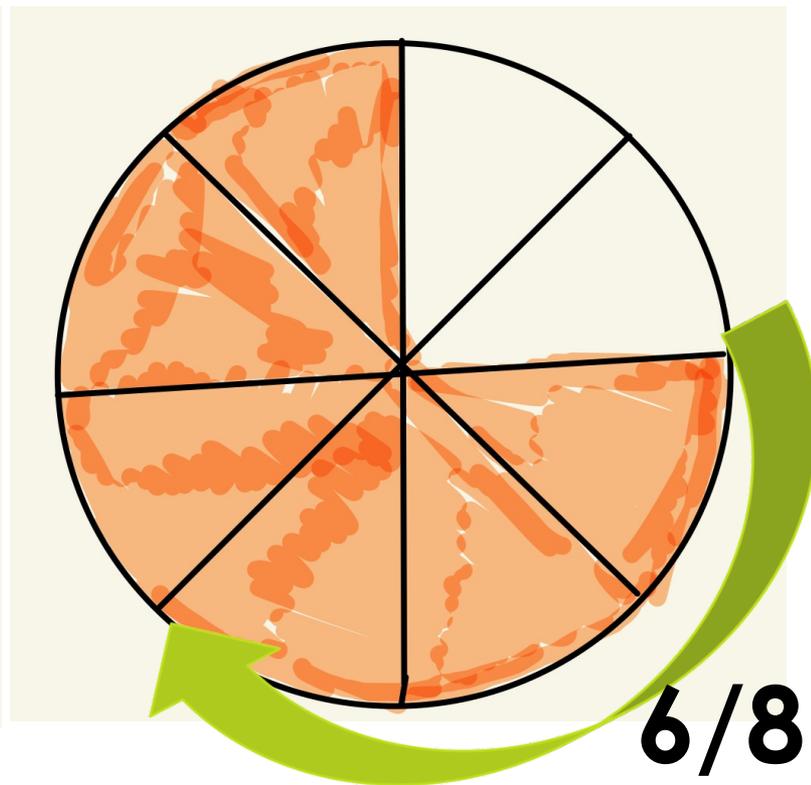
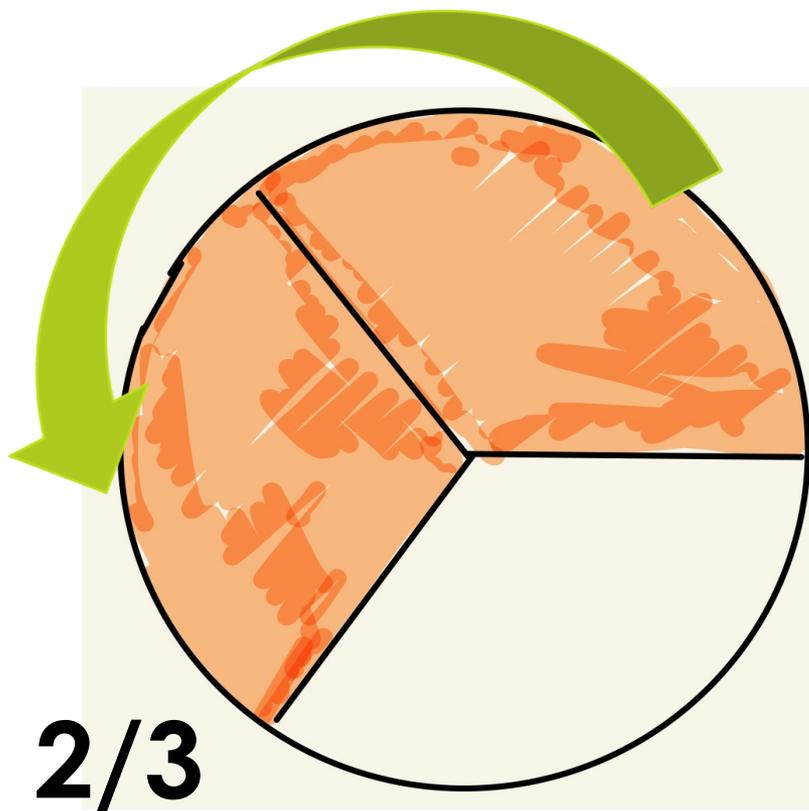
Come
rappresento
 $5/4$?

Perché
non $5/8$?



ciò che divido
non è né la
circonferenza, né
l'area, bensì
l'angolo giro

difficoltà legate al
modello continuo

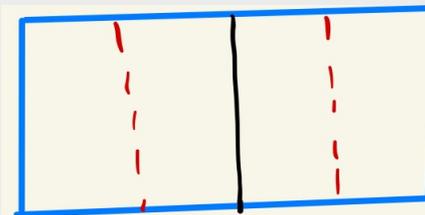
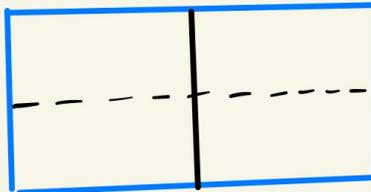
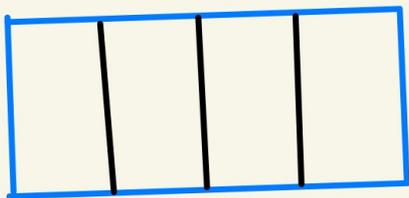


Attenzione agli aspetti percettivi

$1/n$	Monodir.	Multidir.	Metà di metà
-------	----------	-----------	--------------

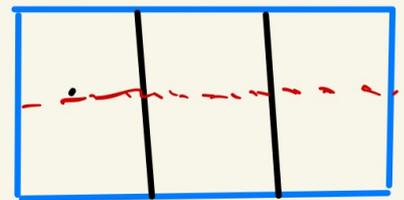
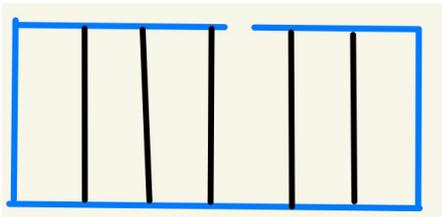
2^m

$n=4$



$2 \times m$

$n=6$

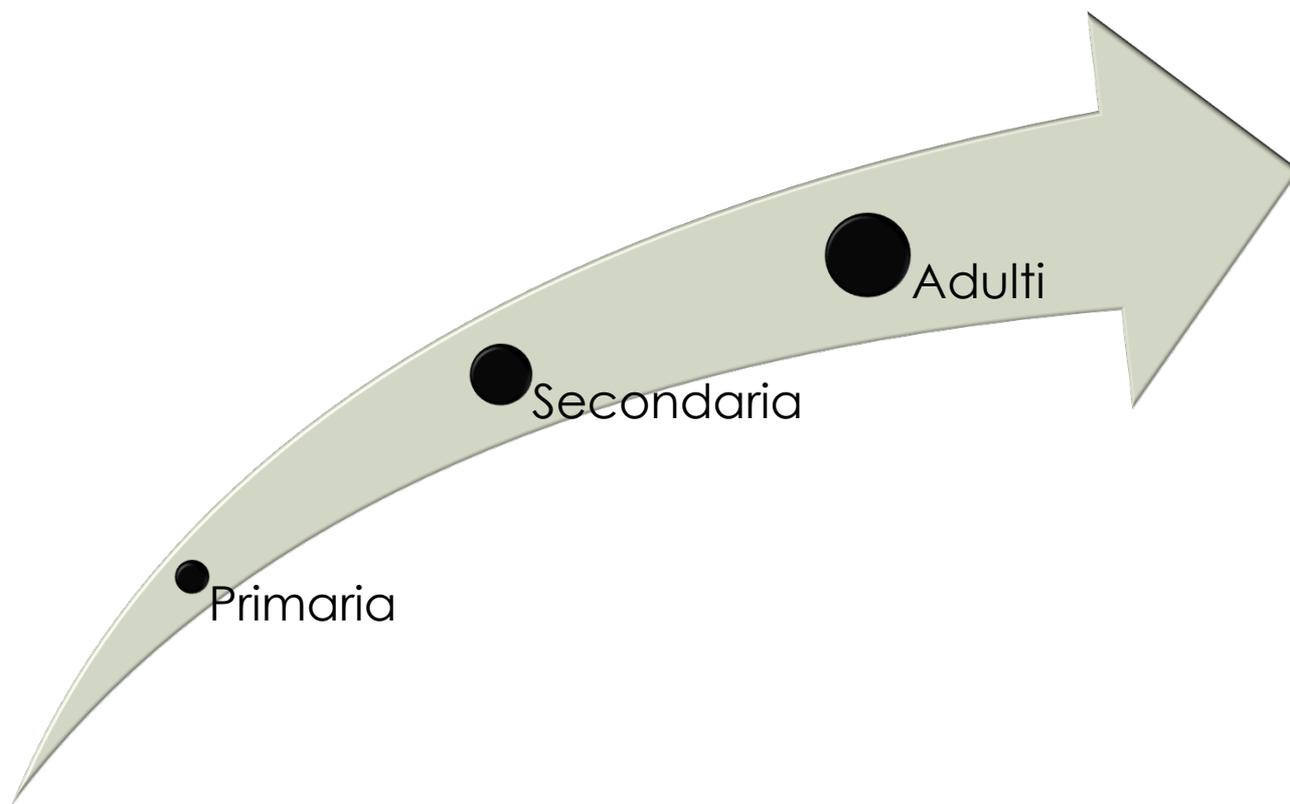


$n \times$

Attenzione quindi a:

- strategie usate sul lungo termine (metà di metà, monodir/multidir)
- scelte didattiche: denominatori che assegniamo (4 → per vedere dir → metà di metà; 6 → per vedere multidir)

Difficoltà



Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;



Risultati prove INVASI , OCSE-PISA;
Gabriel et al. (2013). A componential view of children's in learning
fraction. *Frontiers in Psychology*.

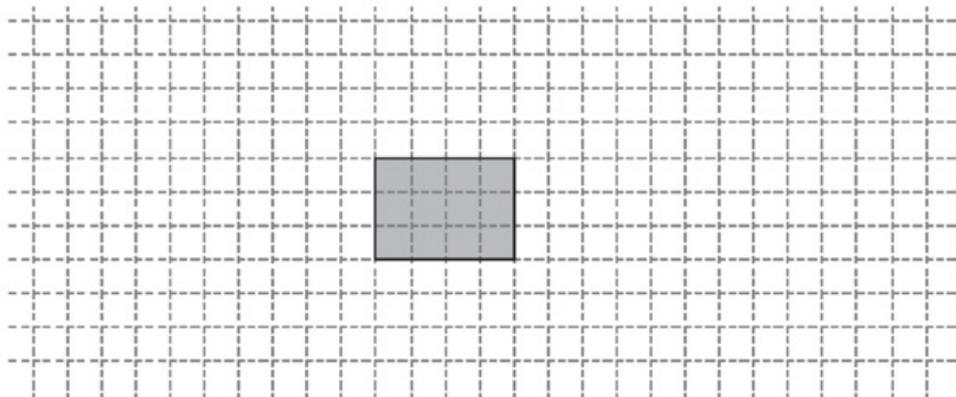
Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;

D11. Il rettangolo che vedi di seguito corrisponde a $\frac{1}{4}$ di una figura.



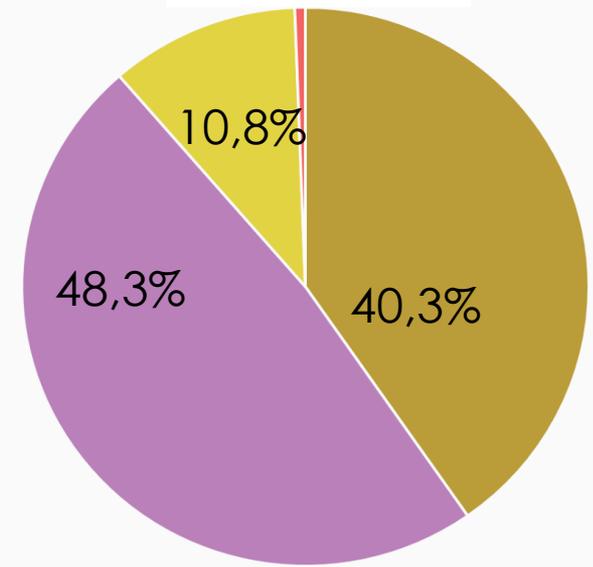
Disegna nello spazio qui sotto una delle possibili figure da cui il rettangolo è stato ritagliato.



of child

fraction. *Frontiers in Psychology*.

LIV05, 2012



■ Risposte corrette 40.3% ■ Risposte errate 48.3%
■ Risposte Mancate 10.8% ■ Altre non valide. 0.6%

Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
- **Difficoltà a gestire frazioni equivalenti;**

D25. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.

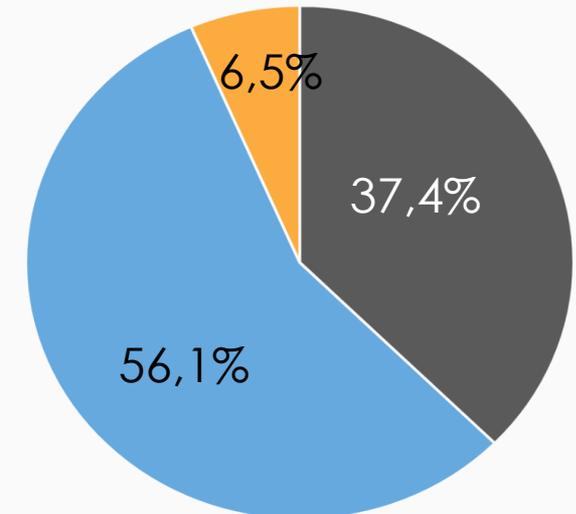
50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.

Risultati prove INVALSI, OCSE-PISA,
Gabriel et al. (2013). A componential view of child
fraction. *Frontiers in Psychology*.

LIV05 2016

Percentuali nazionali

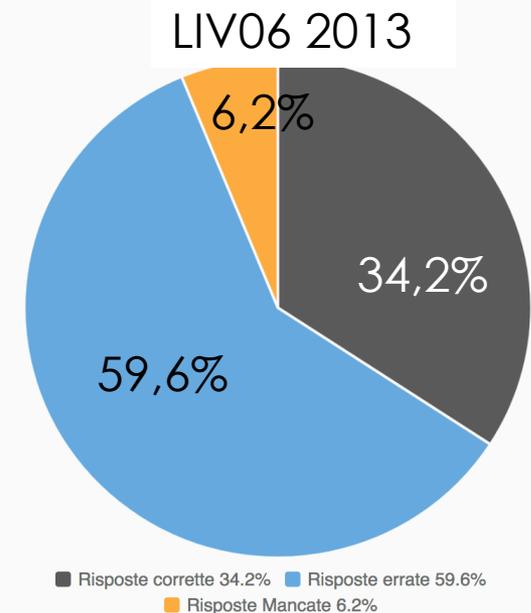
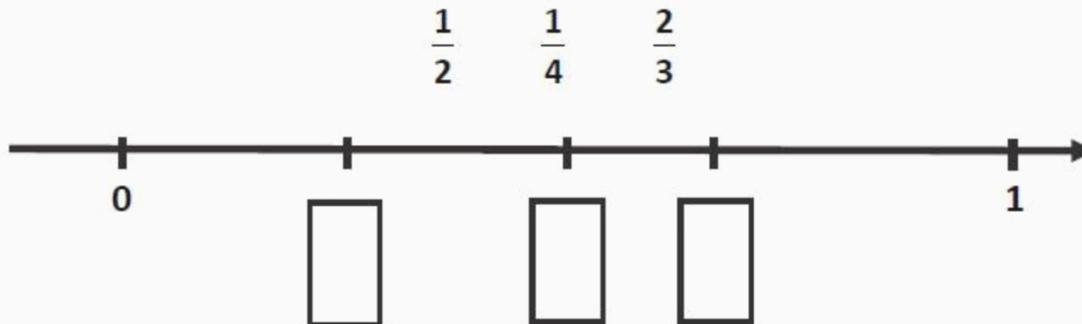


■ Risposte corrette 37.4% ■ Risposte errate 56.1%
■ Risposte Mancate 6.5%

Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
- Difficoltà a gestire frazioni equivalenti;
- **Difficoltà a ordinare frazioni su una retta anche senza passare ai numeri decimali;**

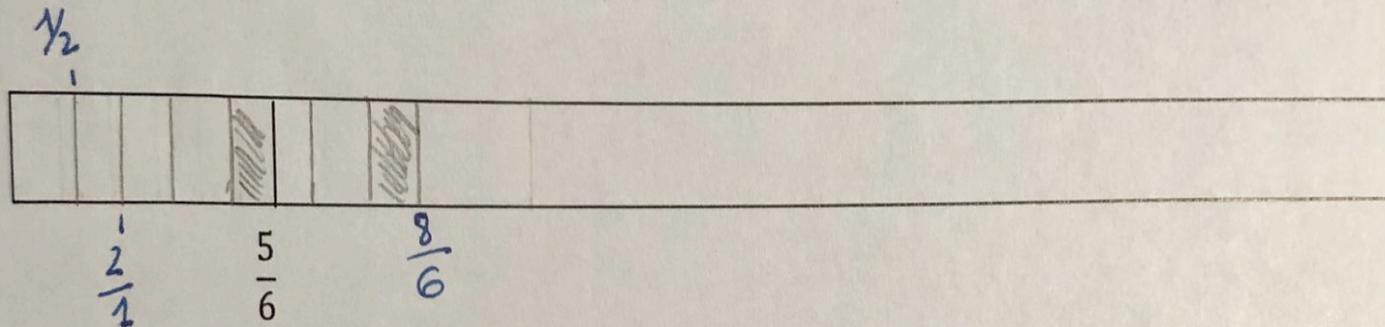
D12. Scrivi nei riquadri i seguenti numeri, posizionandoli correttamente sulla retta.



Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
- Difficoltà a gestire frazioni equivalenti;
- **Difficoltà a ordinare frazioni su una retta anche senza passare**

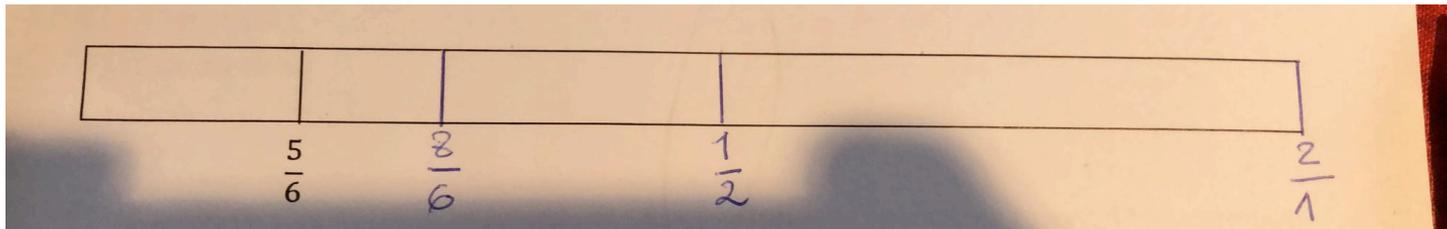
Sulla striscia di carta è stata posizionata la frazione $\frac{5}{6}$:



2.1 Sulla stessa striscia posiziona le frazioni: $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{8}{6}$

Difficoltà

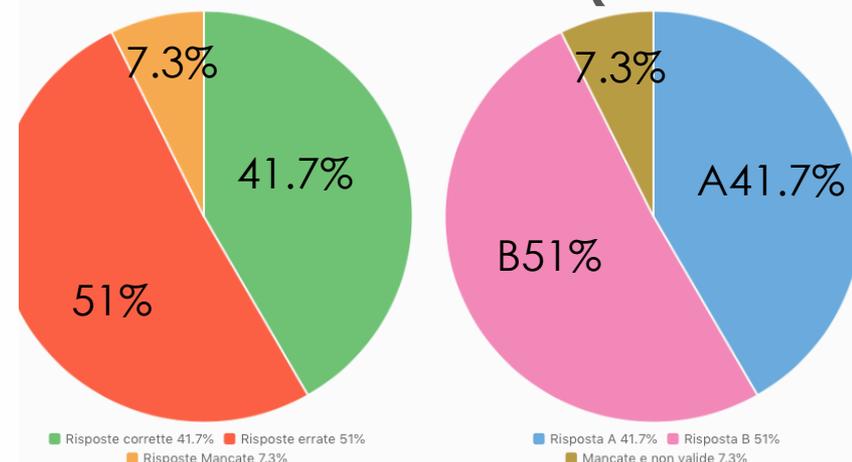
- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
- Difficoltà a gestire frazioni equivalenti;
- **Difficoltà a ordinare frazioni su una retta anche senza passare ai numeri decimali;**



Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
- Difficoltà a gestire frazioni equivalenti;
- **Difficoltà a ordinare frazioni su una retta anche senza passare ai numeri decimali;**
- **Difficoltà operazioni con frazioni e anche numeri “misti” (interi e frazioni)**

		V	F
a.	$\frac{3}{2}$ è il triplo di 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b.	$\frac{3}{2}$ è la metà di 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c.	$\frac{3}{2}$ è il doppio di $\frac{3}{4}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Percentuale risposte corrette: stima del risultato senza calcolo

ex

$$\frac{13}{15} \times \frac{11}{17} > \frac{13}{15} ?$$



FRAZ.	OPERAZIONI			
	+	-	X	:
>1	92	89	79	77
<1	92	92	33	29

Insegnanti in
formazione

FRAZ.	OPERAZIONI			
	+	-	X	:
>1	89	92	92	70
<1	92	94	32	42

Studenti
secondaria 1°

“valore” di una frazione correlata a

Aritmetica delle frazioni (+, -, x, :)

Percentuale risposte corrette: esecuzione algoritmo,
Stima del risultato

$$\frac{13}{15} \times \frac{11}{17} > \frac{13}{15} ?$$

Operation	Procedural knowledge	Conceptual knowledge
Addition	87	91
Subtraction	93	89
Multiplication	87	33
Division	51	30

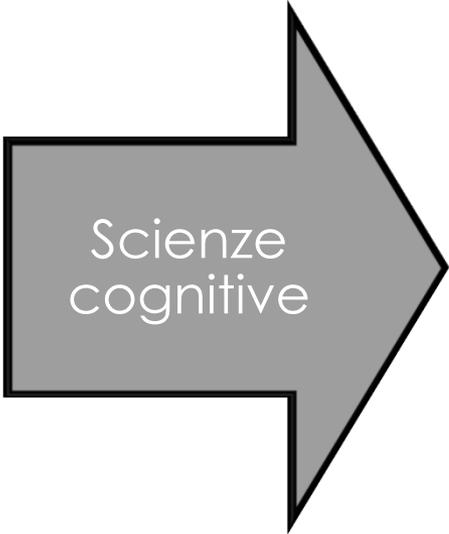
Insegnanti in
formazione

Frazioni <1

Operation	Procedural knowledge	Conceptual knowledge
Addition	78	89
Subtraction	83	92
Multiplication	81	31
Division	82	47

Studenti secondaria 1°

Frazioni <1



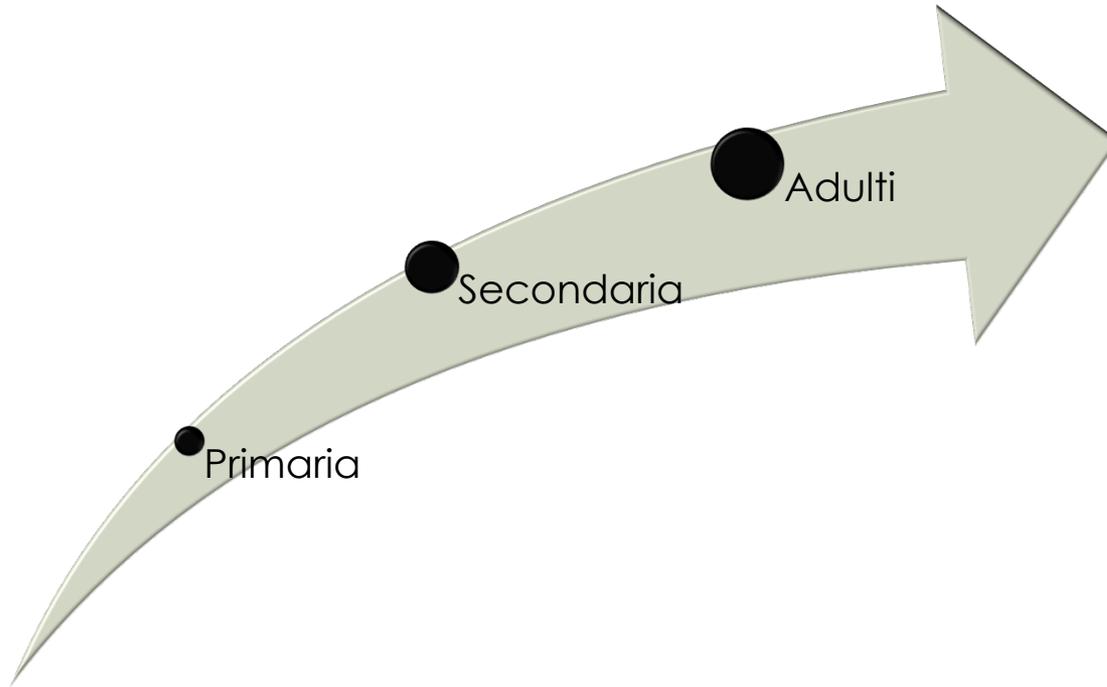
Scienze
cognitive

“valore” di una frazione correlata a

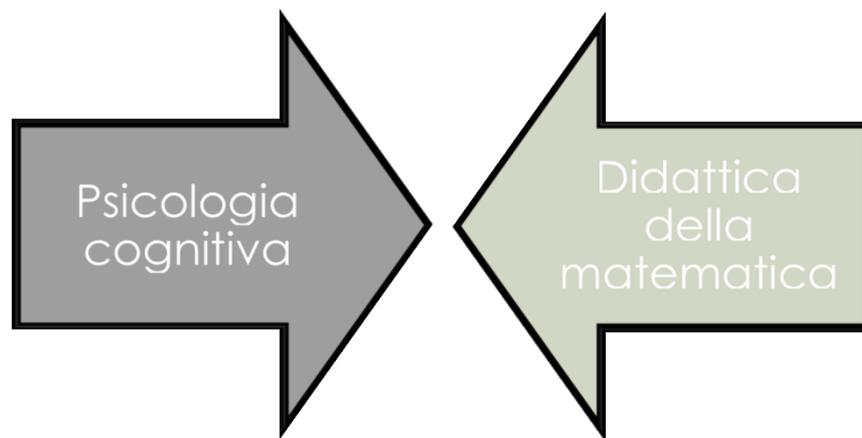
Aritmetica delle frazioni (+, -, x, :)

Siegler et al. (2016)

SCOLLAMENTO FRA CONCETTUALE (stima) E PROCEDURALE



SCOLLAMENTO FRA CONCETTUALE (stima) E PROCEDURALE



SIGNIFICATO

Difficoltà

- Difficoltà nel gestire il significato di “uguale”;
- Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
- Difficoltà a gestire frazioni equivalenti;
- Difficoltà a ordinare frazioni su una retta anche senza passare ai numeri decimali;
- Difficoltà operazioni con frazioni e anche numeri “misti” (interi e frazioni)
- **Difficoltà legate al sistema sintattico delle frazioni**

Difficoltà

- Difficoltà legate al sistema sintattico delle frazioni

a, b

$\frac{a}{b}$

se ciascun numero intero è espresso da un unico segno [1, 34, ..] le frazioni sono espresse da diversi segni: due numerici e un segno grafico, che vanno letti assieme come un unico numero...

Difficoltà

- Difficoltà legate al sistema sintattico delle frazioni

a, b

$\frac{a}{b}$

Questo rappresenta uno dei più difficili — se non il più difficile — aspetto cognitivo legato alla sintassi delle frazioni (Bobis et al., 2013):

- richiede risorse relative alla memoria di lavoro maggiori di quelle necessarie per la gestione dei numeri interi
- richiede controllo esecutivo (sul trattamento del numero) e sistemi inibitori (Halford et al., 2013)

- Difficoltà legate al sistema sintattico delle frazioni: lettura e scrittura delle frazioni

In occidente

$$\frac{2}{3}$$


In oriente

$$\frac{2}{3}$$


aderente alla procedura di costruzione di una parte a partire dal tutto.
In altre parole, rispecchia la genesi della frazione come parte

$2/3$	lettura	significato
Top-down	Due terzi	quoziente
Bottom-up	Di 3 parti, 2	Parte di un intero

Spazio alle proposte didattiche!

Scuola primaria e secondaria 1°