



L'EDUCAZIONE MATEMATICA TRA INTUIZIONE E RIGORE

Settima Scuola Estiva per Insegnanti di Matematica

Alla ricerca di proprietà e teoremi: sfide geometriche in GeoGebra



Carlotta Soldano
Università di Torino

26 agosto 2022



ATTIVITÀ DI GIOCO-INDAGINE

- **Sfide** tra un **VERIFICATORE** e un **FALSIFICATORE** giocate in **GeoGebra**
- **Scheda** contenente **domande** che guidano la riflessione sulle **proprietà geometriche** o **teoremi** su cui è basato il gioco.



IL DESIGN DELLE SFIDE



La logica dell'indagine
J. Hintikka

Giochi semantici

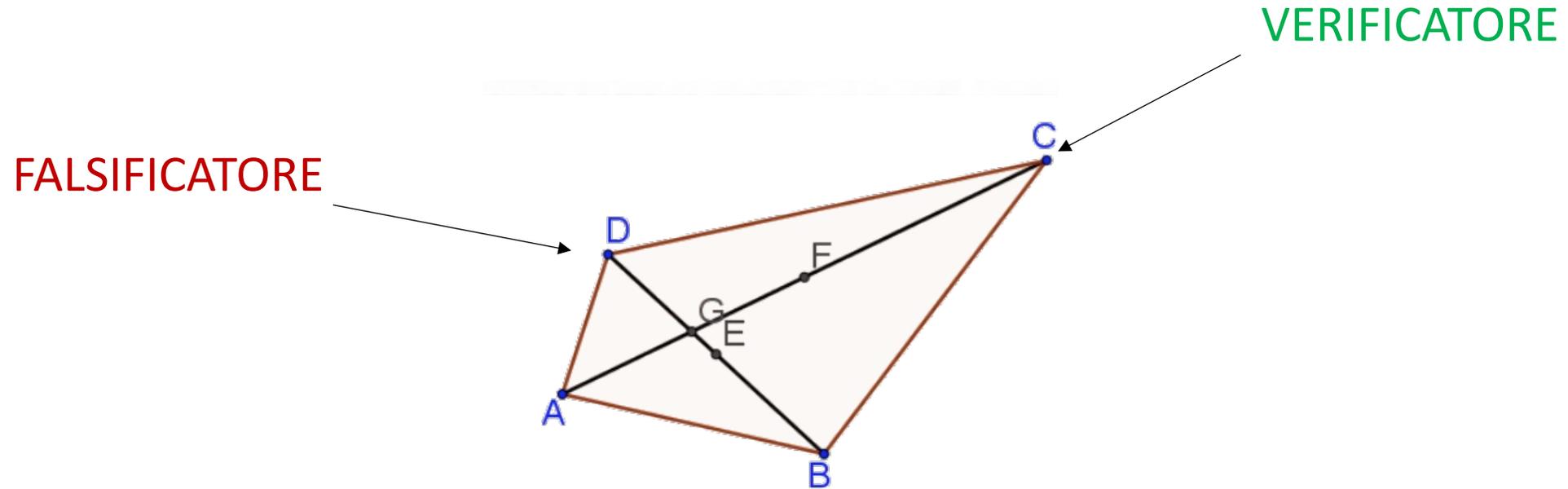
$$\forall x \quad \exists y \quad S(x, y)$$

Falsificatore

Verificatore

Dall'esistenza di una **strategia vincente** alla **verità** dell'enunciato

UN ESEMPIO



Obiettivo del **VERIFICATORE**: far coincidere **E**, **F** e **G**

Obiettivo del **FALSIFICATORE**: impedire al verificatore di raggiungere l'obiettivo

Ogni partita è composta da **due mosse**, la prima del falsificatore e la seconda del verificatore.

Vince il giocatore che al termine della mossa del verificatore ha raggiunto l'obiettivo.

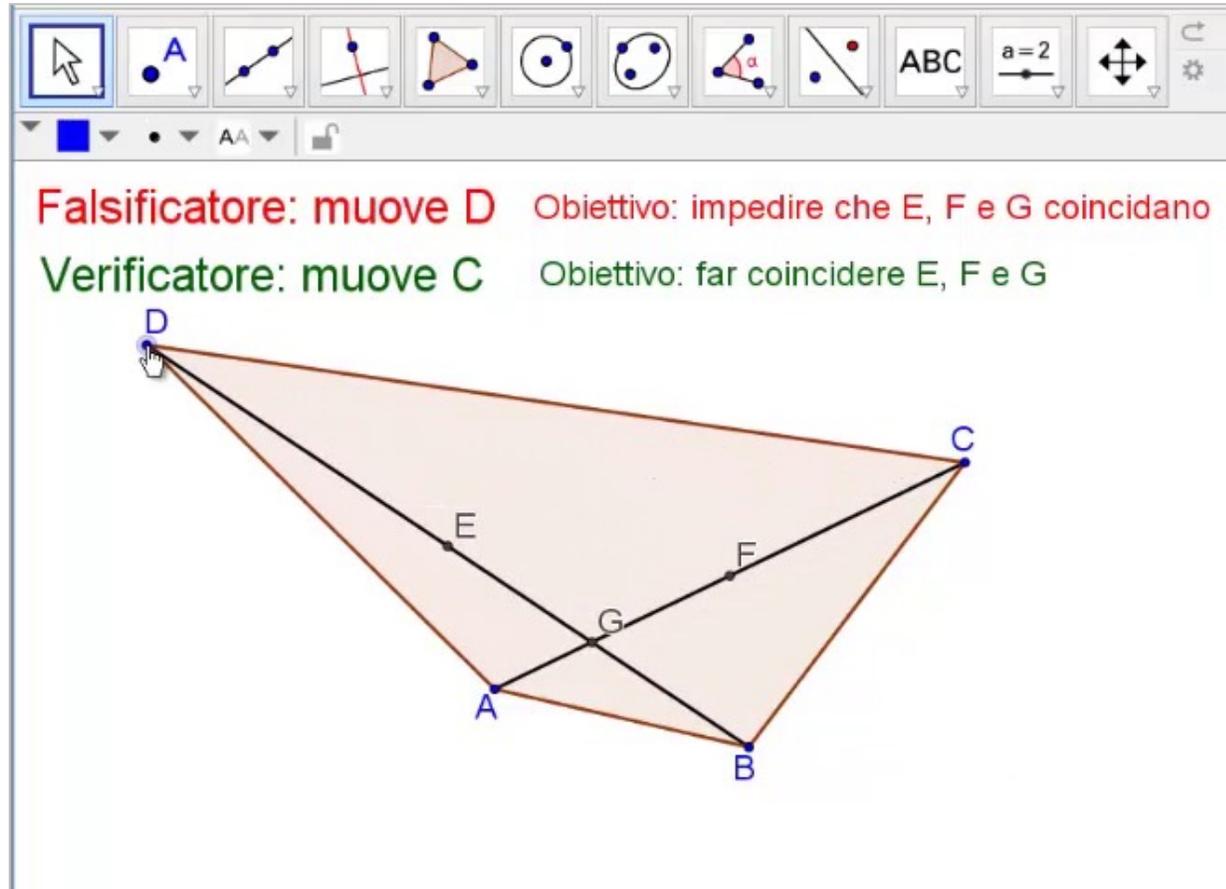
SIMULAZIONE PARTITA 1

Falsificatore: muove D Obiettivo: impedire che E, F e G coincidano
Verificatore: muove C Obiettivo: far coincidere E, F e G

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1		
Partita 2		
Partita 3		
...		

MOSSA DEL FALSIFICATORE

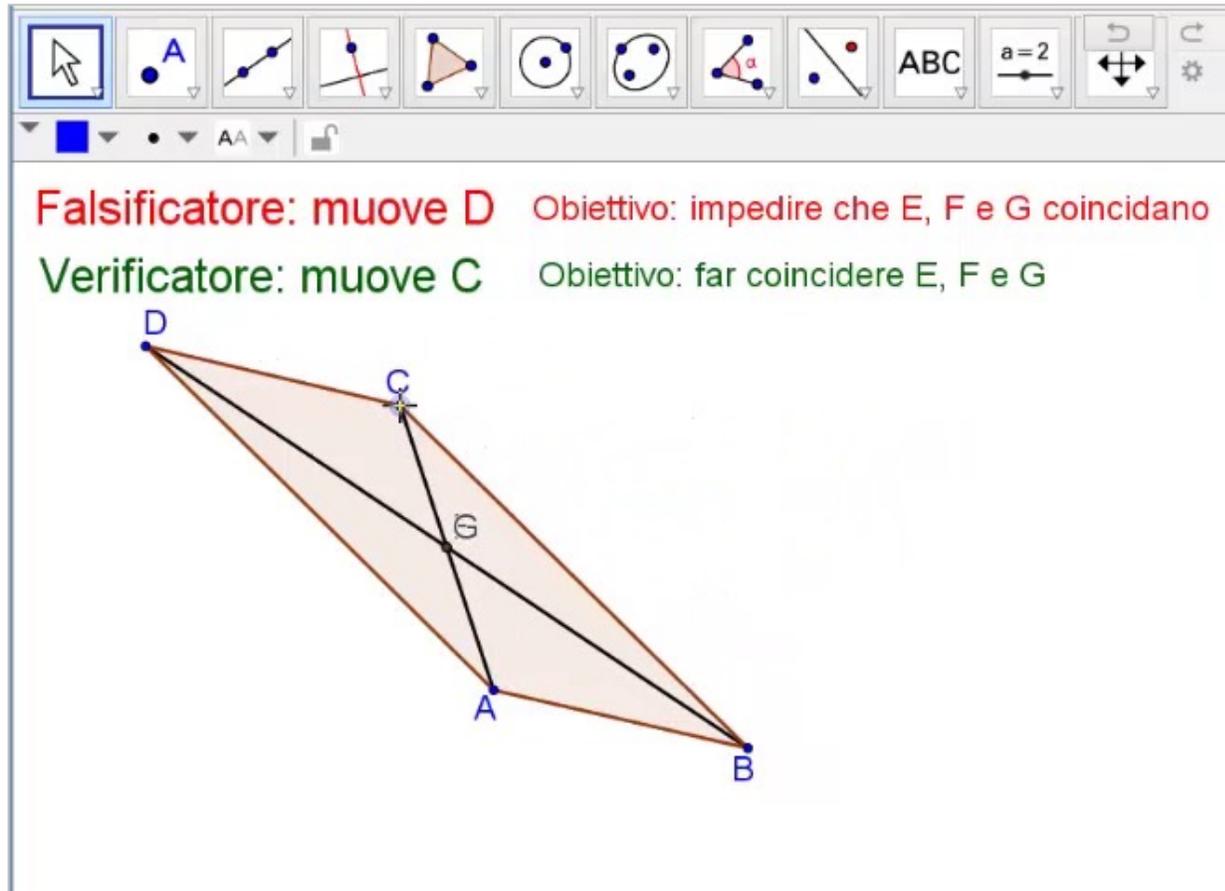
SIMULAZIONE PARTITA 1



MOSSA DEL VERIFICATORE

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1	✓	
Partita 2		
Partita 3		
...		

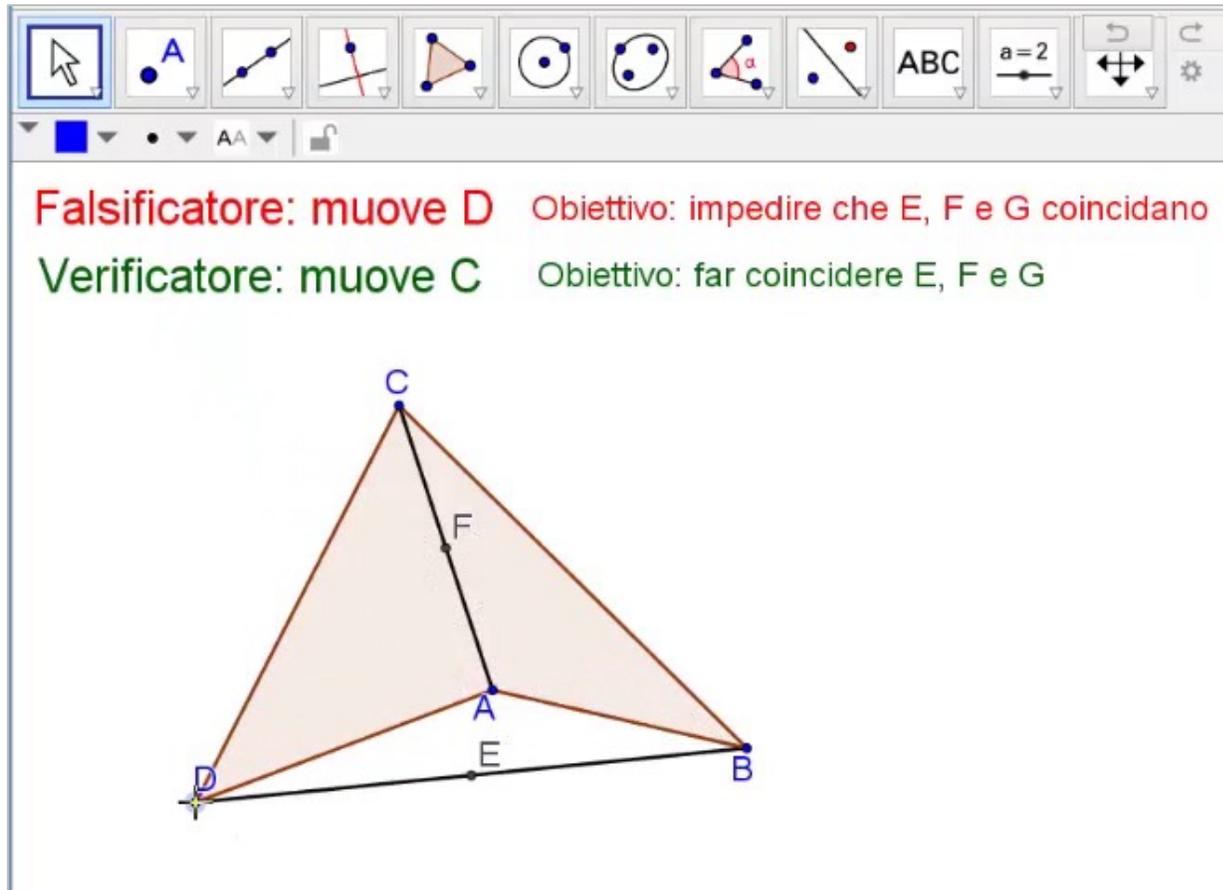
SIMULAZIONE PARTITA 2



MOSSA DEL FALSIFICATORE

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1	✓	
Partita 2		
Partita 3		
...		

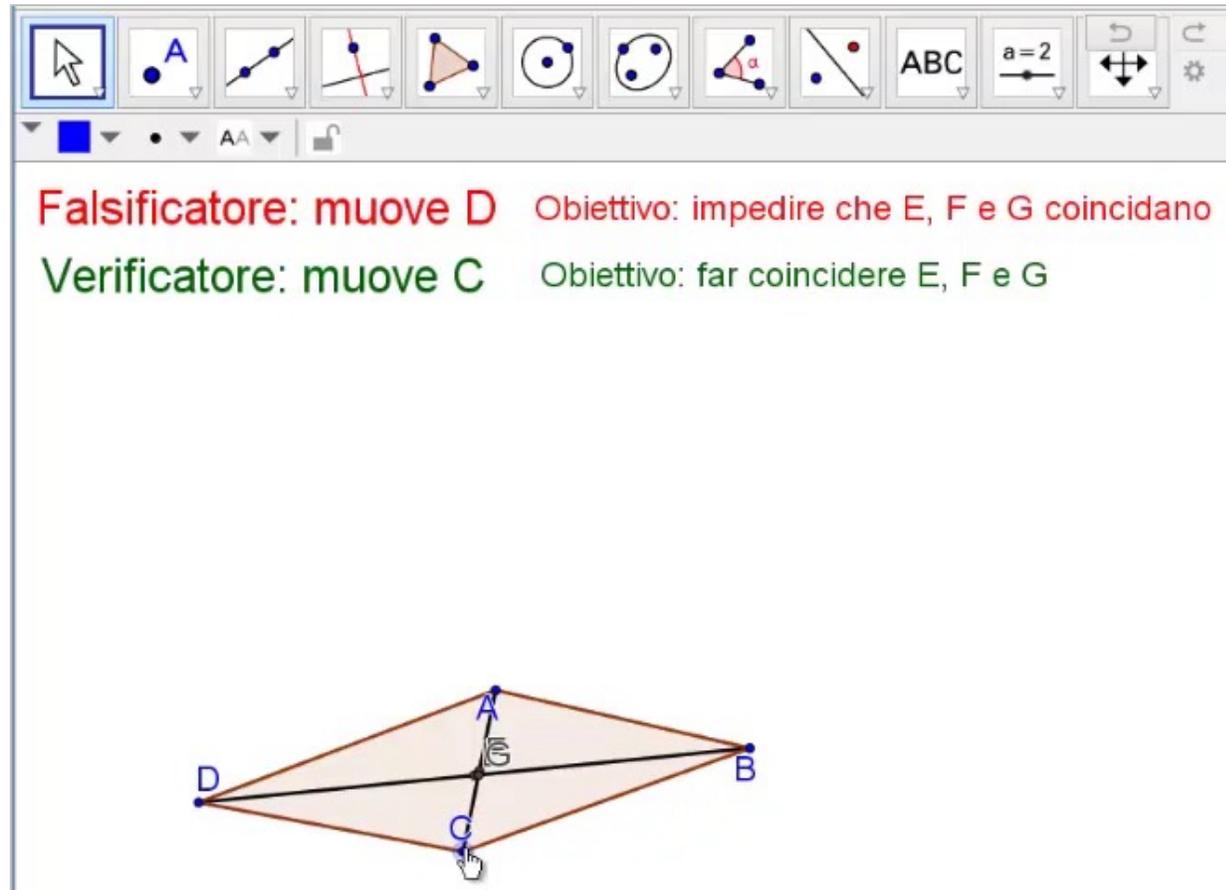
SIMULAZIONE PARTITA 2



MOSSA DEL VERIFICATORE

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1	✓	
Partita 2	✓	
Partita 3		
...		

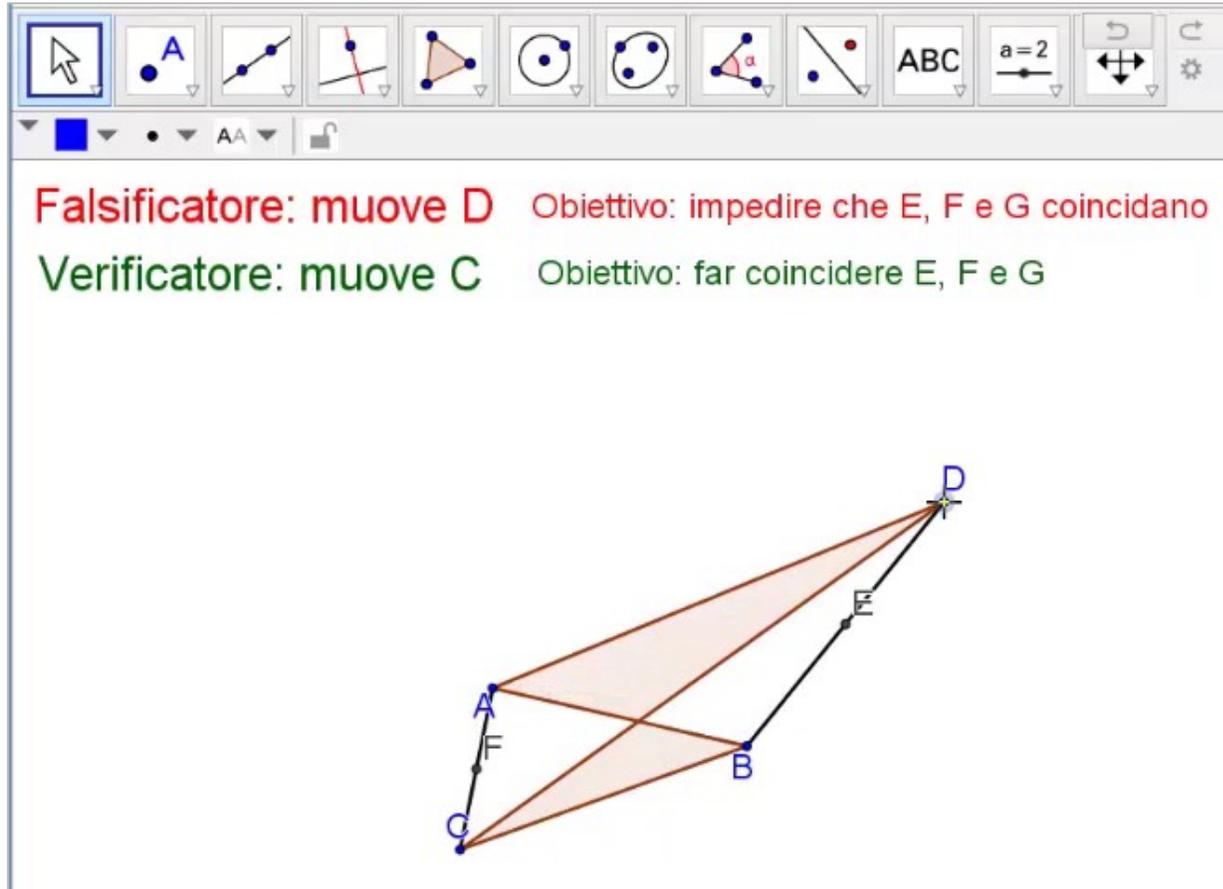
SIMULAZIONE PARTITA 3



MOSSA DEL FALSIFICATORE

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1	✓	
Partita 2	✓	
Partita 3		
...		

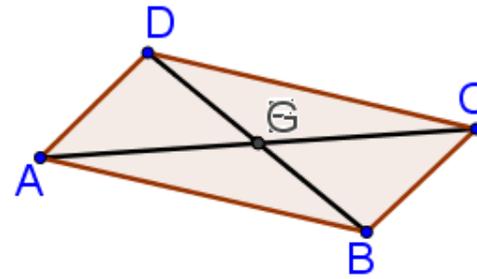
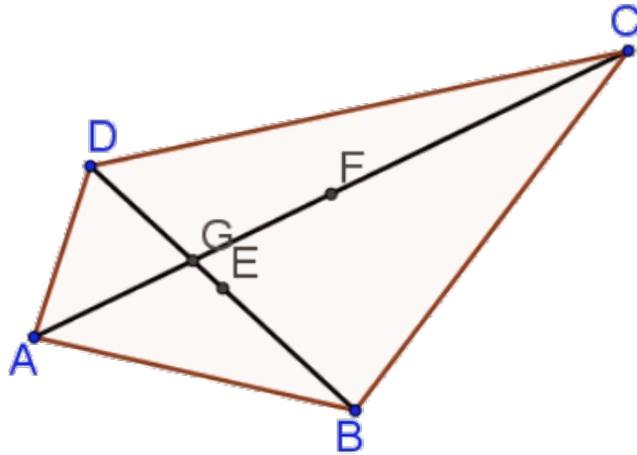
SIMULAZIONE PARTITA 3



MOSSA DEL VERIFICATORE

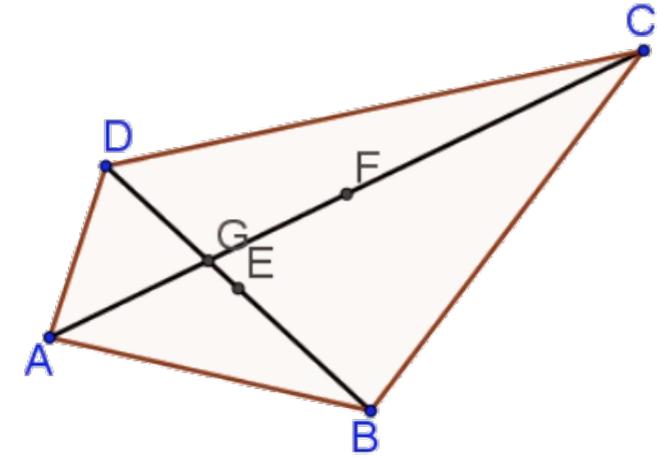
	Verificatore	Falsificatore
Partita 1	✓	
Partita 2	✓	
Partita 3	✓	
...		

LA SFIDA



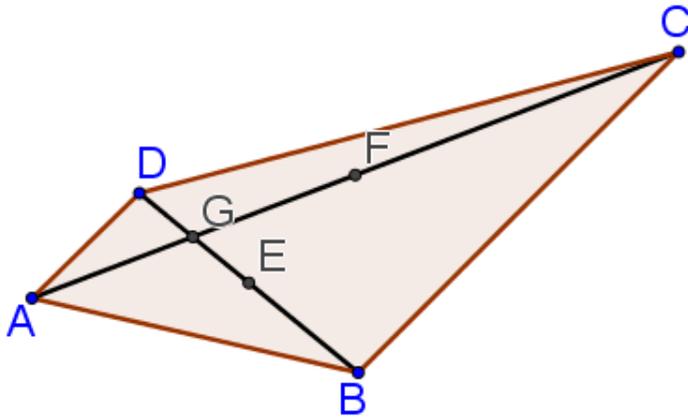
$$\forall D \exists C \mid G = E = F$$

LA SCHEDA



- 1) Cosa sono E, F e G rispetto al quadrilatero ABCD?
- 2) Quale tipo di quadrilatero viene prodotto dal verificatore ogni volta che raggiunge il suo obiettivo?
- 3) A partire dai “fatti osservati” durante il gioco e dalle risposte date alle domande precedenti formulate congetture geometriche basate sul gioco ed espresse nella forma ‘se... allora...’.

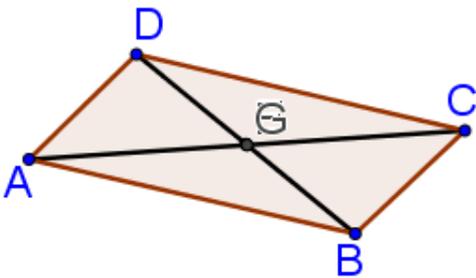
LA SCHEDA



F punto medio **AC**
E punto medio **BD**
G punto di intersezione

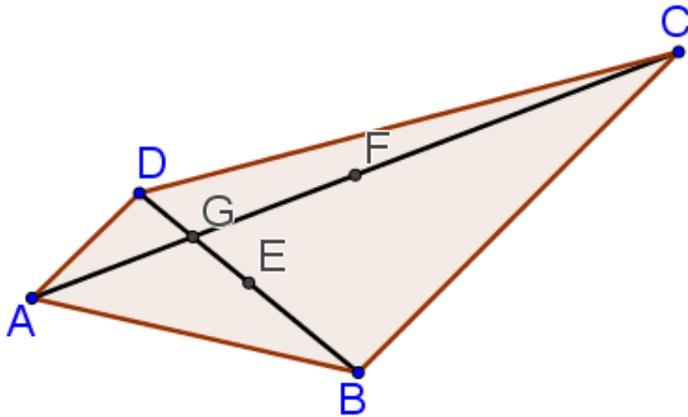


Se in un quadrilatero **ABCD** le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà allora **ABCD** è parallelogramma



ABCD è un parallelogramma

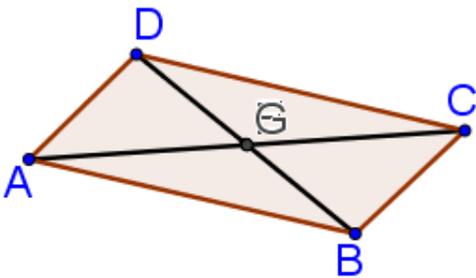
LA SCHEDA



F punto medio **AC**
E punto medio **BD**
G punto di intersezione



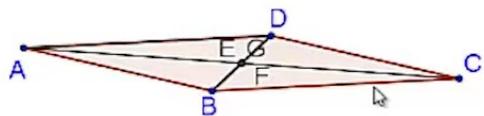
Se il quadrilatero **ABCD** è
parallelogramma allora le
diagonali si tagliano
vicendevolmente a metà



ABCD è un parallelogramma

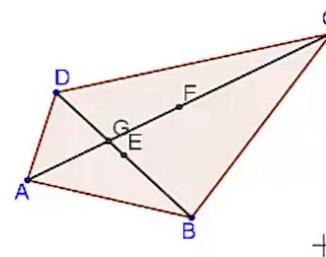
**FOCUS SUGLI ASPETTI
CONCETTUALI**

COSTRUZIONE ROBUSTA

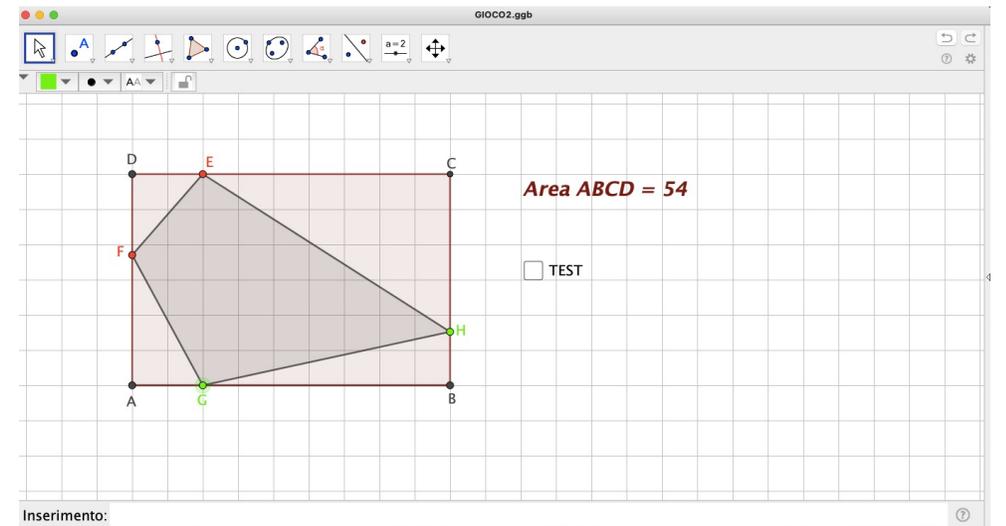
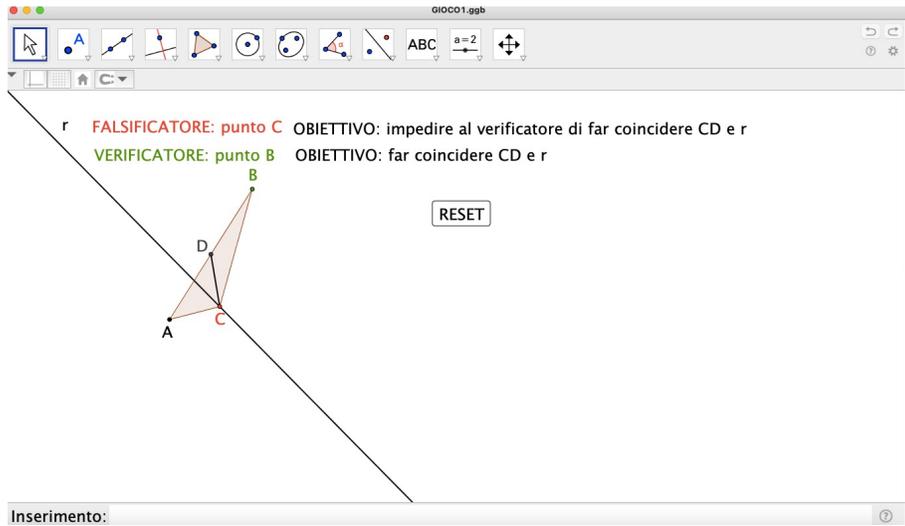


Tutte le proprietà del parallelogramma restano invariate durante il trascinamento.

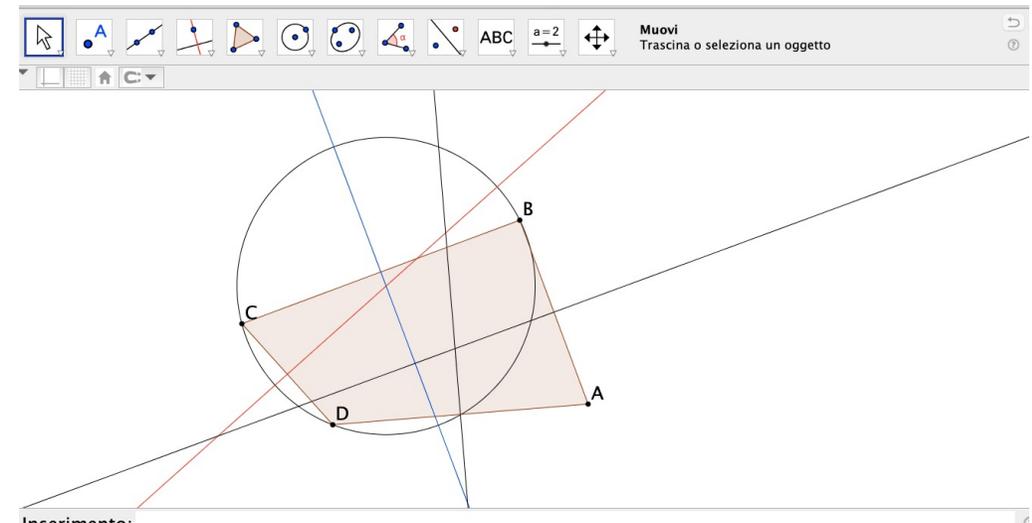
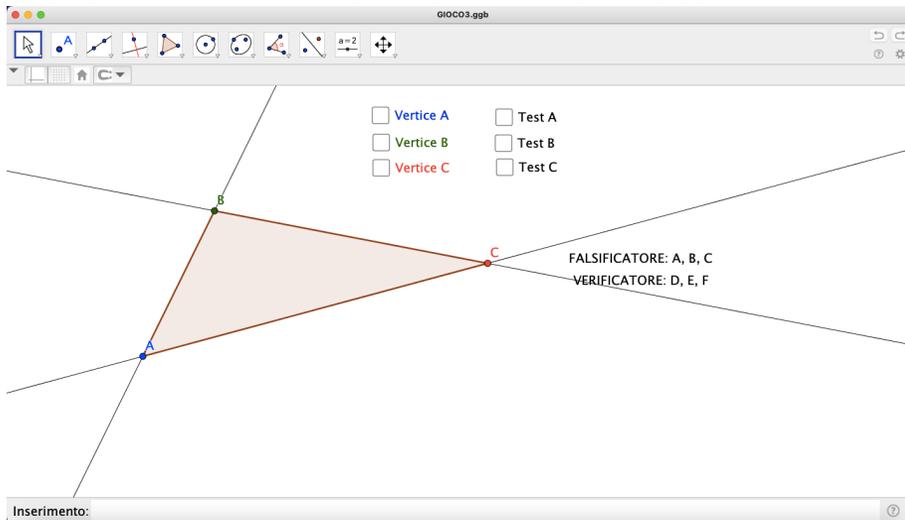
COSTRUZIONE MOLLE/SOFT



Le proprietà del parallelogramma sono costruite ad occhio attraverso le mosse del verificatore.



ATTIVITÀ DEL LABORATORIO



ATTIVITÀ DI GIOCO-INDAGINE 1



ATTIVITÀ DI GIOCO-INDAGINE 2



ATTIVITÀ DI GIOCO-INDAGINE 3



ATTIVITÀ DI GIOCO-INDAGINE 4



DOMANDE DI RIFLESSIONE



ATTIVITÀ DEL LABORATORIO

Rispondete alle domande nel ruolo di insegnante:

- 1. Quali sono secondo te le potenzialità delle attività di gioco-indagine nell'insegnamento e apprendimento della matematica?*
- 2. Proporresti queste attività ai tuoi alunni? Se sì, quali, in quali classe e con quali obiettivi?*
- 3. Cambieresti qualcosa nei giochi o nella scheda contenente le domande?*
- 4. Come progetteresti una discussione di classe a partire da ciascuna di queste attività?*

GIOCO 1

GIOCO1.ggb

r **FALSIFICATORE: punto C** OBIETTIVO: impedire al verificatore di far coincidere CD e r
VERIFICATORE: punto B OBIETTIVO: far coincidere CD e r

RESET

Inserimento:

Sperimentazione svolta nell'anno scolastico 2017/2018 in una classe **prima liceo scientifico**:
14 studenti coinvolti.

Lavoro a coppie (gioco + scheda) al computer

Discussione di classe con support della LIM



2 ore

2 ore

Dati raccolti:

- video-registrazioni di due coppie di studenti durante il lavoro a coppie
- protocolli di tutte le coppie di studenti
- video-registrazione della discussione di classe

presenza in classe di insegnante e ricercatrici

Conclusione della fase di gioco



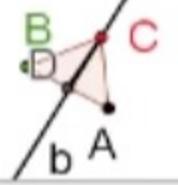


VERIFICATORE: punto B

OBIETTIVO: far coincidere CD e b

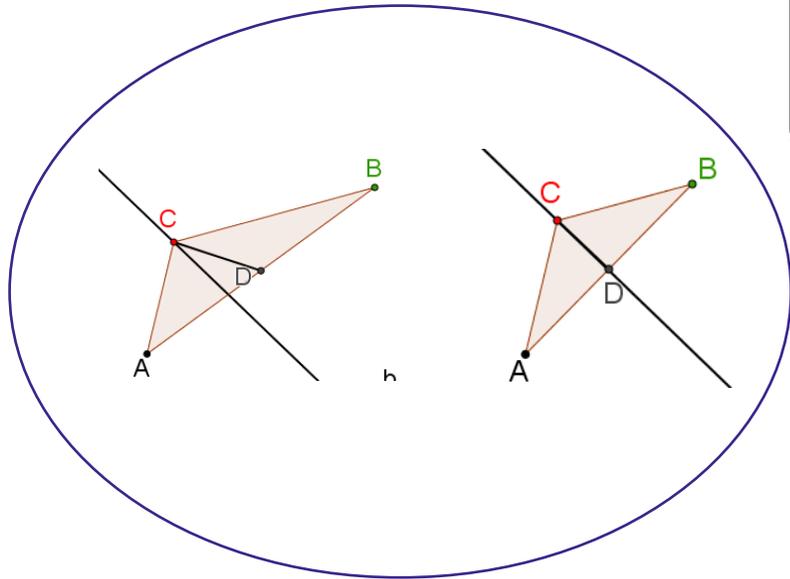
FALSIFICATORE: punto C

OBIETTIVO: non far coincidere CD e b



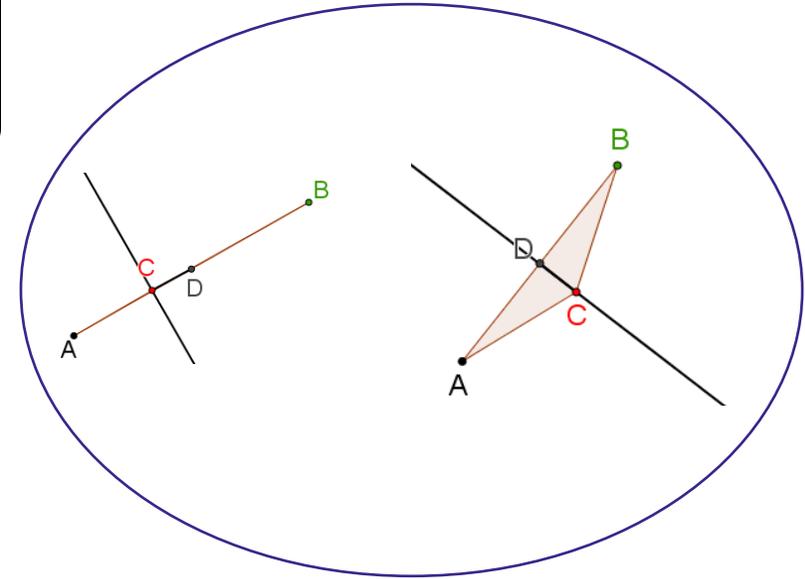
Inserimento:

La studentessa, che svolge il ruolo di verificatore e di falsificatore, giustifica la possibilità del verificatore di vincere sempre attraverso **due partite fittizie**: una giocata su una configurazione standard, l'altra giocata su un caso degenere.



Configurazione standard

LOGICA DELL'INDAGINE



Configurazione degenere

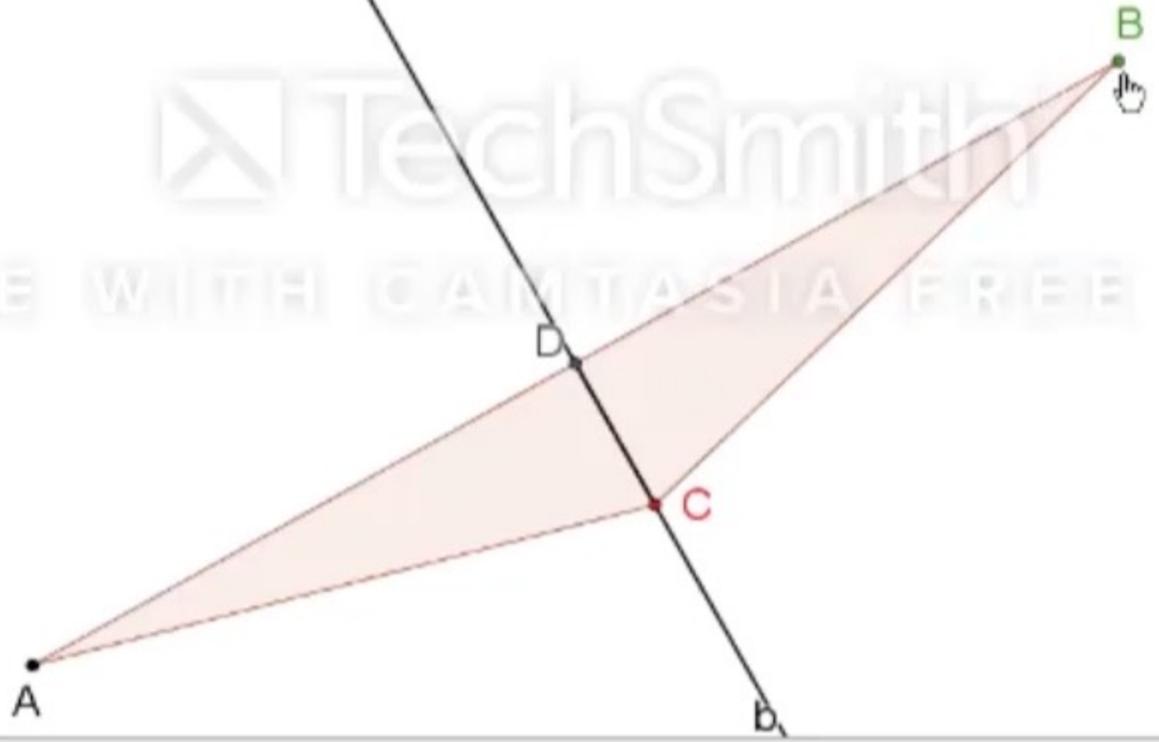


VERIFICATORE: punto B

OBIETTIVO: far coincidere CD e b

FALSIFICATORE: punto C

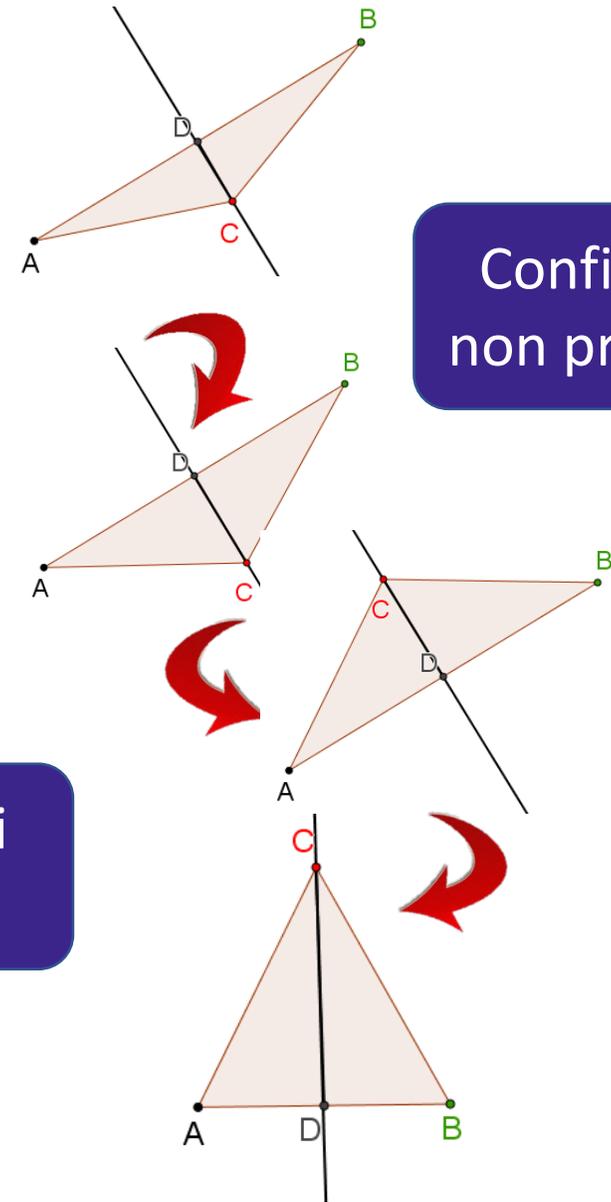
OBIETTIVO: non far coincidere CD e b



Inserimento:



“Ma tu perchè lo vedi isosceles (guardando la figura)?
Forse è isoscele (spostando C). Tu lo vedi isoscele?
(sposta C in alto) Sì, ok. È isosceles.
(muovendo B) Quindi ogni volta che coincidono è un
triangolo isoscele.”

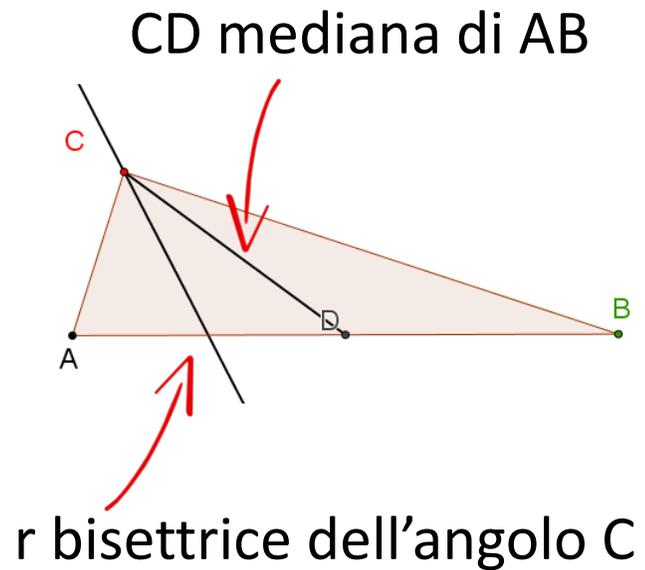


Configurazioni
non prototipiche

Configurazioni
prototipiche

Una possibile discussione di classe

1. Cosa sono CD e r rispetto al triangolo ABC?

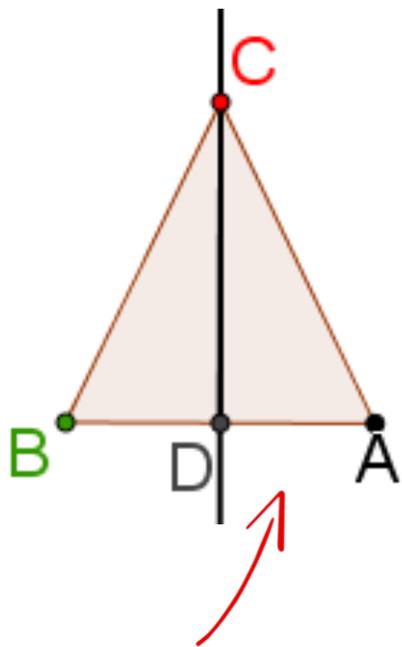


Elementi geometrici costruiti in modo
ROBUSTO

Come siete arrivati a
stabilire che il segmento
CD è una mediana?

Come siete arrivati a
stabilire che la retta r è
una bisettrice?

2. Considerate il caso in cui il verificatore raggiunge il suo obiettivo. Quale/i figura/e geometriche vengono prodotte dal verificatore?

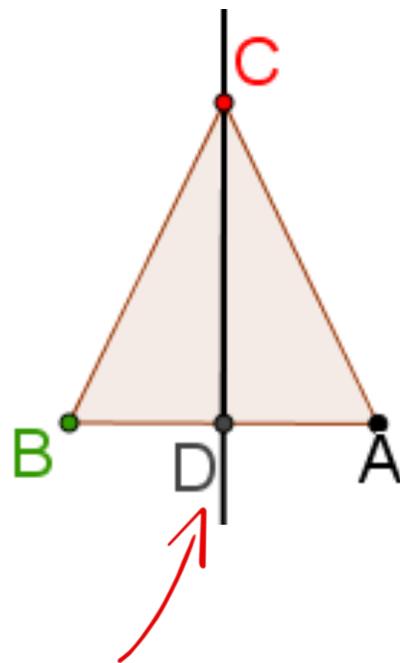


Triangolo isoscele

Elementi geometrici costruiti in modo
MOLLE/SOFT

Come siete arrivati a
stabilire che il triangolo è
isoscele/equilatero?

3. Quali proprietà geometriche osservate nelle figure geometriche prodotte dal verificatore?



Mediana e bisettrice coincidono

Obiettivo delle prime tre domande e della relativa discussione di classe:

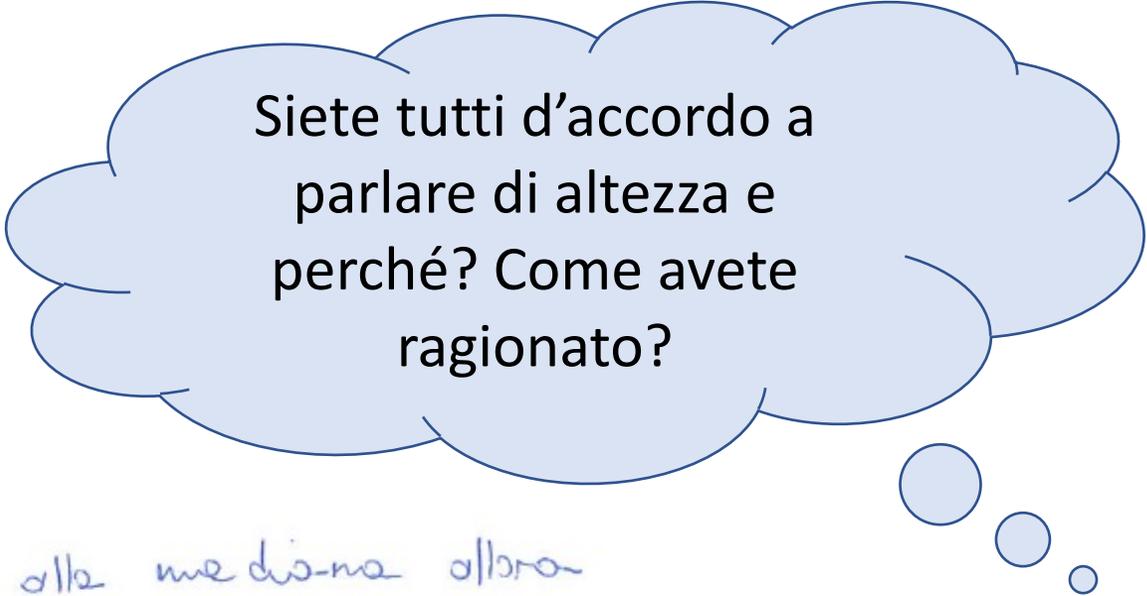
- Osservare e scoprire fatti geometrici
- Verificare empiricamente/percettivamente le congetture
- Riflettere su come si arriva a formulare e verificare congetture

4. Lista dei connettivi:

...poiché...; se... allora...; ... se e solo se...; ogni volta che... allora...; ...se...;
quando... succede che...; affinché... è necessario che...; affinché... è sufficiente
che...

Utilizzando i connettivi forniti, formate delle frasi vere utilizzando i “fatti osservati”
durante il gioco e le risposte date alle domande precedenti. Cercate di scriverne
quante più riuscite.

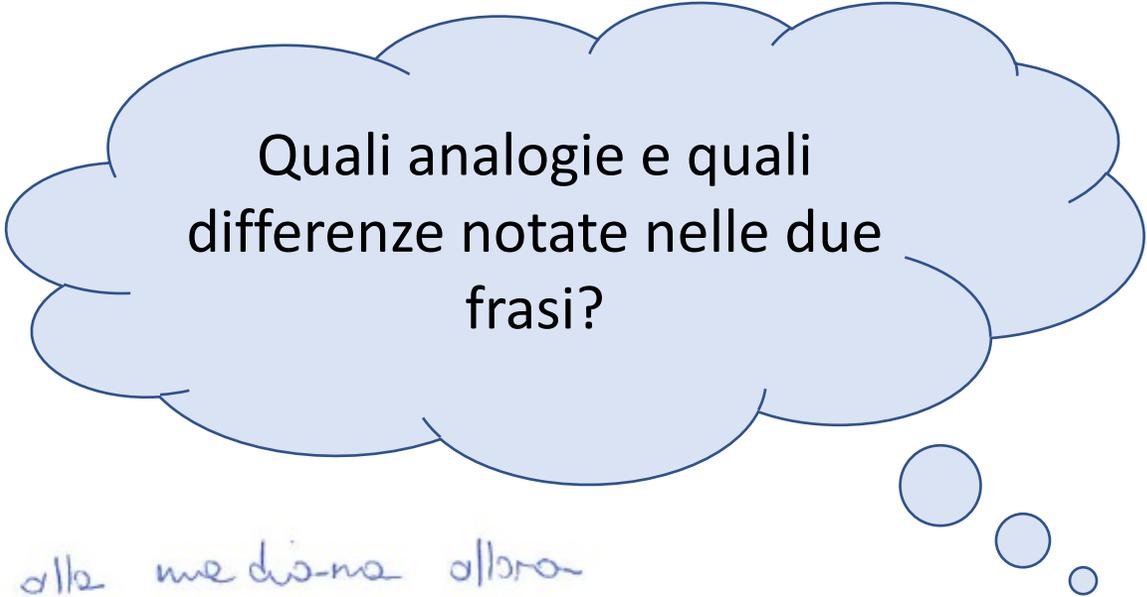
→ QUANDO "CD" ~~NONO~~ È L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO SUCCEDI
CHE IL TRIANGOLO È ISOSCELO



Siete tutti d'accordo a
parlare di altezza e
perché? Come avete
ragionato?

- Ovvio visto che l'altezza coincide alla mediana allora
il triangolo è isoscele.

→ QUANDO "CD" ~~NONO~~ È L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO SUCCEDI
CHE IL TRIANGOLO È ISOSCELO



Quali analogie e quali
differenze notate nelle due
frasi?

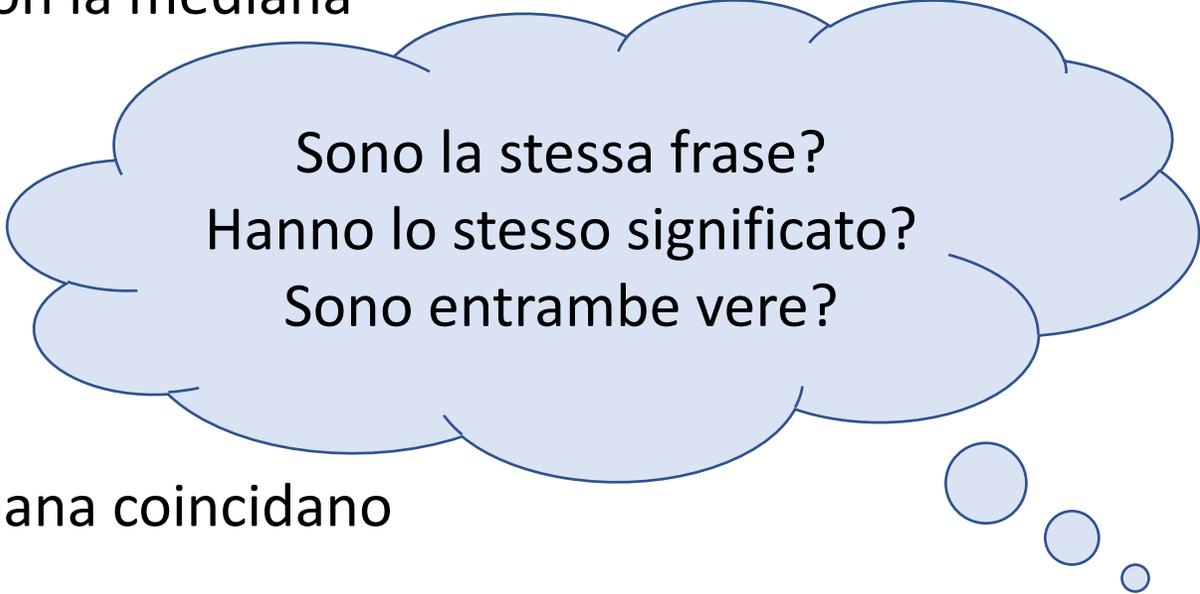
- Ogni volta che l'altezza coincide alla mediana allora
il triangolo è isoscele.

5. Tra tutte le frasi che avete trovato collegate tra loro quelle che hanno lo stesso significato

- 1 - Oser volere che l'altreza coincide alla medesima allora il triangolo è isoscele.
- 2 - ~~Se~~ Affinchè il triangolo sia isoscele è necessario che la mediana e l'altreza coincidano.

1 – Ogni volta che l'altezza coincide con la mediana
allora il triangolo è isoscele

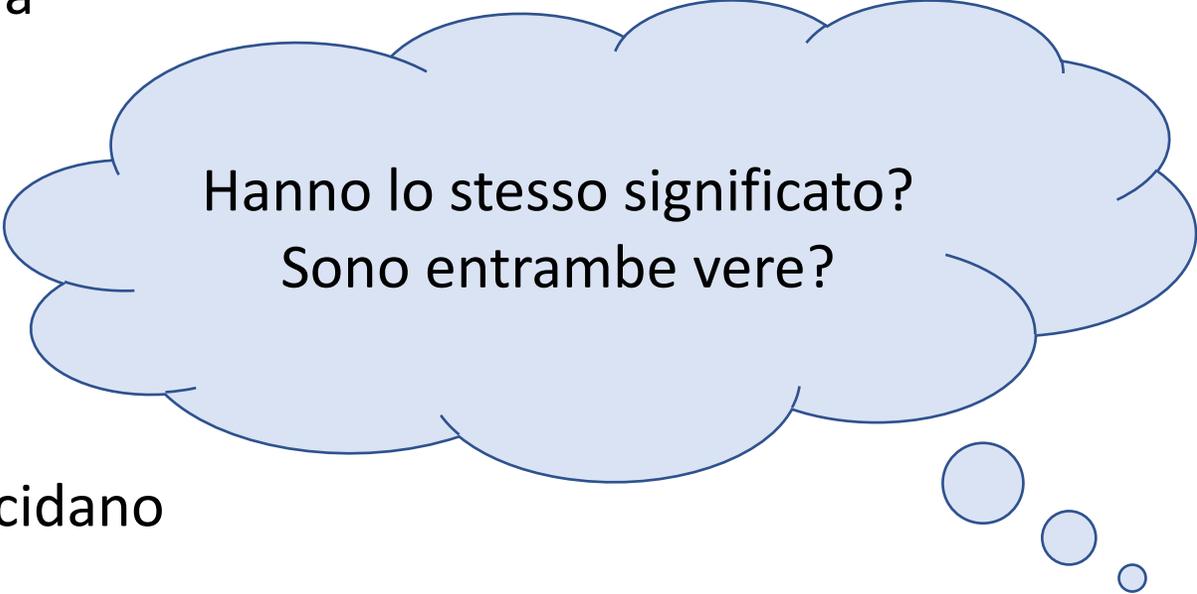
2 – Affinché il triangolo sia isoscele
è necessario che l'altezza e la mediana coincidano



Sono la stessa frase?
Hanno lo stesso significato?
Sono entrambe vere?

1 – SE l'altezza coincide con la mediana
ALLORA il triangolo è isoscele

2 – SE il triangolo sia isoscele
ALLORA l'altezza e la mediana coincidano



Hanno lo stesso significato?
Sono entrambe vere?

1 – SE l'altezza coincide con la mediana

ALLORA il triangolo è isoscele

2 – SE il triangolo sia isoscele

ALLORA l'altezza e la mediana coincidano

1 – SE ci sono le nuvole

ALLORA il triangolo è isoscele

2 – SE il triangolo sia isoscele

ALLORA ci sono le nuvole

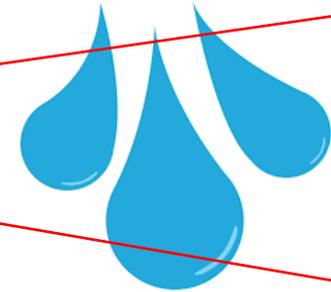
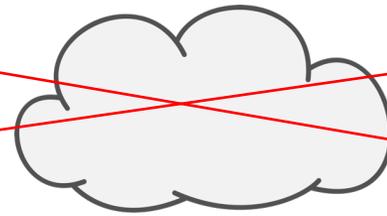
1 – SE ci sono le nuvole

ALLORA il triangolo è isoscele

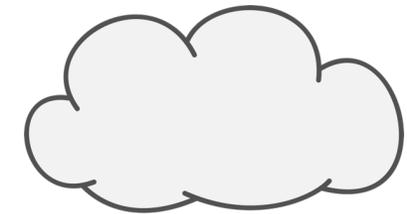
2 – SE il triangolo sia isoscele

ALLORA ci sono le nuvole

1 – SE ci sono le nuvole
ALLORA piove

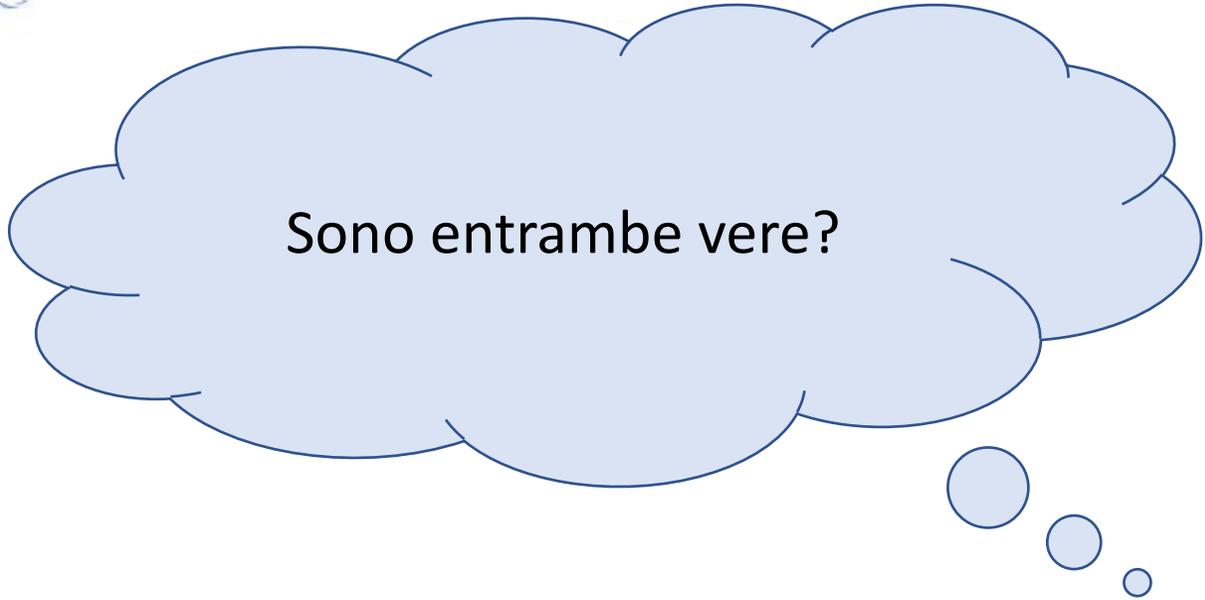


2 – SE piove
ALLORA ci sono le nuvole



1) ogni volta che la mediana e la bisettrice di un triangolo coincidono in un triangolo isoscele

quando una mediana e una bisettrice coincidono succede che si ha un triangolo isoscele



Sono entrambe vere?

3) affinché un triangolo sia isoscele o equilatero è necessario che la bisettrice e la mediana coincidano.

4) affinché un triangolo sia isoscele è sufficiente che la bisettrice e la mediana coincidano.

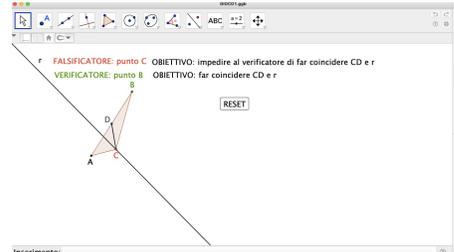
5) Un triangolo è isoscele o equilatero se e solo se la mediana e la bisettrice coincidano.

Obiettivo delle ultime due domande e della relativa discussione di classe:

- Congetturare frasi matematiche attraverso i giochi
- Riflettere sul significato delle frasi matematiche
- Riflettere sulla verità delle frasi matematiche

Teoria della Mediazione Semiotica

→ QUANDO "CD" NONO È L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO SUCCEDÈ CHE IL TRIANGOLO È ISOSCELO

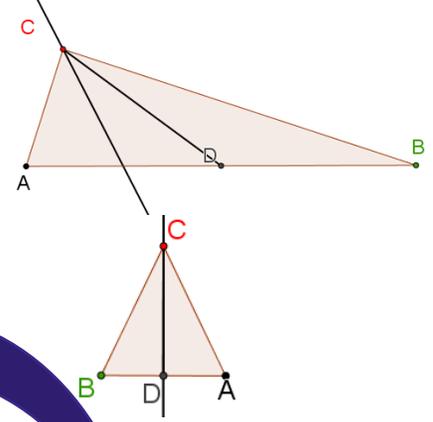
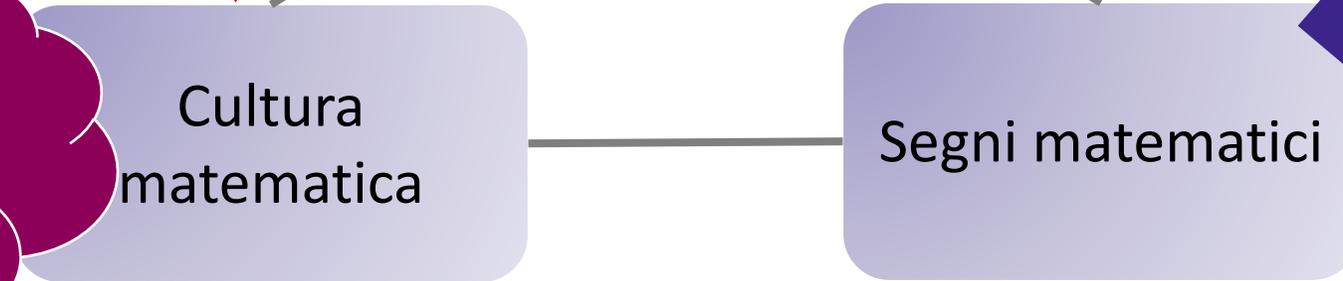
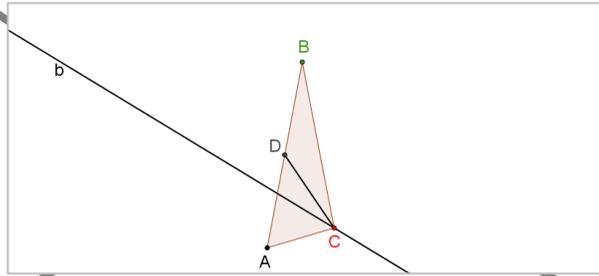


ATTIVITÀ DI GIOCO-INDAGINE 1

- 1) Aprite il gioco 1: <https://www.geogebra.org/m/amsmh3mf>
- 2) All'interno della vostra coppia stabilite un **verificatore** e un **falsificatore**.
- 3) Ogni partita è costituita da **due mosse**. Durante la mossa si può staccare la mano dal mouse, utilizzare lo zoom, spostare la schemata e poi riprendere la mossa.
- 4) La prima mossa è quella del **falsificatore** che muove il punto C con l'obiettivo di impedire al verificatore di vincere.
- 5) La seconda mossa è del **verificatore** che muove il punto B con l'obiettivo di far coincidere CD e r.
- 6) Vince la partita il giocatore che al termine della mossa del verificatore ha raggiunto l'obiettivo. Segnate una X nella tabella sottostante in corrispondenza del vincitore.
- 7) Cliccate su RESET per riportare il gioco nelle condizioni iniziali.
- 8) Scambiatevi i ruoli e iniziate una nuova partita.

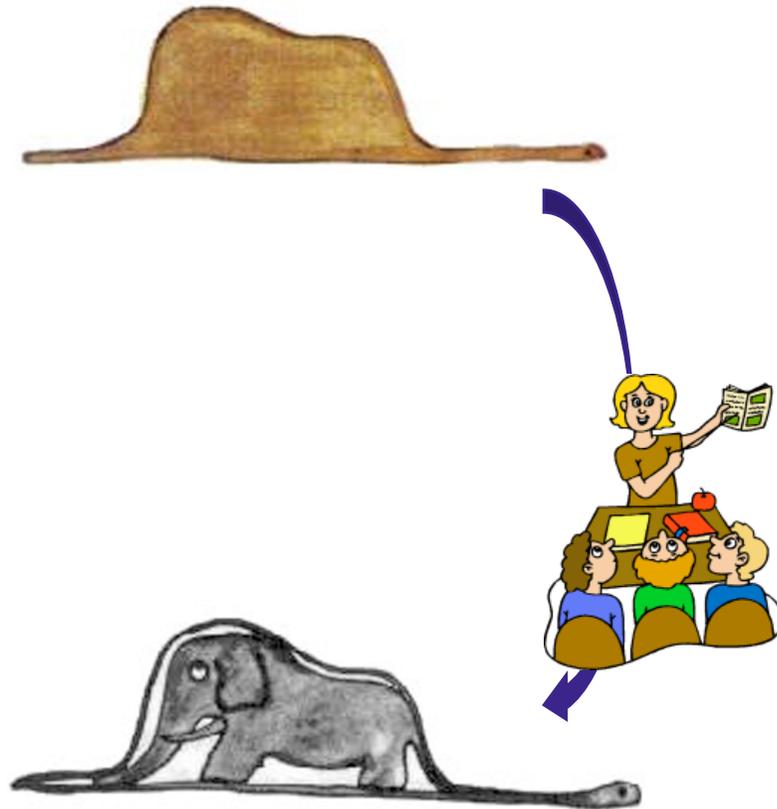
	Verificatore	Falsificatore
Partita 1		
Partita 2		
Partita 3		
Partita 4		
Partita 5		
Partita 6		
...		

Esiste un giocatore che ha la possibilità di vincere sempre? Se sì, quale?



In un triangolo isoscele mediana e bisettrice coincidono

Prospettiva fenomenologica



Disclosure: Il processo attraverso il quale le persone **danno un senso e interpretano** le diverse situazioni del mondo nei **contesti** in cui sono esposte.

(Rota, 1991)

Gli insegnanti possono promuovere diversi **livelli di significati** per promuovere la disclosure degli studenti:

- rendendo presenti cose
- sollecitando l'attenzione

(Radford, 2010; Arzarello et al., 2011;
Mason, 2008)

GIOCO 2

The screenshot shows a geometry software window titled "GIOCO2.ggb". The interface includes a toolbar with various geometric tools and a grid workspace. In the workspace, a rectangle $ABCD$ is shown with vertices A , B , C , and D . An inscribed quadrilateral $EFGH$ is formed by points E on DC , F on AD , G on AB , and H on BC . The area of the rectangle is labeled as $\text{Area } ABCD = 54$. A checkbox labeled "TEST" is located to the right of the diagram. The bottom of the window features an "Inserimento:" input field and a help icon.

Sperimentazione svolta nell'a.a 2018/2019 in una classe **seconda liceo scientifico** : **16 studenti** coinvolti (di cui 14 avevano già partecipato all'attività GIOCO 1).

Lavoro a coppie (gioco + scheda) al computer	}	2 ore
Discussione di classe con support della LIM		2 ore

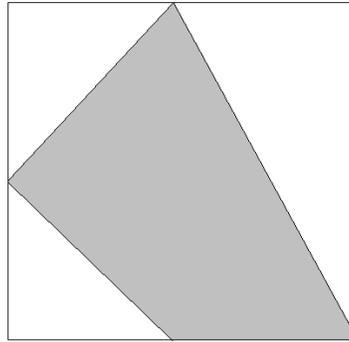
Dati raccolti:

- video-registrazioni di una coppia di studenti durante il lavoro a coppie
- protocolli di tutte le coppie di studenti
- video-registrazione della discussione di classe

presenza in classe di insegnante e ricercatrice

Problema: Il giardino del signor Torquato

Questo è il giardino del signor Torquato:



Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

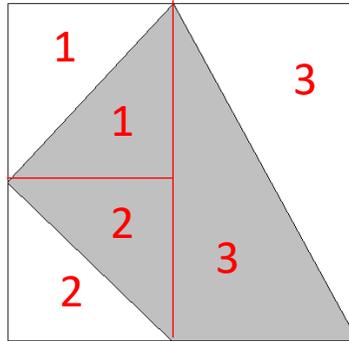
“Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?”

E voi che cosa ne pensate?

Spiegate la vostra risposta.

Problema: Il giardino del signor Torquato

Questo è il giardino del signor Torquato:



Equiscomponibilità

Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

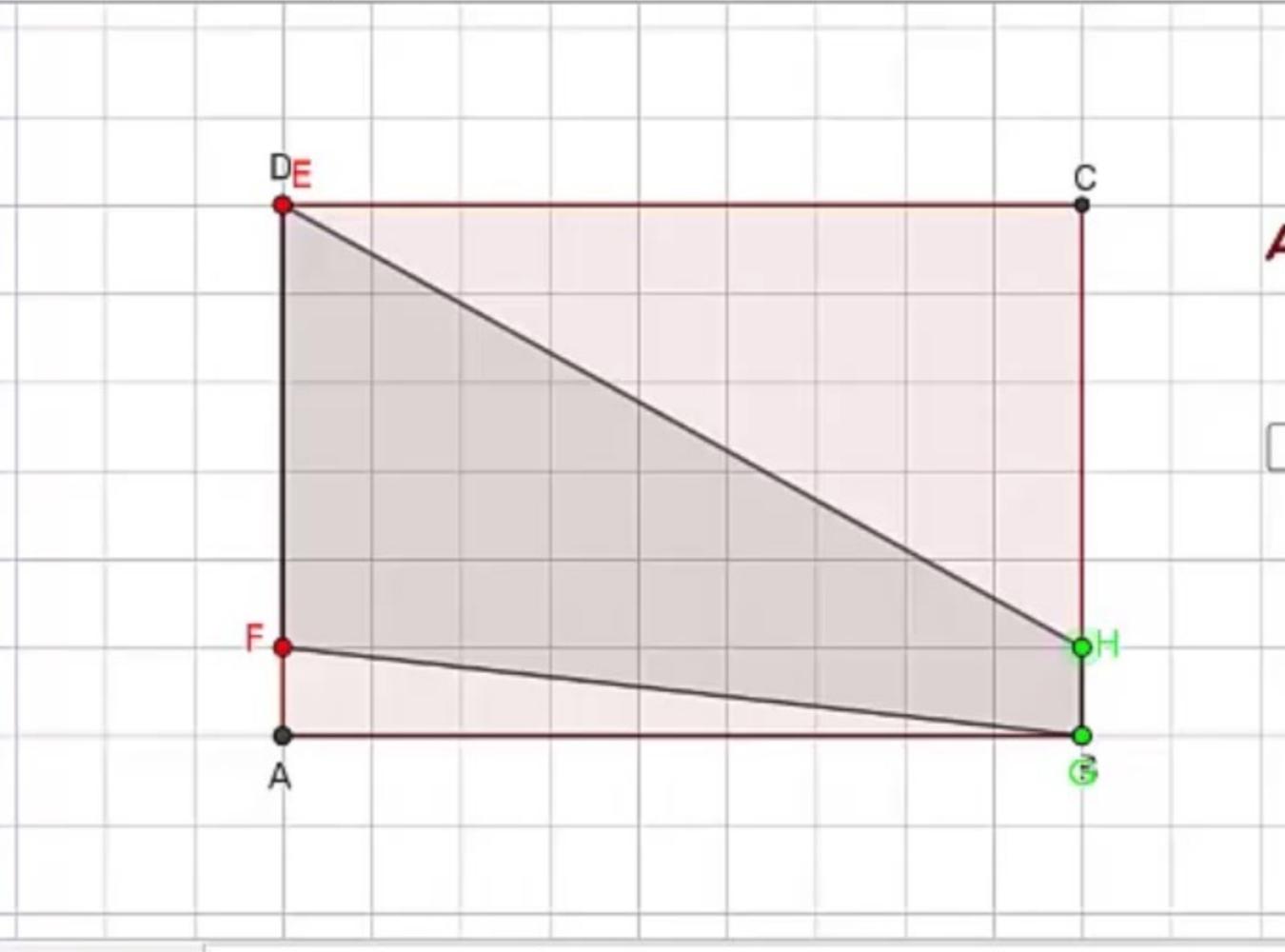
Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

“Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?”

E voi che cosa ne pensate?

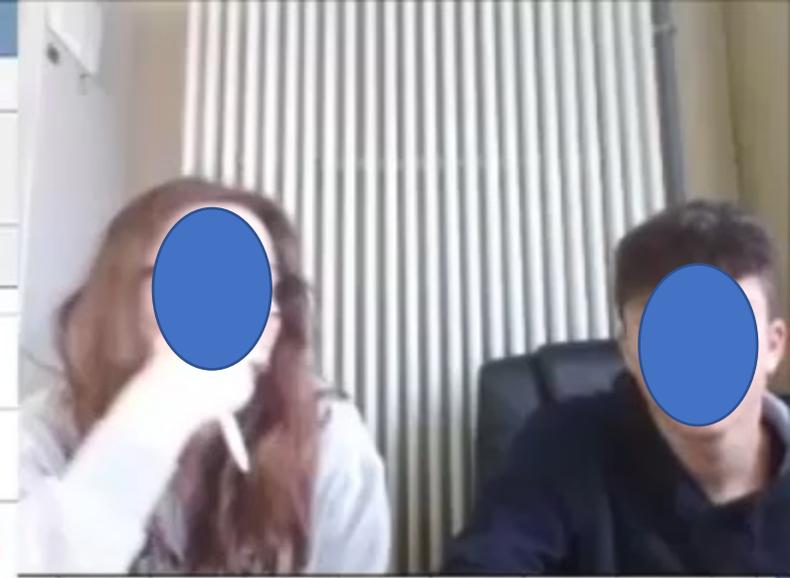
Spiegate la vostra risposta.

Problema del Rally Matematico Transalpino, 2000

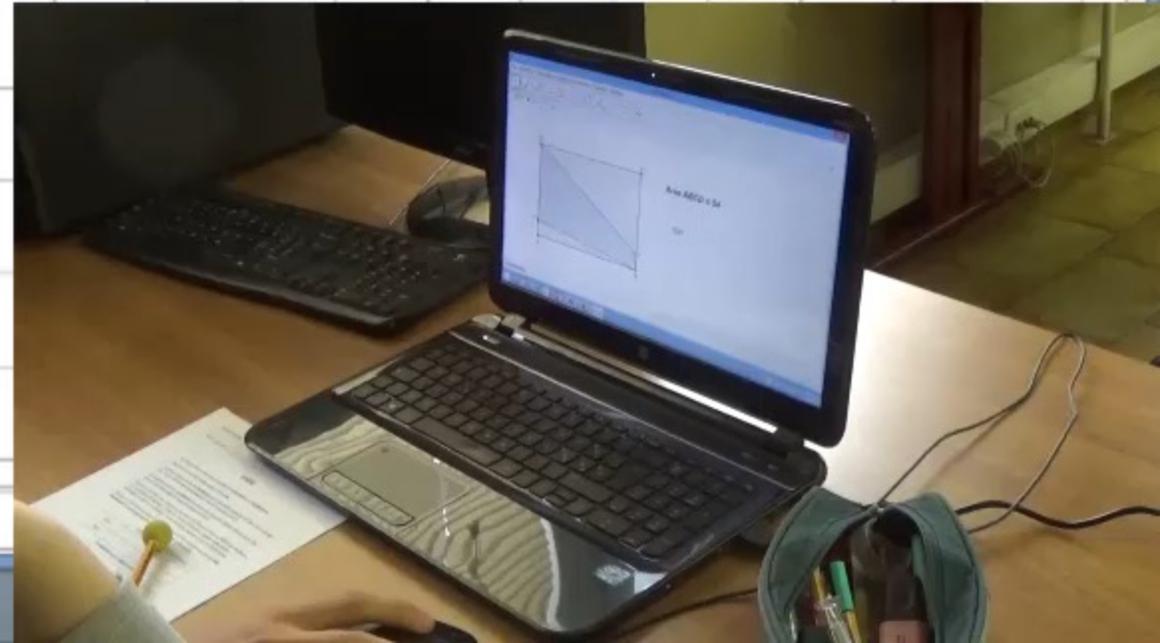
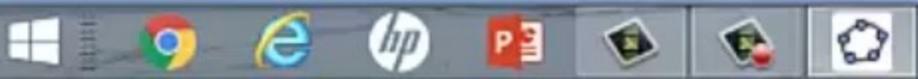


Area ABCD = 54

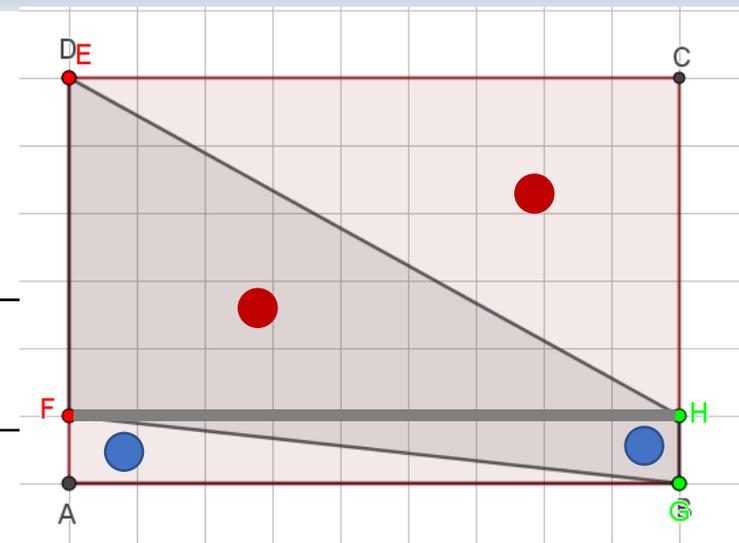
TEST



Inserimento:



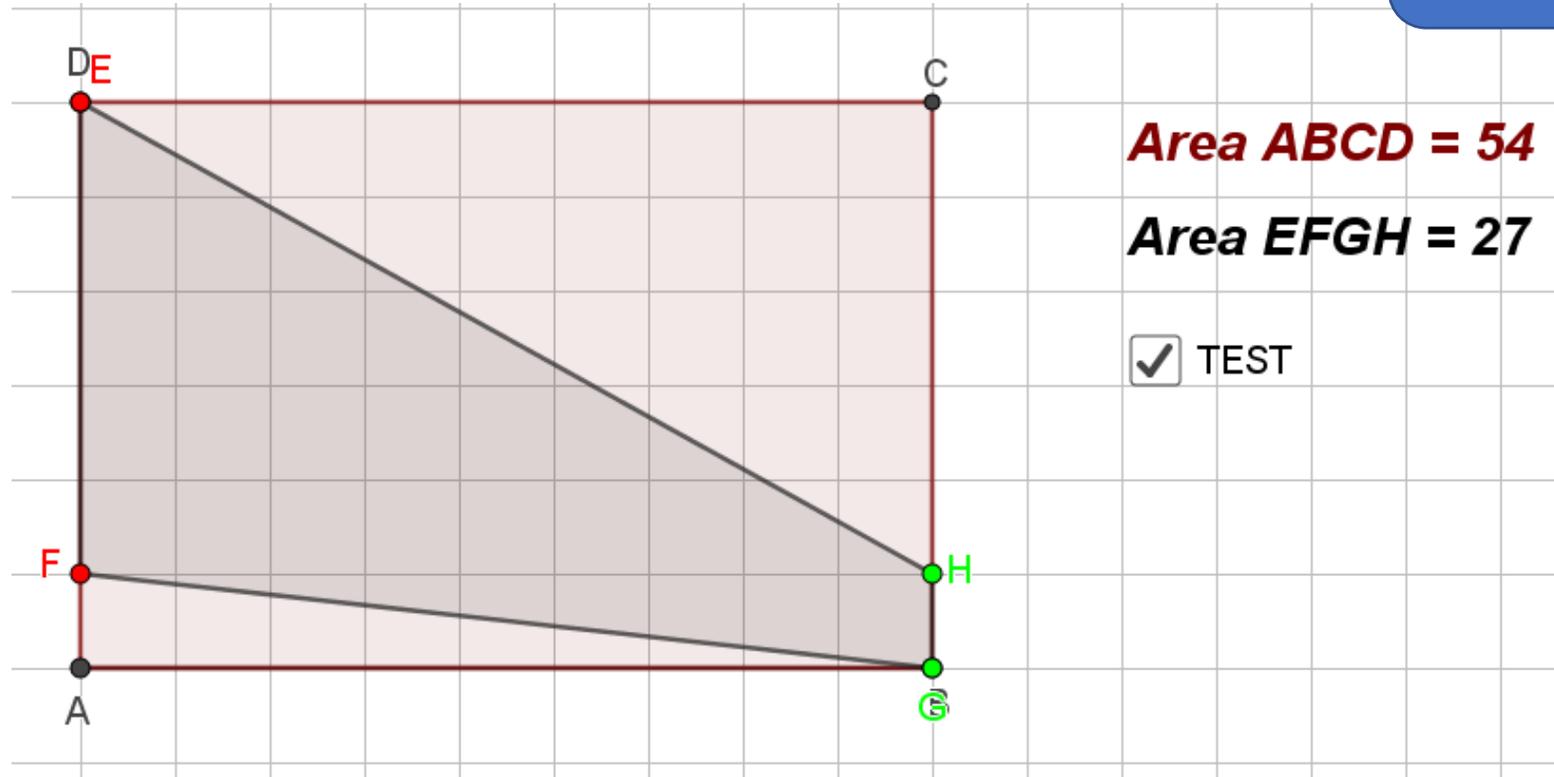
Viola	Vai vai! È giusto!
Andrea	Sono il migliore due volte!
Viola	Vuoi sapere perché è giusto?
Andrea	Mm...
Viola	Questo qua lo vedi (<u>indicando il triangolo rettangolo AFB</u>)? Due rettangoli... se tracci una linea (<u>traccia FH con la penna</u>) <u>ne viene un altro uguale</u> ... tracciando la linea si vede che questo qui (<u>indicando HCD</u>) è uguale a questo qui (<u>indicando DFH</u>). Quindi per forza devono essere uguali



LOGICA
DELL'INDAGINE

**Ragionamento
regressivo:
dalla tesi alla
dimostrazione**

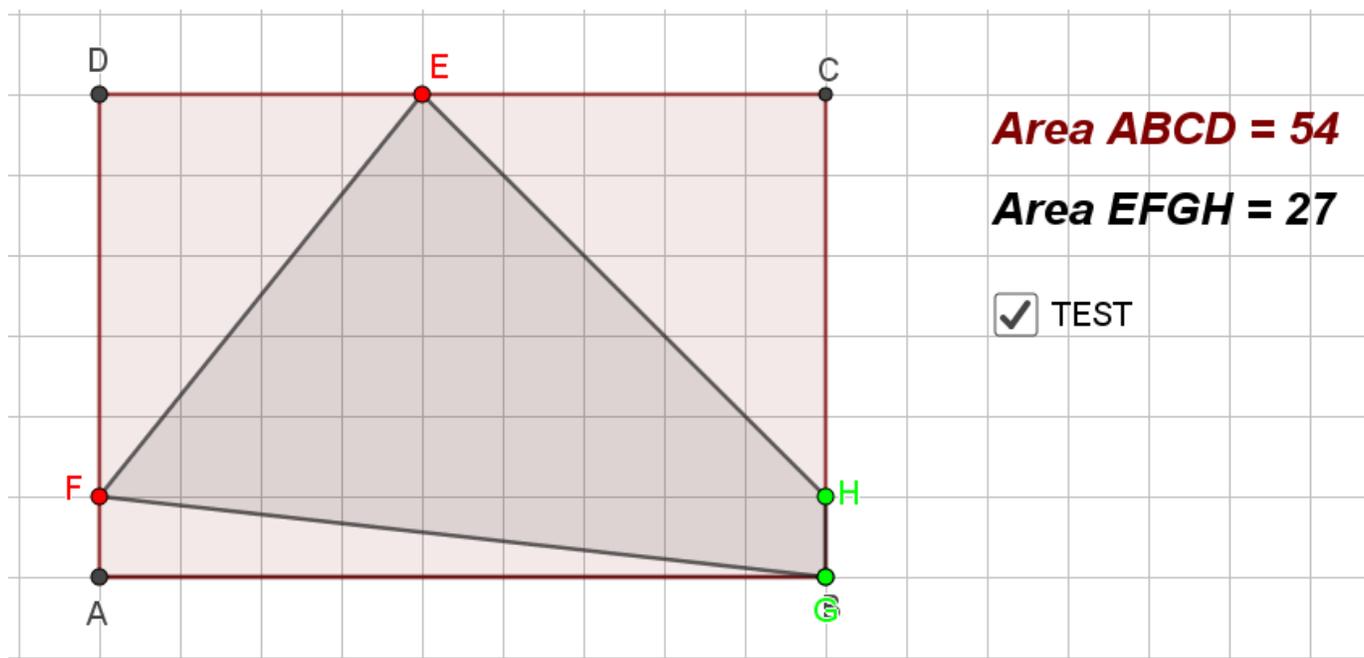
CONGETTURA SBAGLIATA



Formulano la 1° congettura:

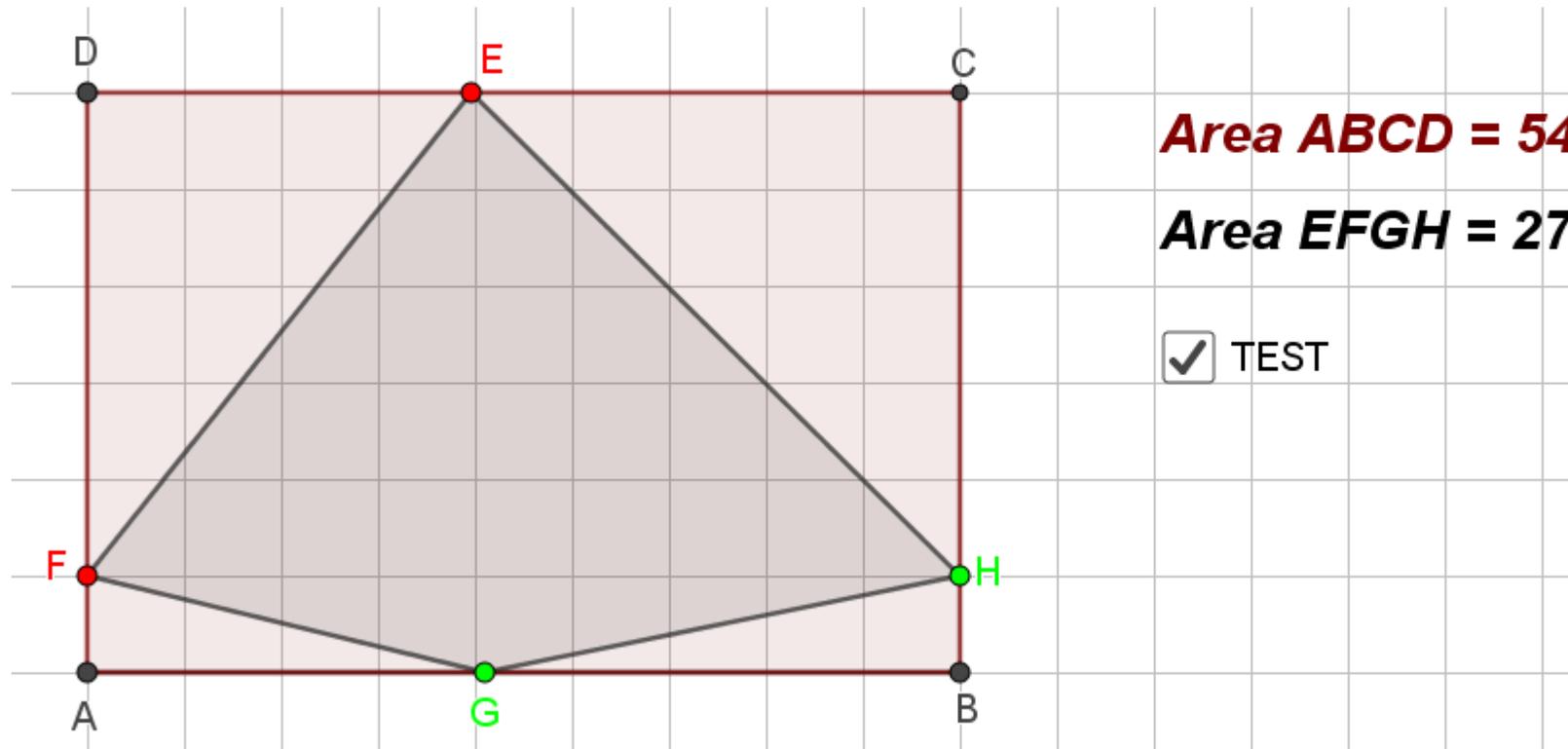
'EF e GH devono essere paralleli ai lati del rettangolo'

**Ragionamento
regressivo:
dalla dimostrazione
all'ipotesi**



Confutano la 1° congettura:

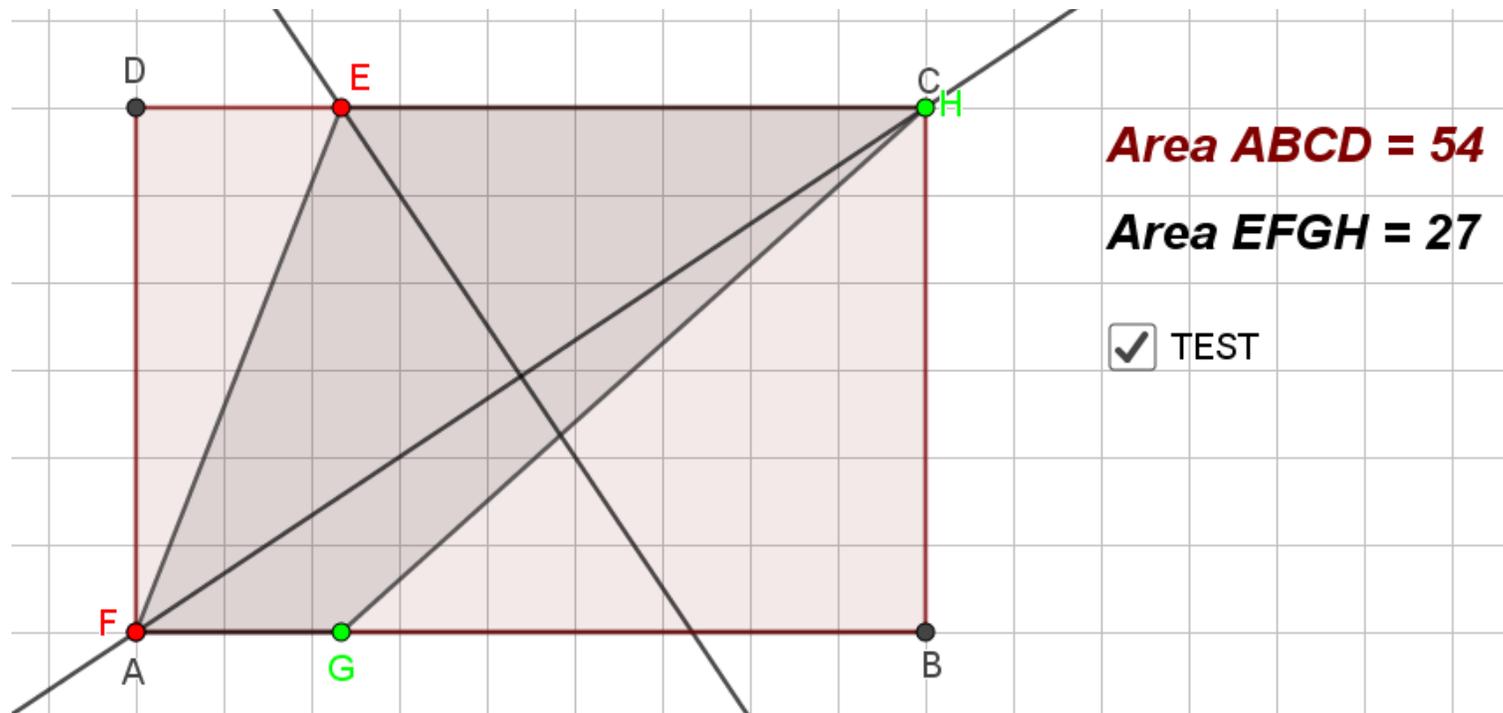
Viola: 'Però così non è cambiato niente (*dopo aver spostato E*). Allora non c'entra niente che devono essere paralleli ai lati. Guarda se metti così (*produce la figura di destra*) è sempre 27 l'area però non sono paralleli'



Formulano la 2° congettura:

‘Se fai le diagonali perpendicolari ti viene’

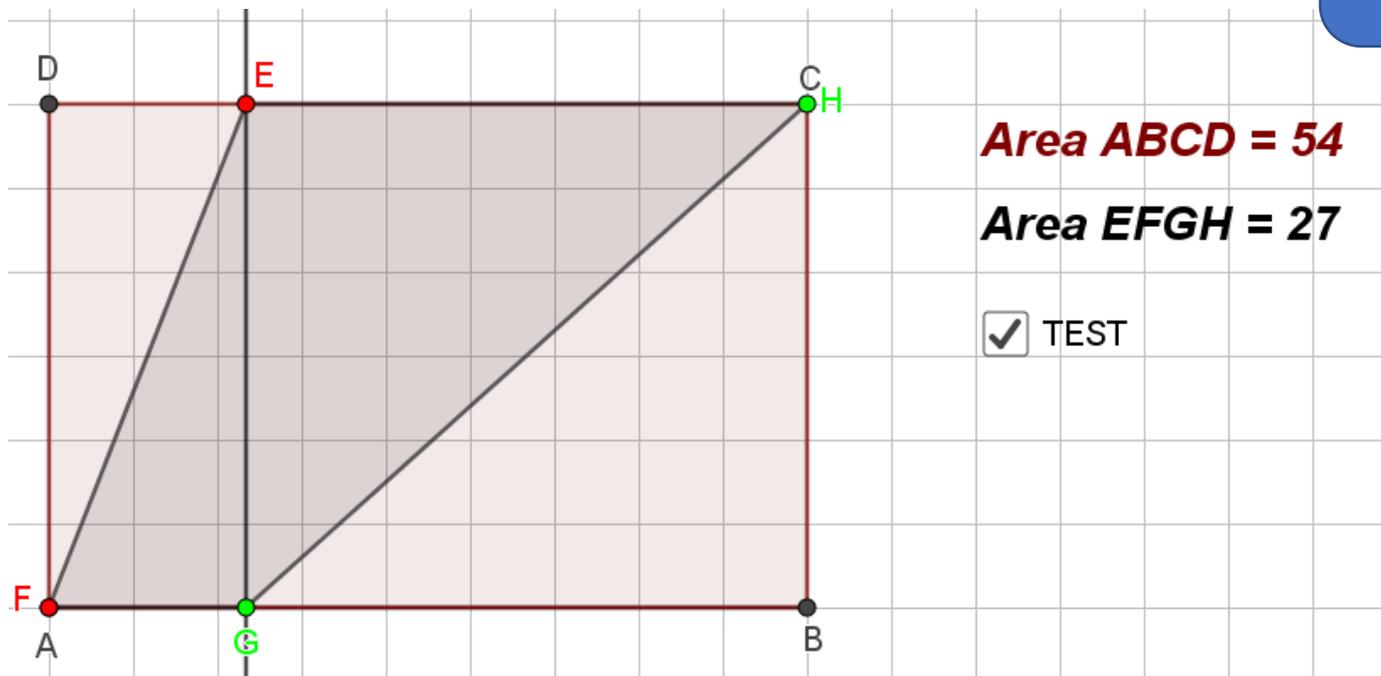
**Ragionamento
regressivo:
dalla tesi all’ipotesi**



Confutano la 2° congettura:

non spiega tutte le configurazioni vincenti per il verificatore

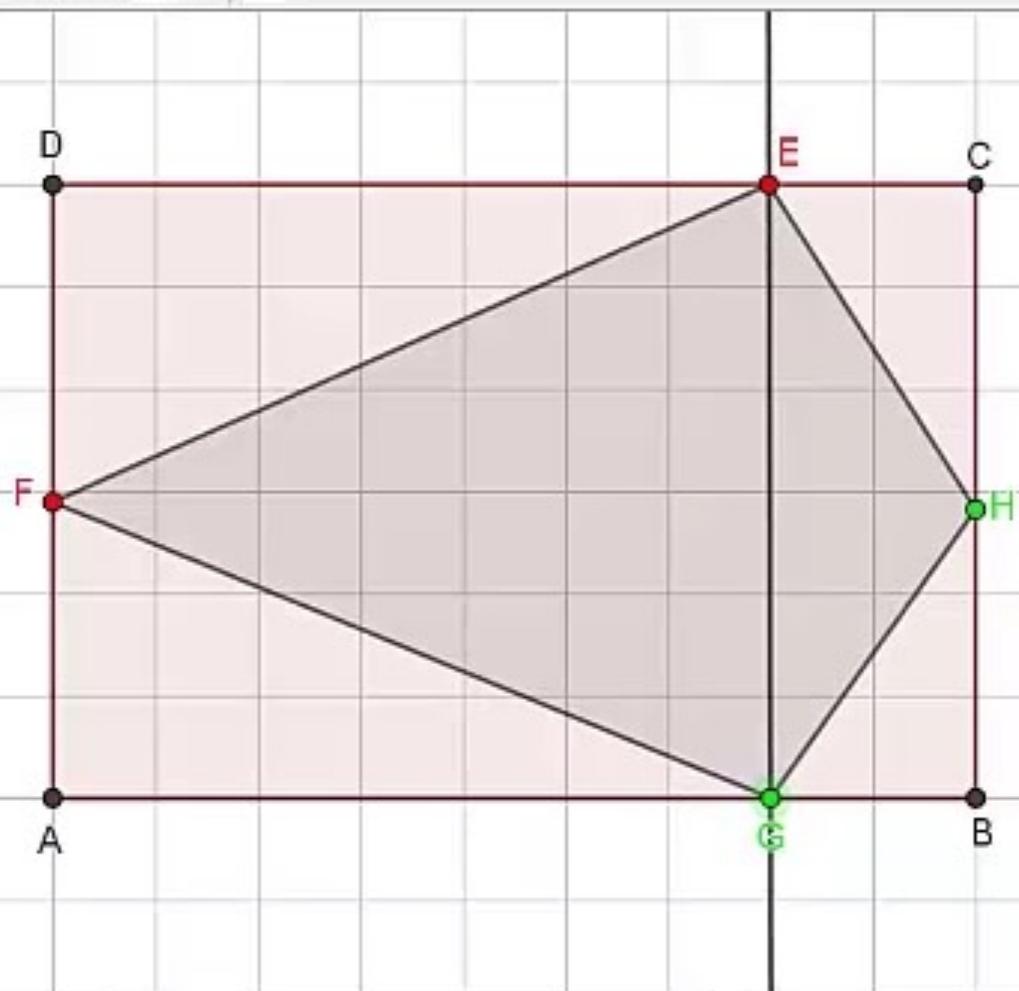
verso la congettura
corretta...



Formulano la 3° congettura:

'Se due punti opposti sono sulla stessa retta allora l'area del trapezio è metà dell'area del rettangolo'

**Ragionamento
regressivo:
dalla tesi all'ipotesi**



$$\text{Area } ABCD = 54$$

$$\text{Area } EFGH = 27$$

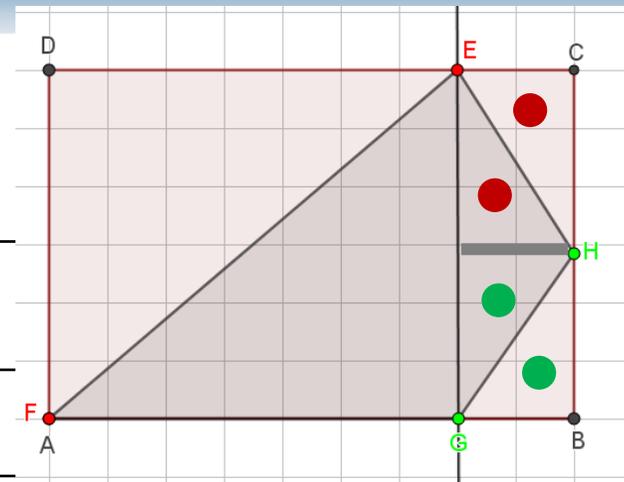
TEST



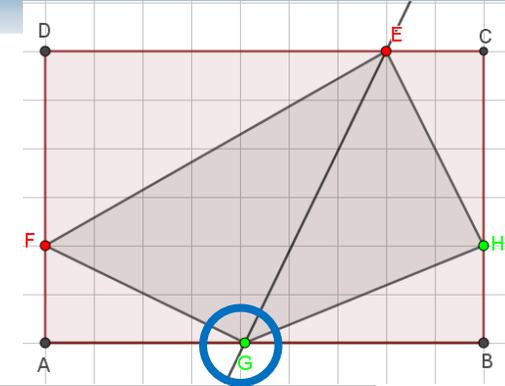
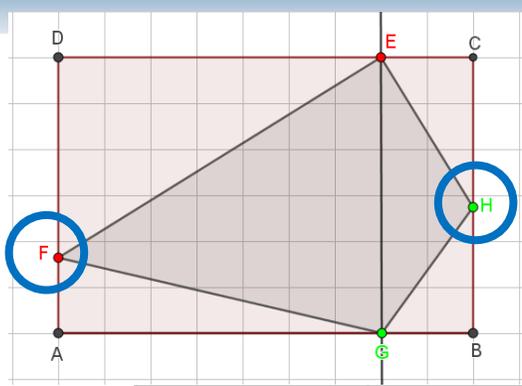
Inserimento:



Viola	Però anche così però viene
Andrea	Eh?
Viola	<p>Anche così viene bene... Quando lo dividi viene uguale.</p> <p>Vedi questo triangolo rettangolo <u>qua</u>? Se <u>ci tracci un'altra linea</u> viene un <u>triangolo rettangolo uguale</u>...</p> <p>E poi c'è <u>questo qui</u>, <u>se ci tracciassi una linea</u> viene così è <u>sono uguali</u></p>
Andrea	Sì



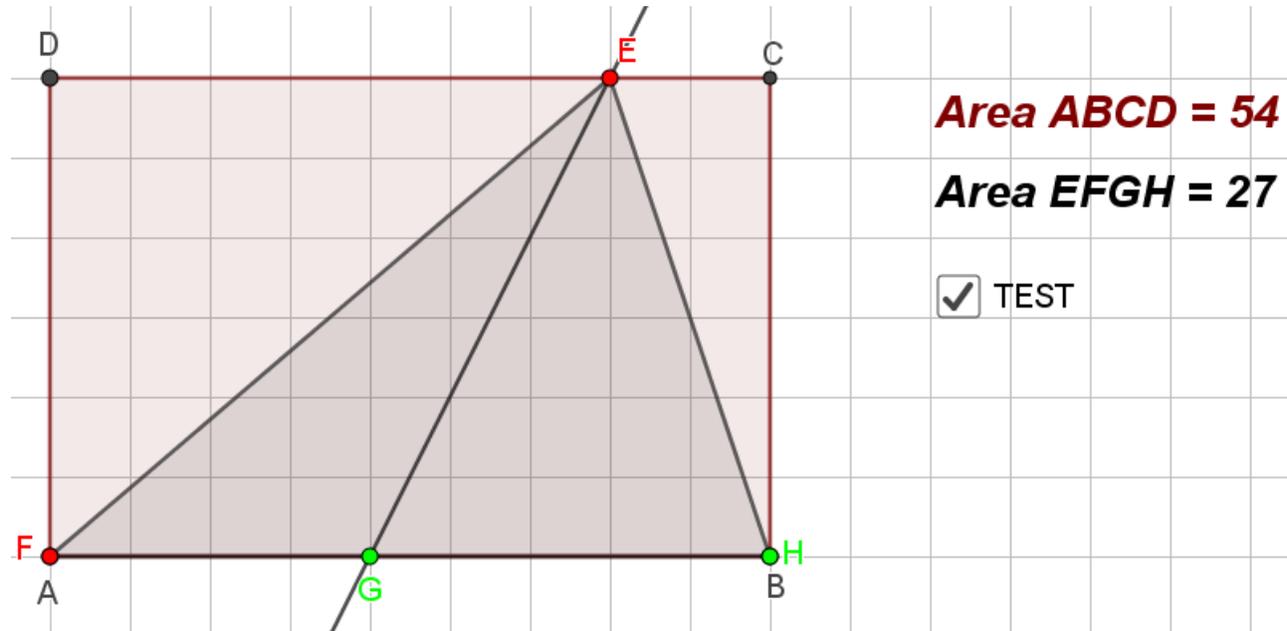
Individuano un nuovo caso: no trapezio e no diagonali perpendicolari
 Dimostrano a parole che l'area di ABCD è il doppio dell'area di EFGH usando l'equiscomponibilità



<p>Andrea</p>	<p><u>(Viola muove prima H e poi F)</u> Abbiamo trovato E e G e quindi ora se muovi F e H... indipendentemente da cosa muovi <u>rimane sempre 27...</u> E e G devono star lì</p>
<p>Viola</p>	<p>E ma <u>allora non tutti i punti devono essere allineati</u> solo E e G... Mentre se proviamo ad allineare questi due <u>(allinea FH e muove G)</u>... <u>Basta che due punti siano allineati</u></p>

Generalizzano la 3° congettura: ‘Basta che due punti opposti *siano allineati*’

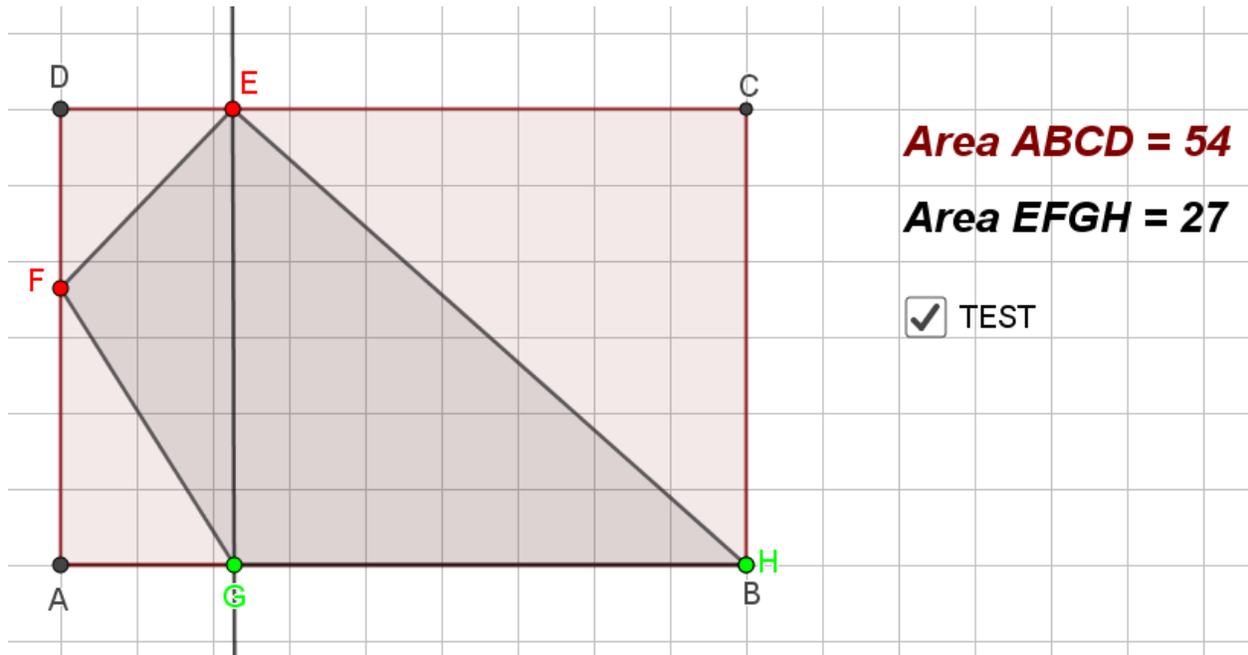
Considerano casi limite



Esplorano un caso limite

Dimostrano a parole che sussiste la relazione tra le aree

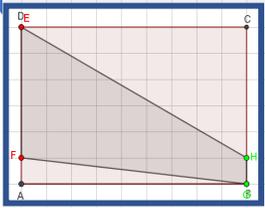
Chiariscono il linguaggio



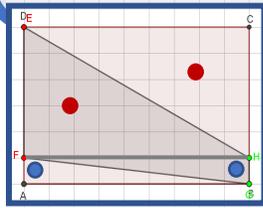
Riformulazione della 3° congettura

Viola: 'Sulla stessa retta non vuol dire che ***EG è parallelo ad AD?***'

17:16
Osservano
la tesi

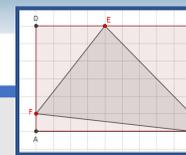


18:00
Dimostrano



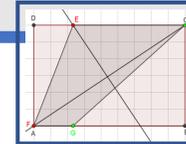
18:18
Formulano
l'ipotesi 1

18:47
Osservano

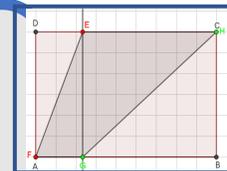


22:09
Formulano
l'ipotesi 2

25:56
Osservano



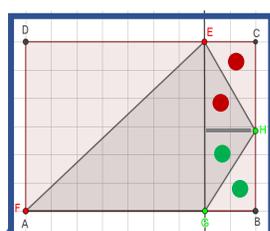
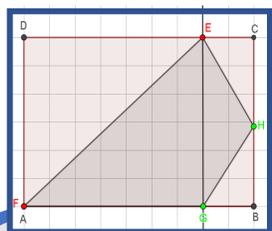
27:07
Formulano
l'ipotesi 3



39:06
Osservano
la tesi

40:09
Dimostrano

40:46
Generalizzano
l'ipotesi 3





Ragionamento regressivo

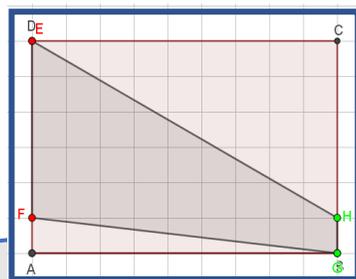


Ragionamento progressivo

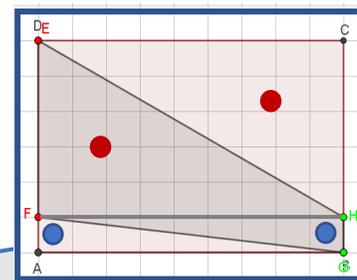
IL LAVORO DEL MATEMATICO



Logica dell'indagine



Aspetti empirici



Aspetti teorici

Questionario:

1. Quali sono gli aspetti del verificatore e del falsificatore che ti hanno più colpito in positivo e in negativo? Perché?

2. Come giudichi le sfide in GeoGebra? Elenca aspetti positivi e negativi.

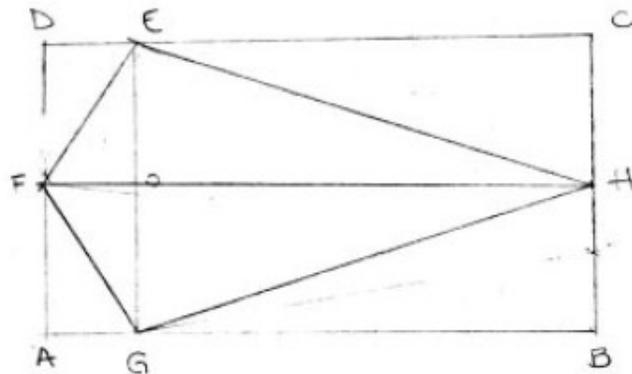
3. Confronta il metodo standard di dimostrare in geometria con quello che hai sperimentato. Elenca aspetti negativi e positivi dell'esperienza.

• Sono più concrete, ci si applica di più nelle dimostrazioni pratiche e si hanno più mezzi per trovare più informazioni, mentre sul quaderno si usa di più la teoria e a volte si prova a far coincidere il teorema al problema e non il problema al teorema.

*‘Sono più concrete, ci si applica di più nella **dimostrazione pratica** e si hanno più mezzi per trovare più informazioni, mentre sul quaderno si usa di più la teoria e a volte **si prova a far coincidere il teorema al problema e non il problema al teorema**’*

LA DISCUSSIONE DI CLASSE

DISEGNO:



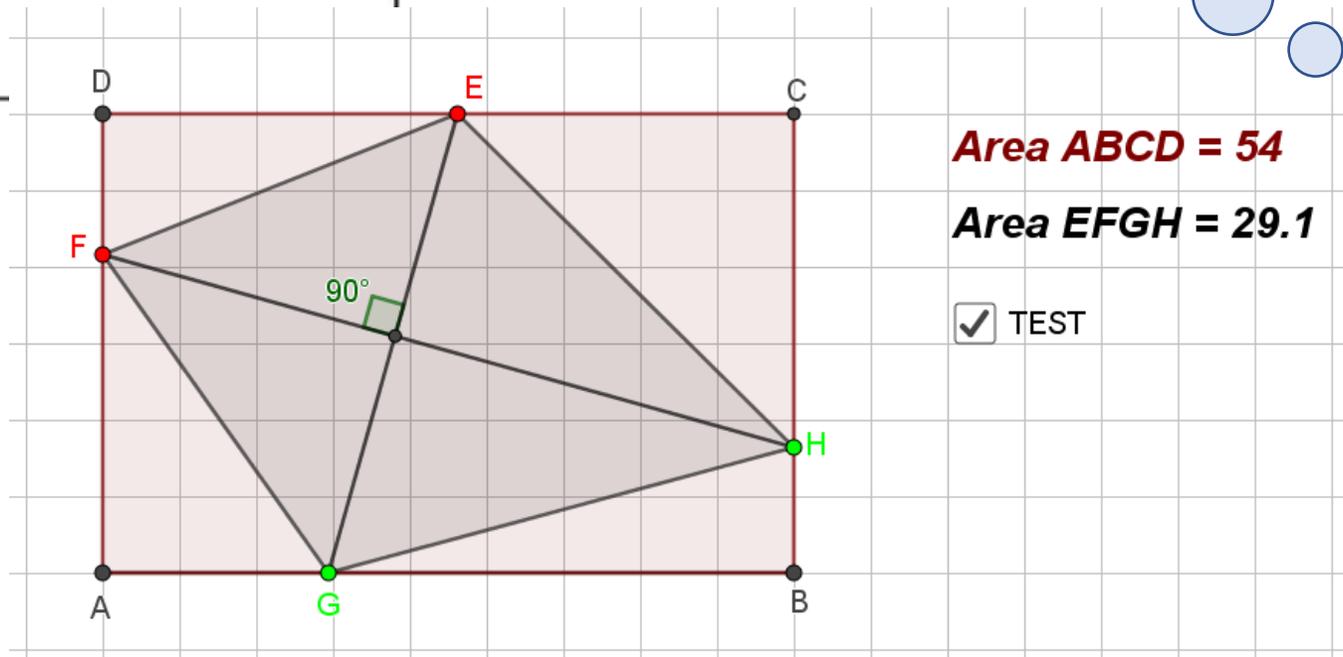
IPOTESI:

ABCD RETANGOLO
EFGH POLIGONO INSCRITO
EG \perp FH (DIAGONALI)

TESI:

$2 \cdot \text{Area EFGH} = \text{Area ABCD}$

Siete d'accordo con questa ipotesi?



DISEGNO:

IPOTESI:
 $ABCD = \text{rettangolo}$

TESI:
 $2 EFGH = ABCD$

DIMOSTRAZIONE:

TRACCIO EG
 $EG \parallel AD \perp AB$

$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{EG} \\ \overline{DE} = \overline{AG} \\ AE \text{ in comune} \end{array} \right\} \xrightarrow{LL} \triangle EAG = \triangle DAE$

$\left. \begin{array}{l} \overline{EC} = \overline{GB} \\ \overline{CB} = \overline{EG} \\ CG \text{ in comune} \end{array} \right\} \xrightarrow{LL} \triangle CGB = \triangle EGC$

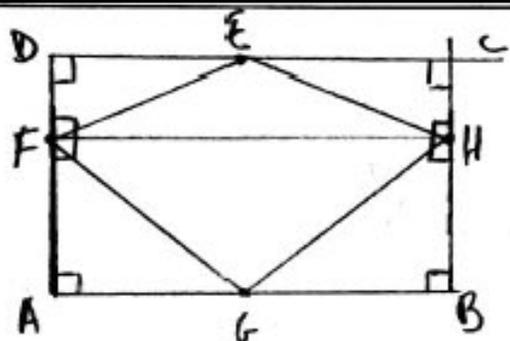
$\left. \begin{array}{l} \triangle EAG = \triangle DAE \\ \triangle CGB = \triangle EGC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AECG = \frac{1}{2} ABCD$

$2 AECG = ABCD$

C.V.D.

Mancano le ipotesi...

DISEGNO:



IPOTESI: ABCD rettangolo.
 $FH \perp AD, BC \perp FH$

TESI:

$$A_{ABCD} \cong 2 A_{EFGH}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left. \begin{array}{l} A_{FEH} \cong \frac{1}{2} FOCH \text{ (PER TEOREMA STESSA BASE E STESSA ALTEZZA FH E DF)} \\ A_{FGH} \cong \frac{1}{2} ABHF \text{ (PER TEOREMA STESSA BASE FH E STESSA ALTEZZA AP)} \end{array} \right\} EFGH \cong \frac{1}{2} ABCD$$

5. Adesso, giocando altre partite, cercate di stabilire se il teorema inverso è vero o falso. Scrivete le vostre osservazioni.

È vero perché senza due punti allineati non si ha
la metà dell'area

$\neg A \rightarrow \neg B$

È vero perché se "un quadrilatero inscritto a un rettangolo
ha area dimezzata a un rettangolo allora una diagonale
è per forza perpendicolare a un lato"

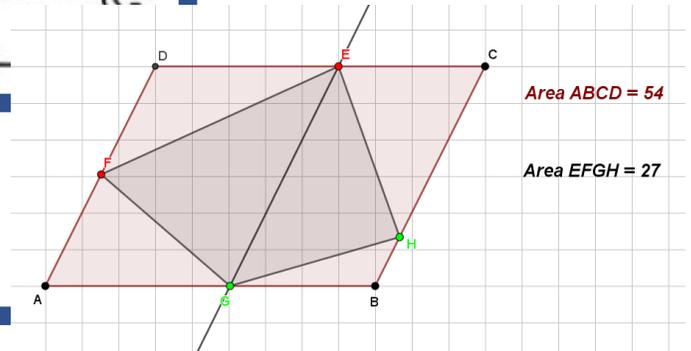
$B \rightarrow A$

7. FACOLTATIVO: Se al posto del rettangolo ABCD ci fosse un parallelogramma, il teorema che avete scoperto sarebbe ancora valido? Scrivete le vostre osservazioni.

Approccio empirico

Sì, sarebbe ancora valido.

Abbiamo visto che se una diagonale del quadrilatero è parallela ad un lato del parallelogramma, allora è indifferente il modo in cui si spostano gli altri due punti.



Sarebbe ancora valido perché la dimostrazione non varia perché hanno sempre stessa base e stessa altezza.

Approccio teorico

GIOCO 3

The screenshot displays a geometry software window titled "GIOCO3.ggb". The interface includes a toolbar with various geometric tools and a main workspace. In the workspace, a triangle is drawn with vertices labeled A (blue), B (green), and C (red). The triangle is shaded light brown. Three lines extend from each vertex: one from A, one from B, and one from C. A legend in the upper right of the workspace contains six checkboxes: "Vertice A", "Vertice B", "Vertice C", "Test A", "Test B", and "Test C". To the right of the triangle, text labels indicate "FALSIFICATORE: A, B, C" and "VERIFICATORE: D, E, F". The bottom of the window features an input field labeled "Inserimento:" and a help icon.

Libri di testo scuola primaria

Altezza esemplificata su triangoli equilateri o isosceli

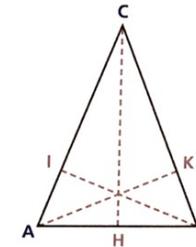
seguendo l'orientamento orizzontale-verticale della pagina

I triangoli: le altezze

Studia

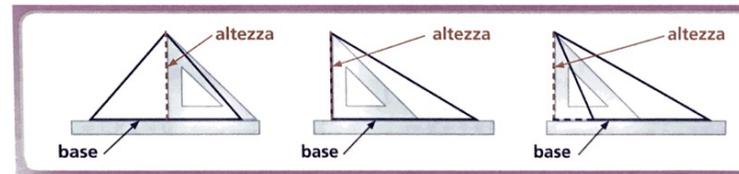
L'altezza

L'altezza del triangolo è il segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento. Il lato su cui cade l'altezza si chiama **base**. Ogni lato del triangolo può essere considerato come base, quindi ogni triangolo ha tre altezze.

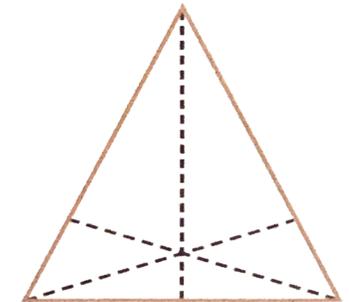


Strategie

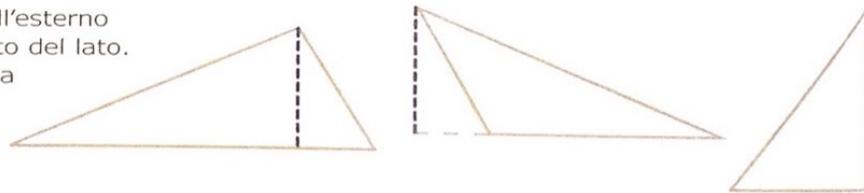
- Osserva e impara come tracciare l'altezza con riga e squadra in tre diversi triangoli.



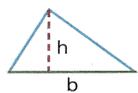
In ciascun triangolo è possibile tracciare **3 altezze**, ciascuna delle quali parte da un diverso vertice.



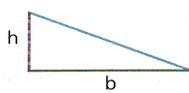
Talvolta l'altezza può cadere all'esterno del triangolo, sul prolungamento del lato. Nel triangolo rettangolo l'altezza coincide con uno dei lati.



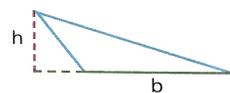
Ogni lato del triangolo può essere considerato come **base (b)**: quindi ogni triangolo ha **tre altezze (h)**. L'altezza di un triangolo può essere:



- interna** al triangolo.



- coincidente** con un lato.



- esterna** al triangolo e unirsi al **prolungamento** della base.

ATTRIBUTI CRITICI:

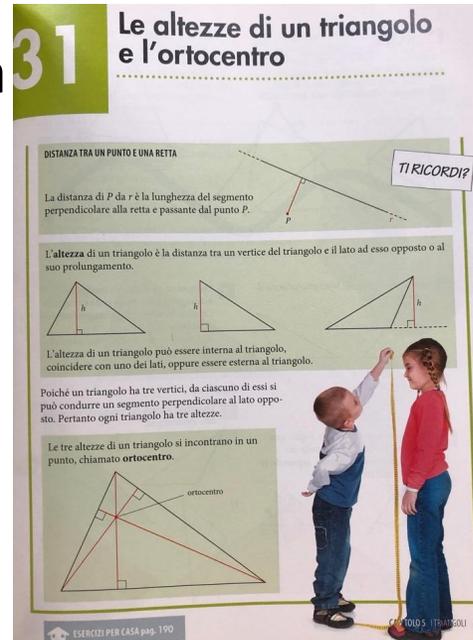
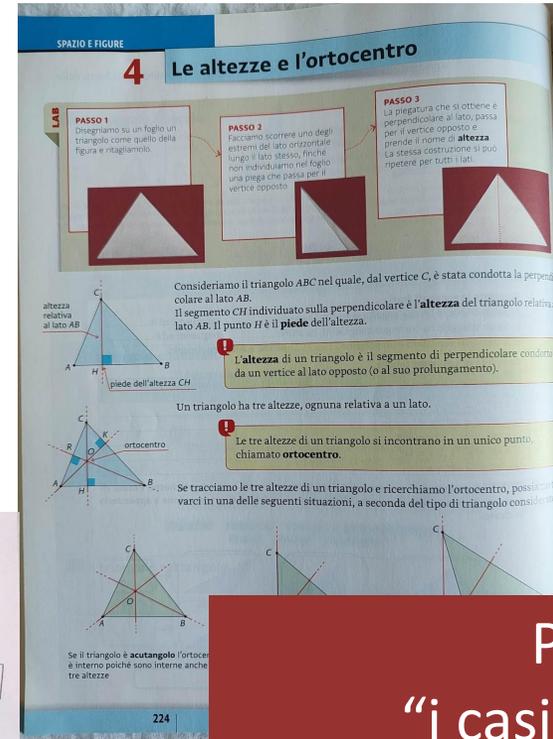
proprietà che l'esempio di un concetto deve avere per essere considerate tale

Libri di testo scuola secondaria di primo grado

Altezza esemplificata su triangoli scaleni

segundo l'orientamento orizzontale-verticale della pagina

Osservazione che le altezze dei triangoli sono tre, seguita dalla definizione di ortocentro

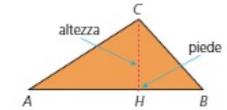


Altezze di un triangolo e ortocentro

Jacopo ha montato la sua tenda canadese in campeggio. La cerniera che chiude l'entrata va dal vertice in alto fino alla base della tenda. Guarda la figura: se l'entrata rappresenta un triangolo, la cerniera che cosa rappresenta?



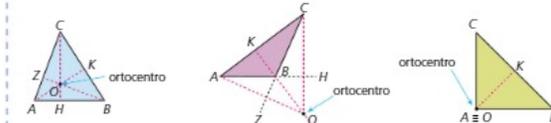
Linguaggio matematico
Disegniamo il triangolo ABC e conduciamo dal vertice C il segmento CH perpendicolare al lato opposto AB .



Il segmento CH è l'altezza del triangolo relativa al lato AB . Il punto H si chiama piede dell'altezza.

Definizioni
L'altezza di un triangolo relativa a un lato è il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto o al suo prolungamento.
Le altezze di un triangolo sono tre e si incontrano in uno stesso punto che si chiama **ortocentro**.

Disegniamo un triangolo acutangolo, un triangolo rettangolo e un triangolo ottusangolo, tracciamo le altezze relative ai tre lati e osserviamo la posizione dell'ortocentro in ciascuno di essi.



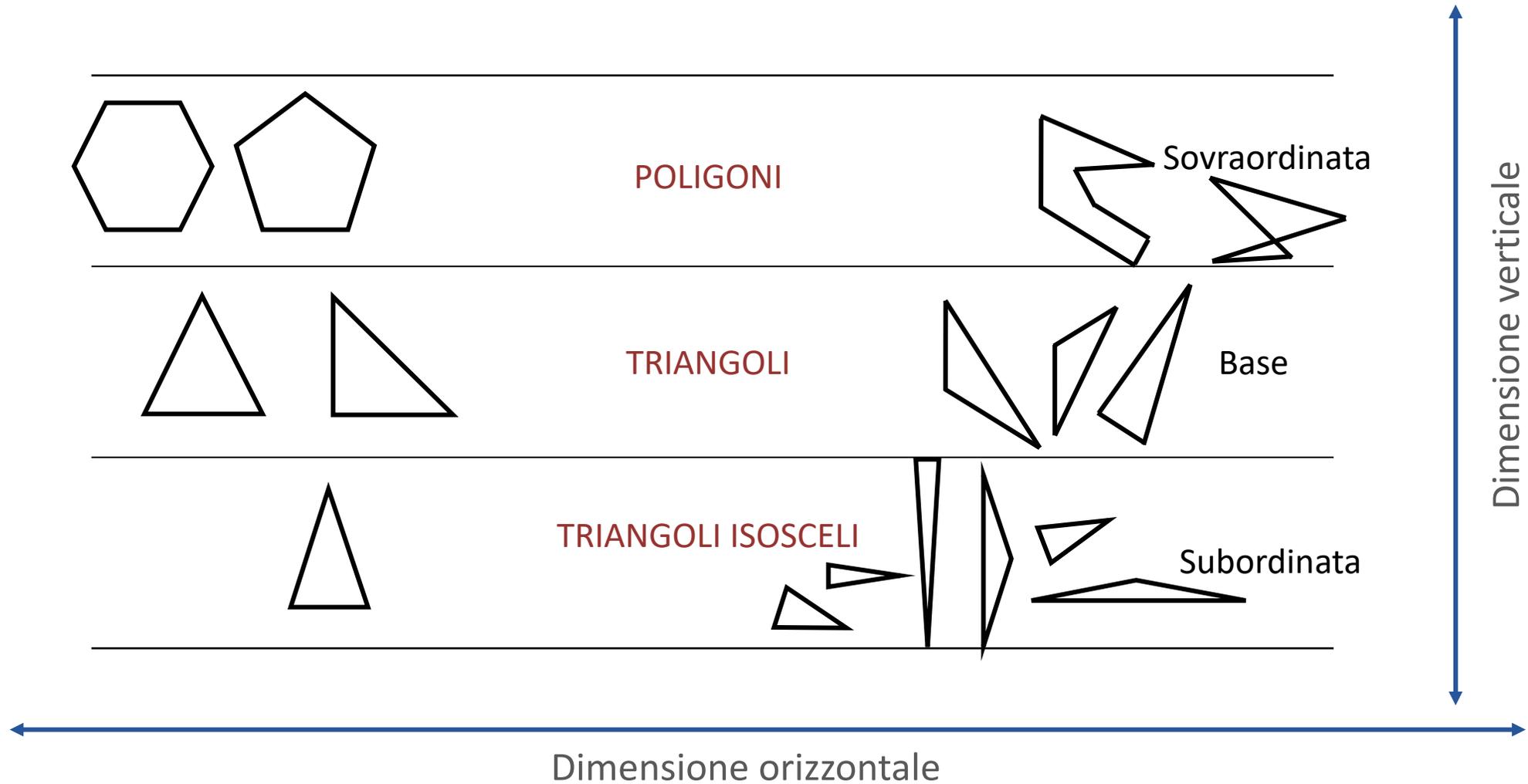
Proprietà
L'ortocentro è interno al triangolo se questo è acutangolo, esterno se il triangolo è ottusangolo, coincide con il vertice dell'angolo retto se il triangolo è rettangolo.

PROTOTIPI
"i casi più evidenti di appartenenza ad una categoria definiti operativamente dai giudizi delle persone sulla bontà dell'appartenenza ad una data categoria" (Rosch, 1999, p.196)

Come categorizziamo le cose?



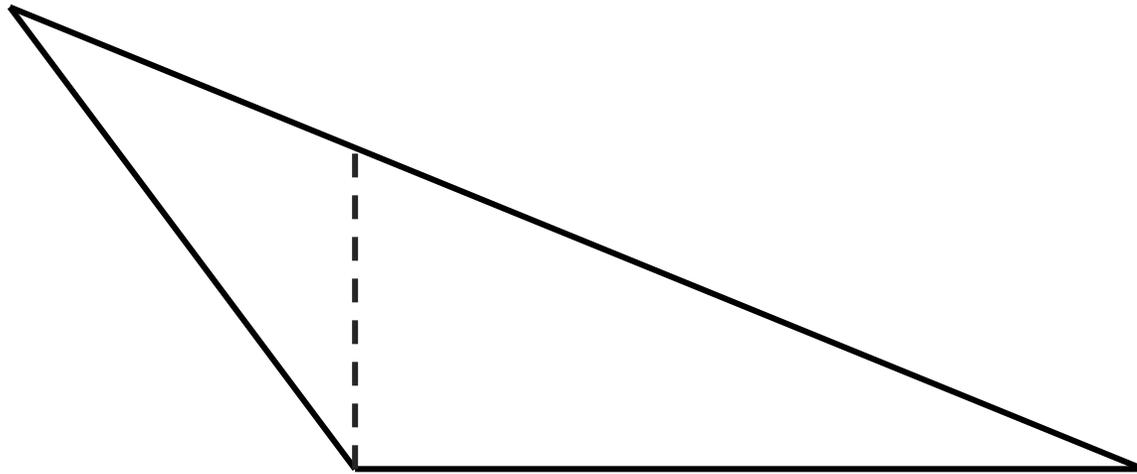
Come categorizziamo le cose?



(E. Rosch, 1999)

Ogni "concetto" ha una serie di attributi critici e una serie di esempi. Nell'insieme degli esempi di un concetto ci sono i "super" esempi: - i prototipi (Rosch e Mervis, 1975); questi sono gli esempi classici. In altre parole, tutti gli esempi di un concetto sono matematicamente uguali, perché sono conformi alla definizione del concetto e contengono tutti i suoi attributi critici, ma sono diversi l'uno dall'altro psicologicamente. (Tutti gli esempi sono (matematicamente) uguali, ma alcuni sono più uguali di altri – scusandomi con George Orwell.)».

(Hershkowitz, 1987, p. 240)



EFFETTO PROTORIPO

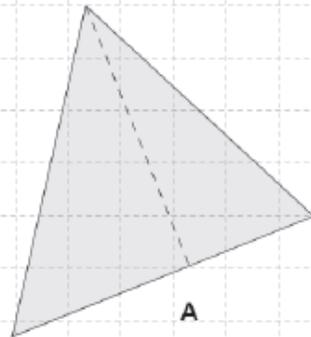
Nelle produzioni degli studenti è riconoscibile la selezione di attributi non critici e la loro estensione a tutti gli esempi di un dato concetto matematico

(Hershkowitz & Vinner, 1983; Hershkowitz, 1987)

Quesito Invalsi 2017
Grado 5

D27. Osserva i triangoli.

13,5%



39,4%



6,2%



39,1%



In uno dei triangoli il segmento tratteggiato NON è un'altezza. In quale?

- A. Nel triangolo A
- B. Nel triangolo B
- C. Nel triangolo C
- D. Nel triangolo D

Efraim Fischbein



CONCETTI FIGURALI

“Gli oggetti di studio e manipolazione nel ragionamento geometrico sono dunque entità mentali, chiamate da noi concetti figurali, i quali riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza), e allo stesso tempo possiedono qualità concettuali - come idealità, astrattezza, generalità, perfezione.”

(Fischbein, 1993, p.143)

Costruire un concetto figurale vuol dire perseguire
“l’integrazione di proprietà concettuali e figurali in una struttura mentale unitaria, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali”.

(Fischbein 1993, p.156)

Tall and Vinner (1981, p. 152)

Immagine concettuale personale: “la struttura cognitiva associata al concetto, la quale include tutte le immagini mentali e le proprietà e i processi associati [...] costruita negli anni attraverso vari tipi di esperienze, che cambia quando l’individuo incontra nuovi stimoli e matura”

Definizione formale del concetto: stabilita dalla comunità dei matematici all’interno di una certa teoria.

Tall and Vinner (1981, p. 152)

Immagine concettuale personale: “la struttura cognitiva associata al concetto, la quale include tutte le immagini mentali e le proprietà e i processi associati [...] costruita negli anni attraverso vari tipi di esperienze, che cambia quando l’individuo incontra nuovi stimoli e matura”

Definizione formale del concetto: una definizione di un concetto in base a una certa teoria.

MISCONCEZIONE:

un’immagine concettuale che è parziale o contiene elementi in conflitto con la definizione formale del concetto

(Hershkowitz, 1987)

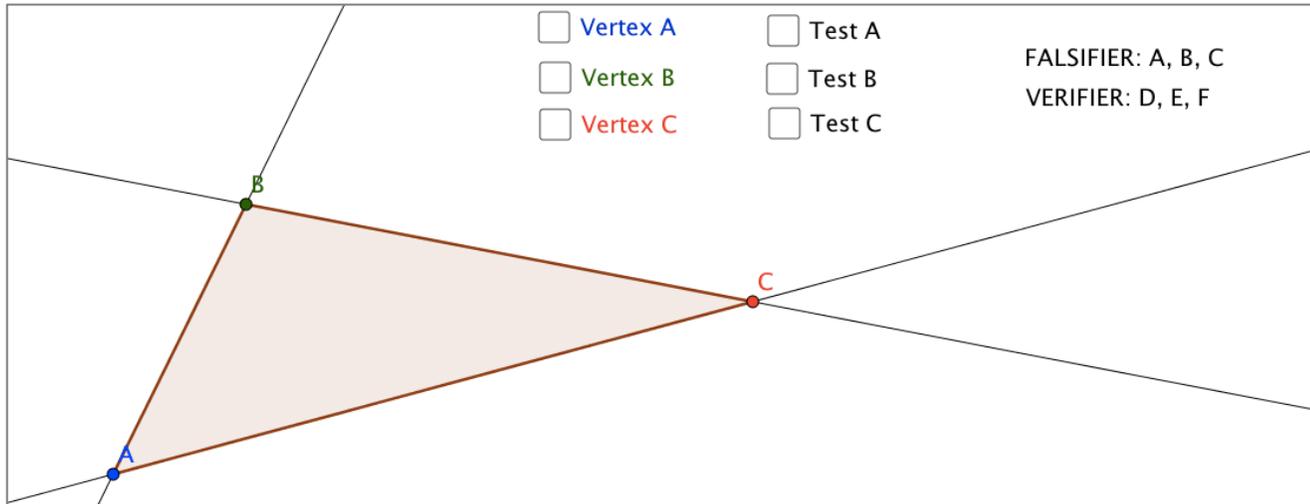
Come arricchire l'immagine concettuale degli studenti?

Watson and Mason (2005) sottolineano l'importanza di sviluppare negli studenti un ricco *spazio degli esempi*, inteso come spazio metaforico che contiene alcuni esempi ed esclude altri, in cui i diversi esempi giocano un ruolo differente nella costruzione di senso da parte degli studenti



Software di
geometria dinamica

GIOCO-SFIDA SUL CONCETTO DI ALTEZZA



SFIDA

- 1) Aprite il file <https://www.geogebra.org/m/rmqcvm3>
- 2) All'interno della vostra coppia stabilite un verificatore e un falsificatore.
- 3) Ogni partita è costituita da due mosse e da un test.
- 4) La prima mossa è quella del falsificatore che muove i punti A, B, C dando al triangolo la forma che desidera e sceglie un vertice del triangolo selezionando la casella relativa (Punto A, Punto B oppure Punto C).
- 5) La seconda mossa è del verificatore che muove il punto che appare (D, E oppure F) e cerca di spostare l'altezza nella posizione corretta.
- 6) Quando il verificatore è soddisfatto il falsificatore seleziona il test corrispondente e verifica se l'altezza disposta dal verificatore è corretta.

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1		
Partita 2		
....		

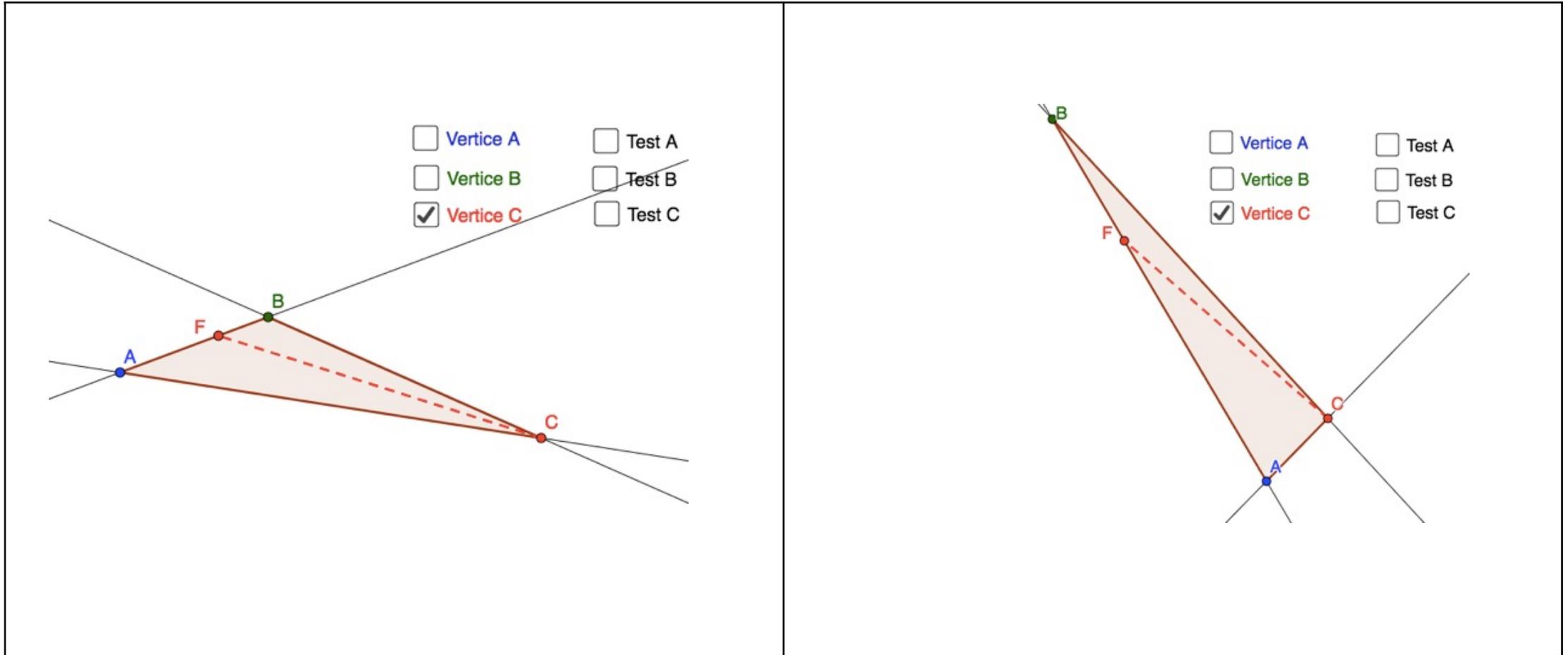
Scambiatevi i ruoli e giocate ancora

	Verificatore	Falsificatore
Partita 1		
Partita 2		
...		

Riflessioni sulla prima attività:

1. Quando giocavi il ruolo del verificatore a cosa prestavi attenzione al fine di spostare l'altezza nella posizione corretta?
2. Quando giocavi il ruolo del falsificatore sei riuscito a mettere in difficoltà il verificatore? In questi casi quali caratteristiche geometriche aveva la figura?
3. Quando giocavi il ruolo del verificatore riuscivi sempre a raggiungere l'obiettivo? Se sì, spiega come facevi, altrimenti spiega perché alcune volte non riuscivi.

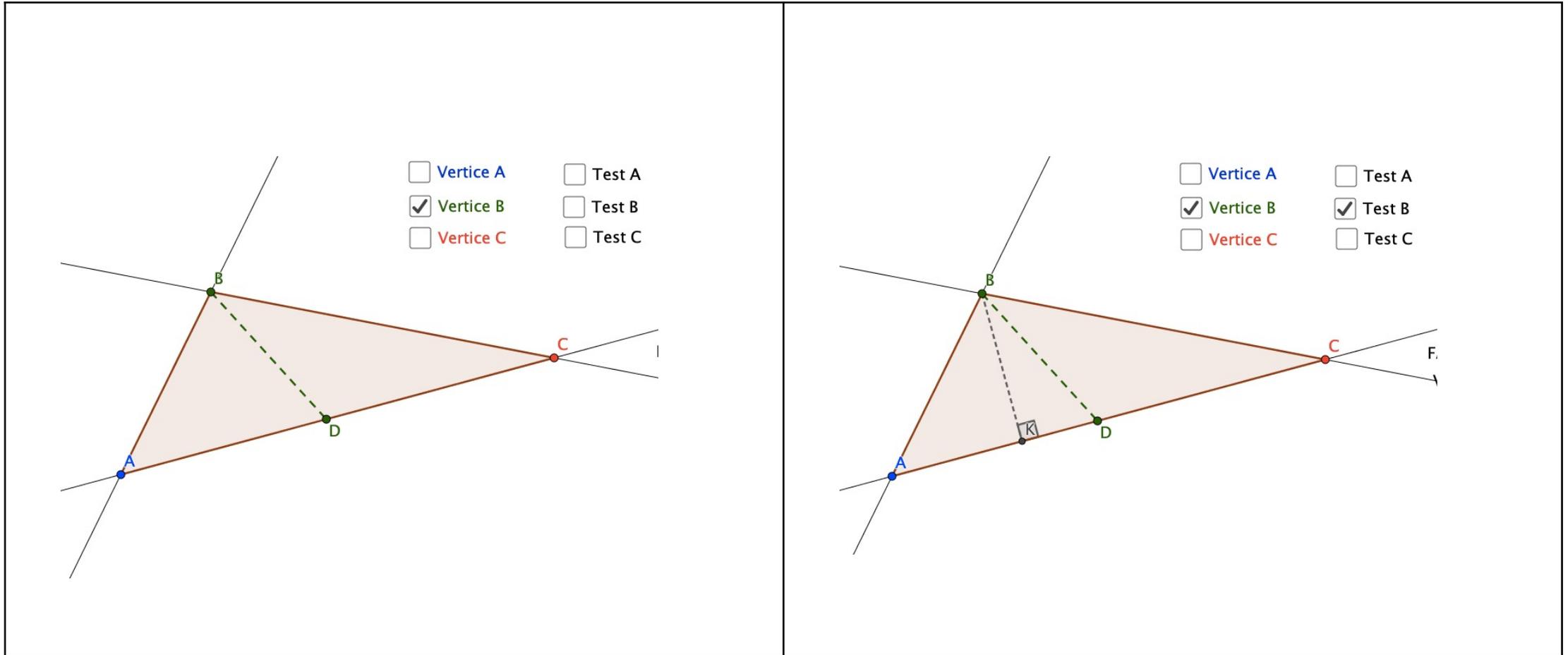
IL RUOLO DEL FALSIFICATORE



ALTEZZA ESTERNA AL TRIANGOLO

ALTEZZA NON VERTICALE

IL RUOLO DEL FEEDBACK DIGITALE



ALTEZZA PROPOSTA DAL VERIFICATORE

FEEDBACK DIGITALE

DOMANDE PER LO STUDENTE

1. *Quando giocavi il ruolo del **verificatore** a cosa prestavi attenzione al fine di spostare l'altezza nella posizione corretta?*

Focus sul processo di produzione degli esempi di altezza

2. *Quando giocavi il ruolo del **falsificatore** sei riuscito a mettere in difficoltà il verificatore? In questi casi quali caratteristiche geometriche aveva la figura?*

Focus su proprietà del trinagolo – ottusangolo, rettangolo, isoscele ecc... - e la posizione dell'altezza

3. *Quando giocavi il ruolo del verificatore riuscivi sempre a raggiungere l'obiettivo? Se sì, spiega come facevi, altrimenti spiega perché alcune volte non riuscivi*

Focus sulle difficoltà incontrate ed errori commessi

Metodologia:

Sperimentazione condotta in tre classi di scuola secondaria di primo grado:

- **fase di gioco:** giocata a coppie su un pc o tablet (una coppia è stata filmata)
 - risposte alle **domande:** lavoro a coppie su foglio di carta (i protocolli di tutti gli studenti sono stati raccolti)
 - **discussione di classe** (videoregistrata)
-
- *presenza in classe di insegnante e ricercatrici*

Come il design didattico (gioco + domande + discussione di classe) contribuisce a rendere evidente **l'immagine concettuale personale degli studenti (all'insegnante e/o agli studenti)?**



Richiesta di esplicitazione
i **processi** che guidano la
mossa del verificatore

La discussione di classe

1. **R1:** Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l'obiettivo?
2. **Lu:** Fare gli angoli di 90, cioè per fare l'altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°
3. **R1:** Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?
4. **Lu:** Guardavo *questo* il punto blu e *quel punto*...
5. **Prof:** Chi vuole dire la propria? Tobia vai...
6. **To:** *Io guardo* il lato su cui bisogna posizionare il punto dell'altezza. Guardo il lato sotto e guardo che l'altezza sia 90°
7. **R1:** Ci indichi esattamente dove?
8. **To:** *Io guardo questo qua, questo lato qua sotto e guardo che la linea dell'altezza sia di 90°*

Richiesta di esplicitazione
i **processi** che guidano la
mossa del verificatore

La discussione di classe

Angoli 90°

1. **R1:** Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l'obiettivo?
2. **Lu:** Fare gli **angoli di 90**, cioè per fare l'altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°
3. **R1:** Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?
4. **Lu:** Guardavo *questo* il punto blu e *quel punto*...
5. **Prof:** Chi vuole dire la propria? Tobia vai...
6. **To:** *Io guardo* il lato su cui bisogna posizionare il punto dell'altezza. Guardo il lato sotto e guardo che l'altezza sia 90°
7. **R1:** Ci indichi esattamente dove?
8. **To:** *Io guardo questo qua, questo lato qua sotto e guardo che la linea dell'altezza sia di 90°*

Richiesta di esplicitazione
i **processi** che guidano la
mossa del verificatore

La discussione di classe

Angoli 90°

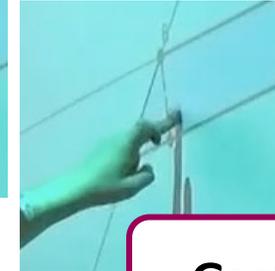
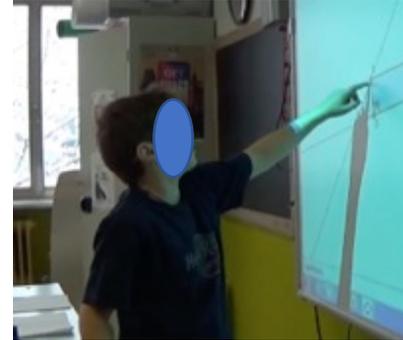
1. **R1:** Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l'obiettivo?
2. **Lu:** Fare gli **angoli di 90**, cioè per fare l'altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°
3. **R1:** Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?
4. **Lu:** Guardavo **questo** il punto blu e **quel punto...**
5. **Prof:** Chi vuole dire la propria? Tobia vai...
6. **To:** *Io guardo il lato su cui bisogna posizionare il punto dell'altezza. Guardo il lato sotto e guardo che l'altezza sia 90°*
7. **R1:** Ci indichi esattamente dove?
8. **To:** *Io guardo questo qua, questo lato qua sotto e guardo che la linea dell'altezza sia di 90°*



Richiesta di esplicitazione
i **processi** che guidano la
mossa del verificatore

La discussione di classe

1. **R1:** Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l'obiettivo?
2. **Lu:** Fare gli **angoli di 90**, cioè per fare l'altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°
3. **R1:** Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?
4. **Lu:** Guardavo **questo** il punto blu e **quel punto...**
5. **Prof:** Chi vuole dire la propria? Tobia vai...
6. **To:** **Io guardo** il lato su cui bisogna posizionare il punto dell'altezza. **Guardo il lato sotto** e **guardo** che l'altezza sia 90°
7. **R1:** Ci indichi esattamente dove?
8. **To:** Io guardo *questo qua, questo lato qua sotto* e *guardo che la linea dell'altezza sia di 90°*



Angoli 90°

Gesti + parole

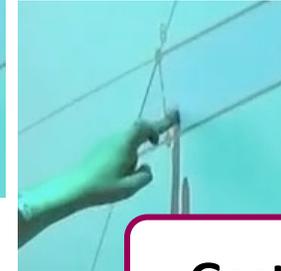


Perpendicolarità

Richiesta di esplicitazione
i **processi** che guidano la
mossa del verificatore

La discussione di classe

1. **R1:** Cosa guardavate per riuscire a raggiungere l'obiettivo?
2. **Lu:** Fare gli **angoli di 90**, cioè per fare l'altezza di un triangolo bisogna guardare gli angoli di 90°
3. **R1:** Ok, vieni un attimo a farci vedere quali angoli guardavi? Me li indichi sulla LIM?
4. **Lu:** Guardavo **questo** il punto blu e **quel punto...**
5. **Prof:** Chi vuole dire la propria? Tobia vai...
6. **To:** **Io guardo** il lato su cui bisogna posizionare il punto dell'altezza. **Guardo il lato sotto** e **guardo** che l'altezza sia 90°
7. **R1:** Ci indichi esattamente dove?
8. **To:** Io guardo **questo qua, questo lato qua sotto** e **guardo che la linea dell'altezza sia di 90°**

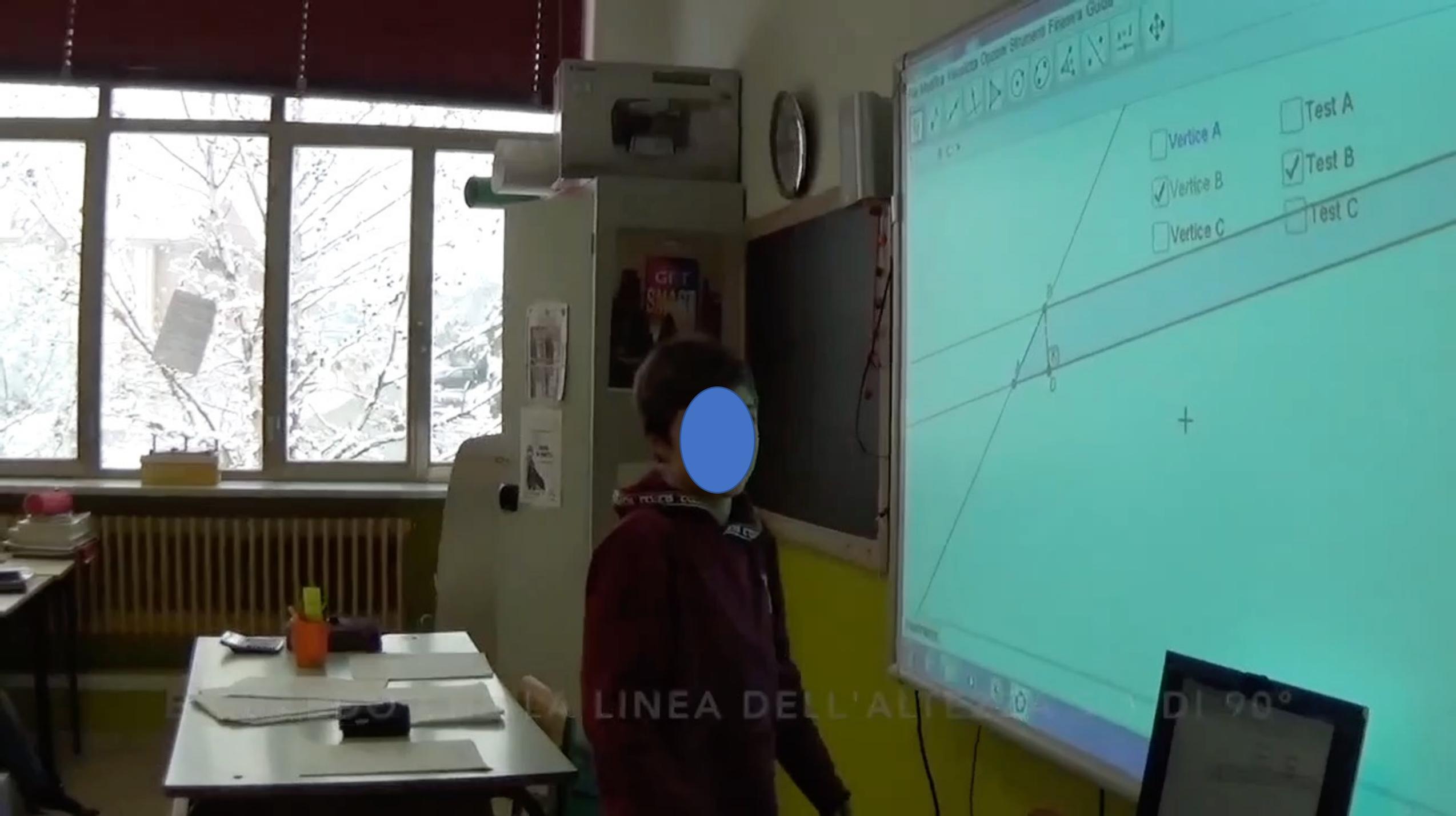


Angoli 90°

Gesti + parole



Perpendicolarità



Per Altitra Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida

- Vertice A
- Vertice B
- Vertice C
- Test A
- Test B
- Test C

LINEA DELL'ALTEZZA DI 90°

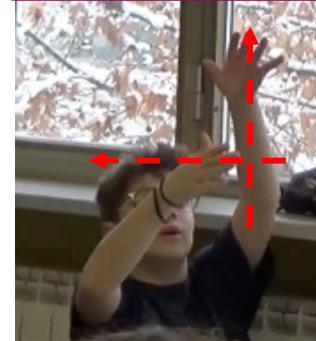
1. **R2:** E come fai per dire che è di 90 gradi oppure no?
2. **To:** Si vede
3. **Lu:** Devi guardare che le due...l'altezza e la base **siano più o meno a 90°**... che siano... che...
4. **Sa:** Beh ma si vede è così...
5. **Lu:** Certo che se la mette al punto A non c'è un angolo di 90° o se la mette al punto C non ci sarà quell'angolo di 90°
6. **R2:** Cosa dicevi? Che cos'è che si vede?
7. **Sa:** Si vede che è un angolo di 90° **perché è così**
8. **Ma:** è a forma di elle
9. **To:** Se ho in mente **com'è fatto un angolo di 90°**
10. **R2:** Poi lo riconoscete
11. **Sa:** Se hai in mente come si fa...

Richiesta di esplicitare gli **aspetti visivi** che permettono di stabilire se un angolo misura 90°



1. **R2:** E come fai per dire che è di 90 gradi oppure no?
2. **To:** Si vede
3. **Lu:** Devi guardare che le due...l'altezza e la base **siano più o meno a 90°**... che siano... che...
4. **Sa:** Beh ma si vede è così...
5. **Lu:** Certo che se la mette al punto A non c'è un angolo di 90° o se la mette al punto C non ci sarà quell'angolo di 90°
6. **R2:** Cosa dicevi? Che cos'è che si vede?
7. **Sa:** Si vede che è un angolo di 90° **perché è così**
8. **Ma:** è a forma di elle
9. **To:** Se ho **in mente com'è fatto un angolo di 90°**
10. **R2:** Poi lo riconoscete
11. **Sa:** Se hai in mente come si fa...

Richiesta di esplicitare gli *aspetti visivi* che permettono di stabilire se un angolo misura 90°



**Base vincolata
orizzontalmente al banco**

1. **R2:** E come fai per dire che è di 90 gradi oppure no?

2. **To:** Si vede

3. **Lu:** Devi guardare che le due...l'altezza e la base **siano più o meno a 90°**... che siano... che...

4. **Sa:** Beh ma si vede è così...

5. **Lu:** Certo che se la mette al punto A non c'è un angolo di 90° o se la mette al punto C non ci sarà quell'angolo di 90°

6. **R2:** Cosa dicevi? Che cos'è che si vede?

7. **Sa:** Si vede che è un angolo di 90° **perché è così**

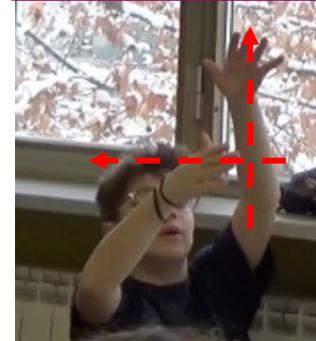
8. **Ma:** è a forma di elle

9. **To:** Se ho in mente **com'è fatto un angolo di 90°**

10. **R2:** Poi lo riconoscete

11. **Sa:** Se hai in mente come si fa...

Richiesta di esplicitare gli *aspetti visivi che permettono di stabilire se un angolo misura 90°*



**Base vincolata
orizzontalmente al banco**



1. **R2:** E come fai per dire che è di 90 gradi oppure no?

2. **To:** Si vede

3. **Lu:** Devi guardare che le due...l'altezza e la base **siano più o meno a 90°**... che siano... che...

4. **Sa:** Beh ma si vede è così...

5. **Lu:** Certo che se la mette al punto A non c'è un angolo di 90° o se la mette al punto C non ci sarà quell'angolo di 90°

6. **R2:** Cosa dicevi? Che cos'è che si vede?

7. **Sa:** Si vede che è un angolo di 90° **perché è così**

8. **Ma:** è a forma di elle

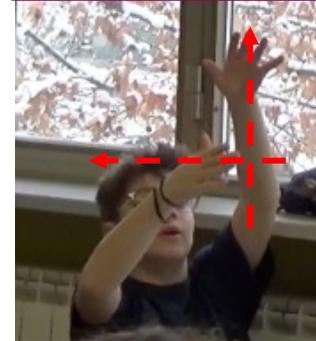
9. **To:** Se ho in mente **com'è fatto un angolo di 90°**

10. **R2:** Poi lo riconoscete

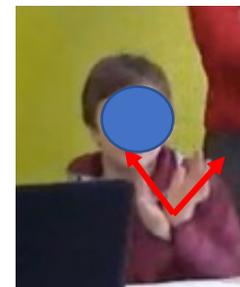
11. **Sa:** Se

Lo **spazio degli esempi** include sia esempi prototipici sia esempi non prototipici

Richiesta di esplicitare gli **aspetti visivi** che permettono di stabilire se un angolo misura 90°



**Base vincolata
orizzontalmente al banco**

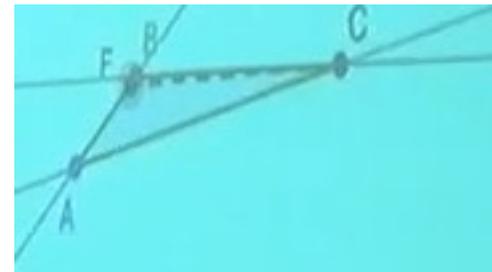
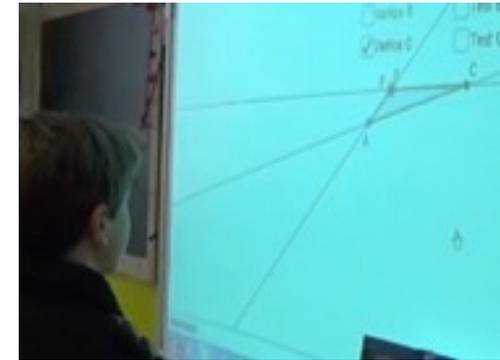


L'immagine concettuale
non è ancorata alle
posizioni prototipiche

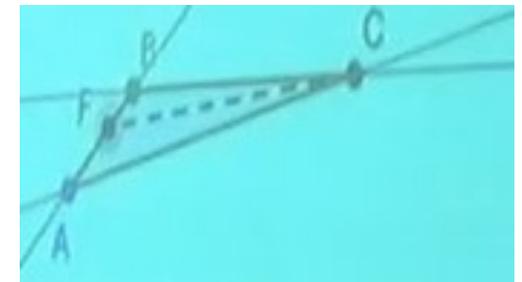


1. **R2:** Nessuno ha trovato un caso in cui si è sbagliato?
Dice, mi sono proprio sbagliato, l'ho messa proprio da un'altra parte l'altezza.
2. **Mi:** *(alza la mano)*
3. **R2:** Ecco, ci vuoi far vedere com'era? Quale tipo di errore? E poi come hai fatto?
4. **Mi:** *(viene alla lavagna)*
5. **R2:** Aspetta, adesso lui ci fa vedere l'errore che aveva fatto e poi come l'ha corretto.
6. **Prof:** Ti ricordi come l'avevi messa Mi?
7. **Mi:** *Così (Mette l'altezza coincidente con un lato del triangolo)*
8. **Lu:** No, l'aveva messo **in centro** *(Mi sposta l'altezza nel punto medio)*
9. **Prof:** In centro

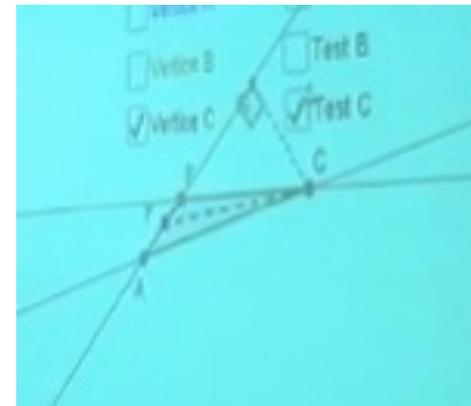
Permette di indagare eventuali **errori** commessi giocando



Effetto prototipo



Ruolo formativo del feedback digitale





E QUESTO SUCCEDEVA MAGARI ALL'INIZIO DELLE
PARTITE OPPURE...

1. **R1:** e questo succedeva magari all'inizio delle partite?
Oppure...
2. **Lu:** Sì all'inizio, la seconda partita
3. **R1:** La seconda partita
4. **Sa:** lo sbagliavo sempre!
5. **R2:** Chi dice che sbagliava sempre poi come ha fatto? Poi hai smesso di sbagliare?
6. **Sa:** Sì ho perso tutte e due le volte e poi dopo cioè quando abbiamo finito tutto quanto, **durante le domande** ho capito come fare
7. **Prof:** Hai capito cosa sbagliavi?
8. **Sa:** Sì, perché **vedevo lui come le faceva** e quindi ho capito poi come metterle
9. **R2:** Ma lui ti ha anche spiegato il suo trucco oppure no...guardavi
10. **Sa:** No, guardavo e basta

Ruolo formativo della mossa di un avversario più esperto

Evoluzione dell'immagine concettuale personale



1. **Prof:** Alberto allora tu te la sentirersti di dire quand'è più semplice e quand'è meno semplice?
2. **Al:** Secondo me questo caso qua è più semplice, invece quando è **ottusangolo allungato** invece è più difficile
3. **To:** Secondo me è il contrario perché quando è più grande sono più allargati, sono più all... **allargati quindi c'è più spazio e quindi è più difficile** vedere, invece quando lo fai piccolo c'è tanto così tra le tue cose quindi è vicinissimo
4. **Prof:** E se sono più o meno della stessa dimensione? Perché Alberto ha usato un termine che è interessante, quindi capito il discorso del piccolo e del grande... ma se sono tutti e due abbastanza grandi che ci si può lavorare quand'è più semplice e quand'è meno semplice? Hai voglia Alberto di ridirlo e poi sentiamo...perché la tua teoria era diversa...
5. **Al:** Quando è **ottusangolo** è più difficile, quando è **acutangolo** è più facile
6. **La:** Anche perché devi percepire se bisogna far cadere **l'altezza all'interno a all'esterno**

Richiesta di esplicitazione le **caratteristiche** delle configurazione prodotte dal falsificatore

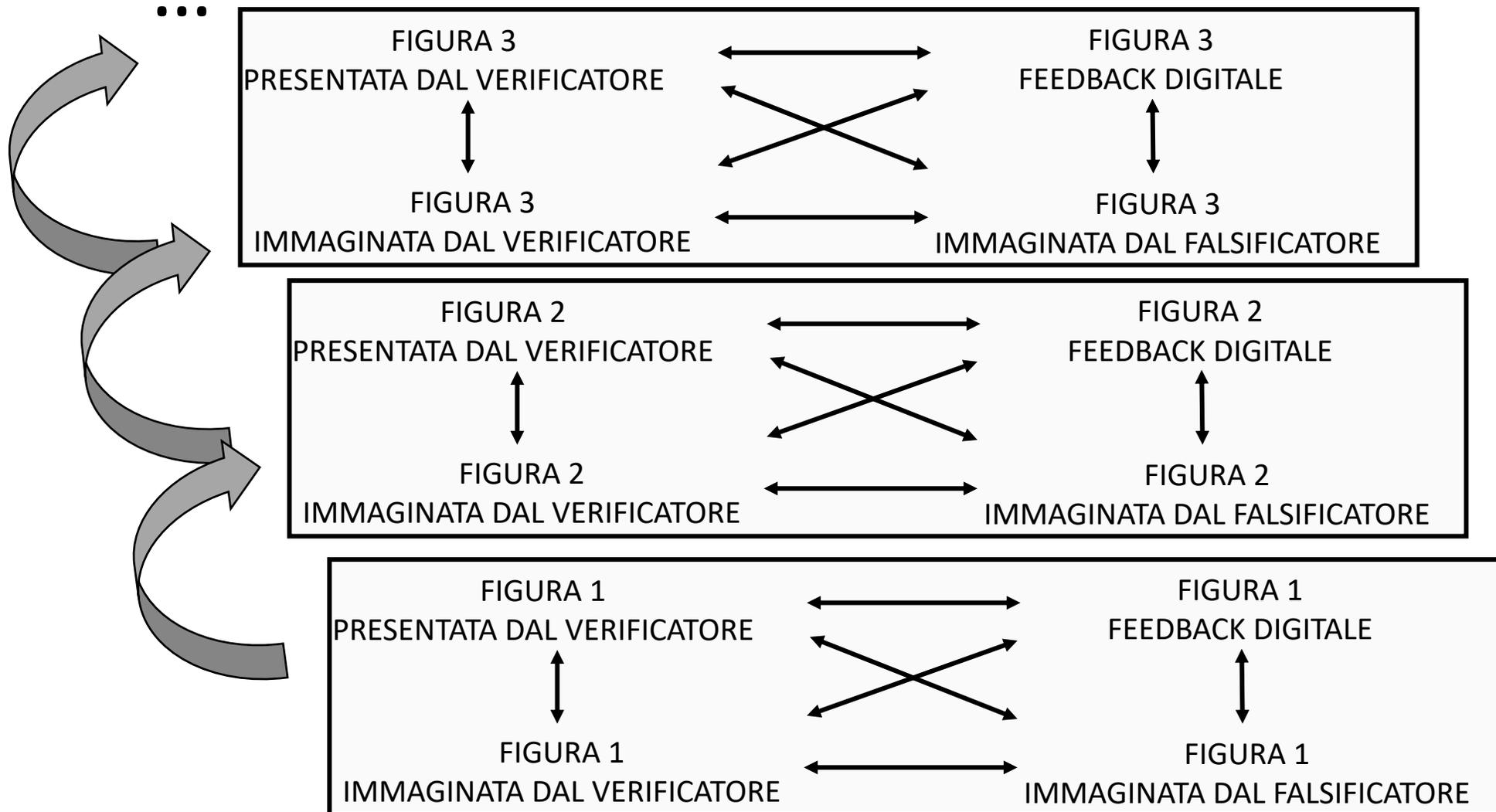
Caratteristiche legate ad **aspetti teorici:**
Triangolo ottusangolo allungato

Caratteristiche legate **all'errore di approssimazione del software:**
Triangolo allargato

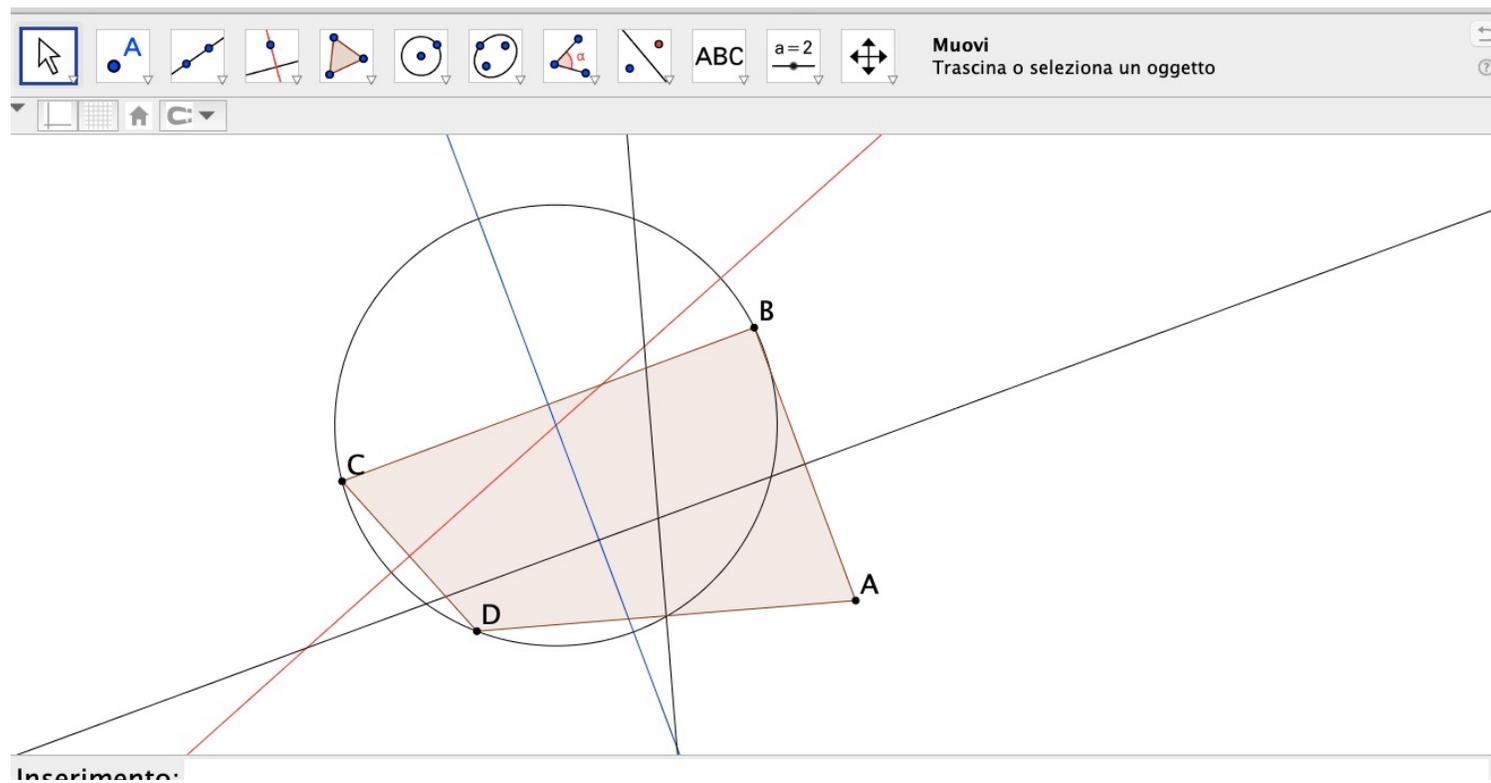
L'insegnante richiama l'attenzione sugli aspetti teorici

Caratteristiche legate ad **aspetti teorici:**
Altezza esterna

Potenzialità per l'evoluzione dell'immagine concettuale personale degli studenti



GIOCO 4



Grazie per l'attenzione

carlotta.soldano@unito.it