

Associazione
Italiana di
Ricerca in
Didattica della
Matematica



Unione
Matematica
Italiana



Settima scuola estiva per insegnanti di matematica

25-28 agosto 2022, Bisceglie (Ba)

“Che si fa oggi, frazioniamo?” Dall'intuizione quotidiana alla costruzione del significato di numero razionale

Antonella Montone
antonella.montone@uniba.it

Dove tutto comincia...



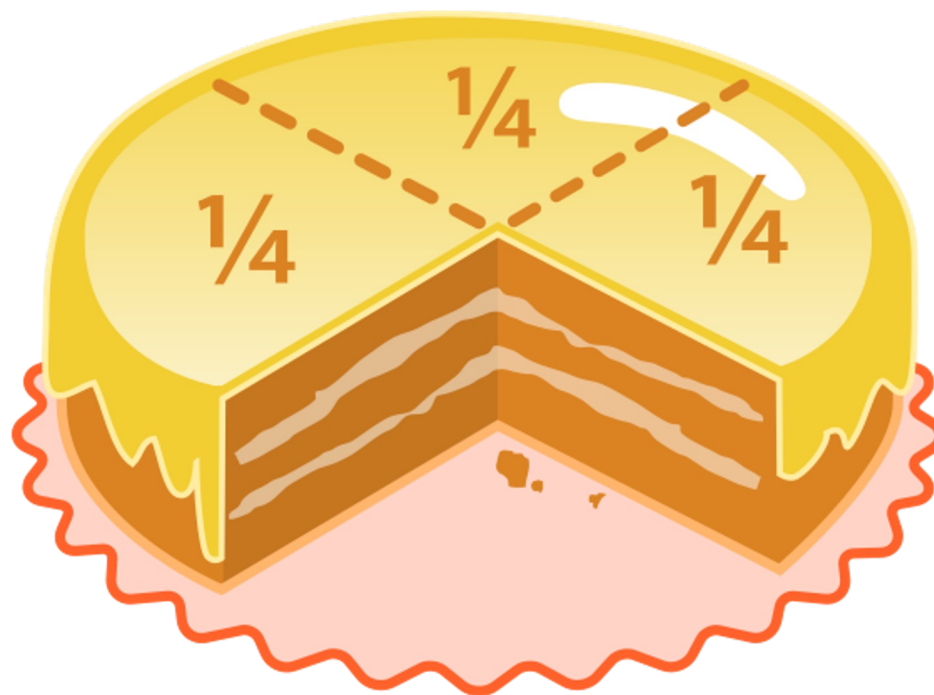
UN CONCETTO COMPLESSO

- Percorso lungo, a spirale, sin dalla scuola dell'infanzia...
- Significato di «metà»
- Significato di «divisione in parti uguali» su quantità continue e discrete
- Significato di «parte/tutto»
- Frazione come «misura»



COSTRUZIONE DI UN CONCETTO COMPLESSO

Da dove si parte? Generalmente...



Introduzione

Il processo di insegnamento – apprendimento delle frazioni è certamente uno dei più studiati da quando esiste la ricerca in Didattica della Matematica, forse perché (insieme al tema, ad esso connesso, dei numeri “decimali”) costituisce uno dei più evidenti insuccessi della scuola, in tutti i Paesi del mondo.

I numeri razionali

- Oltre alla necessità di «contare» insiemi finiti di oggetti, processo che si astrae mediante i numeri interi, nella vita quotidiana si presenta anche la necessità di misurare delle quantità: lunghezze, aree, pesi, tempo.
- Primo passo: ridurre il problema di misurare al problema di contare.
- Secondo passo: scegliere un'unità di misura «arbitraria» per contare (secondo, metro, grammo, piede,...), a cui si attribuisce misura 1.
- Terzo passo: si conta il numero di tali unità contenute nella quantità da misurarsi.
- Quarto passo: si introducono unità di misura di ordine inferiore ottenute con la suddivisione dell'unità originaria in numero n di parti uguali.

In Matematica...

Un'unità di ordine inferiore ottenuta suddividendo l'unità originaria in n parti uguali si indica con $\mathbf{1/n}$

Se una data grandezza misura esattamente \mathbf{m} di tali unità di ordine inferiore la sua misura si indica con il simbolo $\mathbf{m/n}$

tale simbolo si chiama

FRAZIONE O RAPPORTO

Dopo secoli di tentativi casuali...

Il simbolo m/n fu spogliato del suo riferimento concreto al procedimento di misura e delle grandezze misurate e fu considerato come un

NUMERO PURO

Def: Quando m ed n sono numeri interi, il numero m/n si dice numero razionale

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*

Insieme dei Razionali

Necessità intrinseca dei numeri razionali:
rendere possibile l'operazione «inversa» della **divisione**

$$ax = b$$

“qual è il numero che moltiplicato per 7 fa 4”

Numeri Razionali

■ L'introduzione dei Razionali risponde ad

- esigenze concrete (contare, misurare)
- esigenze di natura matematica (risolvere le equazioni, effettuare sempre la divisione)

Libro V Elementi di Euclide

Due grandezze A e B si dicono stare nello stesso rapporto di altre due C e D quando per qualunque coppia di numeri m ed n per la quale si abbia $mA > nB$ si ha anche $mC > nD$ mentre se si ha $mA = nB$ si ha anche $mC = nD$ mentre se si ha $mA < nB$ si ha anche $mC < nD$.

Noi scriviamo

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$\mathbf{1/4} = 5/20 = 25/100 = 250/1000 = 25\%$$

$$\mathbf{25\text{ cm}} = 250\text{ mm} = 0,25\text{ m}$$

0,25

Si può sempre frazionare?

- Continuo / discreto: ($\frac{3}{4}$ di 15 alunni)
- “una frazione di secondo”
- Qual è il numero che moltiplicato per 4 fa 15?
- Come si dividono 9 tortini al cioccolato con panna tra 16 persone?

Sarebbe più facile se fossero 8 (tortini al cioccolato)?

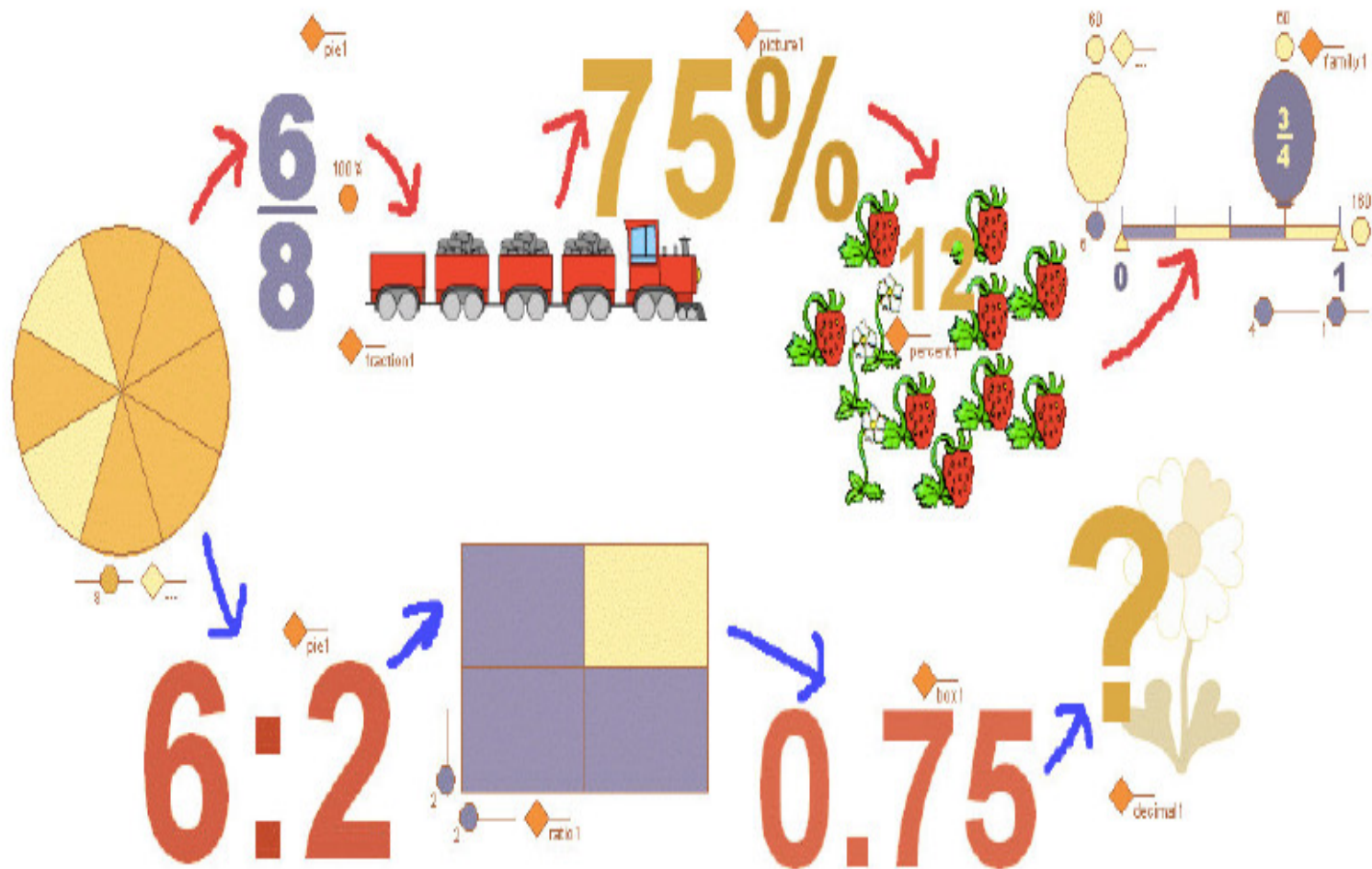
- 7 amici vogliono dividersi 28 cioccolatini in modo tale che ciascuno di loro ne riceva in numero dispari, non necessariamente nella stessa quantità. Quanti cioccolatini riceverà ciascuno di loro?

Difficoltà e Contraddizioni

- ▶ Parti “uguali”
- ▶ Parte di un «intero» e la frazione maggiore dell’unità
- ▶ Apparente «estraneità» alla vita quotidiana
- ▶ Frazione e Numero decimale
- ▶ La probabilità che esca il 5 è $1/6$
- ▶ Interpretare informazioni:
 - ▶ 1 italiano su 4 non mangia pesce
 - ▶ L’aliquota base Imu è del 7,6 per mille
 - ▶ Lo share per «Sanremo» è stato del 56,7 %
 - ▶ Ho vinto 6 partite su 8

Cosa è una frazione?

- ✓ Parte di un «intero»
- ✓ Quoziente
- ✓ Rapporto
- ✓ Operatore (Dimensionale)
- ✓ nei punteggi
- ✓ Indicazione di quantità di scelta su un tutto
- ✓ Punto di una retta orientata
- ✓ Misura
- ✓ Percentuale
- ✓ linguaggio quotidiano
- ✓ Probabilità
- ✓ Numero Decimale
- ✓ Numero Razionale



e allora....

Una sola “definizione”
non basta

La frazione e le sue rappresentazioni



immensa quantità di **registri semiotici**

- Non si impara *automaticamente* a gestire i diversi registri
- Risultato di un insegnamento esplicito.
- L'insegnante passa da un registro all'altro convinto che lo studente lo segua.

Altre Cause Didattiche

- ✓ Trattazione scolastica che privilegia l'accezione di frazione come parte di un tutto
- ✓ Piuttosto che le indicazioni, si segue il libro di testo.
- ✓ Non si riesce a far «vedere» la frazione come numero
- ✓ L'insegnante «salta» da un registro semiotico all'altro, lo studente perde gli aspetti semantici

ancora difficoltà cognitive e meta...

- ✓ nell'ordinare frazioni e numeri decimali
- ✓ nelle operazioni tra frazioni e tra numeri razionali
- ✓ nel gestire l'aggettivo "uguale"
- ✓ nel gestire le equivalenze
- ✓ nel gestire la riduzione ai minimi termini
- ✓ nel gestire figure non standard
- ✓ nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata

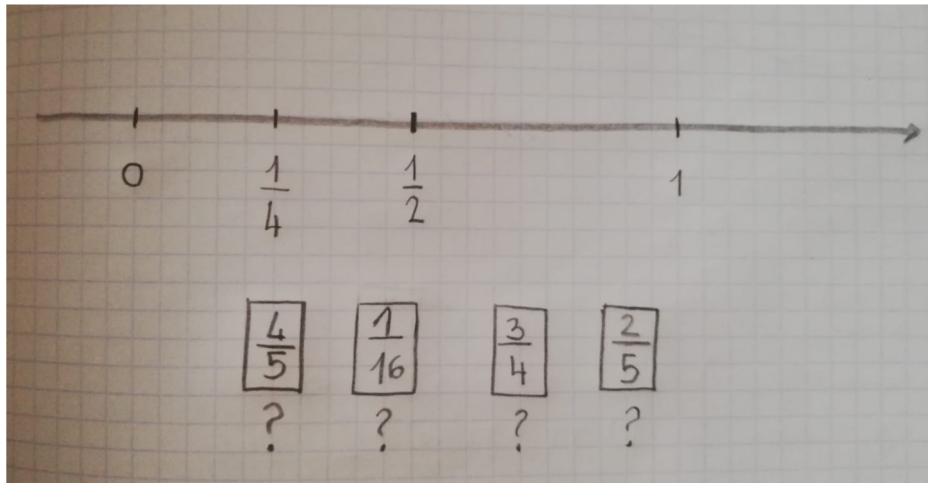
L'addizione tra frazioni

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D}$$

- Operazione ben posta
- $1/1+1/1= 2/2= 1$
- **$3/4+5/6= 8/10$**

COSTRUZIONE DI UN CONCETTO COMPLESSO

Necessità di partire dalla **manipolazione di oggetti**, azione necessaria vista l'età e lo sviluppo cognitivo del bambino



...necessità di preparare la strada al successivo passaggio all'**astrazione** o alla **istituzionalizzazione** del concetto di frazione in quanto NUMERO

L'ARTEFATTO

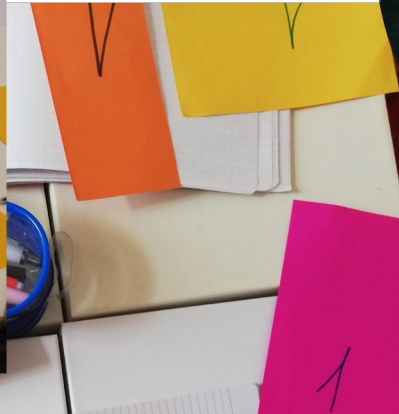
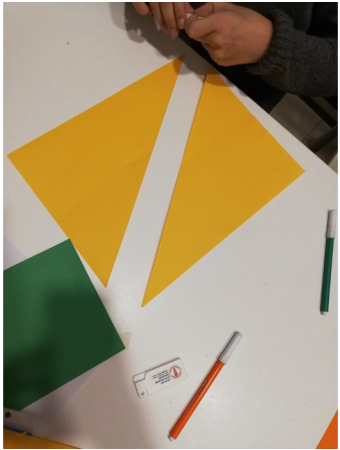
Foglio A4

- Perché... è un oggetto 'comune' nella vita dei bambini, è sempre a disposizione ed è usato come strumento di controllo, attaccato sul banco
- Colori sempre diversi per favorire la percezione visiva di frazioni differenti
- Usato per misurare e conduce alla costruzione di frazione «maggiore di 1»

Parte/tutto
e Misura



COSTRUIRE LE FRAZIONI UNITARIE: $\frac{1}{2}$



- Partire da un foglio A4 e dividere in 'due parti uguali'
- Tanti modi di dividere.... a metà

Parte/tutto

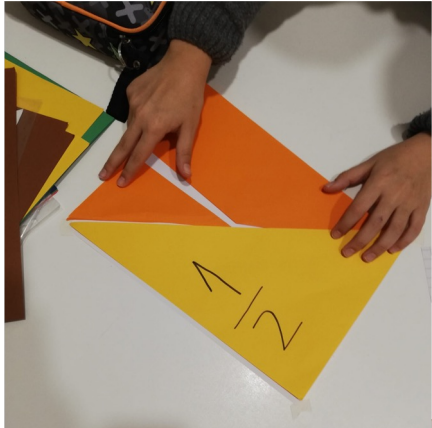


NON CONGRUENTI, MA EQUIVALENTI

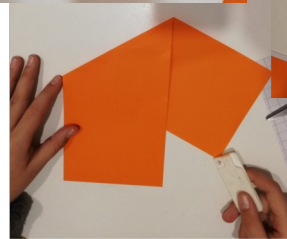
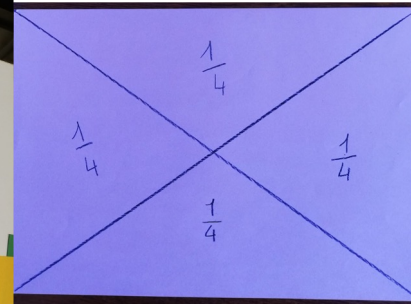
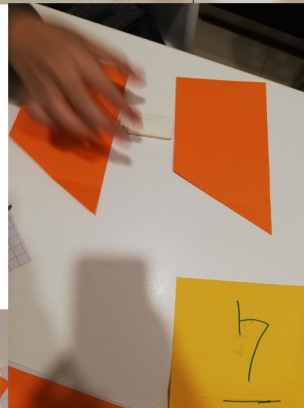
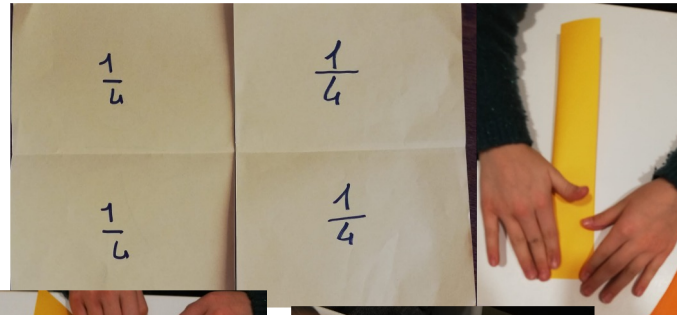
- Uguaglianza tra le parti
- Equiestensione
 - Equivalenza
 - Congruenza

FRAZIONI UNITARIE A RACCOLTA... NELLE SCATOLE

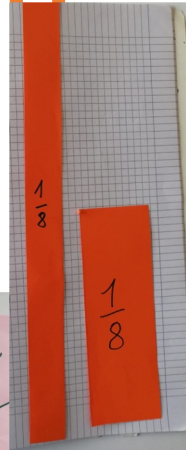
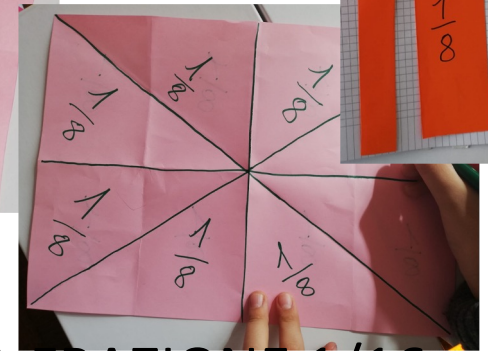
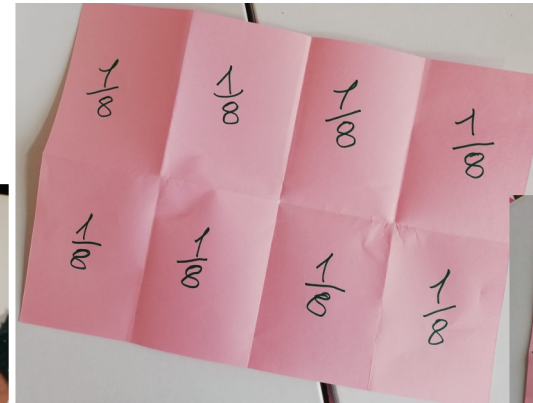
- LA FRAZIONE $1/2$



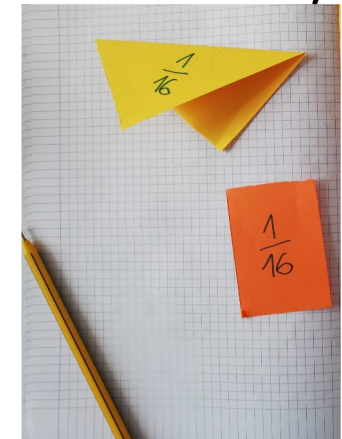
- LA FRAZIONE $1/4$



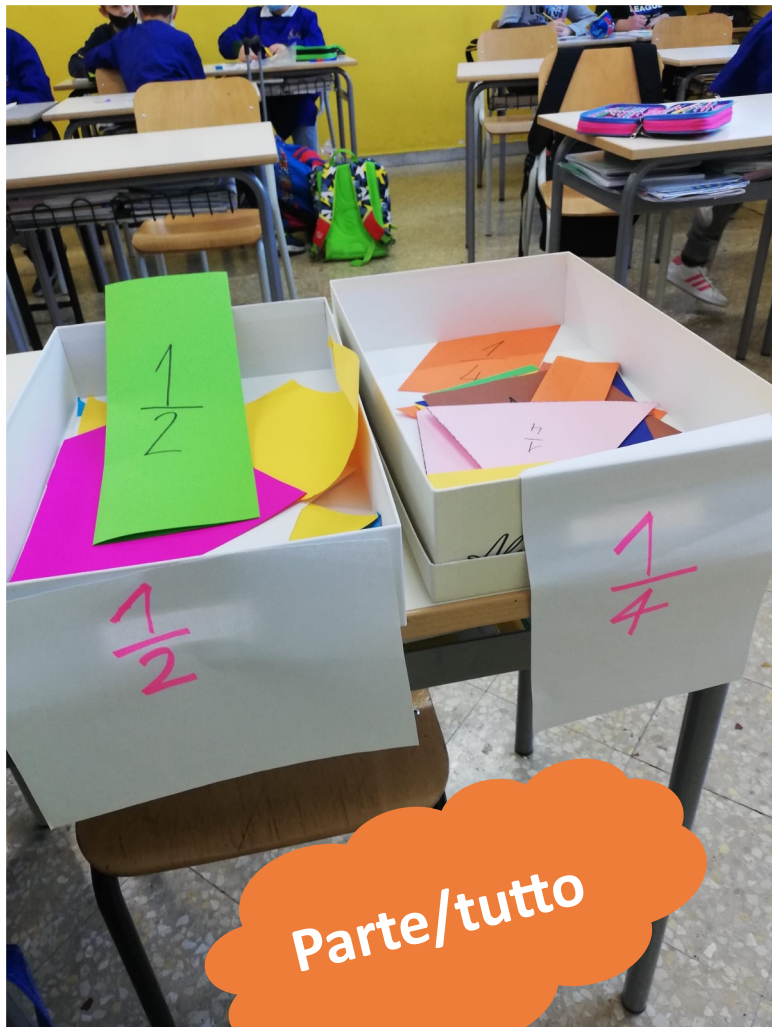
- LA FRAZIONE $1/8$



- LA FRAZIONE $1/16$



...E ANCORA SCATOLE...



- DALLA FRAZIONE $\frac{1}{3}$



...ALLA FRAZIONE $\frac{1}{6}$ E $\frac{1}{9}$
(piegando $\frac{1}{3}$ a metà o in 3 parti)

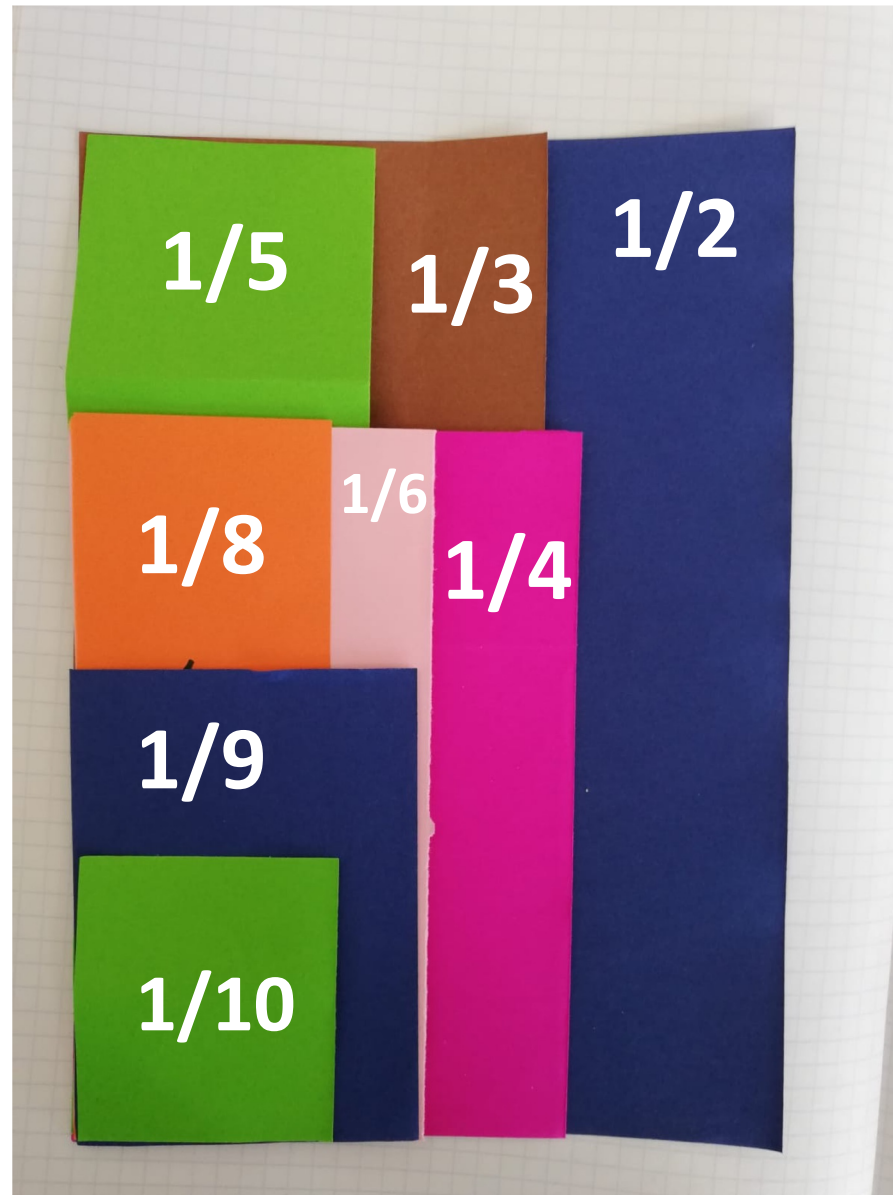


DALLA FRAZIONE $\frac{1}{5}$

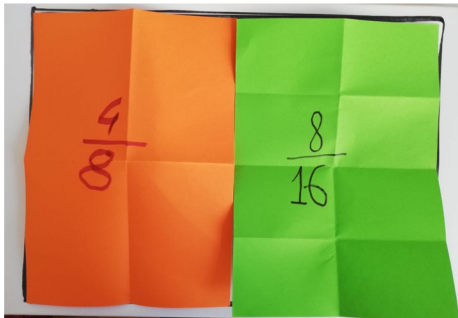
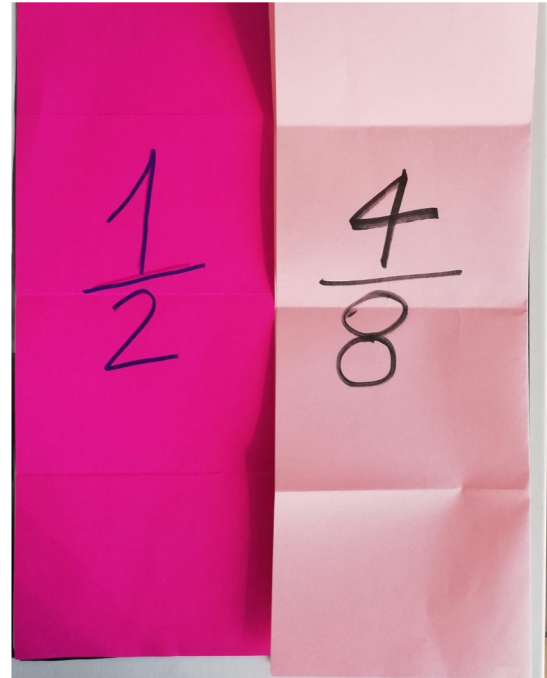
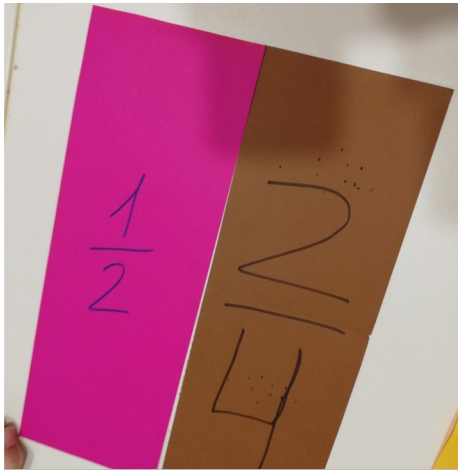


...ALLA FRAZIONE $\frac{1}{10}$
(piegando $\frac{1}{5}$ a metà)

L'ORDINAMENTO A LIVELLO PERCETTIVO



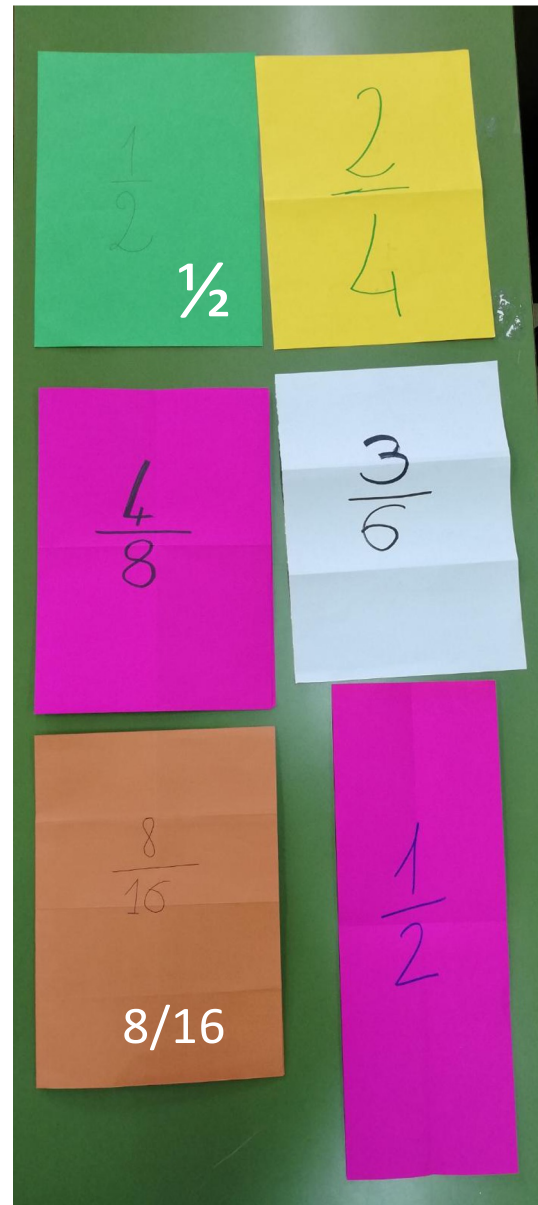
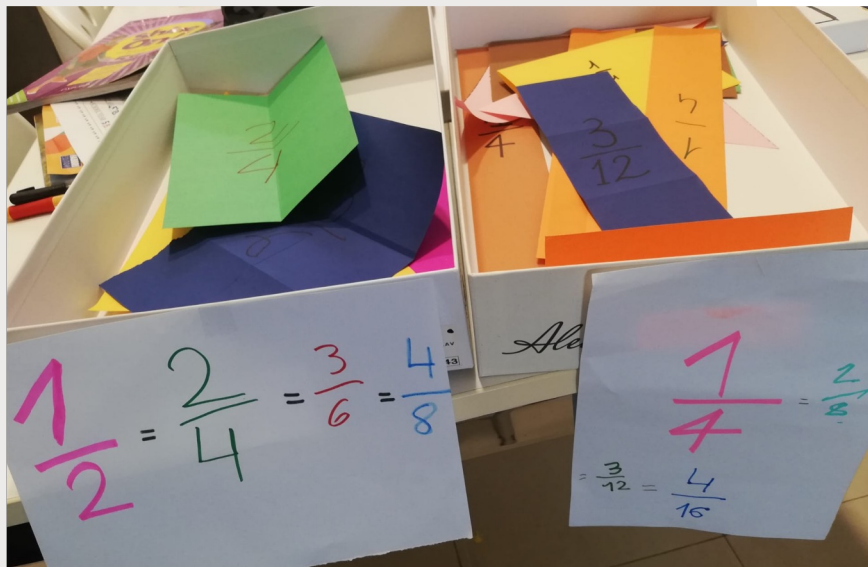
UNITÀ FRAZIONARIE COME «CLASSI DI EQUIVALENZA»



- Lavorare sul concetto di «frazioni equivalenti» a partire dalle unità frazionarie
- Partiamo da $\frac{1}{2}$ e costruiamo la classe di equivalenza di $\frac{1}{2}$ con le piegature
- Confrontiamo con altre frazioni e riconosciamo l'equivalenza

...TUTTE LE FRAZIONI EQUIVALENTI...

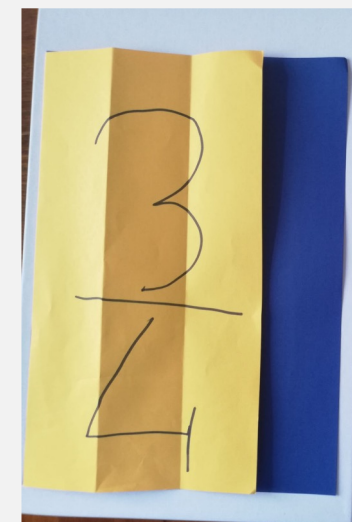
- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \dots$
- $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \dots$
- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{3}{4}$$



PER ANDARE OLTRE

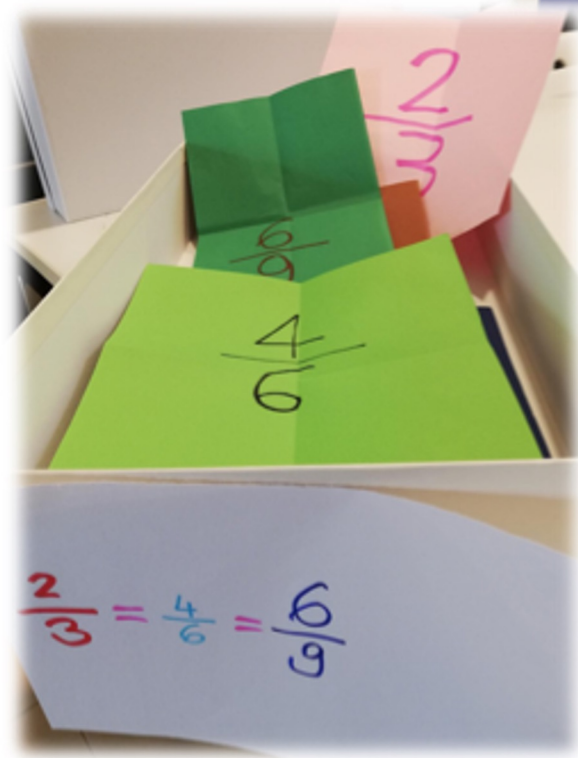
...costruire le «scatole di frazioni equivalenti» a frazioni minori dell'unità

«Frazioni equivalenti»

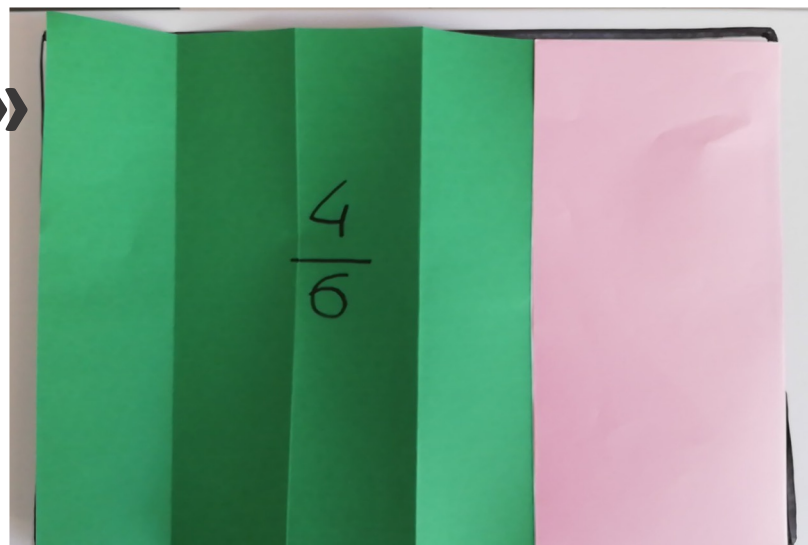
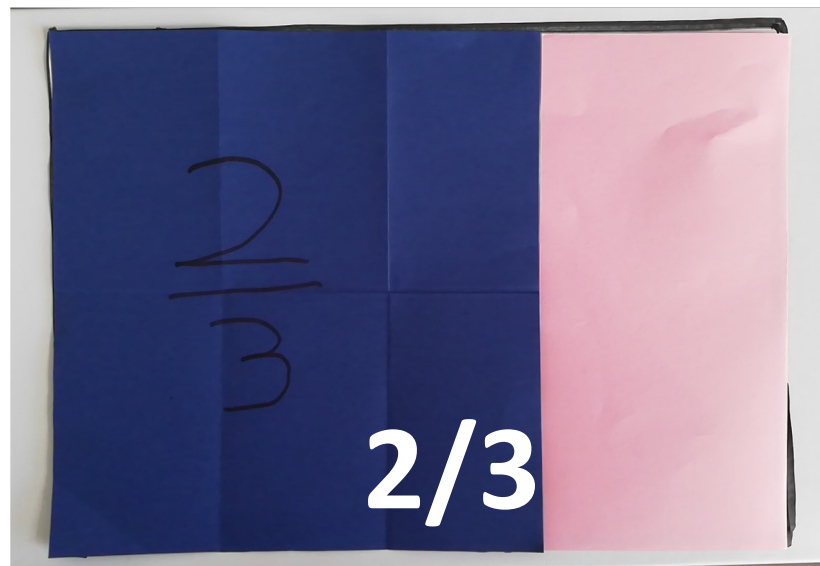


$$2/3 = 4/6 = 6/9 = \dots$$

Scoperta della «proprietà invariante»...



«Frazioni equivalenti»



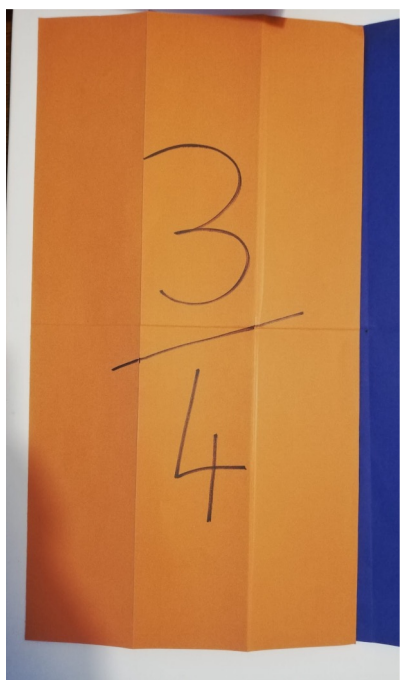
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$



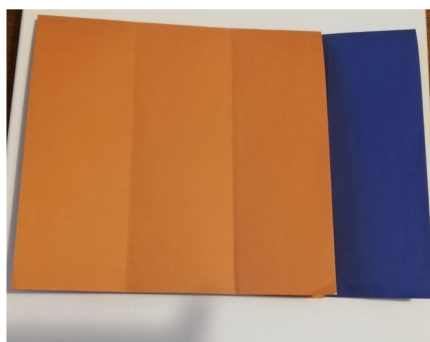
Scoperta della «proprietà invariante»...

PIEGARE COME «SPAZIO DI APPRENDIMENTO»

- PIEGARE UN FOGLIO A META' SIGNIFICA... DIVIDERE PER 2
- PIEGARE $\frac{3}{4}$ A META' SIGNIFICA ESEGUIRE $\frac{3}{4} : 2$ ovvero...



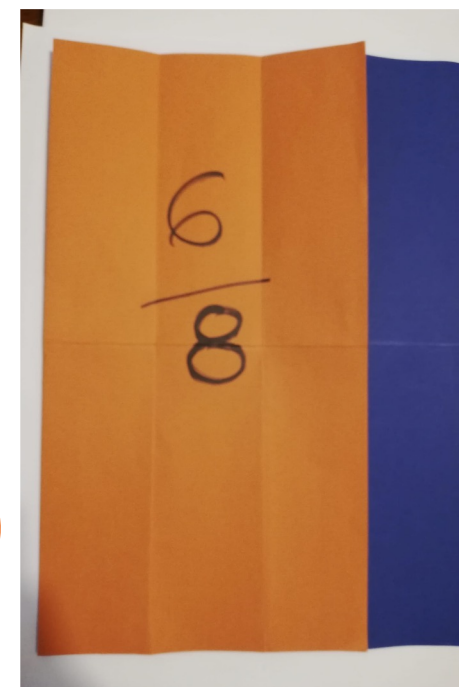
Piego a metà...



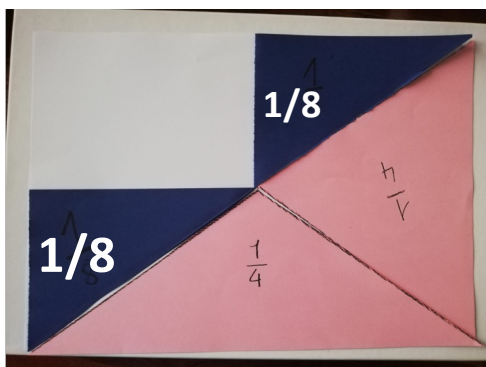
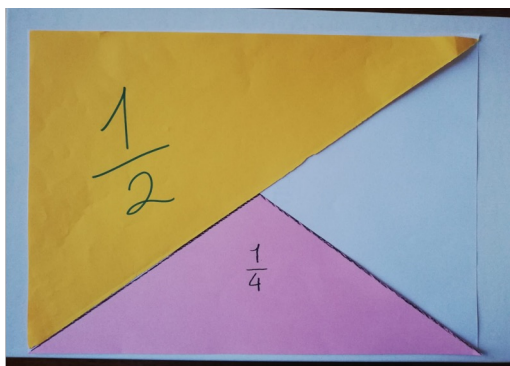
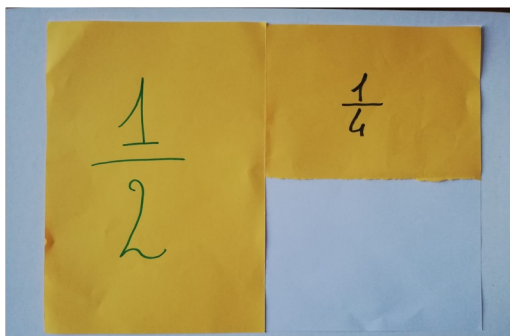
3 di 8

Ma se riapro senza tagliare, scopro che $\frac{3}{4}$ equivalgono ai $\frac{6}{8}$ dell'intero.

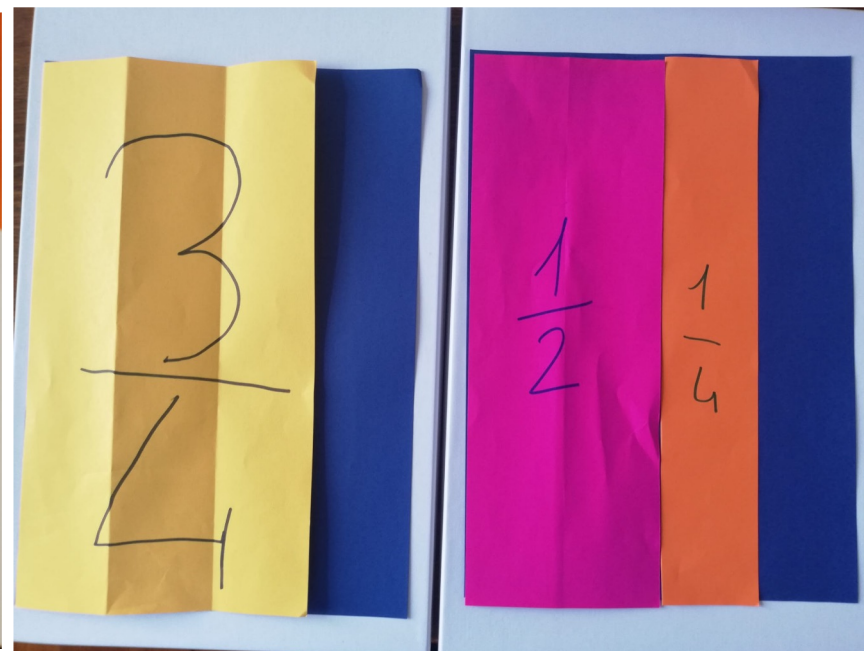
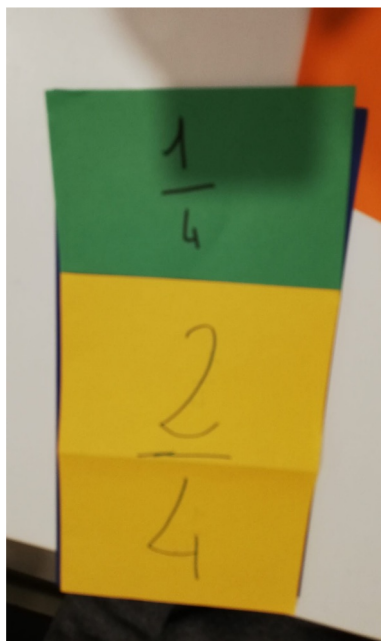
Creare
frazioni
equivalenti



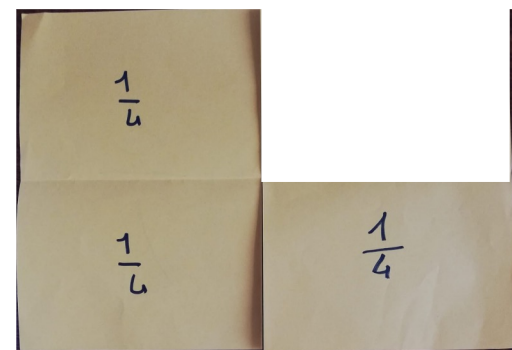
Kieren, 1976...



$$\frac{3}{4}$$



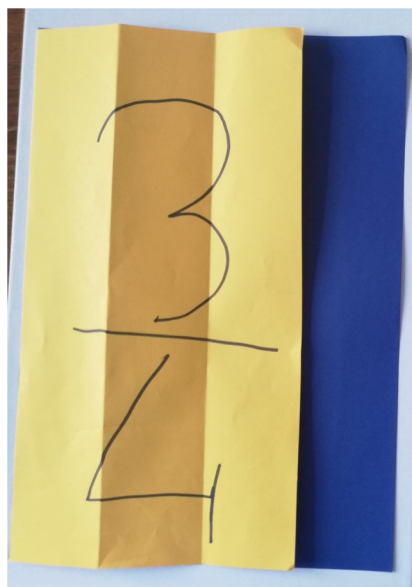
SOMMA DI FRAZIONI



Possiamo stabilire chi è più grande tra $2/3$ e $3/4$?

Un problema più complesso

- Abbiamo scelto di le frazione $3/4$ e $2/3$
- Abbiamo chiesto ai bambini di cercare una strategia per effettuare un confronto tra queste due frazioni...



Problematizzare: troviamo frazioni equivalenti di $\frac{3}{4}$

Come facciamo a trovare una frazione che valga quanto $\frac{3}{4}$ ma che si scriva in modo diverso?

- «Qual è la frazione equivalente a $\frac{3}{4}$ che abbia come denominatore 8?»
- «Qual è la frazione equivalente a $\frac{3}{4}$ che abbia come denominatore 12?»
- «In quante parti devo dividere l'intero per avere una frazione equivalente a $\frac{3}{4}$ prendendo 12 parti?»

TRADUZIONE IN LINGUAGGIO NUMERICO

$$2/3 = 4/6 = 8/12 = 6/9...$$

$$3/4 = 6/8 = 9/12 = 12/16...$$

Simone nota che nella sequenza di frazioni equivalenti sulle etichette attaccate sulle scatole ce ne sono due con lo stesso denominatore!

E allora diventa facile confrontarle!

$$8/12 < 9/12$$

Punto di partenza

PARTE/TUTTO

Per costruire i concetti di

- frazione come «unità frazionaria» e frazione minore dell'unità
- frazioni come «classe di equivalenza»
- Somma di frazioni con stesso denominatore
- Somma di frazioni con denominatore diverso

Ma anche...

MISURA

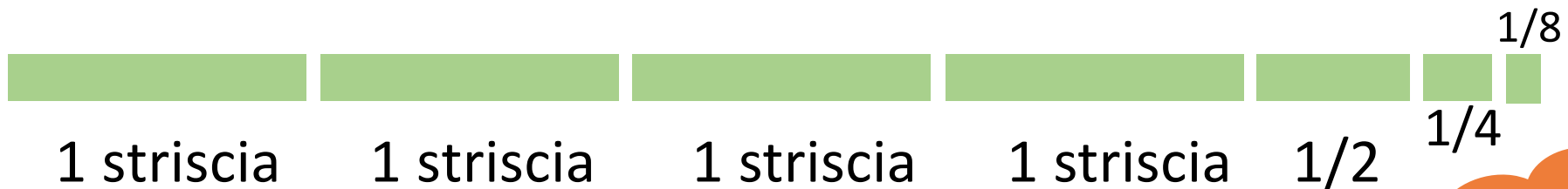
Ricorrere alla frazione frazionaria» misura, per costruire concetti come

- Frazione come somma di unità frazionarie (frazione maggiore dell'unità)
- Confronto e ordinamento di frazioni

Superamento del concetto parte/tutto

L'INTERO NON BASTA...

- Necessità di «ridurre» l'intero
- Si ricorre all'esperienza precedente del piegare...
- Piegando, piegando si scopre che la cattedra misura...



- Ma come faccio a dire effettivamente quanto misura?
- Trasformare tutto in ottavi, l'unità frazionaria più piccola ...
- $8/8 + 8/8 + 8/8 + 8/8 + 4/8 + 2/8 + 1/8 = 39/8$ che è **un solo numero!**

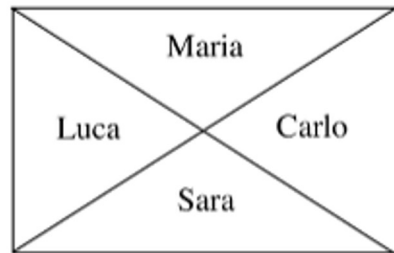
Frazione
«maggiore
di 1»

DISCUSSIONE

- Confronto tra $\frac{1}{2}$ del foglio A4 e $\frac{1}{2}$ della striscia
- Do un nome alla mia azione: «ho diviso a metà e ne ho preso una parte. Uno di due.»
- È sempre uno di due (foglio, striscia...)
- $\frac{1}{2}$ diventa un numero

DAL REGISTRO ARITMETICO AL REGISTRO GEOMETRICO... E RITORNO

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.
Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi. Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.



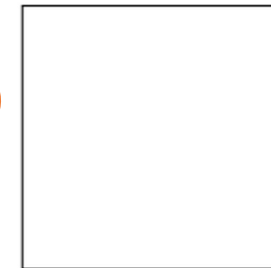
Quattro bambini si ritrovano per mangiare una torta quadrata.

- Ogni bambino vuole chiaramente avere la stessa quantità di torta degli altri;
- due bambini vogliono una fetta di torta di forma quadrata;
- gli altri due bambini vogliono una fetta di torta di forma triangolare.

Disegnate, su questo quadrato, una suddivisione che possa soddisfare ogni bambino:

Foglio A4

Foglio quadrato



**COME
POSSIAMO
SOMMARE
FRAZIONI CON
DENOMINATORE
DIVERSO?**

- Trovata la strategia per confrontare, possiamo anche sommare!
- L'attività mi conduce indirettamente alla scoperta del minimo comune multiplo, senza mai nominarlo...
- ...e anche alla somma di unità frazionarie che portano ad una frazione maggiore di 1

Verso la generalizzazione...



Verso la
generalizzazione

- Stacciamoci dal foglio!
- Riconosciamo la frazione come numero anche attraverso attività di misurazione attraverso le unità frazionarie
- Confronto
- Ordinamento

Grazie!

A decorative yellow dashed arc is located in the bottom right corner of the slide.