# COSÌ LONTANO COSÌ VICINO!

Sull'idea di distanza

Sabina Milella


Comunicazione della Matematica e Rigore



**Giocando** sulla storia di S. Nicola e sulla parola "perfezione",
abbiamo parlato di

- numeri perfetti
- traslazione
- distanza NON euclidea
- grafi
- topologia
- intorni


di seguito, una selezione delle slide –>



## LA VITA

Nasce nel 270 e muore a Myra il 6 Dicembre 343

6 è un numero PERFETTO!

## LA PERFEZIONE

Un numero (naturale) si dice perfetto
se è somma dei suoi divisori positivi, escluso se stesso.

Esempi:

$6 = 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$
$28 = 4 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
$496 = 2^4 \cdot 31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

………… e poi?



## LA PERFEZIONE

Non si conoscono tutti i numeri perfetti!
Come possiamo trovarli?

Se $p$ è un numero primo e $2^p - 1$ è un numero primo,
allora $2^{p-1}(2^p - 1)$ è perfetto (pari).

I numeri $2^p - 1$ sono detti numeri di Mersenne.

E numeri perfetti dispari? Ad oggi non si conoscono numeri perfetti dispari!



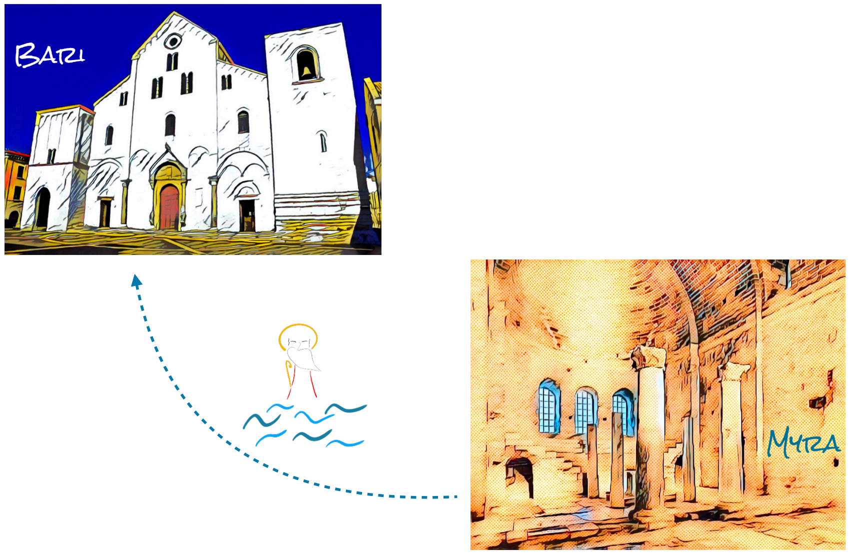
## LA VITA

Nasce nel 270 e muore a Myra il 6 Dicembre 343

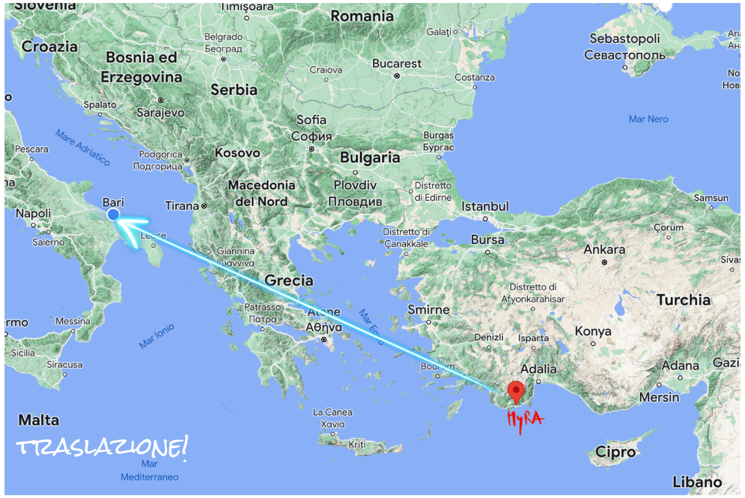
e Bari?



## IL PIANO PERFETTO

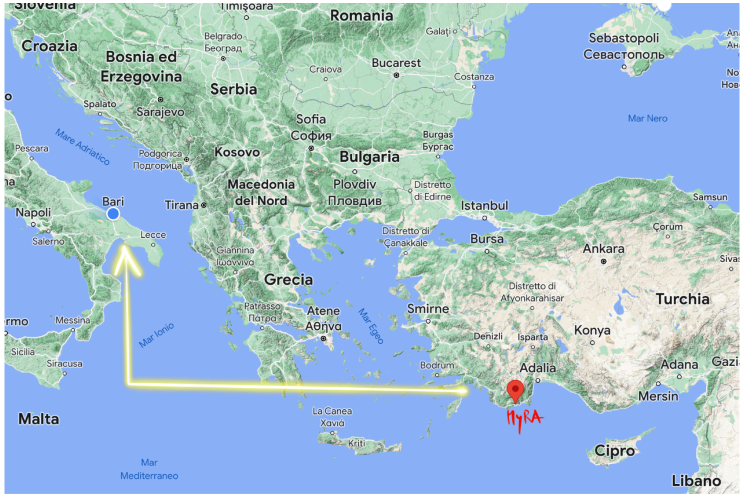


## IL PERCORSO PERFETTO



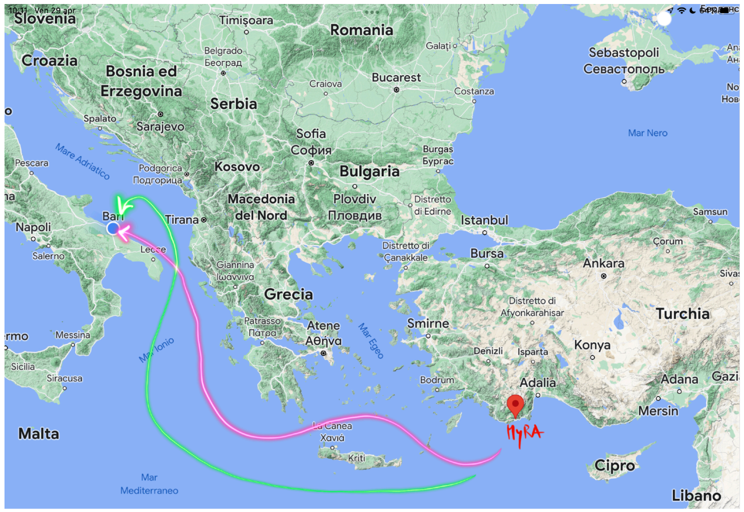



## IL PERCORSO PERFETTO



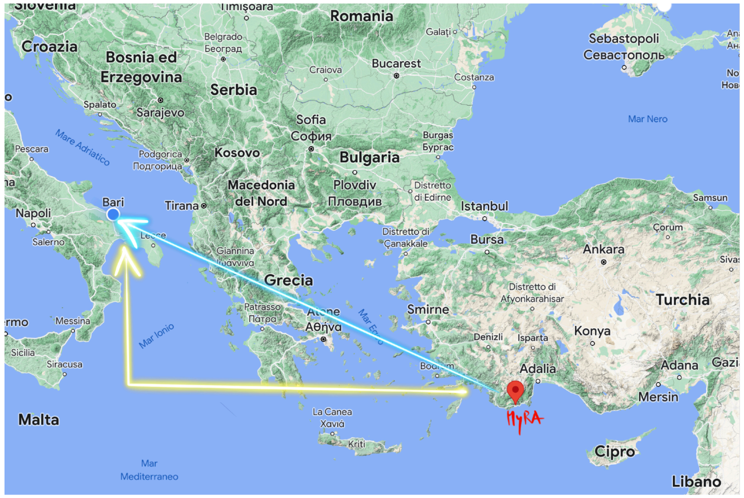



## IL PERCORSO PERFETTO

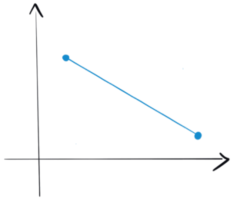


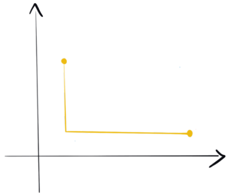



## LINEA BLU VS LINEA GIALLA



## LINEA BLU VS LINEA GIALLA

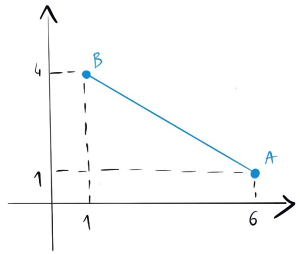




la **lunghezza** del percorso dipende dai punti di vista

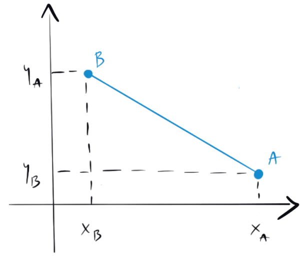


## LA DISTANZA EUCLIDEA




$$d_2(A,B) = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$$

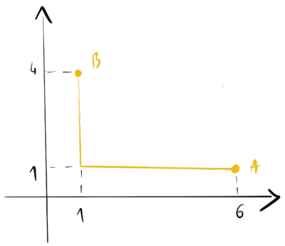
teorema di Pitagora



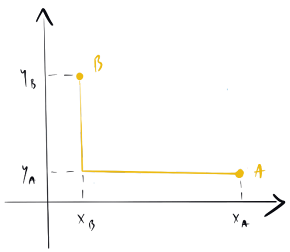

$$d_2(A,B) = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



## LA DISTANZA DEL TASSISTA



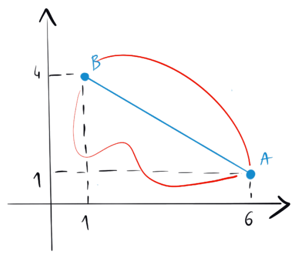

$$d_1(A,B) = 5+3 = 8$$




$$d_1(A,B) = |x_B-x_A| + |y_B-y_A|$$

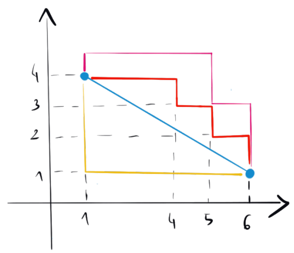


## $d_2$ VS $d_1$

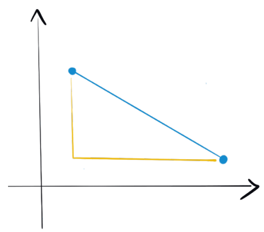



per la distanza $d_2$, il percorso di lunghezza minima (segmento AB) è unico

per la distanza $d_1$, il percorso giallo è un percorso di lunghezza minima, ma non è l'unico!



## $d_2$ VS $d_1$



**distanza:** funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- $d(A,B) \geq 0$
- $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A,B) = d(B,A)$
- $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$

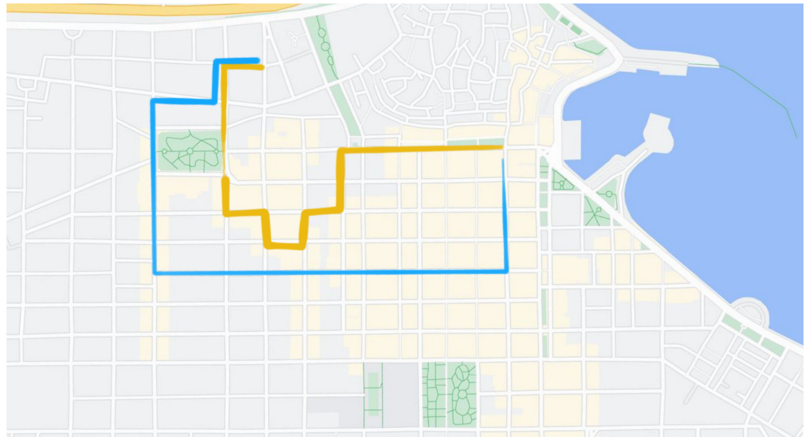
$d_1$ e $d_2$ non sono le uniche distanze possibili su $\mathbb{R}^2$

sono casi particolari della distanza di **Minkowski** (fine 800)

$$d_p(A,B) = \left(|x_B - x_A|^p + |y_B - y_A|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p > 0)$$



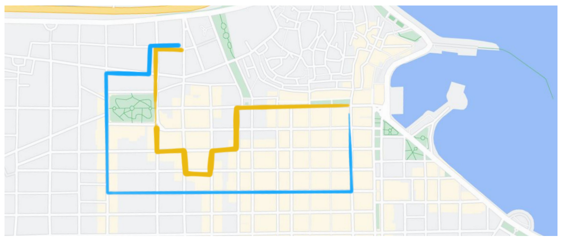
## MANHATTAN VS BARI



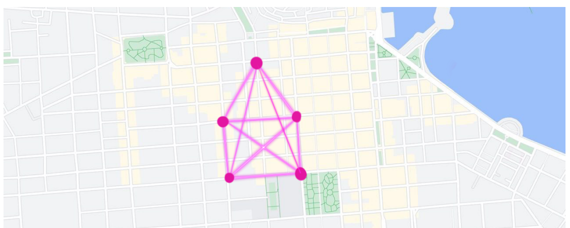
$d_1$ è una "buona" definizione di distanza per Bari



## IL CORTEO PERFETTO



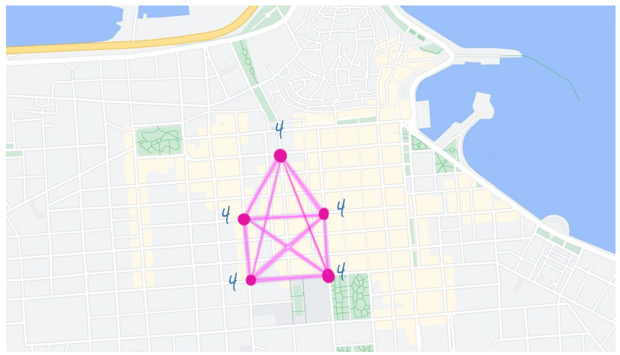
Quale percorso scegliere per il corteo storico?





## IL CORTEO PERFETTO

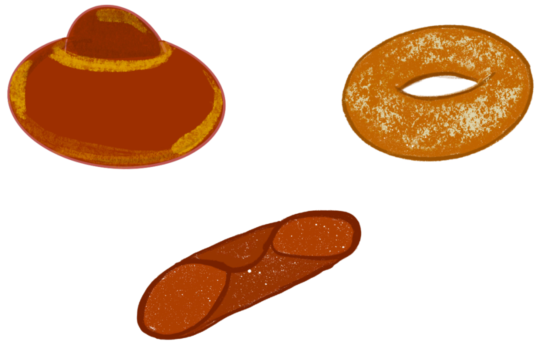
Teorema (Eulero)
Un grafo connesso con almeno due vertici ammette un **circuito Euleriano** se e solo se ogni suo vertice è pari.



Il miracolo delle tre fanciulle…
e i tre sacchetti che diventaron palle





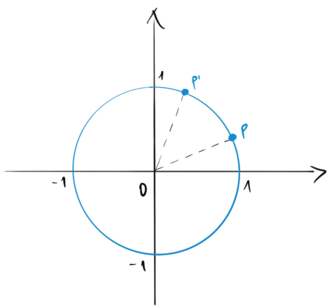


ma non ciambelle!





**circonferenza**: luogo dei punti $P(x, y)$ tali che $d_2(P, O)$ costante

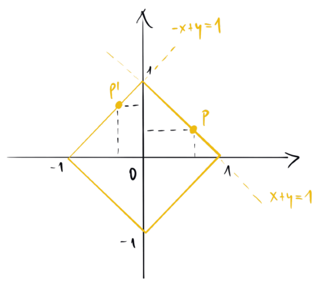



$d_2(P, O) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

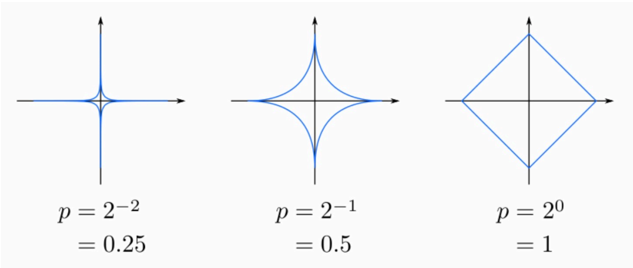




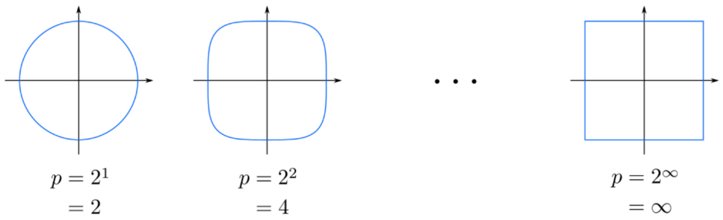
**circonferenza**: luogo dei punti $P(x, y)$ tali che $d_1(P, O)$ costante




$d_1(P, O) = 1 \Leftrightarrow |x| + |y| = 1$



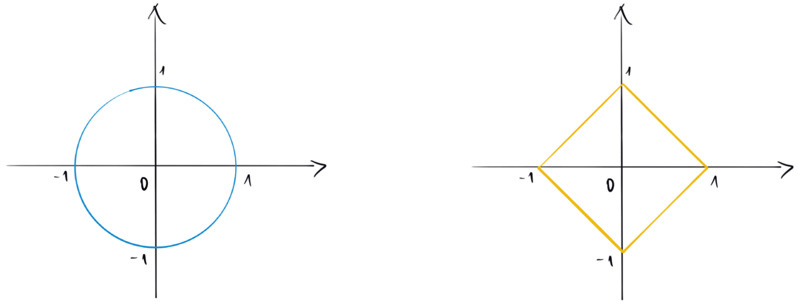

per la distanza di Minkowski








**Pi Greco**: $\frac{\text{lunghezza circonferenza}}{\text{lunghezza diametro}}$



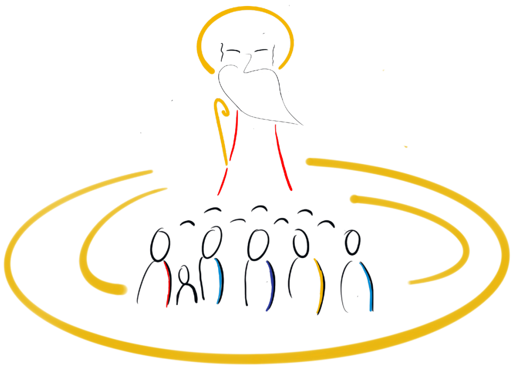

Pi Greco = $\pi$

Pi Greco = $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$



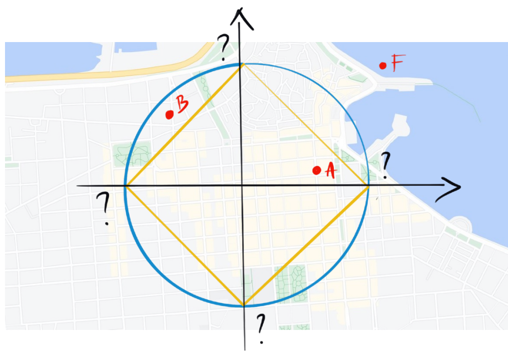


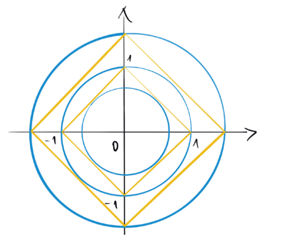
... San Nicola è amante dei forestieri!










Due punti si possono considerare **vicini** se la loro distanza è piccola.

Quale distanza? Piccola quanto? $F$ è un forestiero?

… siamo tutti vicini, se consideriamo la **distanza banale**

$$d(A,B) = 1 \quad \text{se} \quad A \neq B$$
$$d(A,B) = 0 \quad \text{se} \quad A = B$$

…QUI NESSUNO È DIVERSO NESSUNO È MIGLIORE



Approfondimenti - Lab

## Sulla distanza





- $d(A,B) \geq 0$
- $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A,B) = d(B,A)$ (simmetria)
- $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$ (disuguaglianza triangolare)

dove A e B sono elementi di un insieme X

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una funzione

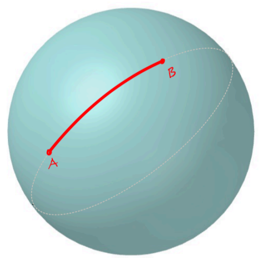
definizione dovuta a **M. Fréchet** (tesi di Dottorato, 1906)





$X$ non è necessariamente $\mathbb{R}^2$

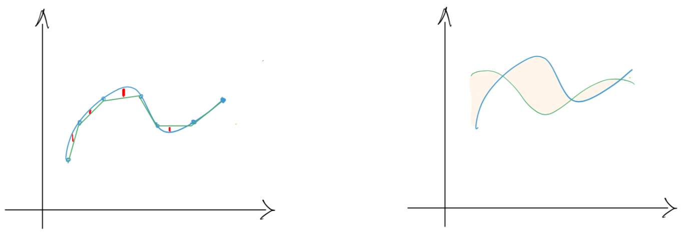
Se $X$ è la **sfera** in $\mathbb{R}^3$




$d(A,B)$ è lunghezza dell'arco (più corto) $AB$ sul cerchio massimo passante per $A$ e $B$.

$X$ non è necessariamente $\mathbb{R}^2$

Se $X$ è un **insieme di funzioni**



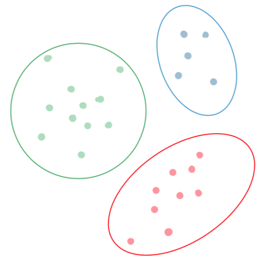
- Sotto opportune ipotesi, si può valutare la distanza tra $f, g \in X$.
- Problemi di approssimazione, stima dell'errore di una previsione…



LA DEFINIZIONE DI DISTANZA

$X$ non è necessariamente $\mathbb{R}^2$

Se $X = \mathbb{R}^n$ è un **insieme di dati**



- Problemi di organizzazione dati, similarità…

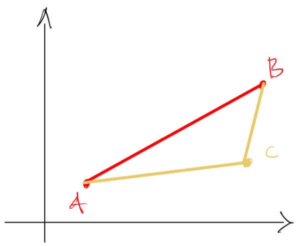
COSÌ LONTANO, COSÌ VICINO! Sabina Milella

LA DEFINIZIONE DI DISTANZA

La disuguaglianza triangolare

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$$

evidenzia che la distanza tra due punti $A$ e $B$ è la **lunghezza del percorso più breve**.



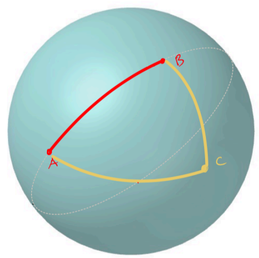

COSÌ LONTANO, COSÌ VICINO! Sabina Milella

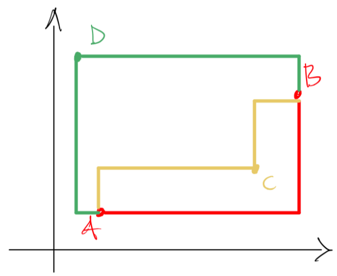
LA DEFINIZIONE DI DISTANZA

La disuguaglianza triangolare

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$$

evidenzia che la distanza tra due punti $A$ e $B$ è la **lunghezza del percorso più breve**.



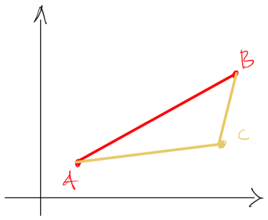



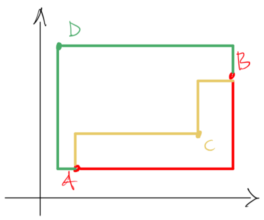

COSÌ LONTANO, COSÌ VICINO! Sabina Milella

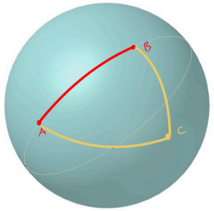
## LA DEFINIZIONE DI DISTANZA

È una uguaglianza se $C$ appartiene al "segmento" $AB$

$$d(A,B) = d(A,C) + d(B,C)$$





Approfondimenti - Lab

# La Geometria del Tassista



## LA GEOMETRIA DEL TASSISTA

$$X = \mathbb{R}^2 \text{ e } d = d_1$$



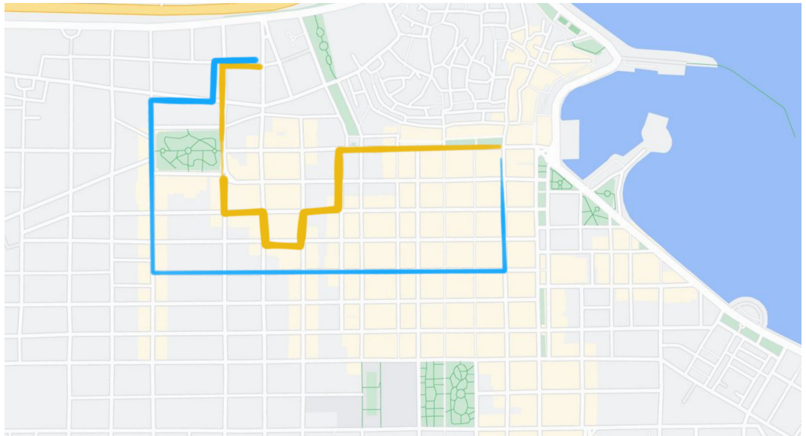
## LA GEOMETRIA DEL TASSISTA

Cosa cambia rispetto alla geometria euclidea?

Si definisce **segmento** congiungente $A$ e $B$ una curva congiungente $A$ e $B$ di lunghezza minima –> $l = d_1(A,B)$

Quanti sono? DIPENDE

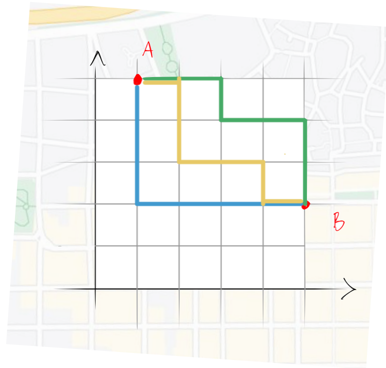
## MANHATTAN VS BARI



$d_1$ è una "buona" definizione di distanza per Bari



## MANHATTAN VS BARI




$X = \mathbb{Z}^2$

**Esercizio**

1) Qual è il percorso più corto che si può seguire, nel quartiere Murattiano, dalla posizione $A$ alla posizione $B$?

2) È unico?



## MANHATTAN VS BARI

1) I percorsi di lunghezza minima sono tutti contenuti nel rettangolo di delimitazione.

2) Potrebbero essere più di uno.

Se $X = \mathbb{Z}^2$ il numero dei segmenti congiungenti $A$ e $B$ è $\dfrac{(o+v)!}{o!v!}$

(dove o è il numero di tratti orizzontali e v di tratti verticali )

Se $X = \mathbb{R}^2$ ci sono infiniti segmenti congiungenti $A$ e $B$



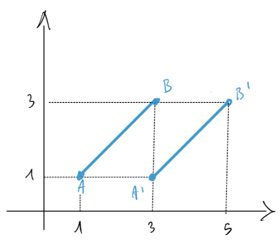
## INVARIANZA PER TRASFORMAZIONI

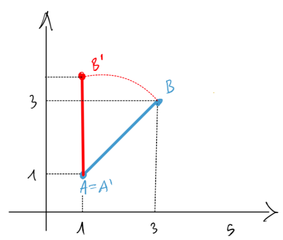
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una **isometria** nel piano se

$$d(T(A), T(B)) = d(A, B)$$

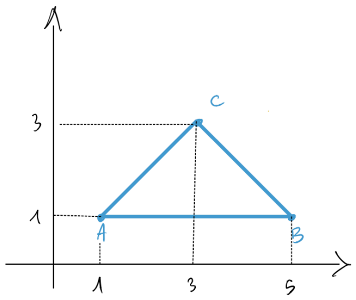
$d_2$ è invariante per traslazioni e rotazioni

$d_1$ è invariante per traslazioni ma non per rotazioni



## Esistono triangoli equilateri rettangoli

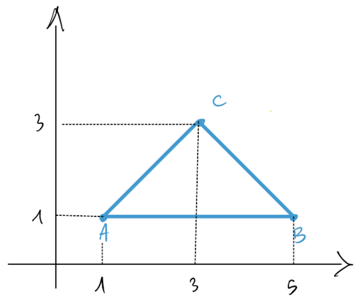



$d_1(A, B) = d_1(A, C) = d_1(B, C) = 4$





## Esistono triangoli equilateri rettangoli



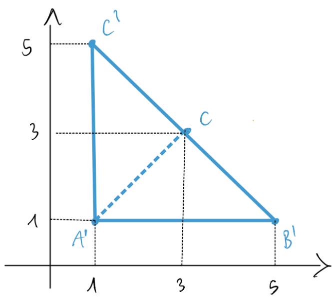

$4^2 + 4^2 \neq 4^2$

–> NON vale il Teorema di Pitagora





## Non vale il primo criterio di congruenza






e allora perchè dovremmo utilizzare la distanza

$$d_1 ?$$

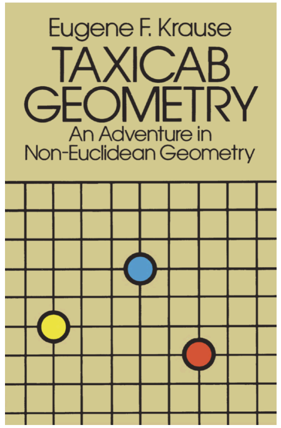
- Modello migliore per configurazioni urbane.
- Maledizione della dimensionalità nell'organizzazione di dati di grandi dimensione.
- In teoria dell'informazione, per il riconoscimento degli errori.



## UN PROBLEMA

Alice and Bruno are looking for an apartment in Ideal City. Alice works as an acrobat at amusement park $A = (-3, -1)$. Bruno works as a bread taster in bakery $B = (3, 3)$. (See Fig. 4.) Being ecologically aware, they walk wherever they go. They have decided their apartment should be located so that the distance Alice has to walk to work plus the distance Bruno has to walk to work is as small as possible. Where should they look for an apartment?

TAXICAB GEOMETRY, **Eugene F. Krause**
Addison-Wesley Publishing Company, 1975.
Dover reprint 1986.






## UN PROBLEMA

Assumeremo
- Griglia stradale in coordinate intere
- $P \in \mathbb{R}^2$ posizione dell'appartamento

Alice and Bruno are looking for an apartment in Ideal City. Alice works as an acrobat at amusement park $A = (-3, -1)$. Bruno works as a bread taster in bakery $B = (3, 3)$. (See Fig. 4.) Being ecologically aware, they walk wherever they go. They have decided their apartment should be located so that the distance Alice has to walk to work plus the distance Bruno has to walk to work is as small as possible. Where should they look for an apartment?

$P$ tale che $d_1(P, A) + d_1(P, B)$ minima?



## STRADE E ASSE DI UN SEGMENTO

**Per iniziare.** Ricerca di un appartamento $P$ **equidistante** dai due posti di lavoro.

$$P = (x, y) \text{ tale che } d_1(P, A) = d_1(P, B)$$

$$\Updownarrow$$

$$|x+3| + |y+1| = |x-3| + |y-3|$$

In $(\mathbb{R}^2, d_2)$ asse "del" segmento $AB$.

(tralasceremo, per il momento, la richiesta somma delle distanze minima)

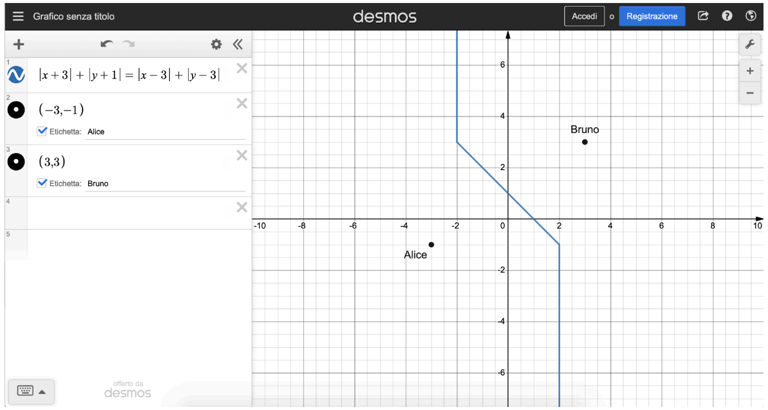
**Esercizio 1.** Disegna il luogo di punti $P$ utilizzando Desmos.

**Esercizio 2.** Disegna il luogo di punti $P$ utilizzando l'equazione della retta.





**Esercizio 1.** Disegna il luogo di punti $P$ utilizzando Desmos.



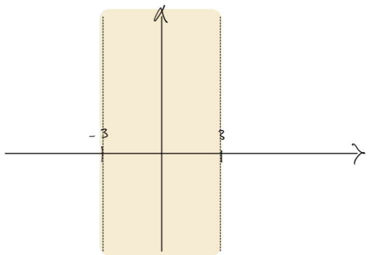

https://www.desmos.com





**Esercizio 2.** Disegna il luogo di punti $P$ utilizzando l'equazione della retta.

$$|x+3|+|y+1|=|x-3|+|y-3|$$




$|x|>3$: ... NESSUNA SOLUZIONE

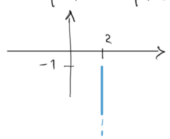
$|x|<3$: $x+3+|y+1|=-x+3+|y-3|$

$2x+|y+1|=|y-3|$





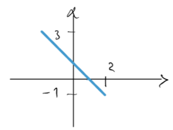
$y<-1$ $\quad 2x-y-1=-y+3 \iff x=2$



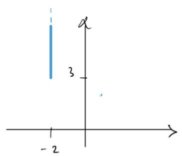

$-1<y<3$ $\quad x+3+y+1=-x+3-y+3$

$2x+2y-2=0$

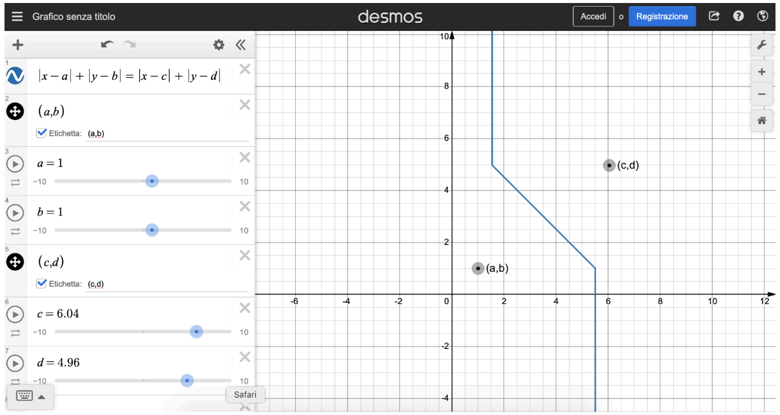
$x+y-1=0$




$y>3$ $\quad 2x+y+1=y-3 \iff x=-2$

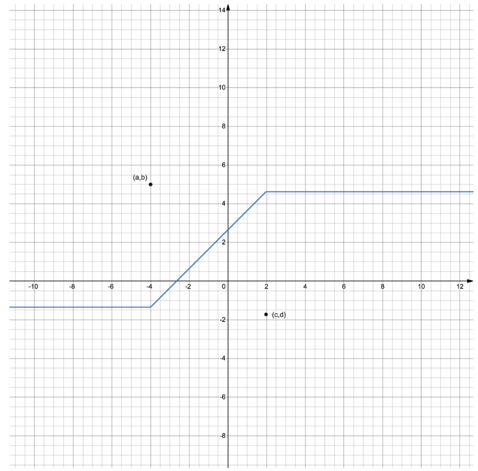


**Esercizio 3.** Utilizzando Desmos e le slider, disegna il luogo di punti $P$ e descrivi cosa accade al variare delle posizioni dei punti $A$ e $B$.



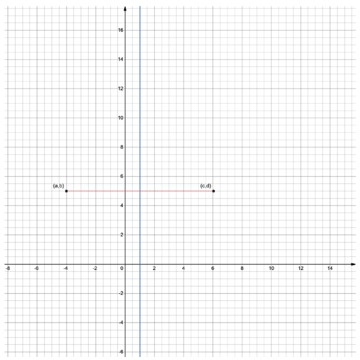


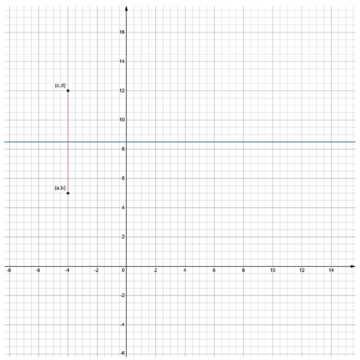










distanza euclidea = distanza del tassista –> asse del segmento "classica"





**Caso particolare.** Il problema vuole che la somma delle distanze sia **minima**

$$d_1(A,P)+d_1(B,P)=d_1(A,B)=10$$

$$\Uparrow$$

più l'equidistanza

$$\Downarrow$$

$$d_1(A,P)=d_1(B,P)=5$$

$$\Updownarrow$$

$$|x+3|+|y+1|=5 \text{ e } |x-3|+|y-3|=5$$

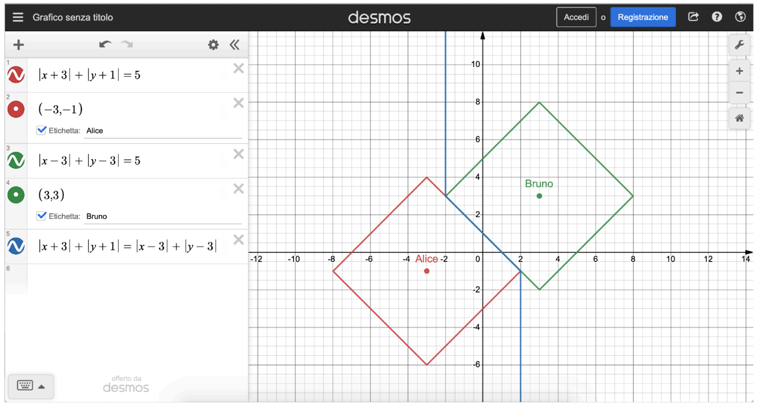
**Esercizio 1.** Disegna i luoghi di punti $P$ utilizzando Desmos.

**Esercizio 2.** Disegna i luoghi di punti $P$ utilizzando l'equazione della retta.





**Esercizio 1.** Disegna i luoghi di punti $P$ utilizzando Desmos.







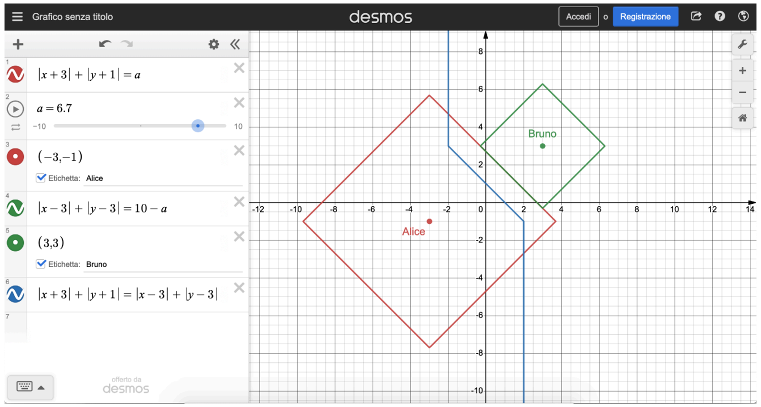

(Eliminando l'equidistanza)

**Esercizio 2.** Alice è più veloce ed allenata e vuole camminare di più. Discuti graficamente il problema, utilizzando Desmos e le slider.



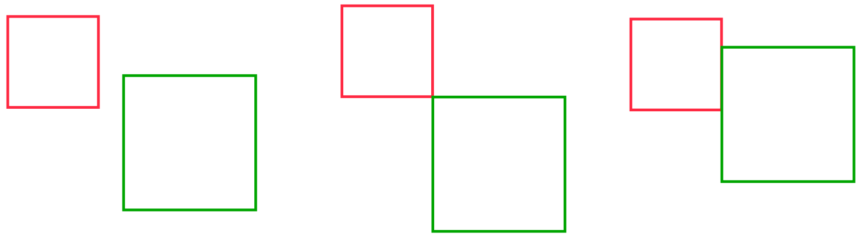


**Esercizio 2.** Alice è più veloce ed allenata e vuole camminare di più. Discuti graficamente il problema, utilizzando Desmos e le slider.



## SULLE CIRCONFERENZE

Due circonferenze possono avere anche più di due punti in comune.





## SULLE ELLISSI

Alice and Bruno are looking for an apartment in Ideal City. Alice works as an acrobat at amusement park $A = (-3, -1)$. Bruno works as a bread taster in bakery $B = (3, 3)$. (See Fig. 4.) Being ecologically aware, they walk wherever they go. They have decided their apartment should be located so that the distance Alice has to walk to work plus the distance Bruno has to walk to work is as small as possible. Where should they look for an apartment?

**Esercizio.** Scrivi l'equazione del luogo dei punti $P$ e rappresentalo graficamente utilizzando Desmos.



## SULLE ELLISSI

$P = (x, y)$ tale che $d_1(P, A) + d_1(P, B) = 10$

$$\Updownarrow$$

$$|x+3| + |y+1| + |x-3| + |y-3| = 10$$

Equazione dell'**ellisse** di fuochi $(-3, -1)$ e $(3,3)$

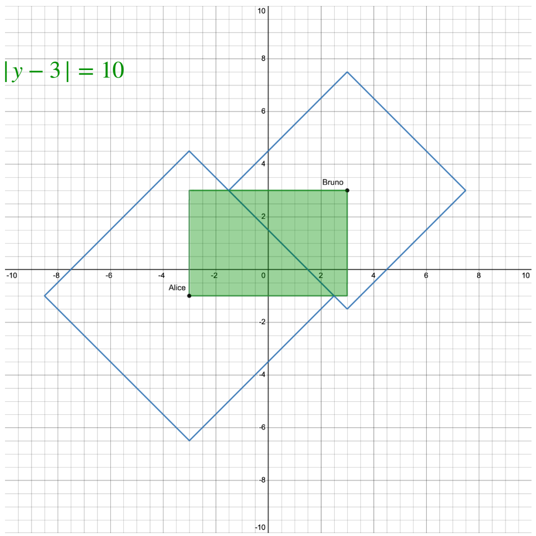


## SULLE ELLISSI

$|x+3| + |y+1| + |x-3| + |y-3| = 10$

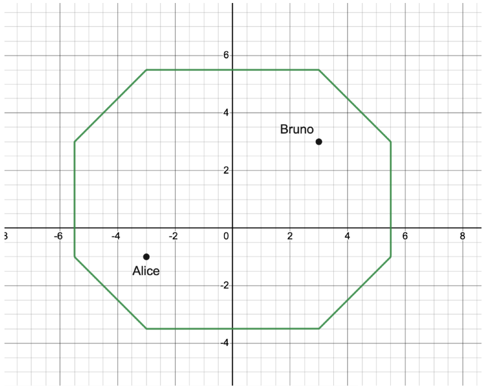
$|x+3| + |y+1| = a$

$|x-3| + |y-3| = 10 - a$




In $(\mathbb{R}^2, d_2)$, l'ellisse degenere è il segmento $AB$.

Se la somma delle distanze è maggiore di 10, l'ellisse può assumere diverse forme.

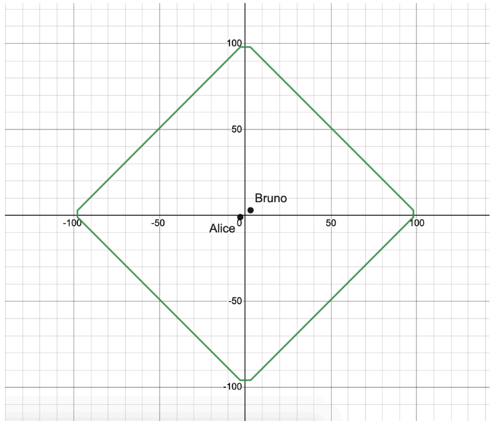



$$|x+3|+|y+1|+|x-3|+|y-3| = 15$$





Se la somma delle distanze è maggiore di 10, l'ellisse può assumere diverse forme.

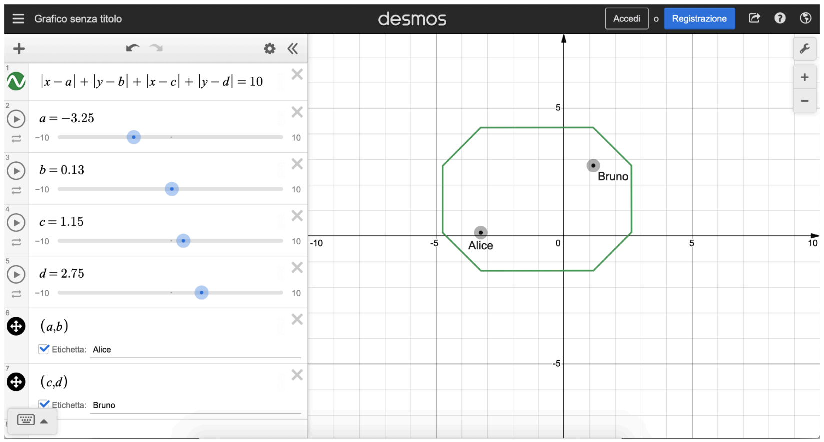



$$|x+3|+|y+1|+|x-3|+|y-3| = 200$$





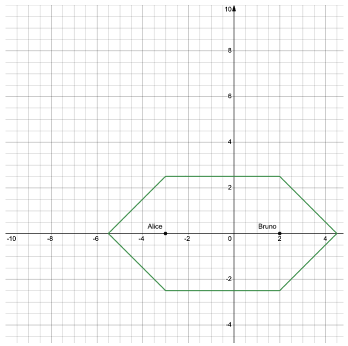
e al variare dei fuochi…

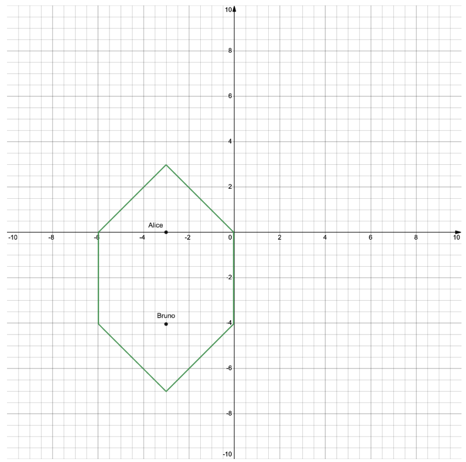







e al variare dei fuochi…



# Grazie!

sabina.milella@uniba.it