

Quante aree ti dai?  
Ripensare all'area sulle tracce  
di Emma Castelnuovo

**Maria Mellone,  
Università di Napoli Federico II  
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"**

1. Pensate di dover rispondere alla seguente questione al di fuori dell'ambiente scolastico: *Cosa si intende per area di una figura e come si fa a calcolare l'area di una figura?*

2. Considera un rettangolo i cui lati sono lunghi 4 e 3 cm, determina l'area del rettangolo e spiega la tua risposta in connessione alla risposta precedente;

La domanda al punto 2 è stata proposta da Angela ai suoi alunni di prima media per lavorare sulla nozione di area (di un rettangolo) e sulla formula che si utilizza per calcolarla. La maggior parte degli studenti di Angela ha dato come risposta  $12\text{cm}^2$ , ma sono state presentate diverse giustificazioni a questa risposta. Di seguito ne riportiamo quattro:

Caio: *Moltiplicando il valore della lunghezza per l'altezza si ottiene il valore  $4\text{cm} \times 3\text{cm} = 12\text{cm}^2$ .*

Douglas: *L'area è una misura di superficie che ha due dimensioni (chiamate lunghezza e larghezza) così dobbiamo mettere il due all'esponente è  $3 \times 4 = 12\text{cm}^2$ .*

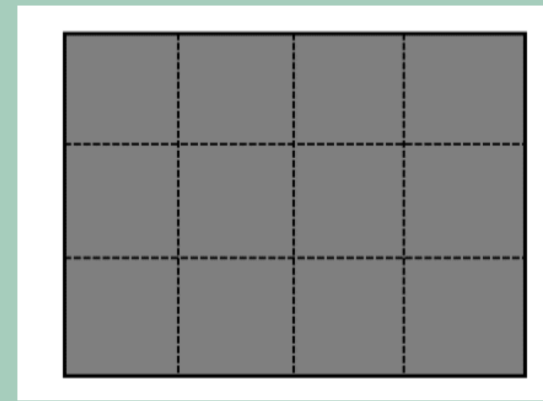
Camilla: *Basta contare il numero di centimetri quadrati necessarie per coprirla, così abbiamo  $3\text{cm}^2 \times 4\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$  oppure  $4\text{cm}^2 \times 3\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$ .*

Fernanda: *L'area è  $12\text{cm}^2$  perché dobbiamo fare  $4 \times 3\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$  oppure  $3 \times 4\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$ .*

Quale/i di queste risposte secondo te mostra una comprensione corretta della nozione di area e della sua relazione con la formula per determinare l'area di un rettangolo?

Proponi possibili feedback da dare agli studenti per aiutarli a sviluppare conoscenze matematiche riguardo la nozione di area partendo dalla propria risposta.

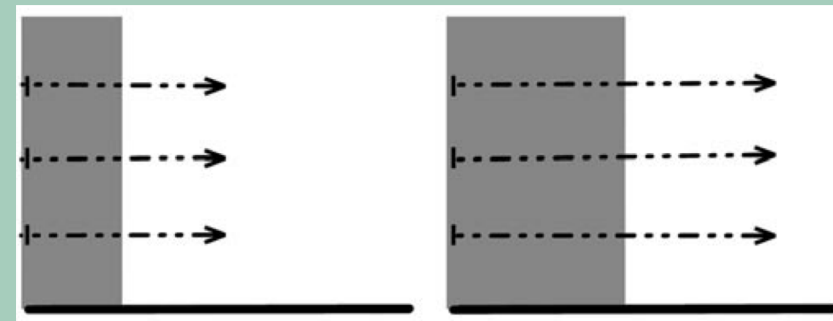
Uno degli approcci alla misurazione della superficie di un rettangolo è scegliere un'unità di misura (ad esempio un quadrato) e contare quante unità sono necessarie per coprire l'intero rettangolo. Un modo più sofisticato è contare le unità quadrate in una colonna e poi moltiplicarle per il numero di colonne per coprire la larghezza del rettangolo. In questo approccio, l'area è espressa come relazione tra una data unità di misura dell'area (unità quadrata) e l'oggetto bidimensionale (2-D) misurato.



«ricoprire»

$$3 \text{ volte} \times 4 \text{ cm}^2 / \text{volte} = 3 \times 4 \text{ cm}^2$$

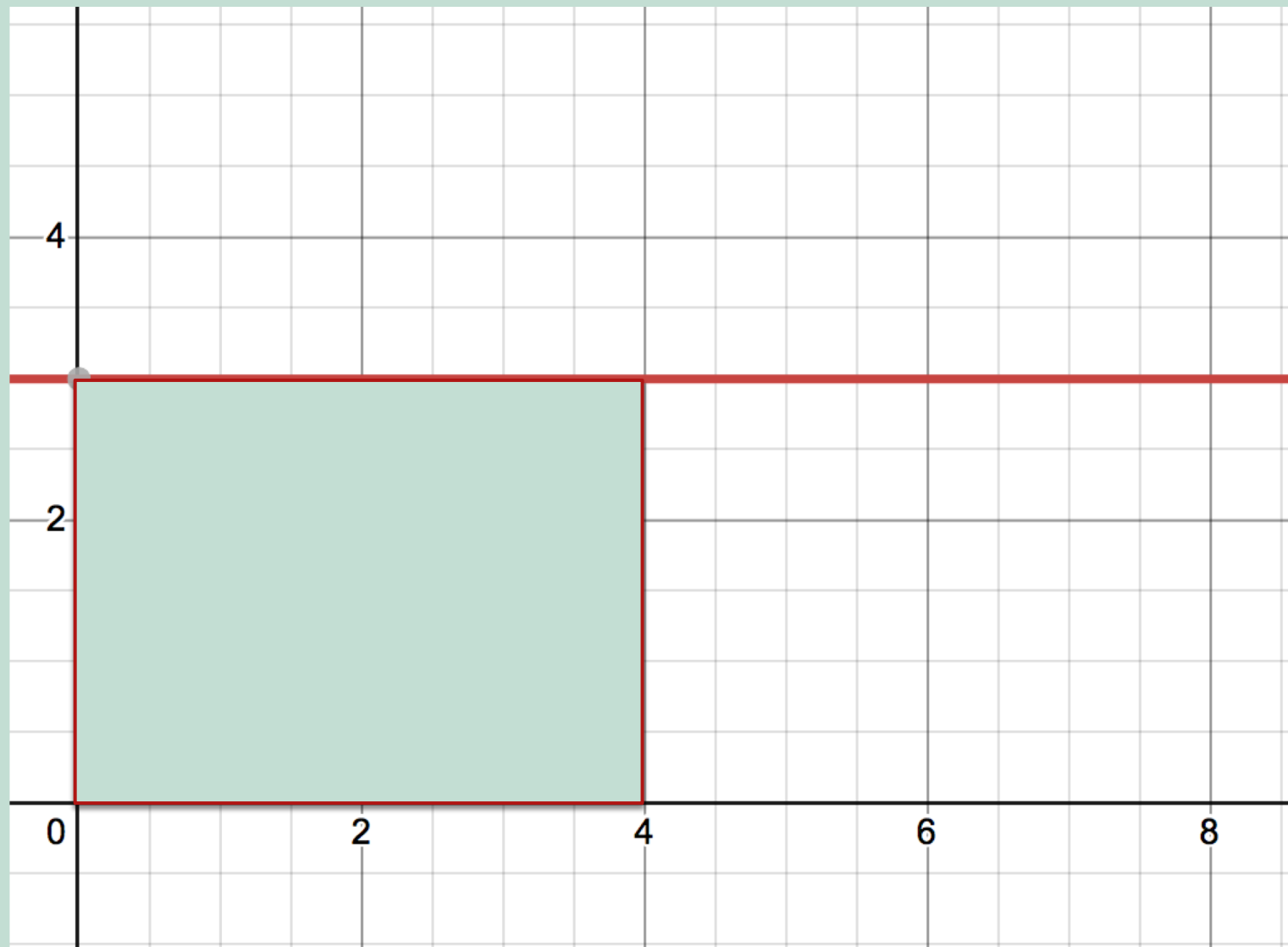
Un approccio alternativo al processo di misurazione di una superficie (o di un volume): l'approccio della misurazione dinamica. È un approccio alla misurazione geometrica che si concentra su come lo spazio viene misurato dagli oggetti di dimensione inferiore che lo generano. Un approccio induttivo per visualizzare questa generazione di attributi di area e volume è lo spostamento di oggetti nello spazio. Scorrendo un segmento di linea "a" in direzione perpendicolare per una distanza "b", generiamo un rettangolo con area "ab"



«spazzare»

$$4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$$

L'area di superficie come integrale definito di una funzione  
quale approccio incorpora?



$$A = \int_0^4 3 \, dx$$



In Italia:

- Pietro Di Martino (UNIFI)
- Tiziana Pacelli (UNINA)
- Gemma Carotenuto (UNINA)
- Ciro Minichini (INDIRE)
- Rosa Di Bernardo (phd student)

....



C. M. RIBEIRO, M. MELLONE, A. JAKOBSEN (2013). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In: A. M. Lindemeir, A. Heinze (a cura di) *Atti del 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, p. 89-96). Kiel, Germania: PME).



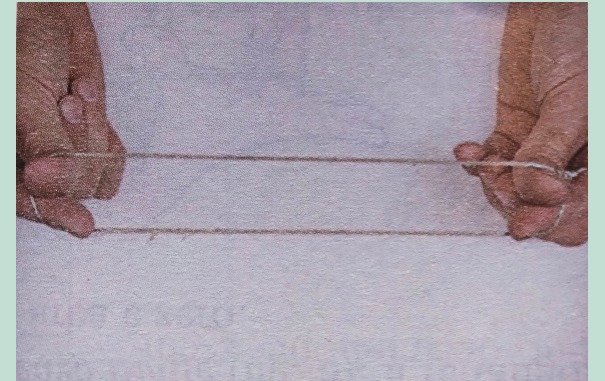
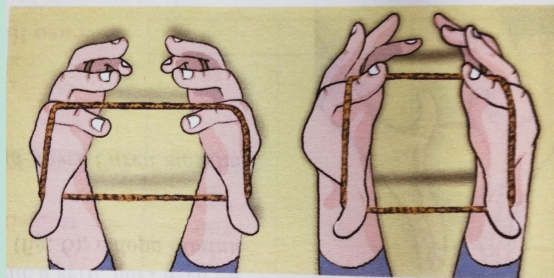
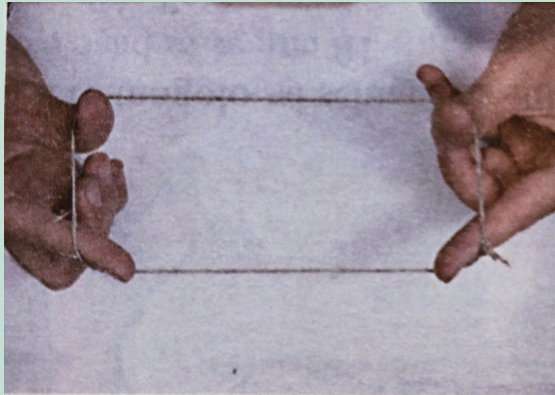
# Raffaella Borasi

Lo studente che sta commettendo un errore può essere visto come una persona che si perde durante il suo percorso: se ha un appuntamento importante entra in uno stato di ansia, ma se è un turista in una città che non conosce il suo perdersi può rappresentare l'opportunità per scoprire luoghi che altrimenti non avrebbe potuto conoscere (Borasi, 1994).

Diamo agli studenti uno spago lungo 40 cm e chiediamogli di tenderlo mettendolo tra l'indice e il pollice con le due mani.

Lasciamo il tempo di sperimentare.

Possiamo chiedere: Cosa cambia cosa? non cambia?



Portiamo la loro osservazioni su quali figure piane si possono formare e che il quadrato è un rettangolo particolare. Emma Castelnuovo discute di questo aspetto fin dalle prime lezioni del corso di geometria intuitiva

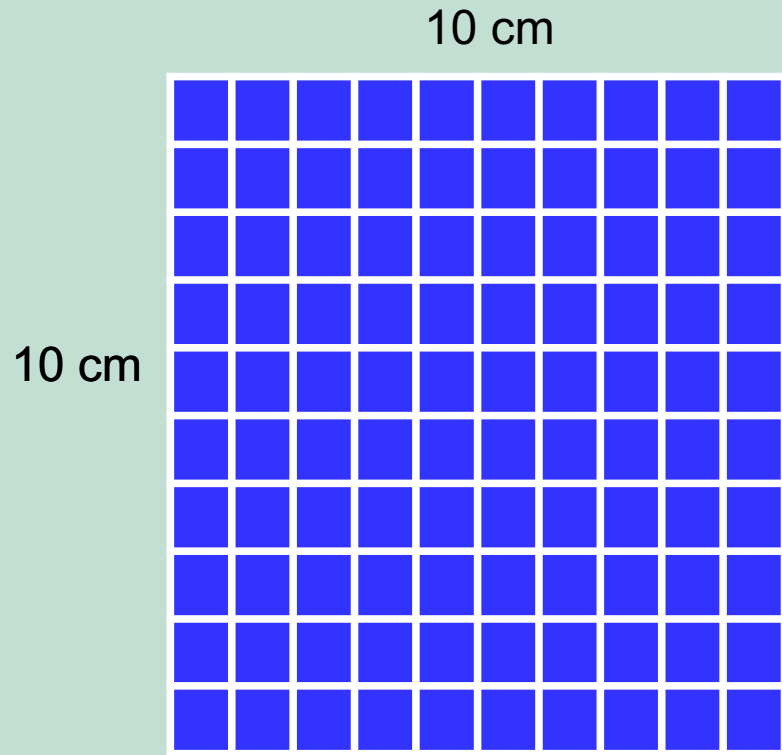


## IL PROBLEMA DELLO SPAGO

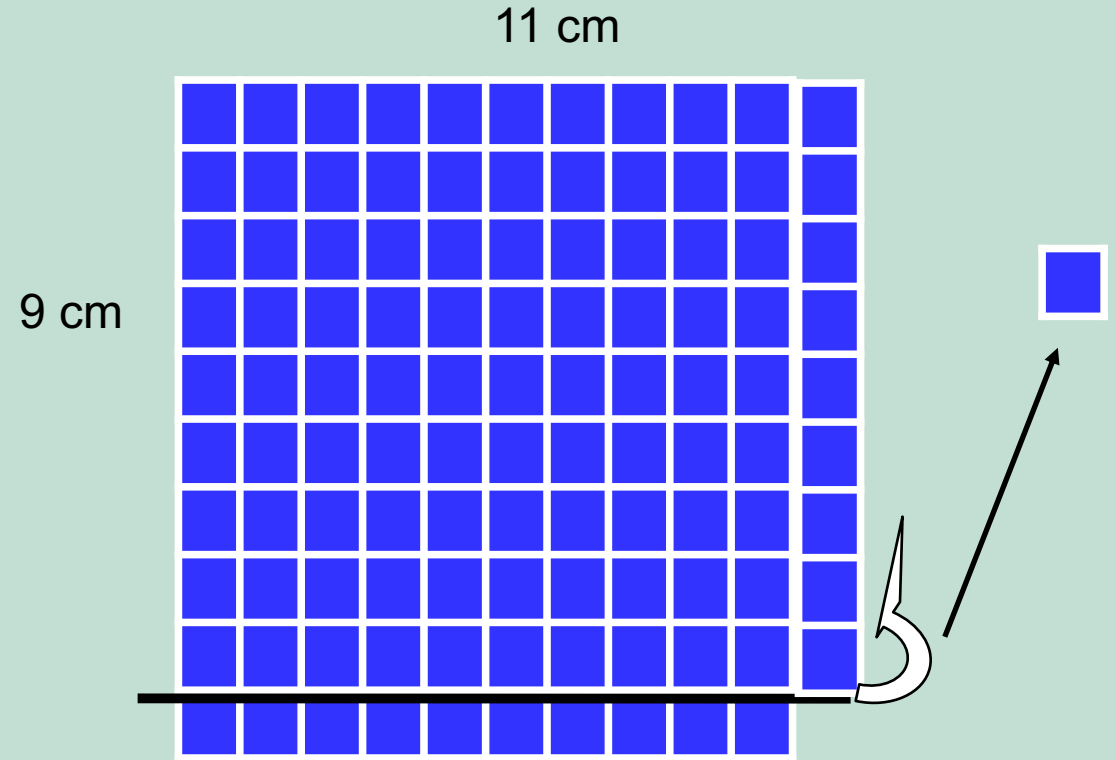
Il perimetro dei rettangoli resta invariato (40 cm), ma notiamo che a variare sono le aree:

SEMIPERIMETRO	AREA
$10\text{cm}+10\text{cm}=20\text{cm}$	$10\text{cm}\times 10\text{cm}=100\text{cm}^2$
$9\text{cm}+11\text{cm}=20\text{cm}$	$9\text{cm}\times 11\text{cm}=99\text{cm}^2$
$8\text{cm}+12\text{cm}=20\text{cm}$	$8\text{cm}\times 12\text{cm}=96\text{cm}^2$
$7\text{cm}+13\text{cm}=20\text{cm}$	$7\text{cm}\times 13\text{cm}=91\text{cm}^2$
$6\text{cm}+14\text{cm}=20\text{cm}$	$6\text{cm}\times 14\text{cm}=84\text{cm}^2$
$5\text{cm}+15\text{cm}=20\text{cm}$	$5\text{cm}\times 15\text{cm}=75\text{cm}^2$
$4\text{cm}+16\text{cm}=20\text{cm}$	$4\text{cm}\times 16\text{cm}=64\text{cm}^2$
$3\text{cm}+17\text{cm}=20\text{cm}$	$3\text{cm}\times 17\text{cm}=51\text{cm}^2$
$2\text{cm}+18\text{cm}=20\text{cm}$	$2\text{cm}\times 18\text{cm}=36\text{cm}^2$
$1\text{cm}+19\text{cm}=20\text{cm}$	$1\text{cm}\times 19\text{cm}=19\text{cm}^2$

# INTUIZIONE GRAFICA

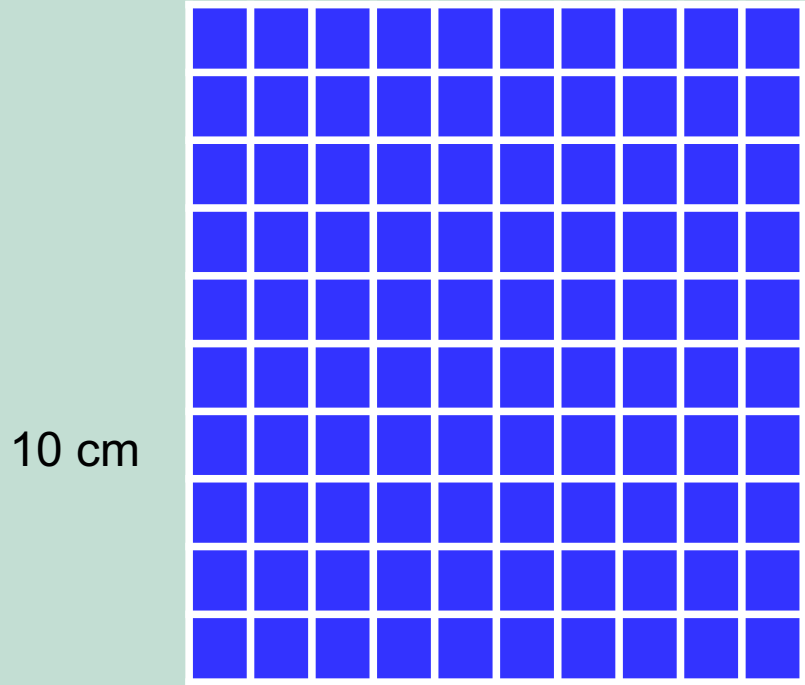


$$10\text{cm} \times 10\text{cm} = 100\text{cm}^2$$



$$9\text{cm} \times 11\text{cm} = 99\text{cm}^2$$

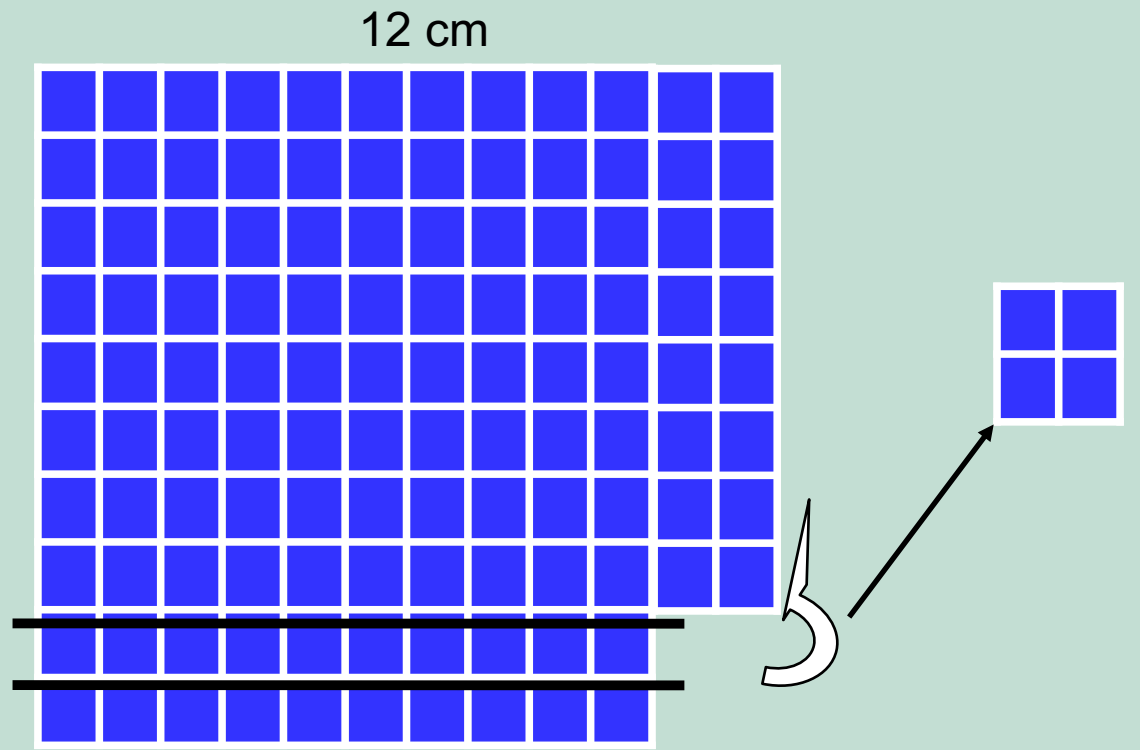
$1\text{cm}^2$  in meno rispetto ai  $100\text{cm}^2$



10 cm

10 cm

$$10\text{cm} \times 10\text{cm} = 100\text{cm}^2$$



12 cm

8 cm

$$8\text{cm} \times 12\text{cm} = 96\text{cm}^2$$

4cm<sup>2</sup> in meno rispetto ai 100cm<sup>2</sup>

**Proviamo a rispondere ad alcune domande**

- cosa succede se  $h$  o  $b$  è 10 m?

$h = 10$  .....  $b = 0$  .....  
 $b = 10$  .....  $h = 0$  .....

- come varia la  $b$  al variare di  $h$ ?  
*se  $b$  cresce  $h$  diminuisce*

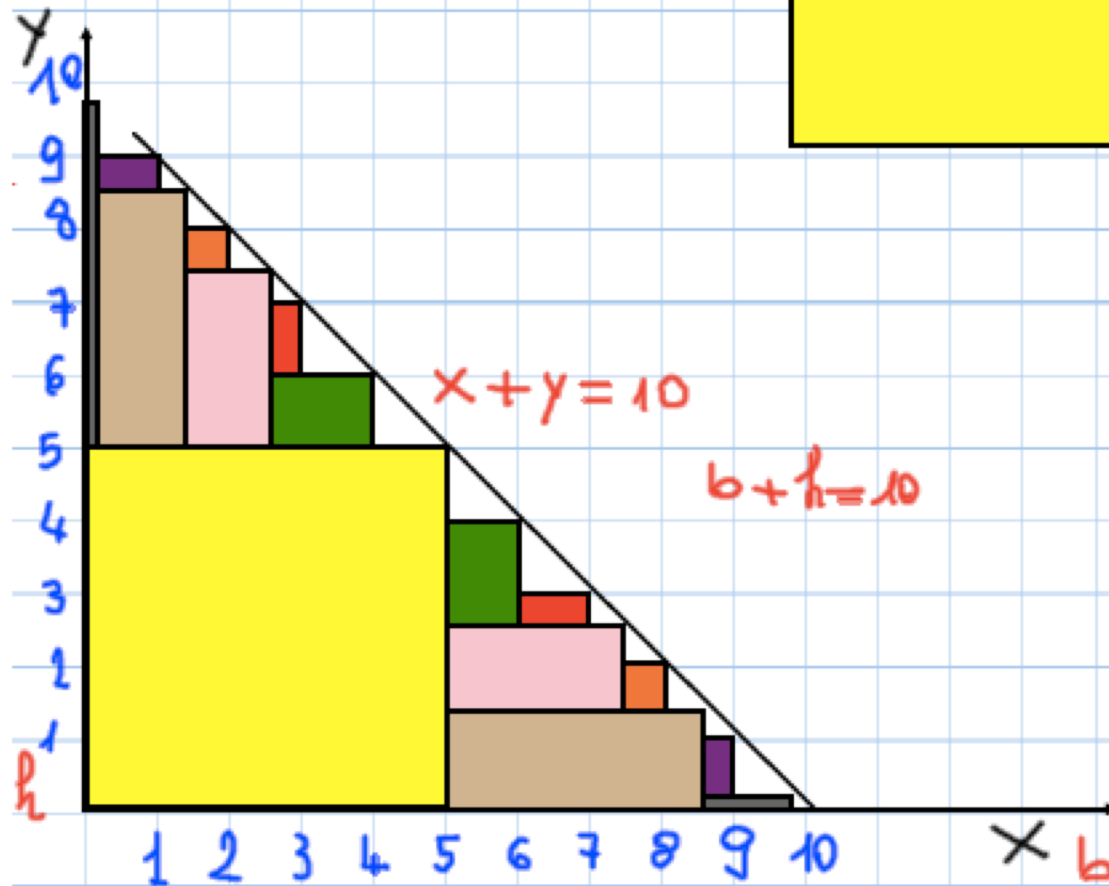
- i rettangoli isoperimetrici hanno medesima area?  
**NO**

- c'è un rettangolo che ha l'area massima?  
*sì è il quadrato*

- vi sono rettangoli **EQUIVALENTI** (che hanno la stessa area)?  
*quelli che hanno  $b$  e  $h$  che si scambiano come valore*

Il problema dello spago dato in una  $V$  elementare

Disponiamo i nostri rettangoli lungo l'asse delle  $x$  secondo un ordine decrescente della  $b = x$  e crescente dell' $h = y$

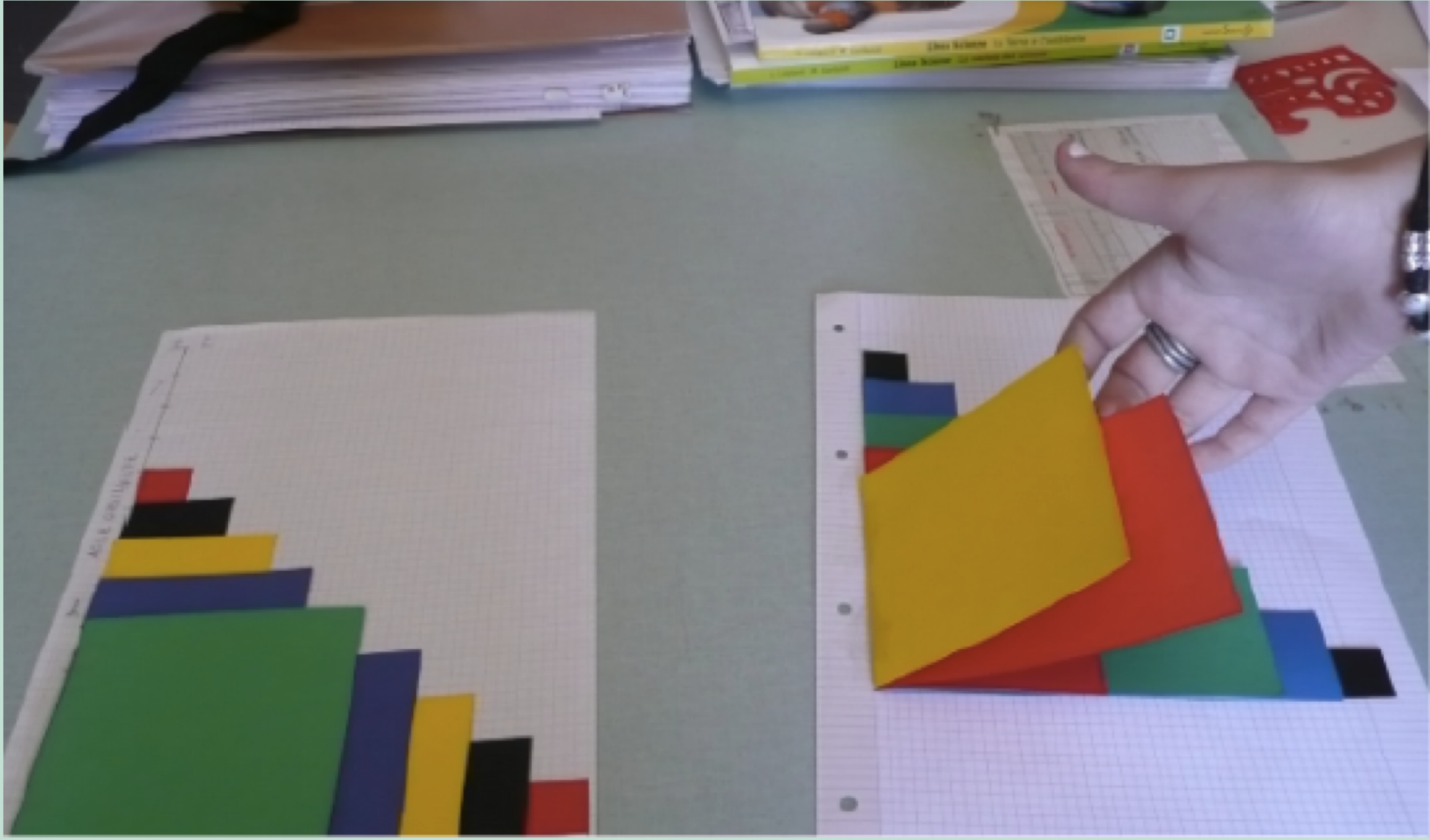


$$b=x$$

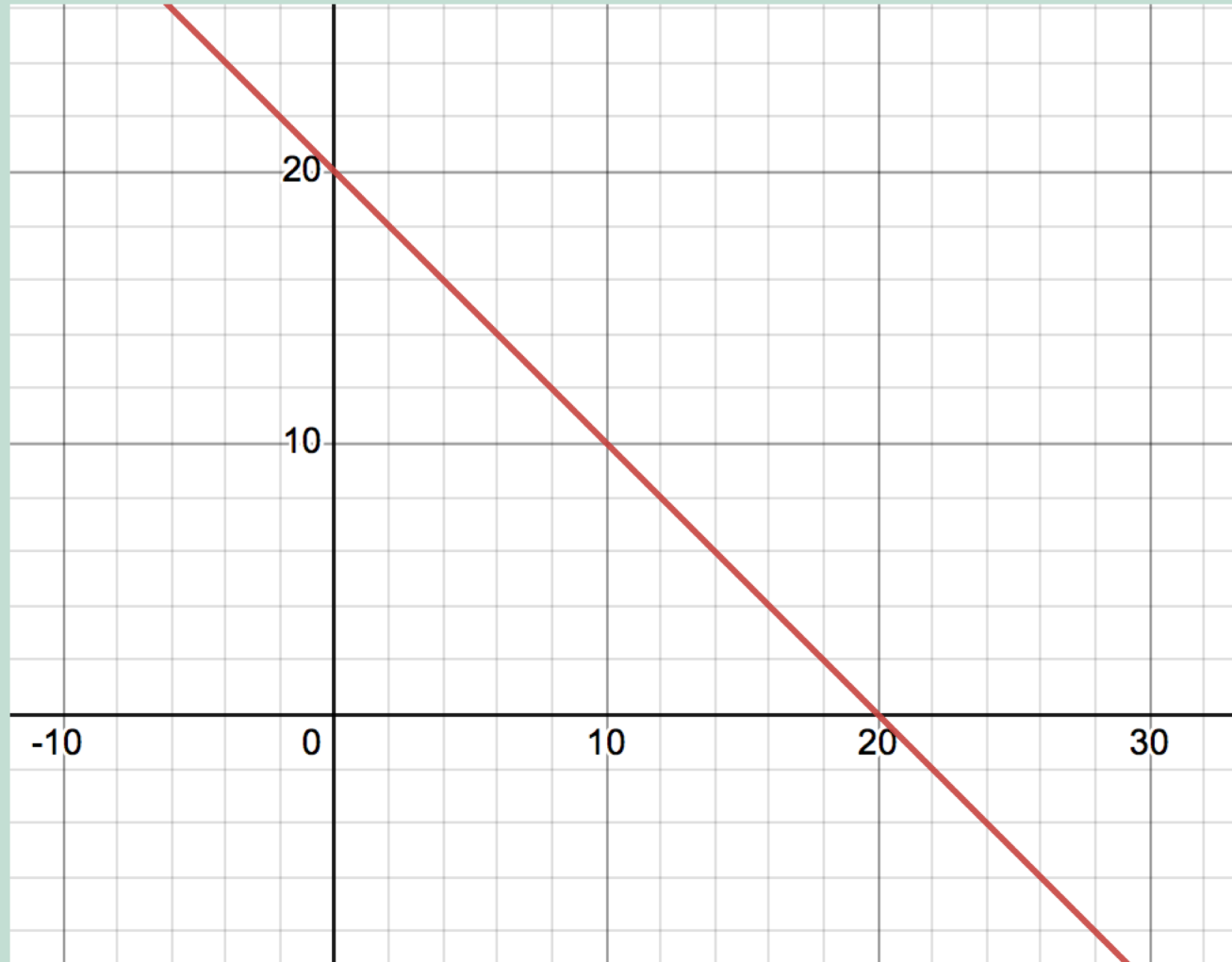
$$y=10-x$$

$$h=10-x$$

$$A(x)=bxh=x(10-x)=10x-x^2$$



Sul piano cartesiano se vogliamo rappresentare la variazione di una dimensione in funzione dell'altra abbiamo la seguente equazione  $y=20-x$



Quindi al crescere di una dimensione l'altra decresce e la variazione di una dimensione in funzione dell'altra è una funzione lineare, con coefficiente angolare pari a -1 e termine noto 20.

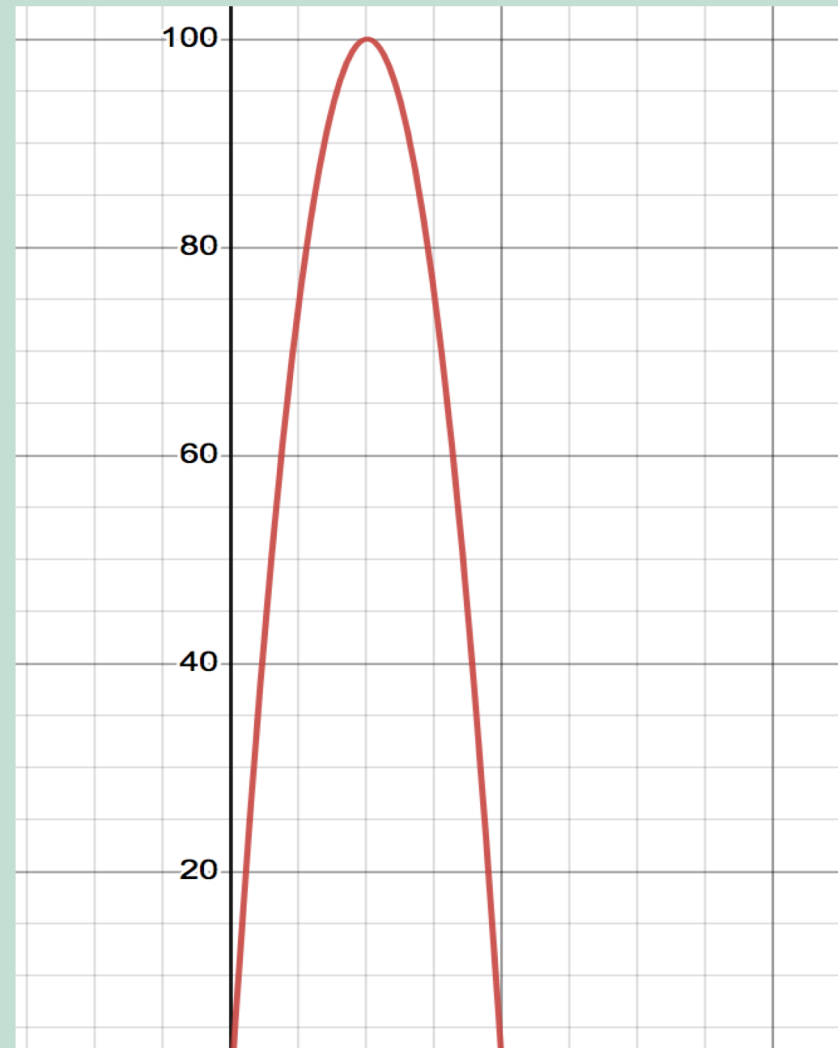
..... e se volessi graficare la variazione dell'area  
in funzione di una delle due dimensioni?



In questa situazione se voglio scrivere come varia la superficie di questi rettangoli in funzione di una delle due dimensioni ottengo la funzione

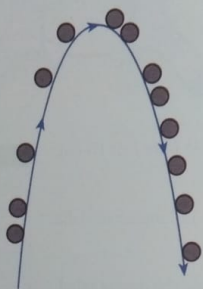
$$A(x) = x(20-x) = -x^2 + 20x$$

$V = (10, 100)$

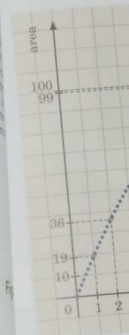


Osserviamo i valori dell'area: si parte da zero, si va via via aumentando, si raggiunge il massimo (valore 100) che «appartiene al quadrato», e poi si ridiscende fino a zero.

Il quadrato ha l'area massima fra tutti i rettangoli di uguale perimetro.

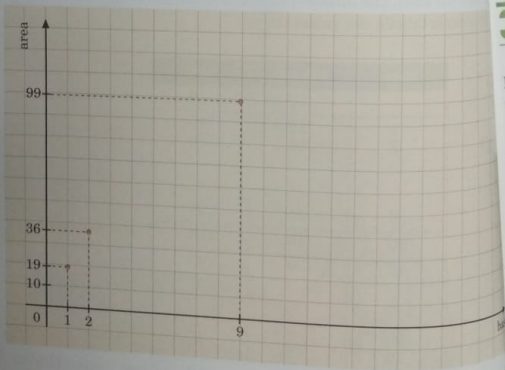


Quando una palla corso è... che abbiamo... vato per... l'area: poi... vello zero... no al culm... discende...



Per capire bene come varia l'area del rettangolo, scriviamo di nuovo la tabella, indicando solo i valori della base e dell'area. Passiamo ora dai numeri al grafico (fig. 9): sull'asse delle ascisse riportiamo i valori delle basi, e su quello delle ordinate riportiamo i valori delle aree.

base	area
0	0
1	19
2	36
.	.
.	.
.	.
9	99
10	100
11	99
.	.
.	.
.	.
18	36
19	19
20	0



### 3 Lap

Ecco la fotograf...

Figura

Notate che, per le aree, abbiamo preso come uguale a 10 la lunghezza del lato di un quadratino, in modo che il valore 100 sia contenuto nel foglio.

La curva che andiamo costruendo non è un semicerchio! È la curva descritta da una palla lanciata in aria: è una parabola (fig. 10).

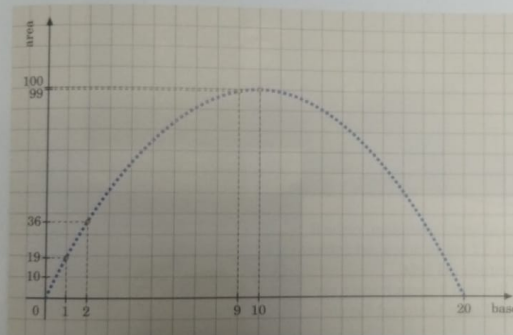


Figura 10

### 3 La parabola nella realtà

Esercizi DA PAGINA 205

Ecco la fotografia (fig. 11), eseguita con una tecnica speciale, del successivo rimbalzare di una palla; si vedono tanti archi di parabola.

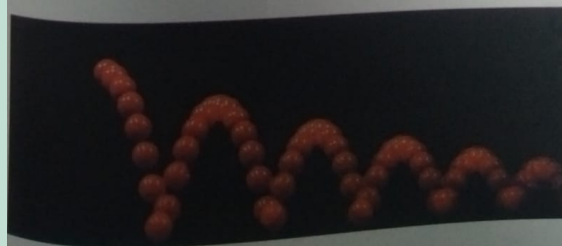


Figura 11

## Problema isoperimetrico



Alessio Figalli –medaglia Fields 2018

Uno dei più pregevoli risultati di Figalli riguarda proprio il problema isoperimetrico, che consiste nel determinare tra tutte le figure di perimetro assegnato quella di area massima, o specularmente tra tutte le figure di area assegnata trovare quella di perimetro minimo.

## Il problema isoperimetrico nella storia



Il problema era noto fin dall'antichità Virgilio narra infatti che Didone, per fondare Cartagine sulle coste dell'Africa settentrionale, avesse chiesto di acquistare un appezzamento di terra dal re locale Iarba e che il re come risposta le dette una pelle di toro e che Didone avrebbe potuto prendere tutta la terra che quella pelle avrebbe potuto racchiudere.

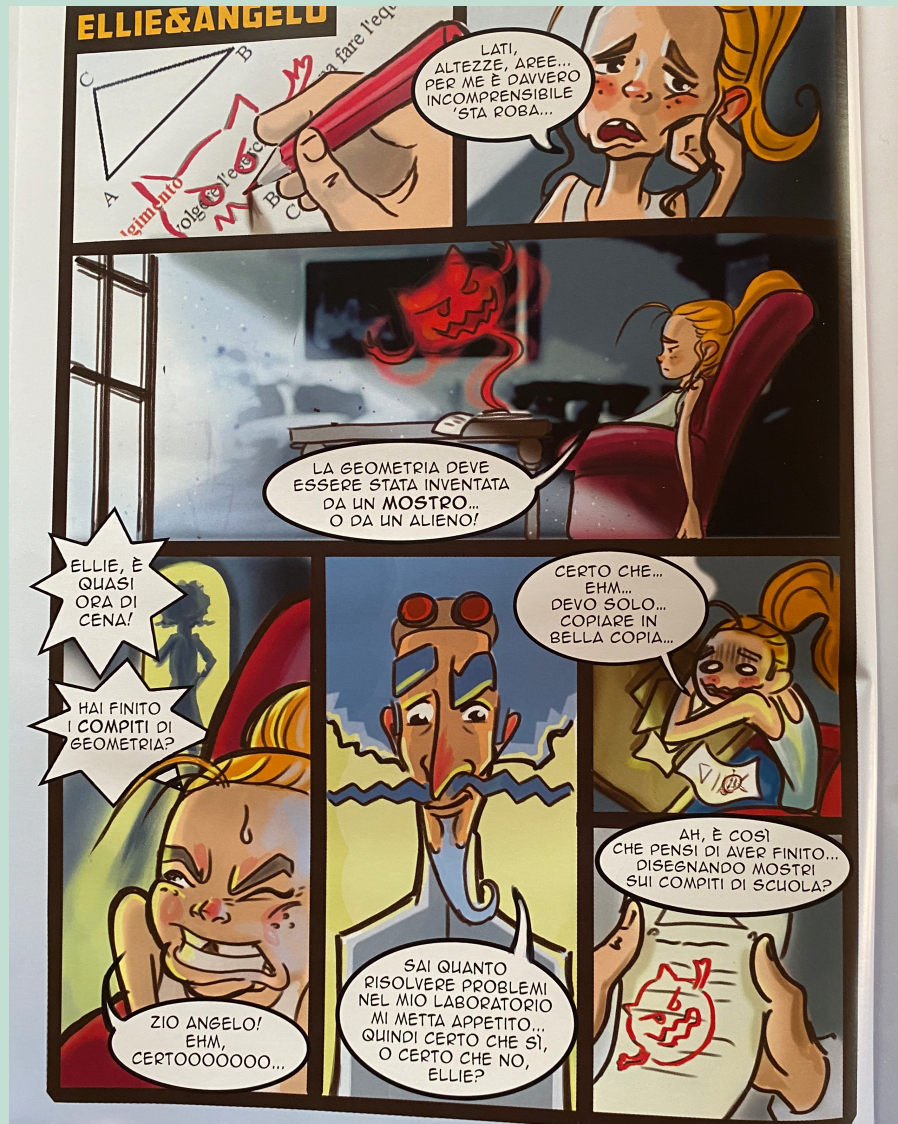


*Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai  
sorgere la gran cittade e l'alta rocca  
della nuova Carthago, che dal fatto  
Birsa nomassi, per l'astuta merce  
che, per fondarla, fèr di tanto sito  
quanto cerchiar di bue potesse un tergo  
(taurino quantum possent circumdare tergo)*

La leggenda narra che Didone tagliò la pelle in strisce sottili che congiunse e dispose a formare un semicerchio, con il quale riuscì a racchiudere la massima area possibile. Didone aveva intuito che il cerchio è la soluzione del problema isoperimetrico.



- Il problema può essere riformulato anche in una versione “simmetrica”, cioè affermando che, tra tutte le figure di area assegnata, l’unica con perimetro minimo è il cerchio.
- Figalli, assieme a Maggi e Pratelli, nel 2010, ha enunciato un teorema che illustra quello che accade per figure che hanno una lunghezza molto vicina a quella della circonferenza alla quale corrisponde l’area assegnata utilizzando il trasporto ottimo. Il risultato può essere applicato a superfici in spazi con qualsiasi dimensione. Nello spazio, la minima superficie per un volume assegnato corrisponde a quella di una sfera ed è questo il motivo per il quale la tensione superficiale fa sì che le bolle di sapone siano sferiche. Tra gli studi di Figalli troviamo anche la stima sulla deformazione subita da una bolla di sapone o da un cristallo a causa di perturbazioni esterne.



# Attenzione alle questioni di genere

**DIDONE**  
IX SEC. A.C.  
ANNO ZERO

ARSH! SI PUÒ STAR MALE ANCHE IN UN MONDO VIRTUALE?

DIAMINE! DOV'È FINITO IL MIO CORPO?

TRANQUILLA ELLIE, SIAMO SOLO DELLE PROIEZIONI VIRTUALI, NON HAI PERSO IL TUO CORPO!

PIUTTOSTO, GUARDA DOVE TI HO PORTATA! SIAMO IN NORD AFRICA NELL'ASI AVANTI CRISTO, PIÙ PRECISAMENTE IN NUMIDIA, TERRITORIO CHE OGGI È PARTE DELL'ALGERIA!

WOW...

LA PROTAGONISTA DI OGGI, DIDONE, È ARRIVATA DA TIRO, CON IL SUO SEGUITO DI SERVI E CARICA DI GIOIELLI, AL COSPETTO DI RE IARBA CHIEDENDOGLI OSPITALITÀ.

MA È BELLISSIMA!

È ANCHE MOLTO INTELLIGENTE. RE IARBA È GIÀ INNAMORATO PERSO ED ESALICIPA QUALUNQUE SUO DESIDERIO...

NON VOGLIO APPROPRIARMI DELLA TUA GENEROSA OSPITALITÀ, I MIEI SCRIBANI SONO GIÀ PIENI DI RICCHEZZE, QUELLO CHE SERVE A ME E AL MIO POPOLO È DELLA TERRA. TI CHIEDO DI DONARMI TANTA TERRA QUANTA NE PUÒ CINGERE UNA PELLE DI BUE.

CERTAMENTE BELLISSIMA DIDONE, MA LA TUA RICHIESTA MI SEMBRA DAVVERO MOLTO MODESTA!

ZIO, MA MIA CHE SPA INTELLIGENTE, PERCHÉ HA PORTATO UNA STUPIDA PELLE DI BUE AL MARE PER TABLUZZARLA?

ASPETTA ELLIE... I SERVI STANNO TABLIANDO DELLE STRISCIE DI PELLE SOTTILISSIME.

ECCO, MIO RE ORA CHE ABBIAMO TANTISSIME STRISCIOLE DI CUIO LE POSSIAMO LEGARE INSIEME.

MA È GENIALE, COSÌ PRENDERÀ TANTISSIMA TERRA E NON AVRÀ INFRANTO IL PATTO CON IL RE!

ESATTAMENTE! DIDONE CONOSCE BENE LA MATEMATICA E SA CHE LA FORMA CHE CONTIENE PIÙ TERRA È IL CERCHIO.

ORA, COME CONCORDATO, IO E LA MIA GENTE PRENDEREMO TUTTA LA TERRA CHE RIUSCIREMO A CIRCONDARE CON QUESTE STRISCIE DI CUIO.

ZIO, MA IL RE NON SI SENTIRÀ PRESO IN GIRO?

NO, MIA CARA ELLIE, RE IARBA SA APPREZZARE LE PERSONE INTELLIGENTI ED È MOLTO DIVERTITO DALLO STRATAGEMMA DI DIDONE. ACCETTERÀ DI BUON GRADO DI DONARLE LA TERRA.

SULLA TERRA CINTA DA DIDONE VERRÀ COSTRUITA CARTAGINE, UNA DELLE CITTÀ PIÙ IMPORTANTI DI TUTTO IL MONDO ANTICO.

DEVO AMMETTERE ZIO CHE QUESTA DIDONE È PROPRIO FORTE. MA HAI AVUTO FORTUNA. SCOMMETTO CHE GLI ALTRI MATEMATICI SAGANNO BARBOSISSIMI!

IN QUESTA LEGGENDA DIDONE AVREBBE POTUTO DISPORRE LE STRISCIE DI PELLE DI BUE IN TANTI MODI, MA QUELLO DA LEI SCELTO È CERTAMENTE IL PIÙ CONVENIENTE. INFATTI, TRA TUTTI I POLIGONI REGOLARI E IL CERCHIO, A PARITÀ DI PERIMETRO (DATO DALLA SOMMA DELLE LUNGHEZZE DELLE STRISCIOLE), LA FIGURA DI AREA MASSIMA È PROPRIO IL CERCHIO.

LA SCELTA DI DIDONE MIRAVA A OTTENERE IL TERRITORIO PIÙ VASTO POSSIBILE PER LA SUA NUOVA PATRIA. INOLTRE, SCELSE NON TANTO UN CERCHIO, MA UN SEMICERCHIO CON IL DIAMETRO COINCIDENTE CON LA COSTA DEL MEDITERRANEO, CON QUEL CHE SIGNIFICAVA A QUEI TEMPI AVERE UN PORTO IN UN MARE COSÌ RICCO DI COMMERCIO... NON POSSIAMO, OGNUNQUE, CHE RIMANERE STUPITI DALL'OCULATEZZA STRATEGICA DELLA BELLISSIMA DIDONE.



## Differenze di genere in matematica: dagli studi internazionali alla situazione italiana

Gender differences in mathematics: from the international literature to the Italian situation

Chiara Giberti

Facoltà di Scienze della Formazione – Libera Università di Bolzano, Italia



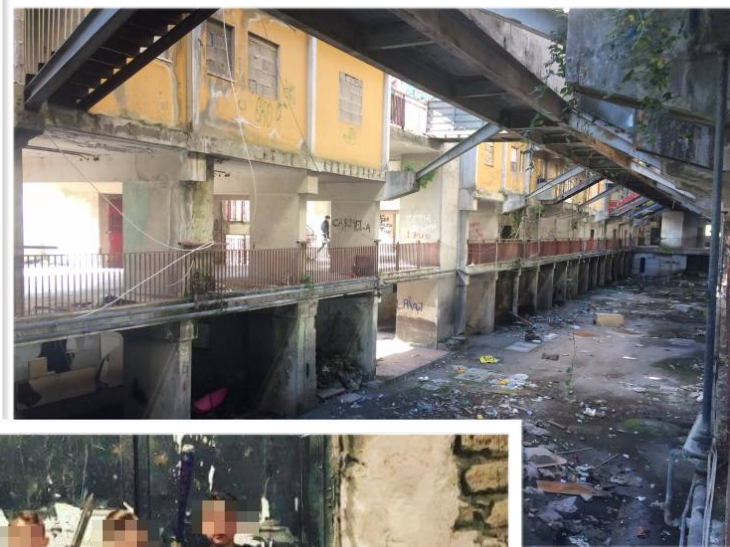
Le ricerche mostrano che non è possibile individuare un'unica causa del gender gap in matematica, ma che piuttosto vi sono molteplici e differenti fattori da considerare. Quelli sociali e culturali sono particolarmente importanti come, ad esempio, il livello di emancipazione della donna nella società. Gli stereotipi, legati alla storia e alla cultura della società e dello stesso nucleo familiare, sono un altro fattore importante perché hanno un impatto sull'approccio alla disciplina e sui fattori psicologici e metacognitivi. Questi fattori possono portare a un diverso approccio alla disciplina e influenzare anche il modo di affrontare una specifica consegna matematica.

Le differenze evidenziate in psicologia tra maschi e femmine, come una maggiore *math anxiety* e una minore fiducia nelle proprie capacità per le ragazze, accompagnate però da un maggiore controllo e disciplina, possono avere una notevole influenza sull'atteggiamento degli studenti in classe e sul rapporto che si instaura con l'insegnante e nei confronti della matematica. La consapevolezza della presenza di questo fenomeno, particolarmente marcato in Italia, può portare, gli insegnanti e gli educatori in generale, a riflettere sulle proprie convinzioni e sull'approccio alla disciplina. La collaborazione tra gli insegnanti e il mondo della ricerca in didattica può portare a individuare quali siano le difficoltà che ostacolano le ragazze in matematica e se queste siano legate a particolari contenuti o ad abilità trasversali. In questo modo sarà possibile elaborare una didattica mirata a superare tali difficoltà per chiudere il gap in matematica tra maschi e femmine.

# Napoli



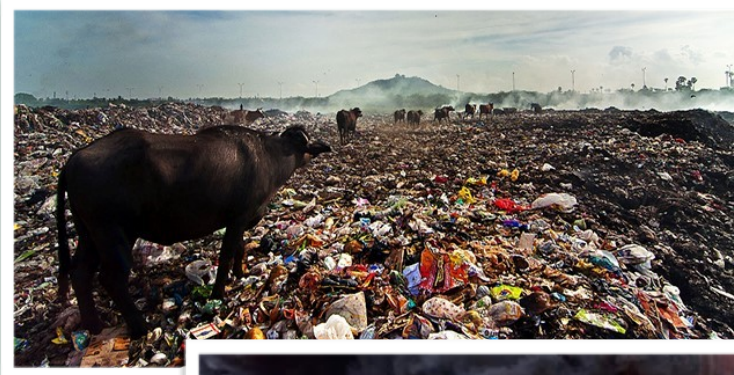
# Periferie urbane



# Campania felix



# La terra dei fuochi



La necessità di un cambiamento

# Informal mathematics education

(Nemirovsky, Kelton & Civil, 2017)

- ❖ La volontarietà di partecipazione;
- ❖ La fluidità dei confini tra discipline;
- ❖ L'assenza di forme tradizionali di valutazione

**“Informal mathematics education is an emerging field of learning with a unique potential to disseminate alternative images about the nature of mathematics and to realize the potential for everyone to engage with mathematics in creative and diverse ways.” (p. 975)**

# Il PoY progetto: il potenziale

Difficoltà  Risorse

Un progetto di educazione matematica informale, essendo orientato alla progettazione e alla creazione di spazi educativi in cui gli studenti partecipano volontariamente, obbliga gli educatori-progettisti e gli insegnanti a riflettere e a cercare il significato e l'accessibilità delle attività che offrono agli studenti.

Inoltre, il supporto organizzativo, scientifico ed economico generalmente offerto da tali progetti permette agli insegnanti di sperimentare nuovi approcci metodologici.



La scuola da sola non ce la fa!

## Alcune caratteristiche chiave della progettazione di Proud of You

- Fluidità dei confini disciplinari;
- Fluidità degli ambienti di apprendimento (le città come incredibili aula a cielo aperto);
- Attenzione al ruolo del corpo e degli artefatti nella progettazione
- Assenza di forme tradizionali di valutazione (documentazioni dell'apprendimento con strumenti di valutazione formativa, vedi ad es. esposizione matematica)
- Attenzione a lavorare esplicitamente sulle questioni di genere
- Attenzione all' intrecciare l'educazione matematica all'educazione alla cittadinanza

