



Argomentare e dimostrare in ambienti digitali

Maria Alessandra Mariotti  
Università di Siena

1

### Di cosa parleremo

- Sistemi di Geometria Dinamica come funzionano
  - Dipendenza tra movimenti.
  - Invarianti e relazioni tra invarianti: esempi

Potenzialità dei diversi tipi di compito in un AGD

costruire  
congetturare  
...

2

### Introduzione

"... the changes in the solving process brought by the dynamic possibilities of Cabri come from an **active** and **reasoning visualisation**, from what we call an interactive process between **inductive and deductive reasoning** "

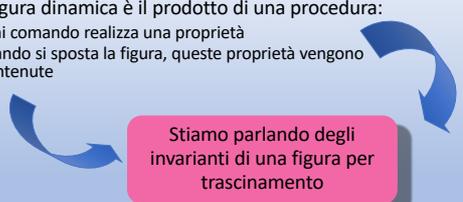
(Laborde & Laborde, 1991 p. 185)

3

### L'immagine non è solo un disegno

- Una figura dinamica è il prodotto di una procedura:
  - Ogni comando realizza una proprietà
  - Quando si sposta la figura, queste proprietà vengono mantenute

Stiamo parlando degli invarianti di una figura per trascinamento



4

### Invariant

A geometric property is an **invariant** satisfied by a variable object as soon as this object varies in a set of objects satisfying some common conditions

(Laborde, 2005, p. 22).

5

### Invariante

Una proprietà geometrica è un invariante soddisfatto da una variabile non appena questa varia in un insieme di oggetti che soddisfano alcune condizioni comuni

(Laborde, 2005, p. 22).

- La percezione di un invariante emerge per contrasto rispetto a tutto ciò che cambia ...



6

## Trascinamento e Invarianti

- Il **movimento di una figura** è percepito nel contrasto tra cosa varia e cosa resta invariato

### Invariante per trascinamento

Una costruzione provoca il fenomeno di

- **Mantenere le proprietà di costruzione**
- **Mantenere tutte le conseguenze di costruzione**



7

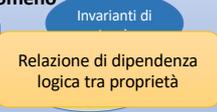
## Trascinamento e Invarianti

- Il **movimento di una figura** è percepito nel contrasto tra cosa varia e cosa resta invariato

### Invariante per trascinamento

Una costruzione provoca il fenomeno di

- **Ma Simultaneità degli invarianti**
- **Mantenere tutte le conseguenze di costruzione**



8

## Trascinamento e Invarianti

- Il **movimento di una figura** è percepito nel contrasto tra cosa varia e cosa resta invariato

Una costruzione provoca il fenomeno di

- **Ma Simultaneità degli invarianti**
- **Mantenere tutte le conseguenze di costruzione**

Complessità di mantenere il controllo

9

## Trascinamento e Invarianti

- Il **movimento di una figura** è percepito nel contrasto tra cosa varia e cosa resta invariato

Una costruzione provoca il fenomeno di

- **Ma Simultaneità degli invarianti**
- **Mantenere tutte le conseguenze di costruzione**

Difficoltà nel riconoscere la dipendenza logica

10

## Qualche risultato da un'indagine recente

Sequenza didattica sperimentale (studenti 13-14 anni)

### • l'obiettivo è duplice:

- (1) che gli studenti sviluppino una consapevolezza della dipendenza tra elementi delle figure dinamiche in GeoGebra;
- (2) che siano in grado di interpretare geometricamente la dipendenza della costruzione come dipendenza logica tra proprietà geometriche.

### • Compiti sulla dipendenza (Dependency task)

- Costruzione di una figura - lavoro a coppie;
- consegna: prevedi, giustifica, e verifica, spiega.

11

- Costruisci due punti A e B e il punto medio tra loro, C. Usa il comando "punto di mezzo".

- 1a) che cosa pensi che accada agli altri due punti se trascini il punto A? fai una previsione e giustifica condividendo con il tuo compagno.
- Verifica, dopo: cosa accade? Spiega.
- [...]
- Che cosa pensi che accada con gli altri punti quando trascini il punto C? fai una previsione e giustifica condividendo con il tuo compagno.
- Verifica, dopo: che cosa accade? Spiega.



12

### Jan & Dan

- Jan: Ok allora stiamo cercando di spostarlo. (*trascina A (Figure 1)*)



- Jan: Si muovono in parallelo (*gesto con la mano a indicare che A, B, C (o forse solo A and C) si muovono allineati, o lungo una traiettoria che li mantiene legati (Figure 2)*)



13

- Dan: Si muovono in parallelo, pensi che dovremmo scriverlo? (*aggiunge "parallelo" all'ipotesi*)

- Dan: Si muovono in parallelo, bene.

- [...]

- Jan: Basta scrivere che si muovono insieme ... O come lo chiami? (*gesti con la mano a indicare una linea retta*)

- Jan: Si muovono in/ su una linea retta.

- Dan: (*scrive e parla*) si muovono su una linea retta



14

### Cosa scrivono Jan & Dan

- Previsione

*Quando trascini A, si muoveranno lungo in*

*parallelo*

- Dopo la verifica

*Si muovono su una linea retta*.

- "*in parallelo*" è stato in effetti aggiunto alla loro risposta predittiva dopo l'indagine, il che significa che hanno rivisto la loro ipotesi in base all'indagine.

15

### La relazione di dipendenza non emerge

- Apprensione globale: i tre punti e il loro movimento sono percepiti come un sistema 'solidale'
- Non c'è consapevolezza del movimento di ciascun elemento e della relazione che li lega, tanto meno di una relazione geometrica

Quanto tutto questo è legato alle conoscenze disponibili?

alla formulazione generica del compito? Si chiede: «che cosa pensi che accada ...»

Un altro esempio: Ole & Sif

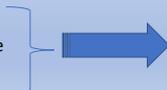
16

### Attività specifiche di 'familiarizzazione' ...

- Non basta 'spiegare' come funziona un AGD
- È importante sviluppare la *consapevolezza della dipendenza* tra elementi costruiti ...

#### Compiti e attività dedicate:

- Costruire,
- Prevedere e spiegare
- Verificare e spiegare



Discussione collettiva

17

### Movimento & Invarianti

L'analisi degli invarianti e delle loro relazioni portano a distinguere due tipi di problemi :

- costruire una data figura che resiste al trascinamento, ovvero le cui proprietà caratteristiche sono invarianti per trascinamento .

- produrre una congettura, ovvero data una certa configurazione formulare un enunciato che esprima la dipendenza logica tra proprietà riconoscibili per trascinamento in tale configurazione.

18

### Movimento & Invarianti

L'analisi degli invarianti e delle loro relazioni portano a distinguere due tipi di problemi :

- costruire una data figura che resiste al trascinamento.

• produrre una congettura, ovvero data una certa configurazione formulare un enunciato che esprima la dipendenza logica tra proprietà riconoscibili per trascinamento in tale configurazione.

19

### Costruzioni geometriche



20

### Disegno e costruzione

Disegnare una figura in un AGD evoca per l'esperto la nozione matematica di

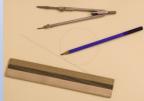
**Costruzione geometrica**

Nozione al cuore della Geometria classica, detta anche *La geometria della riga e del compasso*

21

### Costruzioni geometriche

Una costruzione geometrica si pone come un problema teorico quando la soluzione è prevista in uno specifico quadro assiomatico



strumenti pratici  
VS  
strumenti teorici

assioma: Per due punti passa uno e uno a destra

L'uso della riga e del compasso genera un insieme di assiomi che definiscono un sistema teorico (Elementi di Euclide)

22

### Costruzione Geometrica

- Consiste in
  - stabilire gli **strumenti**,
  - compiere con tali strumenti una serie di **azioni**,
 con obiettivo il produrre un disegno;
- la costruzione è da considerarsi **valida** se la rispettato l'uso **'corretto'** degli strumenti

Strumenti e  
Regole di azione

Costruzione

23

### Costruzione Geometrica

- Consiste in
  - stabilire gli **strumenti**,
  - compiere con tali strumenti una serie di **azioni**,
 con obiettivo il produrre un disegno;
- la costruzione è da considerarsi **valida** se la rispettato l'uso **'corretto'** degli strumenti

Assiomi

Teorema

24

### Costruzioni in AGD

- La figura dinamica possiede una logica interna, resa evidente dal trascinamento che conserva le relazioni geometriche definite dalla procedura di costruzione e da queste derivate.

In seguito al trascinamento, è possibile sollevare il problema del

*Un criterio di accettabilità*

25

### Esempio: La costruzione della bisettrice

26

### La costruzione della bisettrice

"Usa i comandi disponibili per costruire la bisettrice di un angolo. Descrivere e giustificare geometricamente la costruzione effettuata"

Ci aspettiamo:

- Una descrizione verbale della procedura basata sui comandi utilizzati, accompagnata da un disegno o stampa di ciò che appare sullo schermo.
- Un argomento che giustifichi la 'correttezza' del procedimento.

27

Dimostrare che la bisettrice di un angolo per costruzione, è bisettrice per criterio di uguaglianza.

AB = AC per l'incirconfenza.  
AO è in comune.  
OB = OC per l'incirconfenza centro in O e B.  
I due triangoli sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza. (ABO = AOC)  
e gli angoli opposti sono uguali.  
perciò  $\angle OAC = \angle OAB$ .  
AO è bisettrice di BAC come si voleva dimostrare.

28

Massimiliano 1 Liceo scientifico

Dimostrare che la bisettrice di un angolo per costruzione, è bisettrice per criterio di uguaglianza

AB = AC per circonferenza  
AO in comune  
OB = OC per circonferenza centro in C e B

I due triangoli sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza  
(ABO = AOC)

A lati uguali stanno opposti angoli uguali e perciò  $\angle OAC = \angle OAB$

AO ... è bisettrice di BAC come si voleva dimostrare.

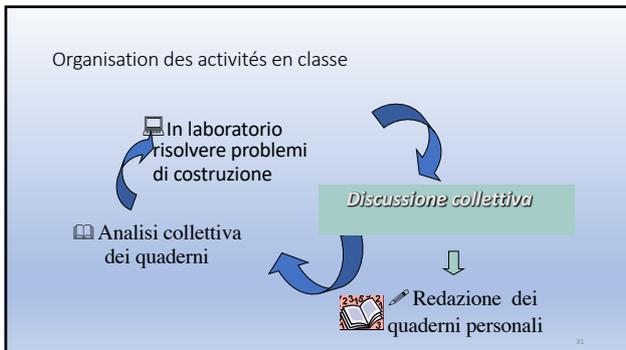
29

### La dimostrazione prende significato ...

Ci aspettiamo che

- un primo significato di **dimostrazione** possa emergere in relazione alle giustificazioni di costruzioni secondo regole precise di costruibilità.
- Questo significato apre la strada ad una concezione più ampia di giustificazione relativa a un sistema condiviso di principi, introducendo al **significato teorico di dimostrazione**.

30



31

Discussione collettiva  
La rivisitazione del quaderno

- Un duplice obiettivo
  - mettere in ordine la sequenza di assiomi, teoremi e definizioni introdotta fino a quel momento,
  - riflettere sullo statuto teorico di ciascun elemento della sequenza.

32

Come conclusione

Stef

... Siamo passati ad esaminare la dimostrazione della bisettrice, un nostro compagno ha affermato che la bisettrice poteva essere dimostrata anche col triangolo isoscele ma per farlo avremmo dovuto avere l'ultimo teorema sulla perpendicolare. Dicendo che avendo il teorema non lo potevamo usare non significa che siamo matti ma semplicemente che quando abbiamo iniziato non lo avevamo e che i nostri mezzi per la dimostrazione erano minori.

33

Movimento & Invarianti

L'analisi degli invarianti e delle loro relazioni portano a distinguere due tipi di problemi :

- costruire una data figura che resiste al trascinamento.
- produrre una congettura, ovvero data una certa configurazione formulare un enunciato che esprima la dipendenza logica tra proprietà riconoscibili per trascinamento in tale configurazione.

34

Congetturare in un ambiente di geometria dinamica

35

Congetturare : argomentare e 'dimostrare' ...

- Probemi aperti  
(Boero, ... Hadas et al.)

In particolare in un AGD

- Strategie (Schemi) di trascinamento  
(Arzarello et al., 1998; Olivero, 2002; ...)

36

### Problemi aperti di congettura

- Una consegna che pone una domanda senza rivelare o suggerire una risposta attesa, che richieda esplicitamente una congettura e la sua prova ...

*Problema aperto di Congettura*

37

### Congetture in un AGD

- **esplorare una costruzione robusta**

Porta a "scoprire" conseguenze di un'ipotesi o definizione costruita in modo robusto.

Per esempio: dato un quadrilatero cosa si può dire del quadrilatero che ha come vertici i suoi punti medi?

- **esplorare una costruzione molle:**

Porta a "scoprire" ipotesi o condizioni sotto cui si verificano determinate conseguenze.

Per esempio: dato un quadrilatero costruire i punti medi delle diagonali, M e N. Sotto quali condizioni M coincide con N?

38

### Trascinamento e Congetture

La produzione di una congettura si basa sull'esplorazione mediante trascinamento

l'efficacia di una esplorazione è legata alla capacità di **interpretare invarianti e relazioni tra invarianti** ...

di trasformare dati percettivi in una **relazione condizionale** tra proprietà geometriche

39

### Problemi di congettura Consideriamo due esempi

40

### Congetture in un ADG: costruzione robusta

Sia dato un quadrilatero ABCD e siano E, F, G e H rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.

Cosa posso dire del quadrilatero EFGH?

41

### Congetture in un AGD: Costruzione molle

Dato un quadrilatero costruire i punti medi delle diagonali, M e N.

Sono possibili varie domande ...

- **Portare M ed N a coincidere**, cosa posso dire del quadrilatero?

- **Sotto quali condizioni** M coincide con N?

42

## Congetture in un AGD: Costruzione molle

Dato un quadrilatero costruire gli assi dei suoi lati, siano MNRQ i punti di intersezione.

Sono possibili varie domande ...

- Portare M, N, R e Q a coincidere, cosa posso dire del quadrilatero?
- Sotto quali condizioni M, N, R, Q coincidono?



43

## Modalità di Trascinamento

Studi sul trascinamento (Arzarello, Olivero, Robutti, Paola,...)

Le modalità utilizzate dagli allievi (e osservate dai ricercatori) nella soluzione di problemi aperti, in particolare di problemi aperti di congettura ...

44

## Modalità di Trascinamento

**Wandering dragging**, moving the basic points on the screen randomly, without any plan, in order to discover regularities in the figures;

**Guided dragging**, dragging the basic points of a figure in order to maintain a particular property;

**Lieu muet dragging**, moving a basic point so that the figure keeps a property following a 'hidden' path (*lieu muet*);

**Lieu parlante dragging**, moving a basic point activating the trace so that the figure keeps a discovered property following a 'hidden' path, even without being aware of this;

Olivero 2002

45

## Modalità di Trascinamento e l'enunciato condizionale

Wandering	Dragging di un punto • Identificare regolarità • Evidenziare oggetti dipendenti
Lieu muet	Dragging di un punto • Mantenere regolarità • Evidenziare relazioni ...
Lieu parlante	Dragging di un punto + Traccia • Mantenere regolarità (Ogget. dipendenti) • Interpretare la Traccia (Ogget. Indipend.)

46

## Modalità di Trascinamento e l'enunciato condizionale

Wandering	Dragging di un p • Identificare reg • Evidenziare oggetti dipendenti	In cerca della <b>Tesi</b>
Lieu muet	Dragging di un p • Mantenere reg • Evidenziare relazioni ...	Si fissa la <b>Tesi</b> Si cerca le <b>Ipotesi</b>
Lieu parlante	Dragging di un p • Mantenere reg • Interpretare la	Si fissa la <b>Tesi</b> Si evidenzia le <b>Ipotesi</b>

47

## Un intervento didattico

### Obiettivo:

- Favorire l'uso di **scemi di trascinamento** nella produzione di congetture e nella costruzione della dimostrazione ...

### Scelte didattiche:

- Introduzione degli allievi all'uso di particolari scemi di trascinamento
- soluzioni di **problemi aperti di congettura**,

48

## Un intervento didattico

### Obiettivo:

- Favorire l'uso di **schemi di trascinamento** nella produzione di congetture e nella costruzione della dimostrazione ...

### Scelte didattiche:

- Introduzione degli allievi all'uso del trascinamento
- soluzioni di **problemi aperti di costruzione**

Trascinamento di mantenimento

49

## Trascinamento di mantenimento

- Trascinare un punto base in modo che la figura dinamica mantenga una certa proprietà
- Eventualmente attivare la 'traccia' durante il trascinamento di mantenimento.

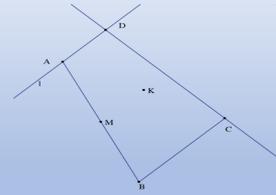
50

## Un esempio da una sperimentazione

51

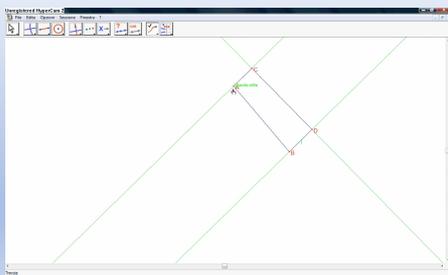
## Esempio

Consegna: disegnare tre punti A, M, K costruire il punto B come simmetrico di A rispetto a M e C come simmetrico di A rispetto a K. Costruire la retta l parallela a BC per A e la retta perpendicolare a l per C, sia D il punto di intersezione tra queste rette. Al variare dei punti A, M, K fare congetture sui tipi di quadrilatero che ABCD può diventare



52

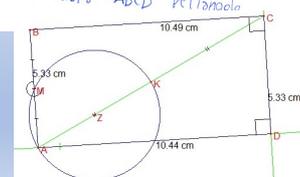
## L'esplorazione di Fabio & Guido



53

## La formulazione dell'enunciato

Se  $M \in$  alla circonferenza di centro  $Z$  (punto medio  $AK$ ) e raggio  $AZ$  allora  $ABCD$  rettangolo



54

## Figure impossibili, argomenti indiretti e ... dimostrazione per assurdo

55

## Dare significato matematico all'assurdo

Se queste prove indirette sono incoraggiate ed elaborate in modo informale, quando gli studenti studiano l'argomento in modo più formale, gli insegnanti saranno in grado di sviluppare connessioni tra questo linguaggio informale e la struttura più formale delle prove indirette.

(Thompson, 1996, p. 480)

56

## Un problema aperto la costruzione

### Il compito

È possibile costruire un triangolo con due bisettrici perpendicolari?

Se si, fornire i passaggi di una costruzione.

Se no, spiegare perché.

57

## Costruzioni impossibili

- In un AGD si possono costruire solo figure 'corrette'
- Cosa succede se le proprietà richieste non sono compatibili?

58

## Il caso di Stefano e Giulio

1 Stefano: No, l'unico modo è avere angoli di 90 gradi... [non è chiaro quali siano gli angoli perché non stava costruendo la figura o guardando lo schermo]

2 Giulio: È un po' difficile per un triangolo! [ride] Così... devono essere...

3 Stefano : Se i triangoli hanno 4 angoli

4 Giulio : No, stavo per dire qualcosa di stupido

*Giulio inizia a costruire due rette perpendicolari*

59

## In un ambiente di Geometria Dinamica

- 5 Stefano : Sì, sono bisettrici, non è vero?
- 6 Int : Oui.
- 7 Giulio: Quindi ora dobbiamo ottenere ... bisettrici... come possiamo avere un angolo rispetto alle bisettrici?
- 8 Giulio : l'immagine simmetrica? ... Basta farne la simmetria.



60

### Les argument sur un figure robuste

14 Stefano: No, abbiamo dimostrato che questo è uguale a questo [indica gli angoli], e questo è uguale a quello perché sono bisettrici ... questi due sono uguali quindi sono paralleli.



15 Stefano: Questi due [riferendosi alle due linee parallele] hanno un foro quindi non è un triangolo.

61

### Les argument sur un figure robuste

14 Stefano: No, abbiamo dimostrato che questo è uguale a questo [indica gli angoli], e questo è uguale a quello perché sono bisettrici ... questi due sono uguali quindi sono paralleli.

Questa immagine è costruita per essere un triangolo, ma allo stesso tempo è un quadrilatero, e dunque non è un triangolo

15 Stefano: Questi due [riferendosi alle due linee parallele] hanno un foro quindi non è un triangolo.

Questa figura per sua natura permette di attraversare il divario tra la premessa e l'assurdo



62

### In un AGD: problemi aperti di costruzioni impossibili

Le potenzialità didattiche legate a compiti di

**costruzione di figure geometricamente impossibili**

63

### Problemi didattici sollevati da un AGD

- Come affrontare la complessità del controllo della dipendenza logica nel trascinamento?
- Come sfruttare le potenzialità del problem di costruzione?
- Come guidare l'appropriazione dello strumento di trascinamento per risolvere problemi aperti di congettura?
- Come sfruttare la ricchezza di significati matematici offerti dall'uso del trascinamento in problemi aperti di congettura?

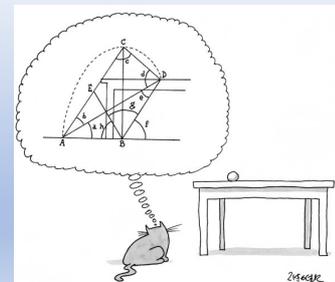
64

### Conclusioni

- Necessità di una organizzazione didattica specifica:
  - Lavorare sulla consapevolezza
  - La 'costruzione geometrica' come problema teorico
  - Sfruttare il potenziale del trascinamento rispetto al processo di produzione di una congettura.
  - Introduzione intenzionale di schemi d'uso di esplorazione
  - ...

65

Grazie!



66