Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica

Unione Matematica Italiana

UMI - CIIM
UNIONE MATEMATICA ITALIANA
COMMISSIONE ITALIANA PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

L'infinito entra in classe: riflessioni didattiche e esperienze pratiche

Silvia Beltramino, Liceo Scientifico “Maria Curie” di Pinerolo (TO)

- Premessa
- Attività 1: le lunule
- Attività 2: triangoli e fiocchi

* Discuteremo su
  * aspetti didattici
  * utilizzo di strumenti
  * sensate esperienze
  * necessarie dimostrazioni
  * linguaggio

Gruppo di ricerca in
didattica della
Matematica
Torino

Liceo Matematico

Proposte

Esperienze sensate per manipolare l'infinto

Alcuni approcci possibili per avvicinarci al metodo di esaustione.

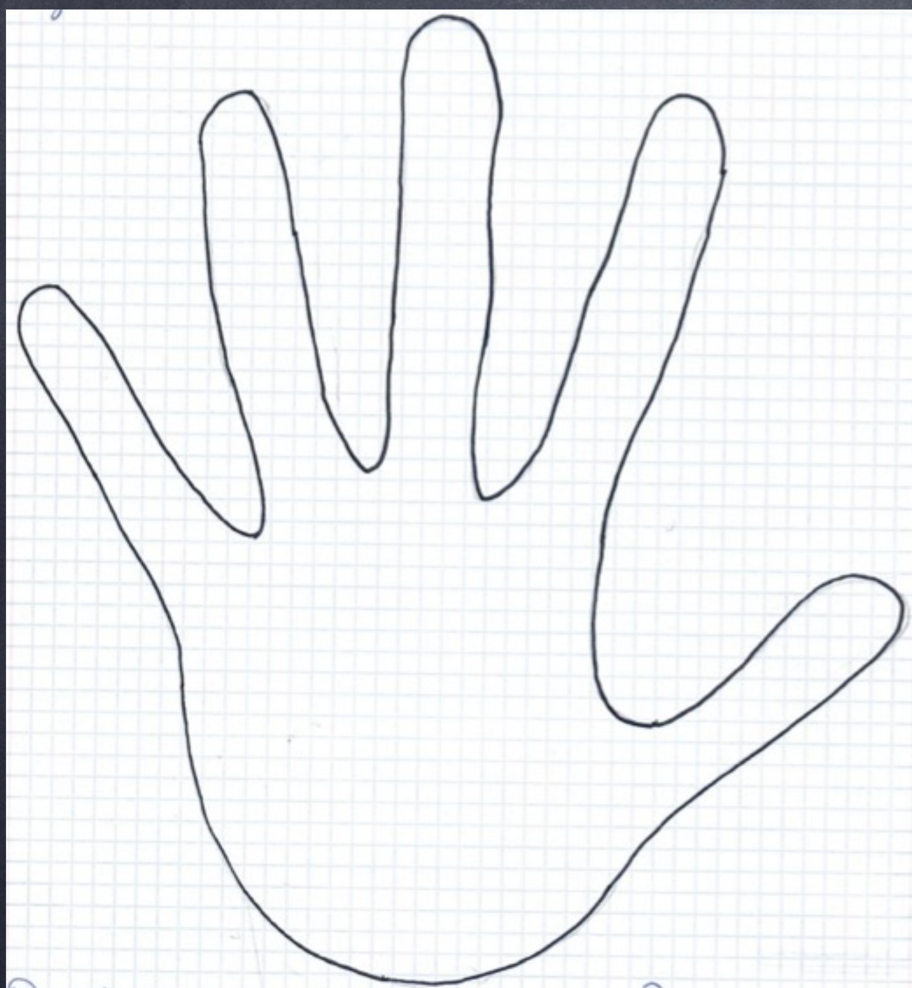
Zanichelli - Laboratorio di fisica

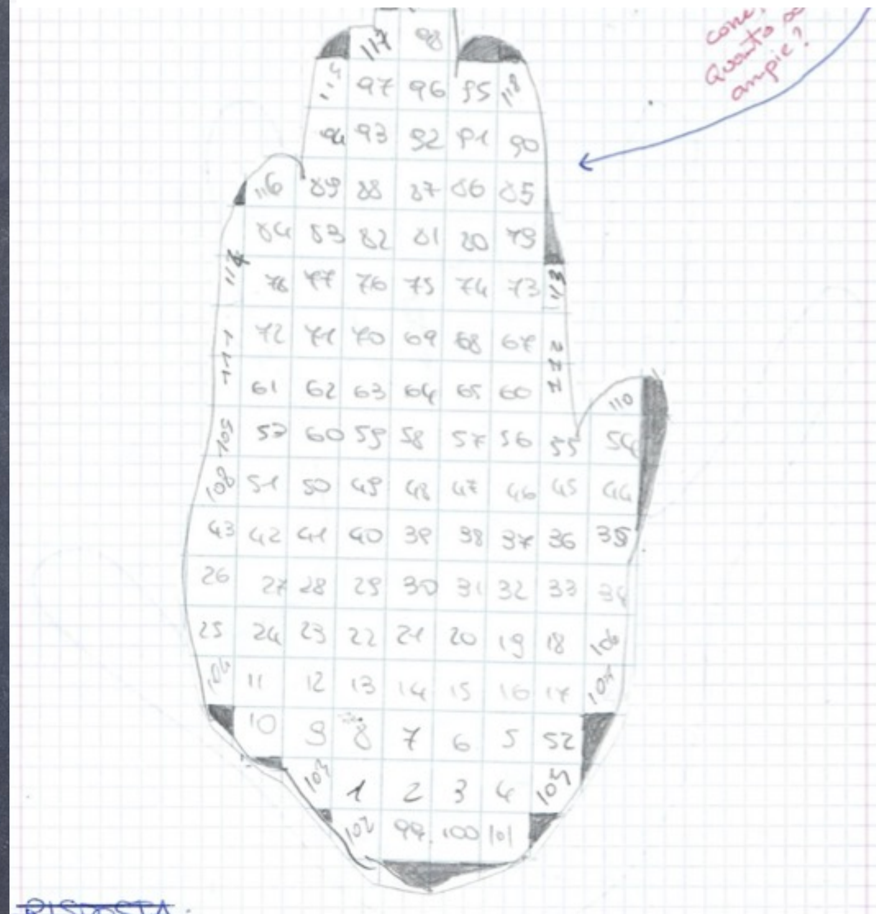
Quanto misura l'area di una mano di una ragazza o un ragazzo di media altezza?

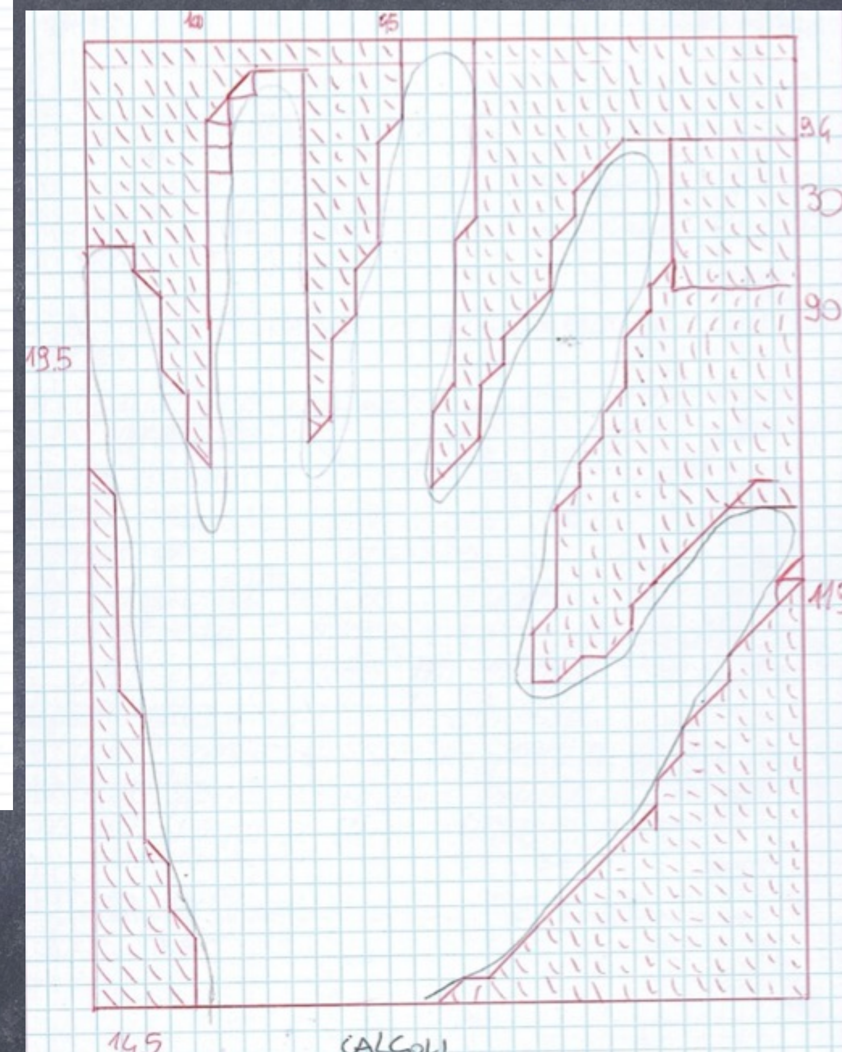
Un tema che penso si dovrebbe introdurre presto, e in termini abbastanza generali è quello dell'**area**; il metodo può essere quello di **Peano-Jordan**, basato sulle quadrettature del piano. Penso che di questo passo avanti si senta particolarmente bisogno nell'insegnamento secondario: non è più possibile limitarsi all'area dei poligoni e a quella del cerchio, oltretutto con traballanti ragionamenti che fanno appello - a ragione o a torto - alla sola proporzionalità. Con la stessa fatica è possibile svolgere una teoria molto più vasta ed elegante.

Giovanni Prodi - Relazione tenuta al Convegno in memoria di Modesto Dedò, Milano, 16 dicembre 1991 e pubblicata su IMSI Vol.16 N. 5-6, 1993

Abbiamo disegnato una mano chiusa su un foglio con i quadretti di un centimetro e gli abbiamo contati e le parti rimanenti le abbiamo sommate







Per calcolare l'area di una mano abbiamo disegnato la mano di Matteo Sardo, e un quadrato attorno ad essa.

Dopo abbiamo calcolato l'area del quadrato, e poi l'area attorno alla mano.
Poi le abbiamo sottratte, per ottenere così l'area della mano ✓

Per misurare l'area di una mano abbiamo preso un foglio di carta millimetrata e ci abbiamo disegnato il contorno di una mano. Abbiamo scelto di fare lo stampo della mano di Dora perché tra le grandezze delle nostre mani la sua era quella intermedia, che potrebbe rappresentare la media.
Abbiamo disegnato la mano aperta perché ci è venuto d'istinto posizionare la mano aperta.
In seguito abbiamo disegnato un rettangolo intorno alla mano, e ne abbiamo calcolato l'area.
Abbiamo suddiviso la parte interna al rettangolo ed esterna alla mano in quadrati, rettangoli e triangoli, di cui abbiamo calcolato l'area, * che abbiamo sottratto dall'area totale del rettangolo. *

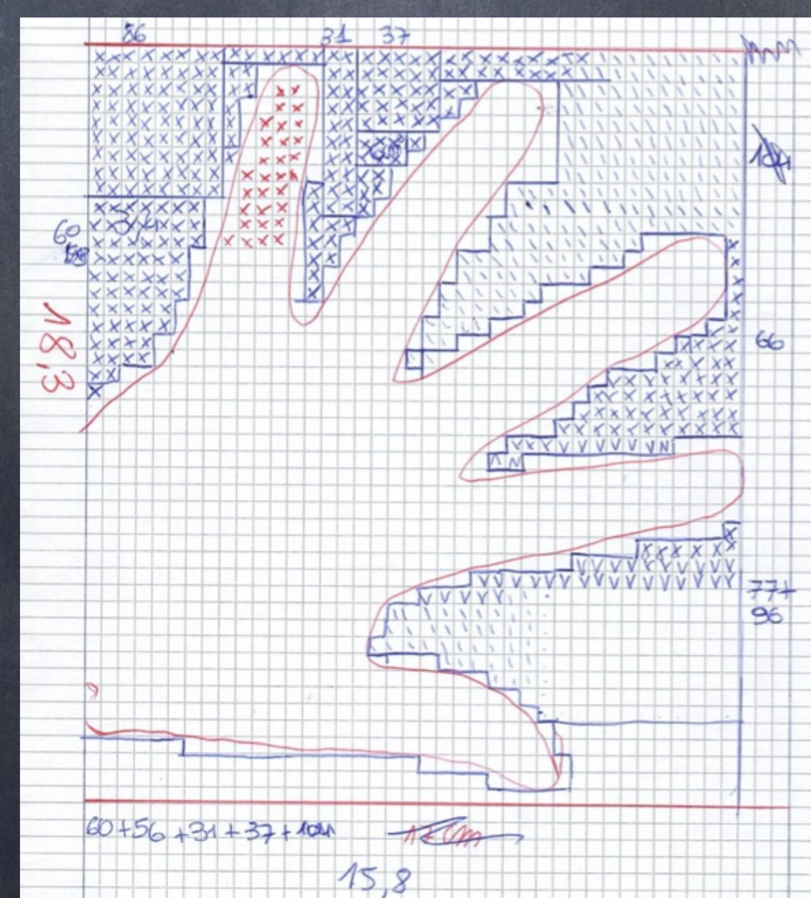
* Facendo così siamo riuscite ad ottenere delle figure interne più regolari e più semplici da calcolare.

- Secondo noi il nostro metodo è un po' approssimativo perché non siamo riuscite a calcolare perfettamente tutti i millimetri, e perciò esistono modi più precisi.

Campione: mano di Fabio Tron, alto 1,73 metri

Svolgimento:

Per calcolare l'area della mano abbiamo fatto il calco della mano su un foglio a quadretti, e successivamente abbiamo diviso la mano in varie parti, suddivise a loro volta in figure geometriche. Per ogni figura geometrica abbiamo calcolato l'area, per poi, alla fine, sommare tutte le aree per trovare l'area totale della mano.
Abbiamo preso in esame Fabio Tron perché era l'unico componente del gruppo a sapere esattamente la sua altezza.
L'area della mano misura 136,77 cm².

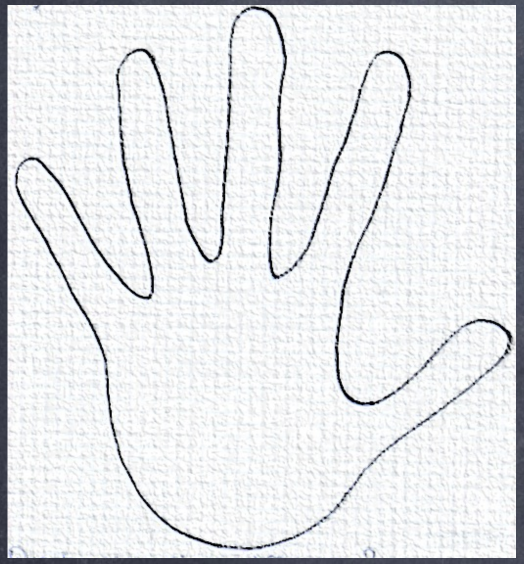


VALORE PRECISO?

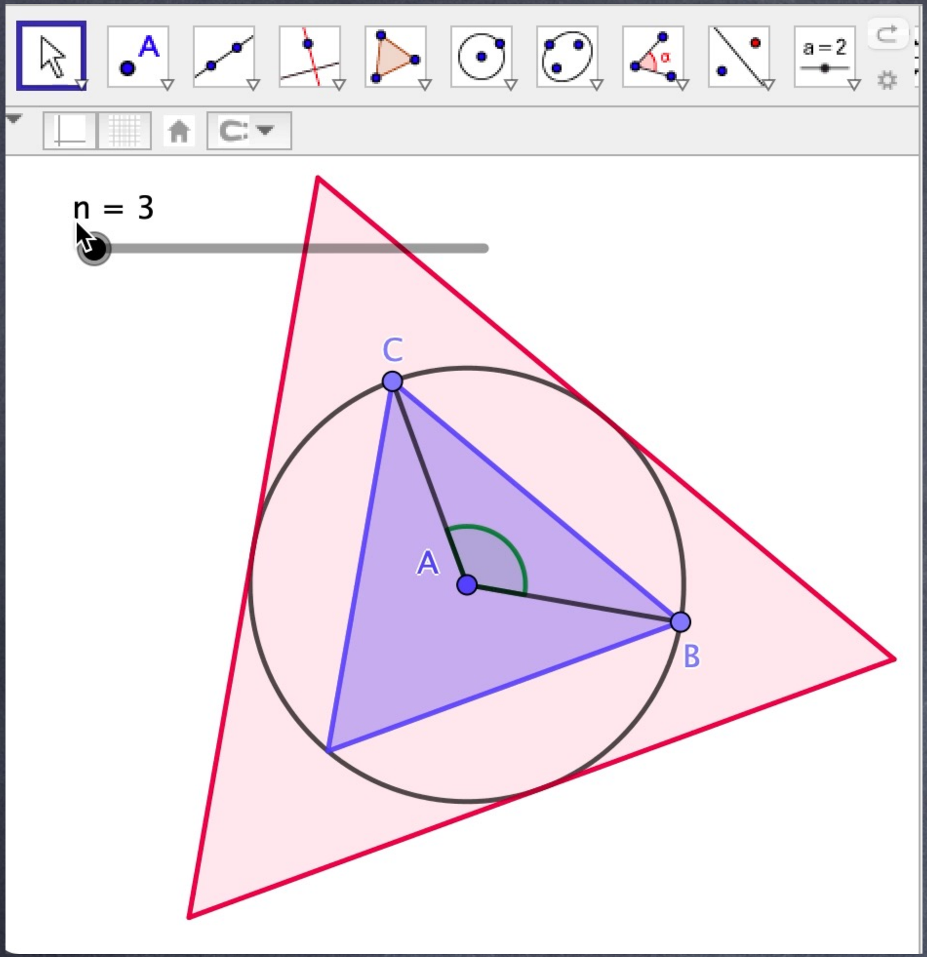
Area approssimante per difetto e per eccesso

Quadratini più piccoli

Confronto tra masse



- Misura come multiplo: Misura di A come multiplo della grandezza U, fissata come unità di misura. Rapporto A : U (Euclide)
- Proprietà additiva finita della misura
- Approssimazioni successive (Archimede)
- $\mu_*(A) \leq \mu(A) \leq \mu^*(A)$



Apri GeoGebra e disegna un cerchio *c* di raggio 1 e centro A.
Segna un punto B sulla circonferenza e crea uno slider *n* da 3 a 20 con passo 1.
Disegna il poligono inscritto e quello circoscritto a *c* con *n* lati.

- Quanto misura l'angolo BAC? Come esprimi la misura dell'angolo in funzione di n?
- Quanto misura il lato BC? Come esprimi la sua misura in funzione di n?
- Qual è l'area di ABC?
- Cosa succede al variare di n?

Grafici

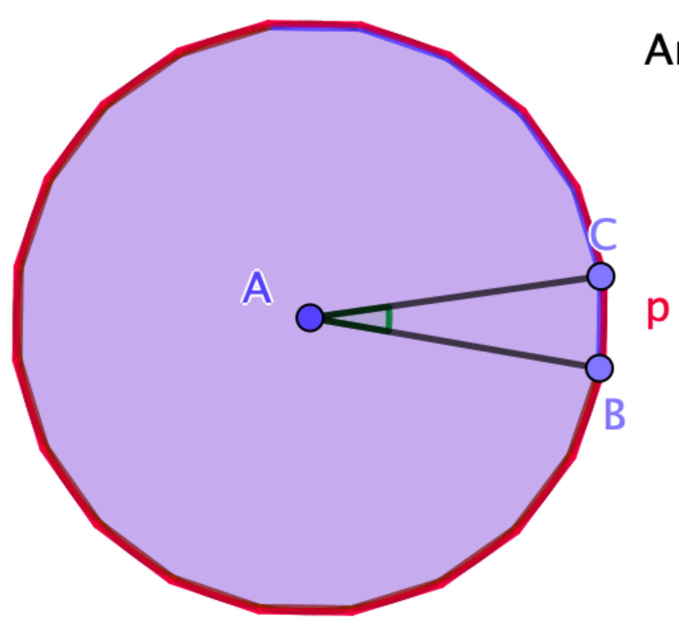
n = 20

Perimetro poli2: 6.34

Area poli2: 3.17

Perimetro poli1: 6.26

Area poli1: 3.09



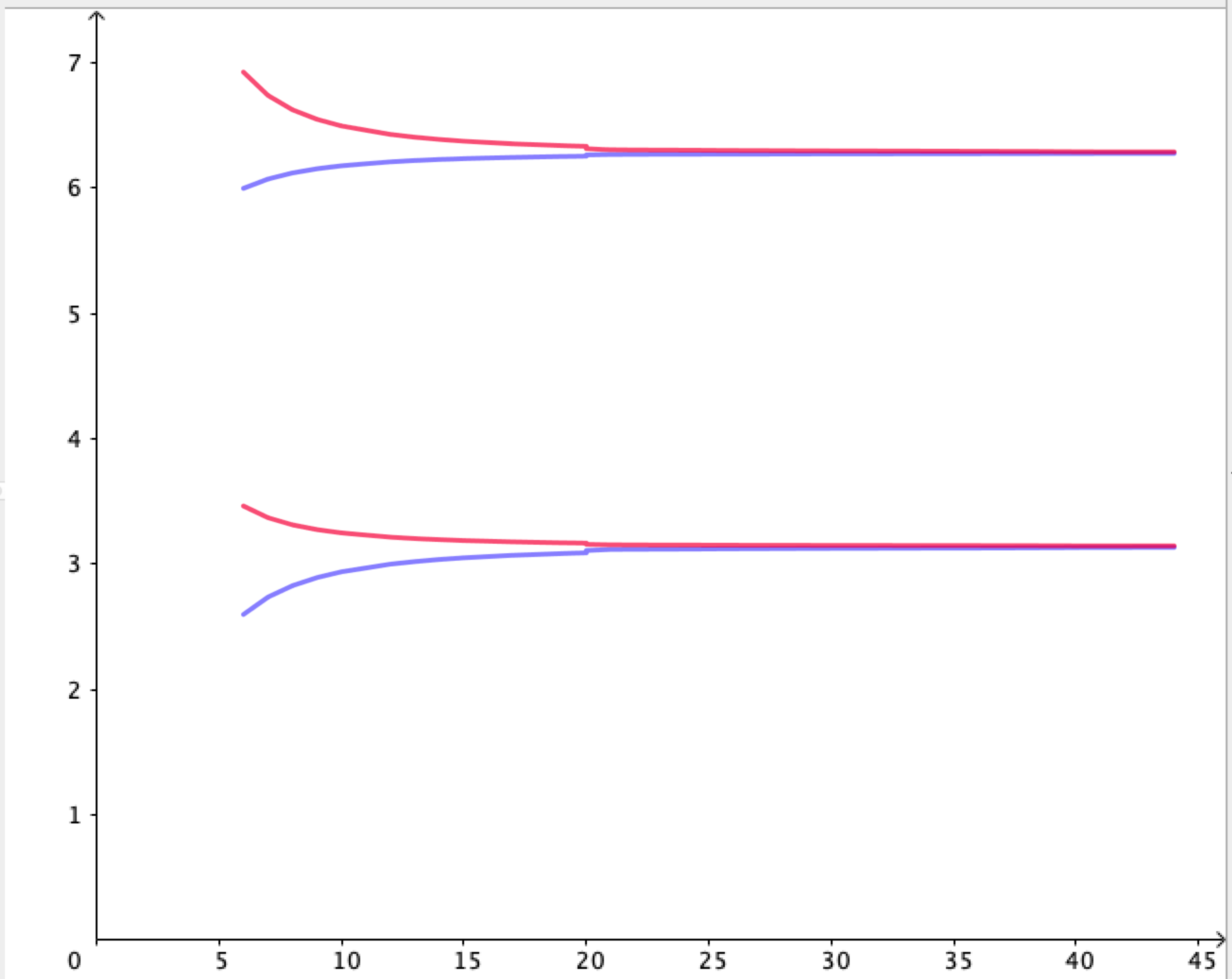
Foglio di calcolo

	A	B	C
1	n	poli1	Peri1
2	6	2.6	6
3	7	2.74	6.07
4	8	2.83	6.12
5	9	2.89	6.16
6	10	2.94	6.18
7	12	3	6.21
8	13	3.02	6.22
9	14	3.04	6.23
10	15	3.05	6.24
11	17	3.07	6.25
12	19	3.08	6.25
13	20	3.09	6.26
14			
15			
16			

Foglio di calcolo

	A	B	C	D
1	n	poli1	Peri1	poli2
2	6	2.6	6	3.46
3	7	2.74	6.07	3.37
4	8	2.83	6.12	3.31
5	9	2.89	6.16	3.28
6	10	2.94	6.18	3.25
7	12	3	6.21	3.22
8	13	3.02	6.22	3.2
9	14	3.04	6.23	3.2
10	15	3.05	6.24	3.19
11	17	3.07	6.25	3.18
12	19	3.08	6.25	3.17
13	20	3.09	6.26	3.17
14	20	3.09	6.26	3.17
15	20	3.09	6.26	3.17
16	20	3.09	6.26	3.17
17	20	3.09	6.26	3.17
18	20	3.09	6.26	3.17

Grafici 2



- Asintoti
- Infinito
- Sempre più piccolo
- Sempre più grande
- Confronto tra velocità di crescita

$$0,\overline{9} = ?$$

Quanti studenti, anche tra quelli che conoscono la definizione di limite, dicono essere 1? Perché?

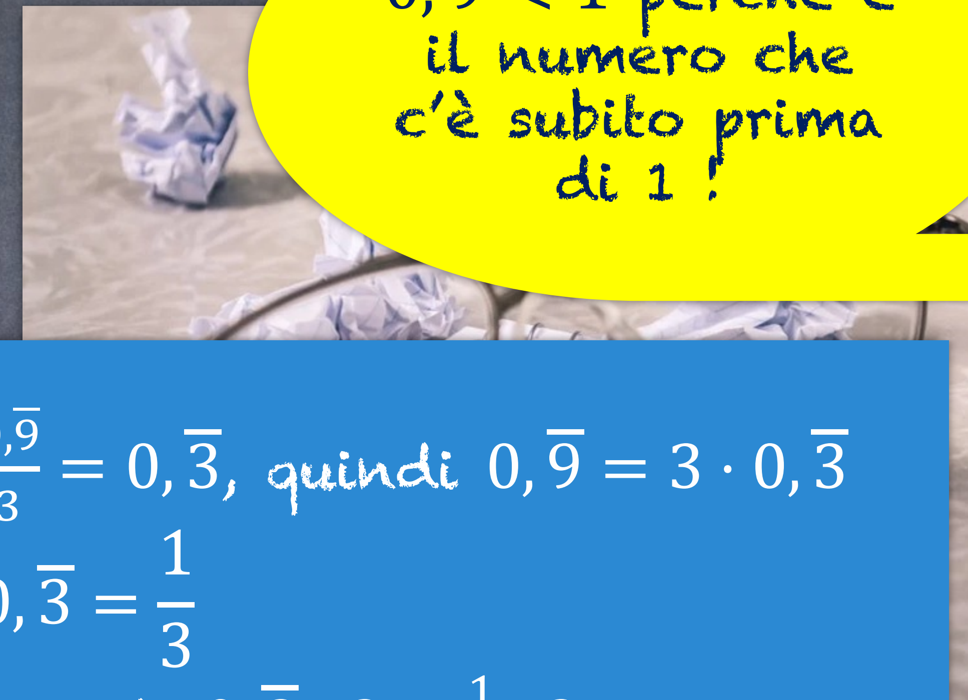
David Tall

Matteo: immaginiamo di avere 0,99…9 (tutti i 9 del mondo… mettiamo sempre un 9 ok?), Bene, qualsiasi sia il numero di cifre 9, il numero prima di uno sarà sempre uguale a zero zero… e poi quell'uno…. Mmmmh… Uffa! non so come si possa scrivere, ma fra 0,9 periodico e 1 ci saranno infiniti numeri, secondo me

Martina: No perché 0,9 periodico è il numero subito prima di 1

Matteo: Non c'è, non può esserci! C'è un numero precedente ma non possiamo sapere qual è, perché lavorando nei numeri reali sappiamo che esiste sempre almeno un numero tra due numeri.

Stefania: non puoi contare! È questo il punto! Scrivendo così non possono essere infinite le cifre, tu le copri già tutte, non esiste una cifra più grande di 9, tu scrivi 0,9999999, dopo quel periodico che è infinito c'è per forza l'uno. Secondo me tra 0,9 periodico e 1 ci sono infiniti numeri ma allo stesso tempo non ci sono



$0,\overline{9} < 1$ perché è il numero che c'è subito prima di 1 !

$\frac{0,\overline{9}}{3} = 0,\overline{3}$, quindi $0,\overline{9} = 3 \cdot 0,\overline{3}$

$0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

Quindi $0,\overline{3} \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3$

Ma come è possibile?

di limite,

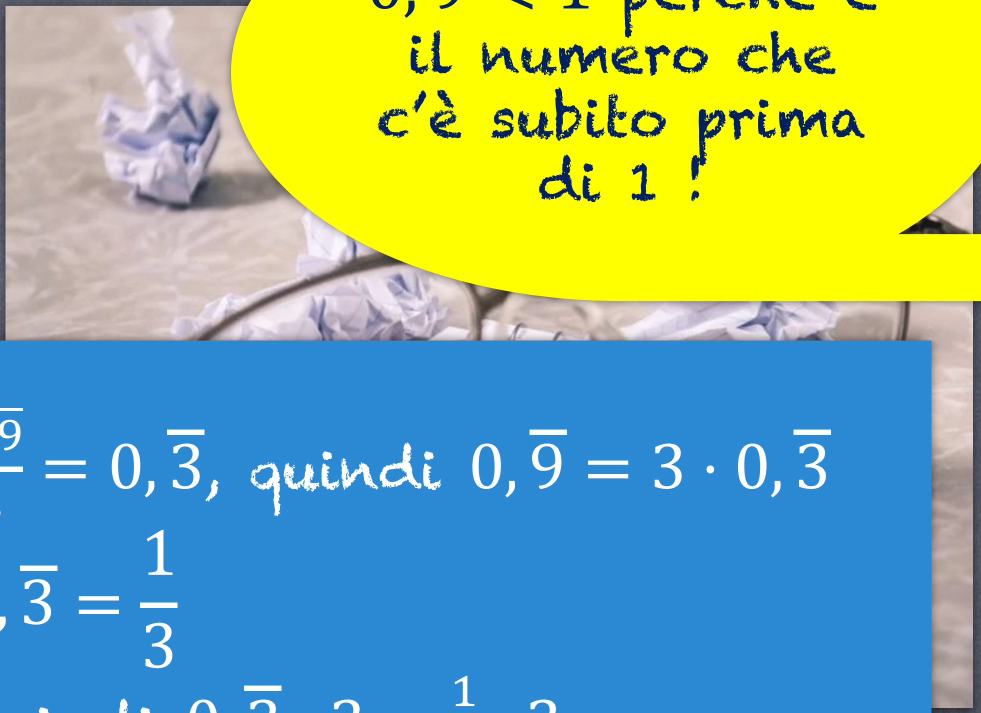
David Tall

Matteo: immaginiamo di avere 0,99…9 (tutti i 9 del mondo… mettiamo sempre un 9 ok?), Bene, qualsiasi sia il numero di cifre 9, il numero prima di uno sarà sempre uguale a zero zero… e poi quell'uno…. Mmmmh… Uffa! non so come si possa scrivere, ma fra 0,9 periodico e 1 ci saranno infiniti numeri, secondo me

Martina: No perché 0,9 periodico è il numero subito prima di 1

Matteo: Non c'è, non può esserci! C'è un numero precedente ma non possiamo sapere qual è, perché lavorando nei numeri reali sappiamo che esiste sempre almeno un numero tra due numeri.

Stefania: non puoi conte
Scrivendo così non poss
cifre, tu le copri già tut
più grande di 9, tu scri
periodico che è infinito
Secondo me tra 0,9 peri
numeri ma allo stesso t



$0,\overline{9} < 1$ perché è il numero che c'è subito prima di 1 !

$\frac{0,\overline{9}}{3} = 0,\overline{3}$, quindi $0,\overline{9} = 3 \cdot 0,\overline{3}$

$0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

Quindi $0,\overline{3} \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3$

Ma come è possibile?

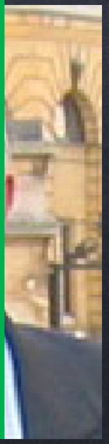
Marco: è un trip mentale!

Docente: E quindi?

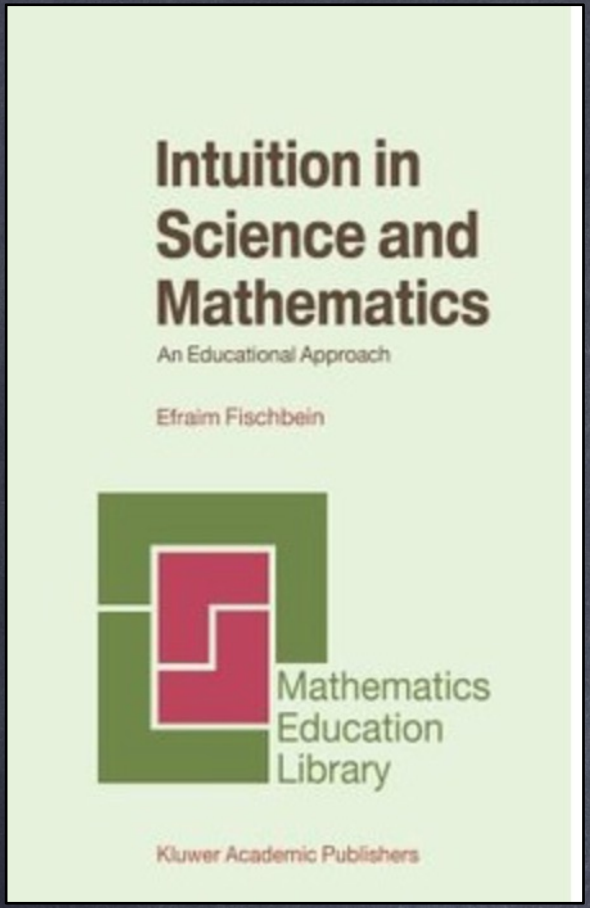
Marco: E quindi io mi rifiuto di accettare sia così!

Francesco: Matematicamente è vero ma logicamente no.

Caterina: il fatto che ci sia quel periodico è per segnare che quello lì è infinito… però poi concettualmente…te come puoi disegnare l'infinito? Non puoi e quindi non ti piace tanto.



- 0,99...9 (con numero finito di 9) e la sua estensione infinita
- Idee infinitesimali (la differenza tra i due numeri è infinitamente piccola, il numero subito prima...)
- Sconcerto anche quando la risposta sembra "semplice" (è un trip mentale, non riesci a disegnare l'infinito, Matematicamente è vero ma logicamente no)



Spesso [...] le idee sbagliate [...] sorgono da un'incompatibilità tra una proprietà formale del sistema modellato e una proprietà intuitiva della rappresentazione modellistica, che guida consapevolmente o tacitamente i processi cognitivi. (p. 143)

E. Fischbein (1920-1998)

Per costruite una lunula si seguono le seguenti istruzioni:

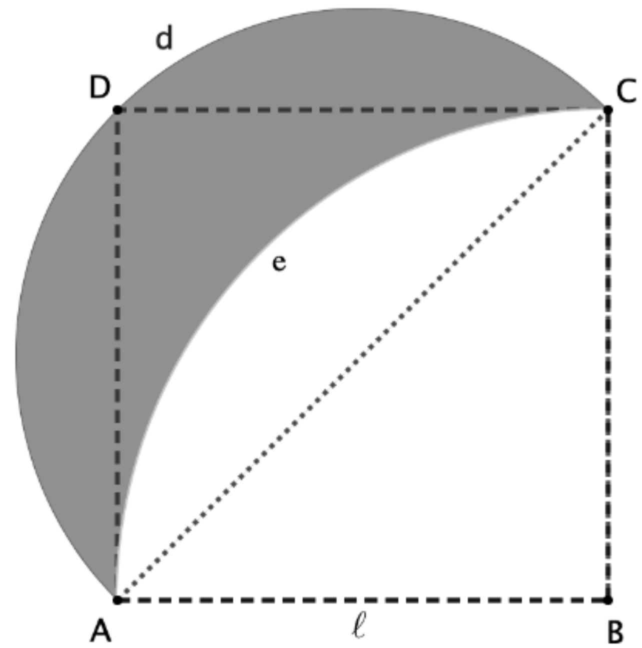
Si disegna un quadrato ABCD di lato *l* e diagonale AC

Si traccia l'arco di circonferenza e avente centro in B e raggio AB, che misura l.

L'arco di circonferenza e coincide con ¼ della circonferenza di centro B e raggio *l*

Si traccia la semicirconferenza d di diametro AC

La lunula è la parte di piano compresa tra i due archi di circonferenze, la figura colorata in figura



Disegnate voi una lunula partendo da un quadrato di lato *l*.

Quanto misura il perimetro della lunula così creata? E la sua area?

Cosa succede se varia il valore di *l*?

Laboratorio:

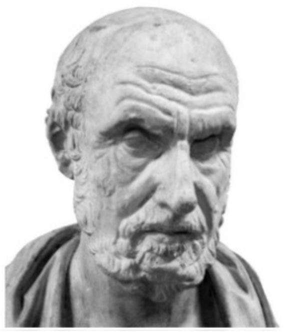
- Utilizzereste questa attività in classe? Se sì, quando?
- Come si potrebbe proseguire?
- Quali prerequisiti?
- Quali potrebbero essere gli obiettivi didattici?
- E l'infinito? Dove si può vedere?

IPPOCRATE E LE LUNULE - INTERVISTIAMO IPPOCRATE

- Storia della matematica
- Comunicazione scientifica
- Filosofia

POSTER SCIENTIFICI

Ciao Ippocrate, chi sei?

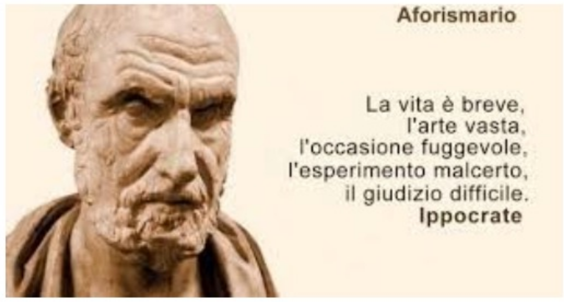


Ciao! Io sono stato un **medico**, geografo e aforista greco antico, sono vissuto tra il **460 a.C** e il **377 a.C.**, e sono considerato il **padre della medicina** questo perché ho rivoluzionato il concetto di medicina, stabilendo quest'ultima come professione. In particolare, ho il merito di far avanzare lo studio sistematico della medicina clinica, riassumendo le conoscenze mediche delle scuole precedenti.

Mio padre è Eraclide e mia madre Fenarete, io provengo da una famiglia aristocratica con interessi medici. Mio padre, egli stesso medico, affermava di essere un discendente di Asclepio (dio della medicina). Fu mio padre a introdurmi all'arte della medicina. Io lavorai a Coo e viaggiai molto in Grecia, in particolare ad Atene. Ma mi esercitai specialmente nella Grecia settentrionale e in Tracia dove viaggiai moltissimo: visitai tutta la Grecia, fino ad arrivare in Egitto e in Libia, dove fui avviato alla conoscenza degli antichi segreti detenuti dai sacerdoti. Alla mia epoca l'Egitto era il paese ritenuto più avanzato nella cultura scientifica e tecnologica, nonché nell'aritmetica e nella geometria. Quasi tutti i medici laici viaggiano molto per curare i malati e studiare le metodologie di cura.
ho acquisito grande fama, nonostante la mia impotenza di fronte alla peste di Atene (429 a.C.), soprattutto insegnando. Ho fondato una scuola medica e scritto una settantina di opere, raccolte nel "Corpus Hippocraticum".

Qual era il tuo pensiero?

Il mio pensiero medico e filosofico si inserisce in un contesto che cerco di preservare dall'accesso di quanti sono impreparati, e perciò inadeguati, a comprenderlo. Uno dei miei fondamenti della medicina fu la visione del corpo umano animato da una forza vitale tendente per natura a riequilibrare le disarmonie apportatrici di patologie. Secondo questa concezione, la malattia e la salute di una persona dipendono da circostanze comprese nella persona stessa, non da agenti esterni o da superiori interventi divini; la via della guarigione consisterà pertanto nel limitarsi a stimolare questa forza innata, non nel sostituirsi ad essa: «la natura è il medico delle malattie [...] il medico deve solo seguirne gli insegnamenti».

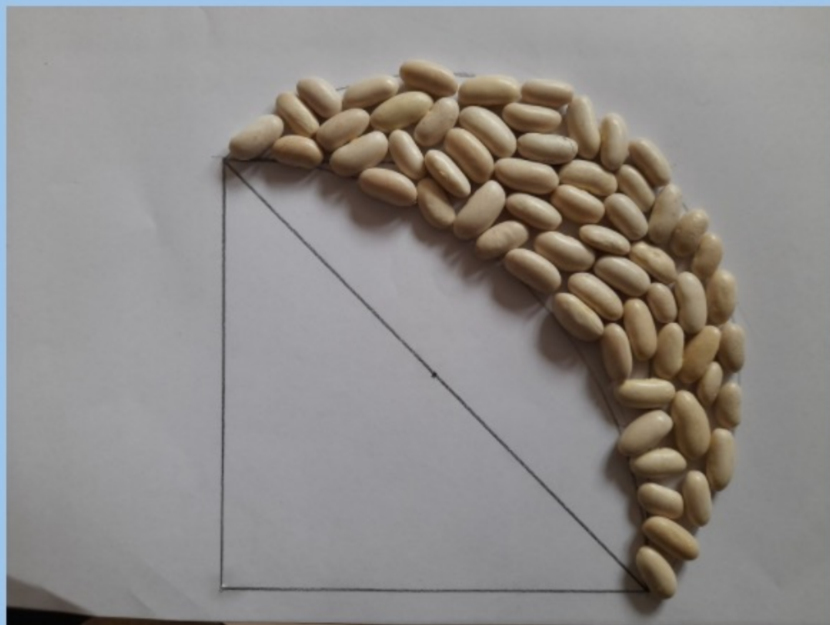


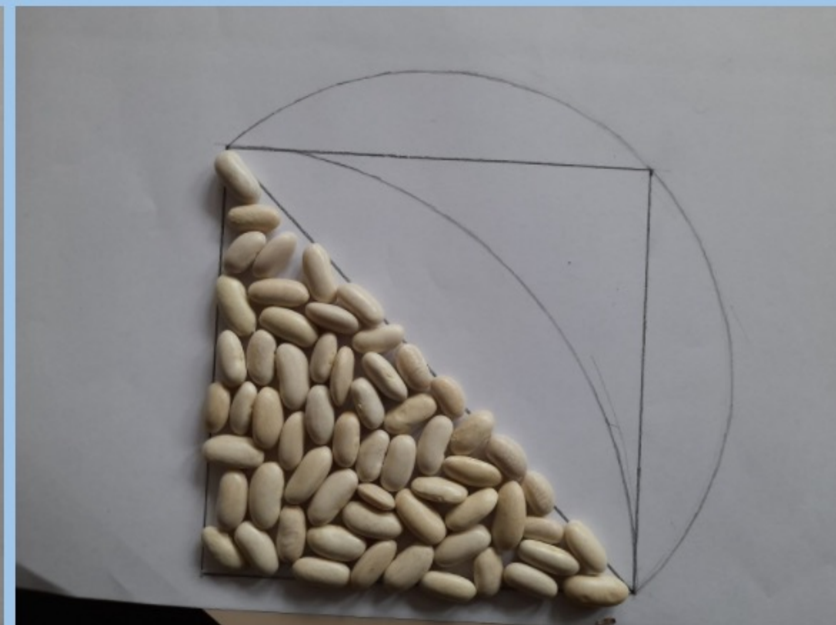
Che scoperte hai fatto nella tua vita?

Io ho dedicato tutta la mia vita alla ricerca ed ormai sono passati circa 2400 anni, quindi mi scuso, ma potrei dimenticarmi qualcosa…
Comunque ho scritto molti libri e trattati, come "L'antica medicina", "Il male sacro", "Le Epidemie", "Della Dieta" e altri scritti sulla chirurgia e sugli aforismi.
Peraltro, se la mia memoria non mi inganna, ho anche inventato la cartella clinica.
Ho anche introdotto il concetto di diagnosi e prognosi per la cura dei malati e, non per vantarmi, sono stato io a debellare la peste di Atene nel 429 a.C. intuendo che la causa fosse la poca igiene.

Ora parlaci delle lunule…

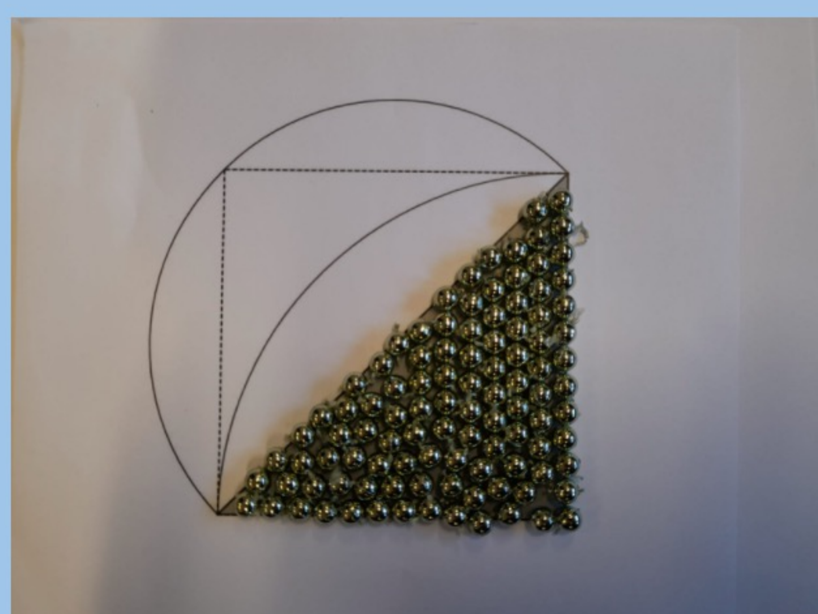
Ma come possiamo verificarlo in modo pratico?

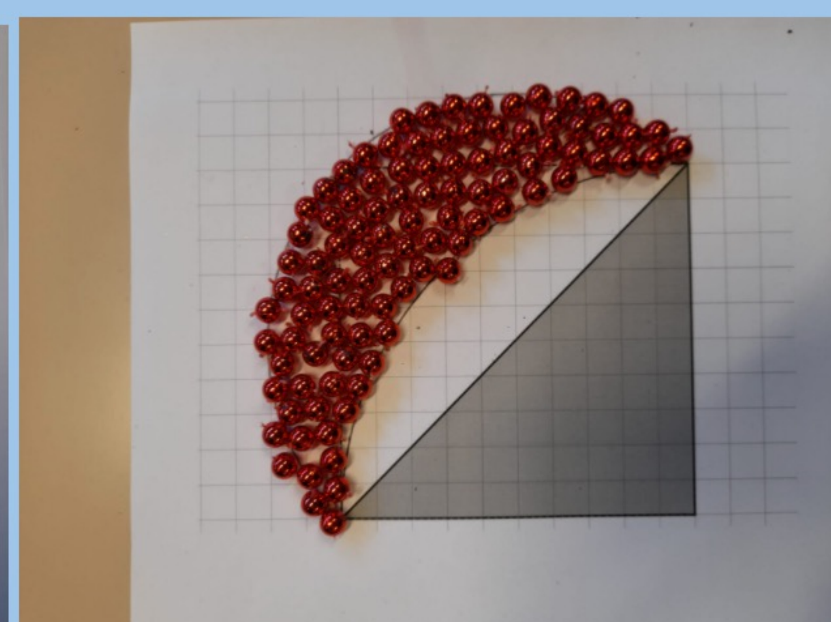




POSTER SCIENTIFICI

Abbiamo inizialmente utilizzato i fagioli come unità di misura, contandoli e mettendoli sopra le due figure, assicurandoci di ricoprire per intero l’area.
Il numero di fagioli è identico tra le figure: 60.
Ci siamo poi resi conto che il fagiolo, essendo irregolare in forma e dimensione, non può essere una buona unità di misura.

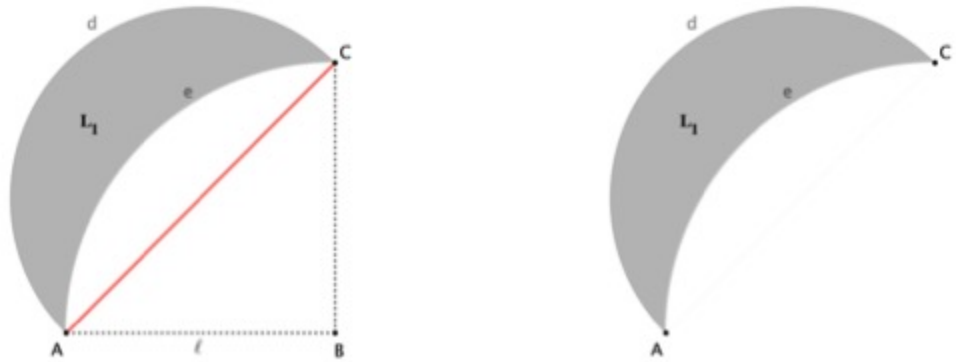




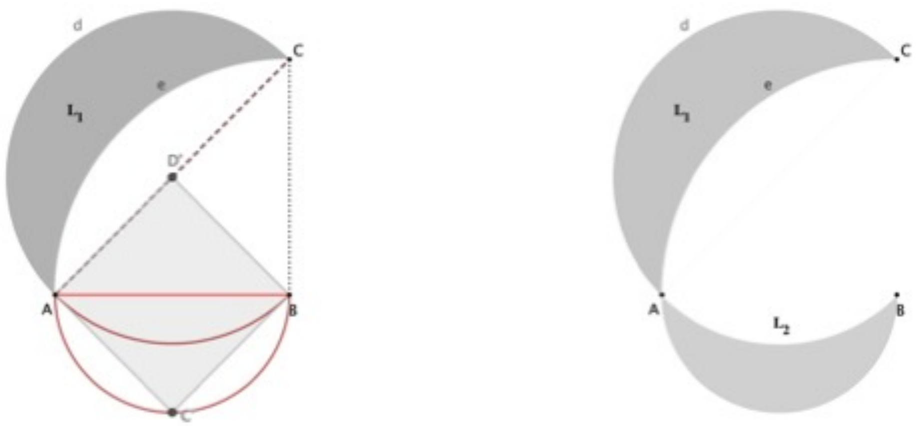
Abbiamo quindi cambiato unità di misura, sostituendo i fagioli con delle palline più regolari tra loro, è però parso subito che lo spazio lasciato tra una sfera e l’altra è maggiore nella lunula rispetto al triangolo

Costruite ora una successione di lunule nel modo seguente:

L_1: lunula costruita sulla diagonale AC del quadrato ABCD di lato ℓ



L_2: lunula costruita sulla diagonale AB di un quadrato AC'BD'

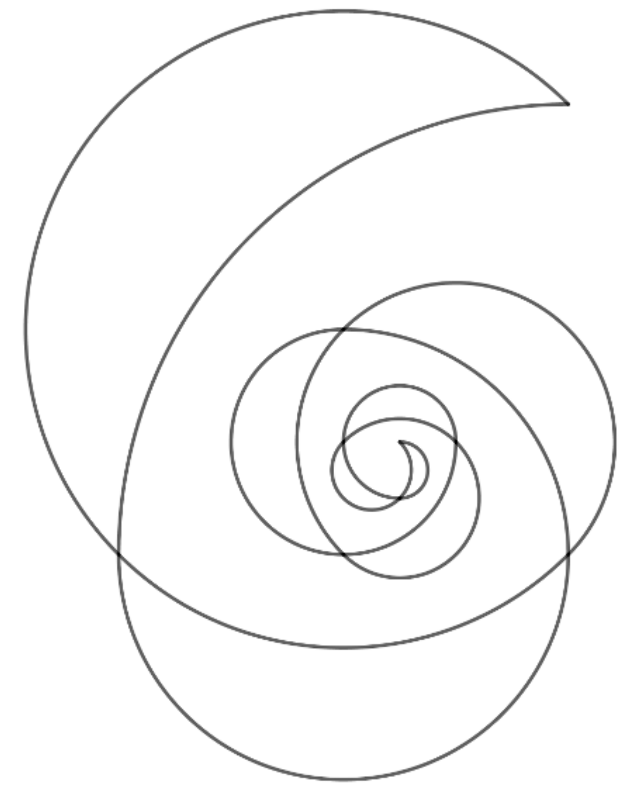


L_3: lunula costruita sulla diagonale BD' del quadrato opportunamente costruito e via così.

Quanto misurerà l'area della 4° lunula? E l'area di L_{20}?

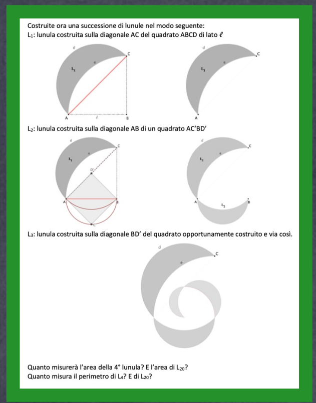
Quanto misura il perimetro di L_4? E di L_{20}?

Ipotizziamo che il lato ℓ del quadrato iniziale sia lungo 1m e immaginiamo di iterare il processo segnando il bordo delle varie lunule con cordino.



Secondo voi, quante lunule si riescono a disegnare con un cordino lungo 13m? Perché?

Quanto varrà l'area della figura così trovata?

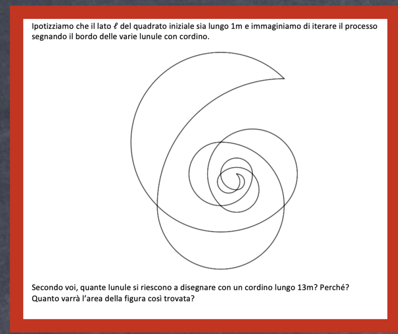


Costruite ora una successione di lunule nel modo seguente:
L_1: lunula costruita sulla diagonale AC del quadrato ABCD di lato ℓ

L_2: lunula costruita sulla diagonale AB di un quadrato AC'BD'

L_3: lunula costruita sulla diagonale BD' del quadrato opportunamente costruito e via così.

Quanto misurerà l'area della 4° lunula? E l'area di L_{20}?
Quanto misura il perimetro di L_4? E di L_{20}?



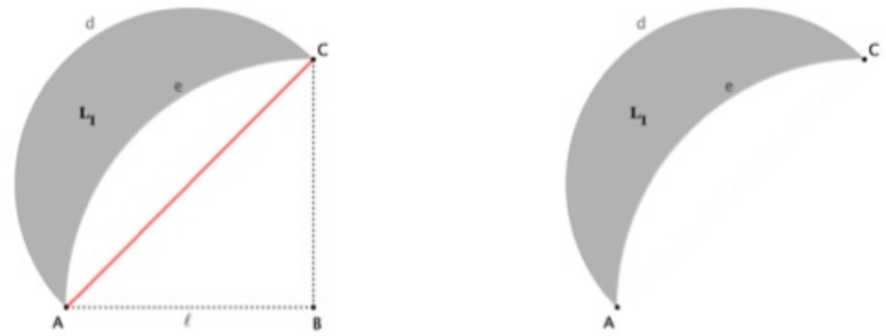
Ipotizziamo che il lato ℓ del quadrato iniziale sia lungo 1m e immaginiamo di iterare il processo segnando il bordo delle varie lunule con cordino.

Secondo voi, quante lunule si riescono a disegnare con un cordino lungo 13m? Perché?
Quanto varrà l'area della figura così trovata?

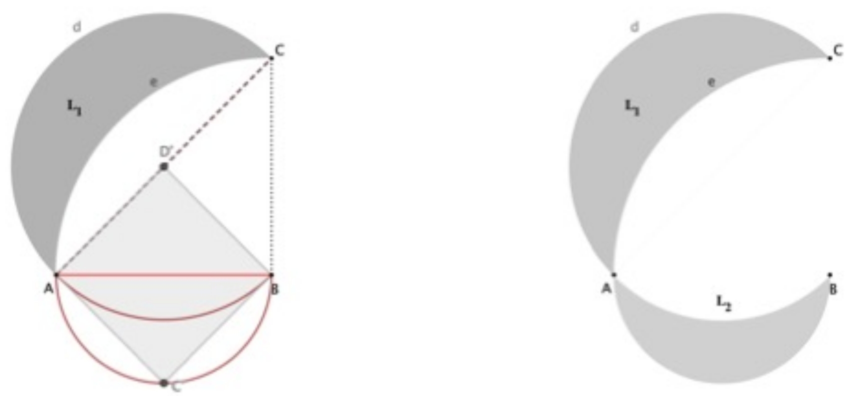
- Utilizzereste l'attività in classe? Quale classe?
- Provate a rispondere come se foste studenti. Quali risposte vi aspettate?
- Quali errori? Con quale precisione di linguaggio?
- Quanto tempo dedichereste all'attività?
- Con quali obiettivi? E quali prerequisiti?
- Quali strumenti possono utilizzare gli studenti? Gli strumenti li suggerite voi o lasciate loro libera scelta?
- Cosa cambiereste? Perché?
- Altri suggerimenti, osservazioni…

Costruite ora una successione di lunule nel modo seguente:

L_1: lunula costruita sulla diagonale AC del quadrato ABCD di lato ℓ



L_2: lunula costruita sulla diagonale AB di un quadrato AC'BD'



L_3: lunula costruita sulla diagonale BD' del quadrato opportunamente costruito e via così.

Quanto misurerà l'area della 4° lunula? E l'area di L_{20}?

Quanto misura il perimetro di L_4? E di L_{20}?

$$A_n = \frac{1}{2^n} \cdot \ell^2 \qquad P_n = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2} \cdot \ell \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

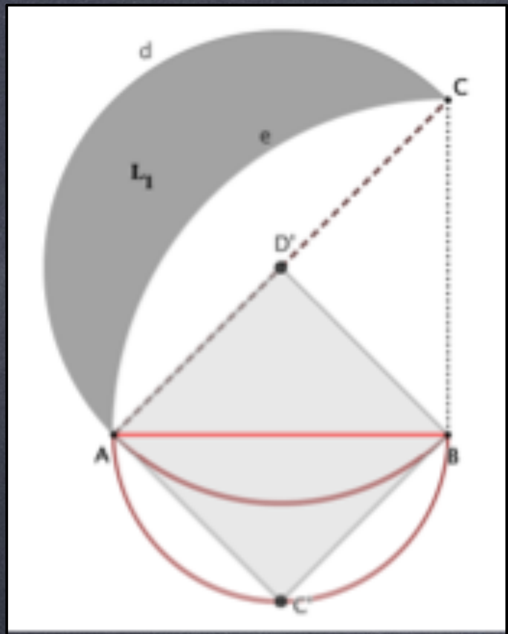
Gabriele: io ho pensato che visto che l'area di una lunula è $\frac{\ell^2}{2}$, allora la lunula successiva sarà $\frac{\ell^2}{2^2}$

Io: e perché non $\left(\frac{\ell^2}{2}\right)^2$?

Gabriele: non so, mi è sembrato giusto così…

Francesco: anche io ho pensato come Gabriele… ho provato a fare dei conti, ho visto che il lato del quadrato per la seconda lunula è lungo come la metà della diagonale del primo quadrato. Allora ho contato la terza lunula e la quarta lunula, visto che al denominatore compare 2, 4, 8, 16 ho **dedotto** che sarà 2^n, ***anche se non è propriamente una dimostrazione!***

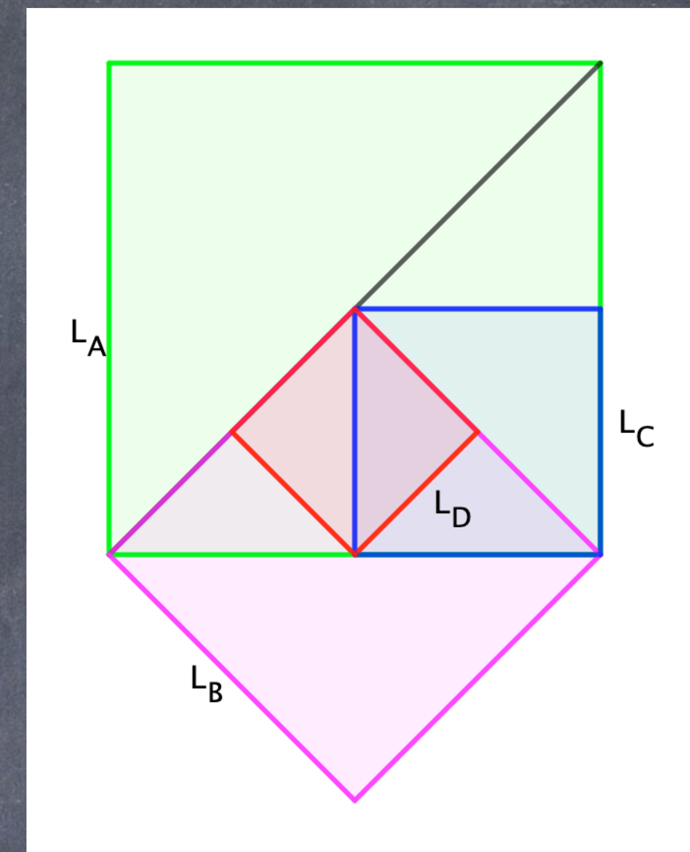
Natalia: io ho fatto i conti come Francesco, ma ho messo come lato iniziale il numero 10

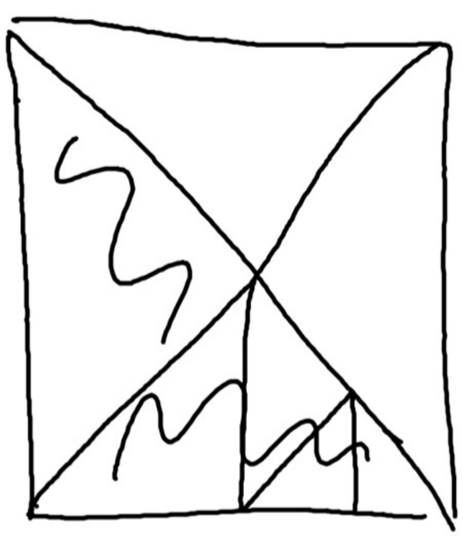


$$L_A = \sqrt{2}L_B$$
$$L_B = \sqrt{2}L_C$$
$$L_C = \sqrt{2}L_D$$
$$L_A = (\sqrt{2})^3 L_D$$
$$L_D = \frac{L_A}{(\sqrt{2})^3}$$

$$A_4 = \frac{\left(\frac{\ell_A}{(\sqrt{2})^3}\right)^2}{2} = \frac{\ell^2}{2(\sqrt{2})^3} = \frac{\ell^2}{2^4}$$

Viola: io ho ragionato con il lato successivo e sono andata indietro.



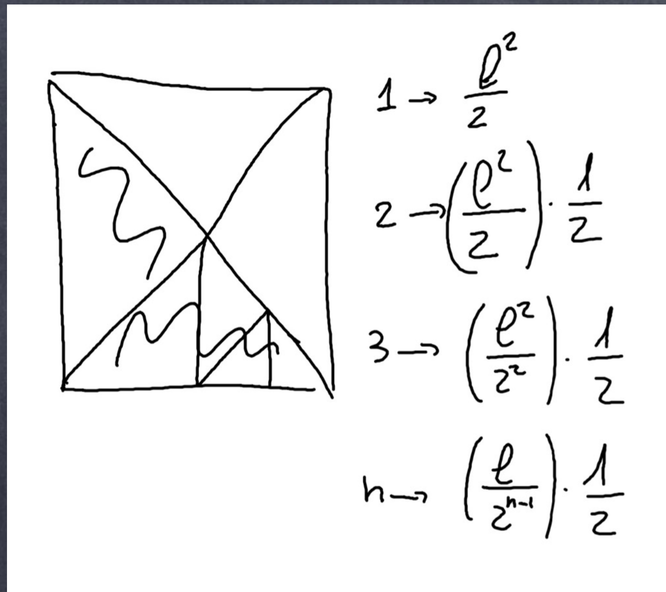


$$1 \to \frac{\ell^2}{2}$$
$$2 \to \left(\frac{\ell^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$3 \to \left(\frac{\ell^2}{2^2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$n \to \left(\frac{\ell}{2^{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Paolo: ma io invece ho ragionato sul lato del quadrato su cui si costruisce la lunula!

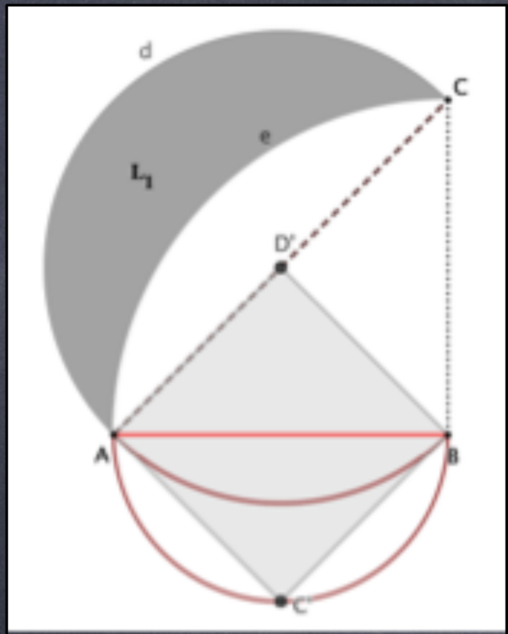
Natalia: ma certo, non ti fa venire mal di testa. Io avevo pensato di mettere un 10 per non perdermi nei conti, ma così è più facile. Anche il perimetro viene meglio!
Io: in che senso?
Natalia: abbiamo detto che se il lato del quadrato è *l*, il perimetro è $\pi\left(\frac{\sqrt{2}\ell}{2}\right) + \frac{1}{4}(2\pi\ell)$

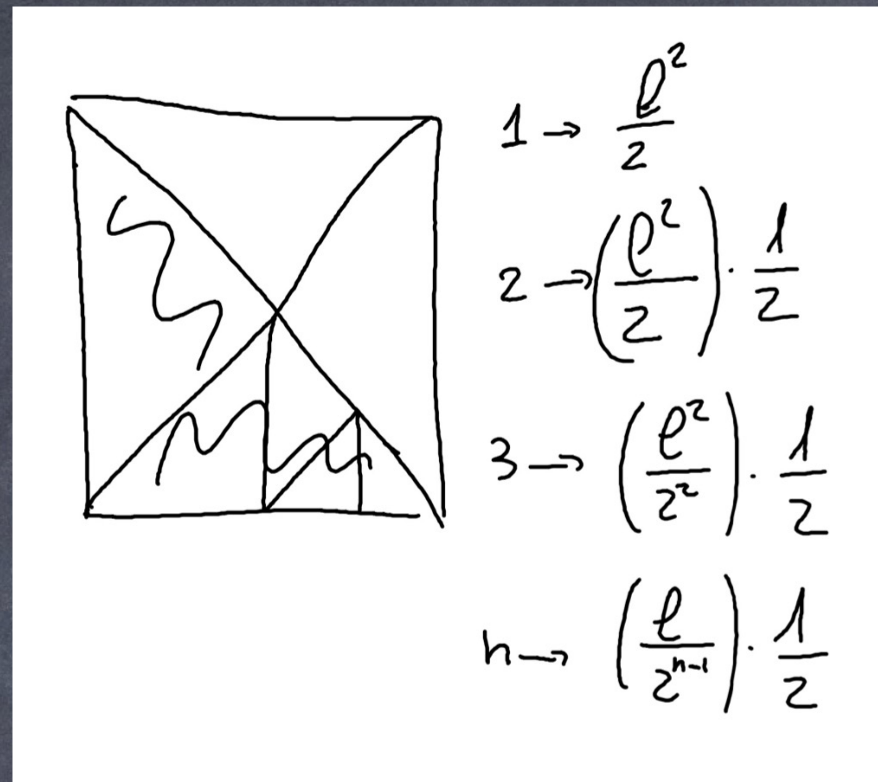
Viola: beh possiamo anche contare e mettere $\frac{1}{2}\pi\ell\left(\sqrt{2}+1\right)$

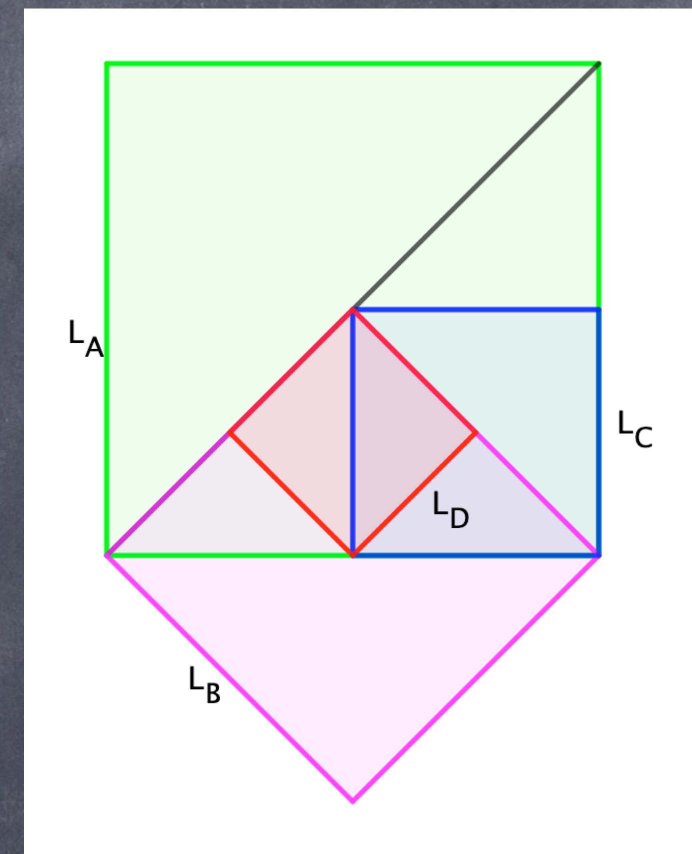


Natalia: ora ci basta conoscere la successione dei quadrati così abbiamo il lato e siamo a posto…

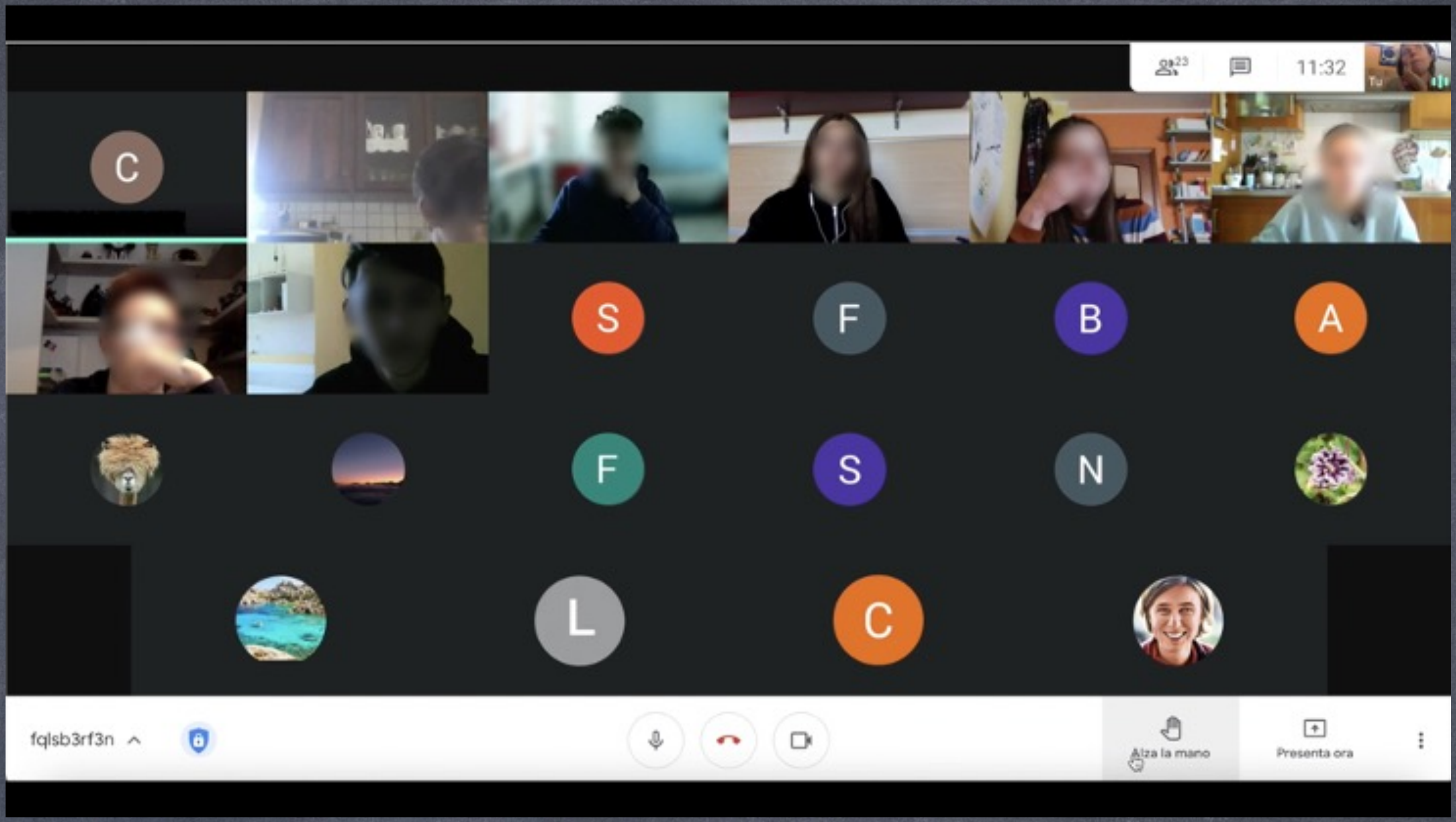
Numero lunula	Area semiquadrato	Lato	Perimetro lunula
1	$\frac{\ell^2}{2}$	ℓ	$\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}+1)\ell$
2	$\frac{\ell^2}{2^2}$	$\frac{\ell}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}+1)\frac{\ell}{\sqrt{2}}$
3	$\frac{\ell^2}{2^3}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}+1)\frac{\ell}{2}$
4	$\frac{\ell^2}{2^4}$	$\frac{\ell}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}+1)\frac{\ell}{2\sqrt{2}}$



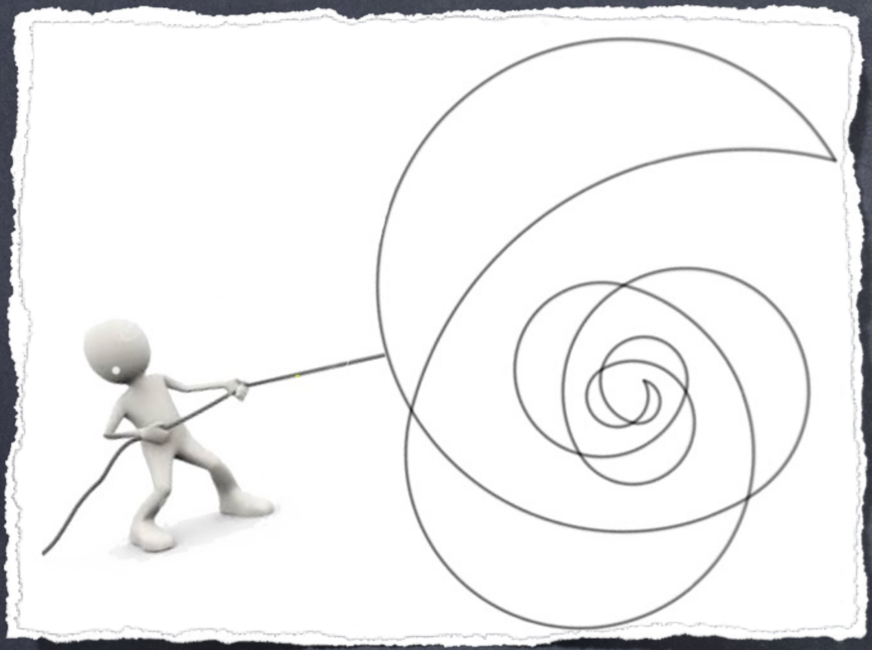


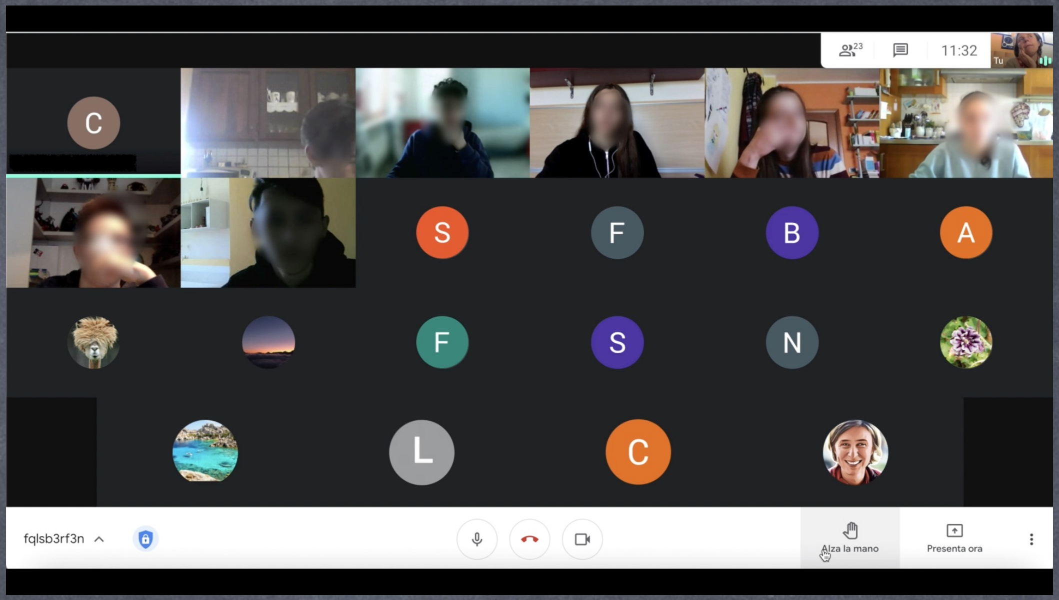


$$P_n = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}+1\right)\frac{\ell}{2\sqrt{2}}$$



Elena: Il procedimento è semplice, abbiamo pensato di calcolare passo dopo passo il perimetro e di fare la somma dei perimetri trovati, fino a superare 13. Ma non siamo arrivati a una conclusione vera e propria, [...] il procedimento Abbiamo provato a calcolare il perimetro della 1° lunula, della 2°... non abbiamo avuto tempo di finire... ci siamo fermati alla sesta lunula, ma non siamo arrivati a 13. Era troppo lungo: abbiamo provato a usare GeoGebra, ma...

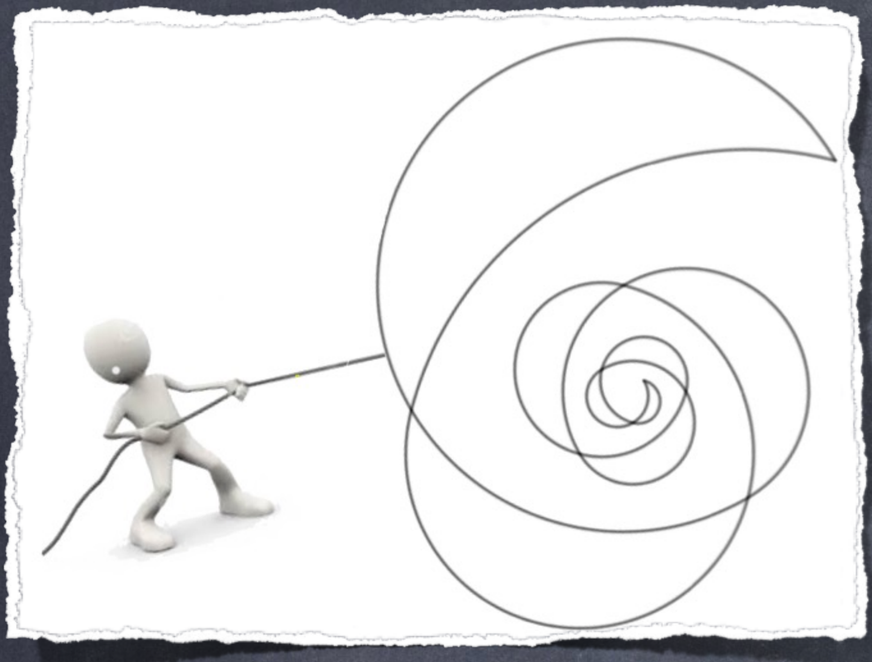




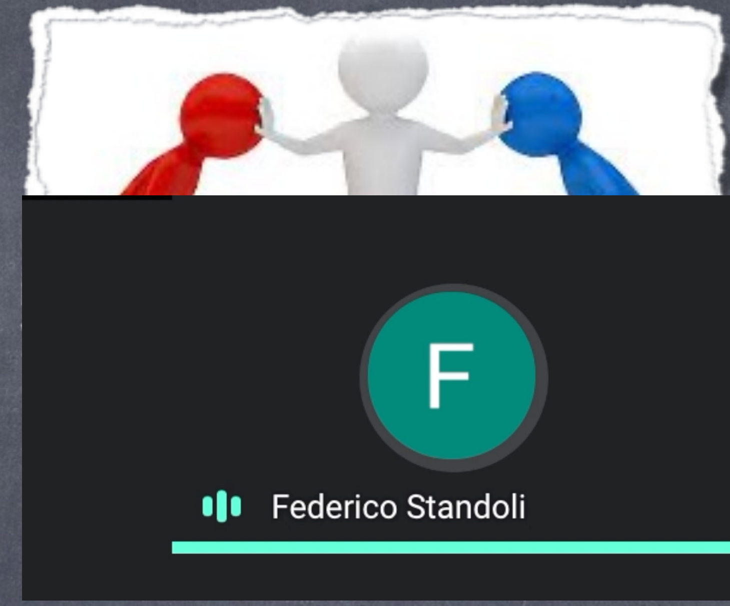
Viola: Allora noi siamo arrivati in realtà alla conclusione di circa 18 lunule. Più che altro non arrivavamo esattamente a 13 ma circa 12,92 - mi pare - però... visto che avevamo immaginato la situazione proprio concreta diventava difficile disegnare con un cordino lunule che avessero un perimetro anche più piccolo di un centimetro e quindi cioè... idealmente ovviamente il numero poteva essere più alto di lunule, però concretamente era intorno a 18

Concretamente

Idealmente



Concretamente

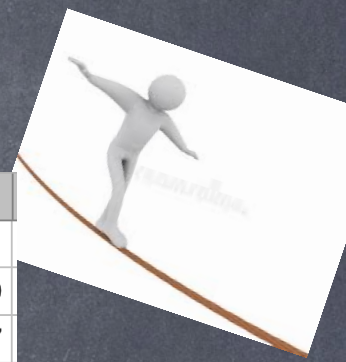


Idealmente

Viola: Allora noi siamo arrivati in realtà alla conclusione di circa 18 lunule. Più che altro non arrivavamo esattamente a 13 ma circa 12,92 - mi pare - però... visto che avevamo immaginato la situazione proprio concreta diventava difficile disegnare con un cordino lunule che avessero un perimetro anche più piccolo di un centimetro e quindi cioè... idealmente ovviamente il numero poteva essere più alto di lunule, però concretamente era intorno a 18

Federico: Anche noi come Viola abbiamo calcolato il perimetro della prima e poi in seguito di tutte le altre [...] stavamo sommando, ma poi è finito il tempo...
Io: Ok, siete arrivati molto vicini a 13? [...] Secondo voi 18 può essere un numero plausibile?
Federico: No, ma aspetti un attimo che prendo dei valori... e... è possibile che la risposta sia 18 lunule, perché a noi ci mancava ancora tanto e considerando che man mano il perimetro diminuisce sempre di più, ci può stare come risposta 18

Francesco: Noi abbiamo messo i valori su un foglio di calcolo. Abbiamo messo la formula, abbiamo messo i vari passaggi e tirato giù per vedere quanto era quel che risulta e che avevano... e alla fine abbiamo visto che arrivati a circa 12,9 essendo che il perimetro [di ogni lunula] era molto piccolo e quindi aumentava di poco non arrivano praticamente mai a 13. Però noi non ci siamo posti il problema di renderlo... cioè concretamente con il cordino, quindi gli abbiamo messo come risultato che sembrava si potesse fare l'infinito, quasi.



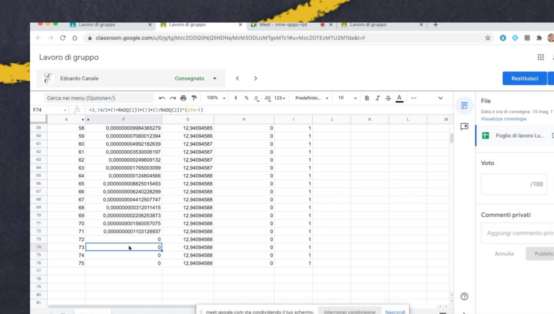
	A	B	C
1	Passo	Perimetro L	Perimetro Tot
2	1	3.79	3.79
3	2	2.68	6.47
4	3	1.9	8.37
5	4	1.34	9.71
6	5	0.95	10.66
7	6	0.67	11.33
8	7	0.47	11.8
9	8	0.34	12.14
10	9	0.24	12.38
11	10	0.17	12.54
12	11	0.12	12.66
13	12	0.08	12.75
14	13	0.06	12.8
15	14	0.04	12.85
16	15	0.03	12.88
17	16	0.02	12.9
18	17	0.01	12.91
19	18	0.01	12.92
20	19	0.01	12.93
21	20	0.01	12.93
22	21	0	12.94
23	22	0	12.94
24	23	0	12.94
25	24	0	12.94

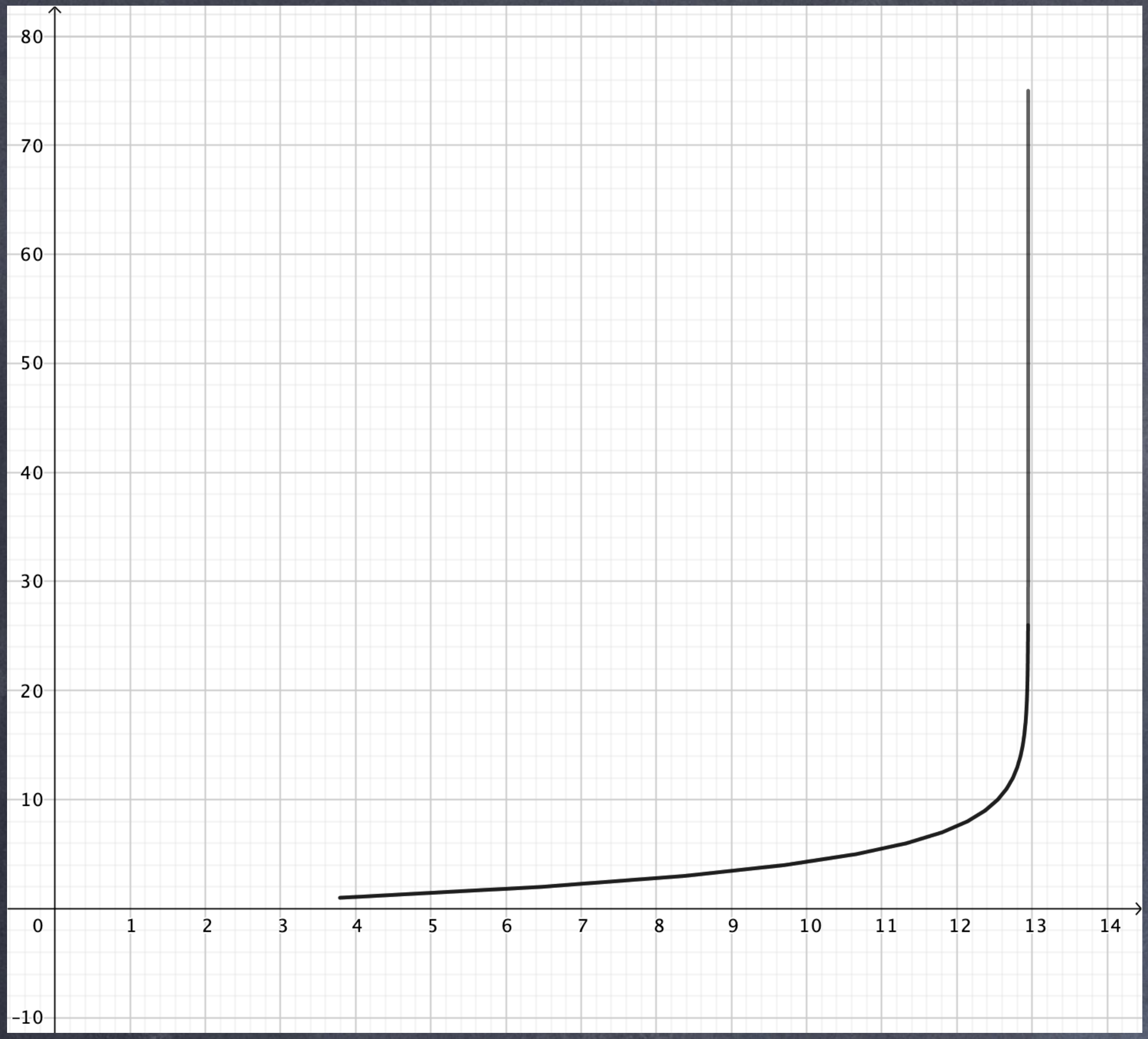
Edoardo: abbiamo fissato qua i passaggi e siamo arrivati fino alla 75esima lunula, poi abbiamo calcolato il perimetro e fatto le somme delle celle. Ecco, il perimetro è molto molto piccolo.

	A	B	C
1	Passo	Perimetro L	Perimetro Tot
2	1	3.79	3.79
3	2	2.68	6.47
4	3	1.9	8.37
5	4	1.34	9.71
6	5	0.95	10.66
7	6	0.67	11.33
8	7	0.47	11.8
9	8	0.34	12.14
10	9	0.24	12.38
11	10	0.17	12.54
12	11	0.12	12.66
13	12	0.08	12.75
14	13	0.06	12.8
15	14	0.04	12.85
16	15	0.03	12.88
17	16	0.02	12.9
18	17	0.01	12.91
19	18	0.01	12.92
20	19	0.01	12.93
21	20	0.01	12.93
22	21	0	12.94
23	22	0	12.94
24	23	0	12.94
25	24	0	12.94

ZERO CHE NON E' ZERO

Edoardo: Intanto perché sappiamo che è una figura geometrica quindi in teoria dovrebbe avere un valore che sia maggiore di zero e poi dove poter riprovare andare a fare la formula con n che vale 75 e vedere se vale qualcosa, per esempio. Sarà qualcosa di diverso, sempre molto molto piccolo ma secondo me non può essere certo zero proprio.





Abbiamo rappresentato i dati del perimetro in un grafico per visualizzare un po' più concretamente quello che abbiamo fatto e sull'asse delle ordinate abbiamo numero dei passaggi che è arrivata quasi ottanta perché come abbiamo visto ne abbiamo calcolate 75 e sotto abbiamo il perimetro, il valore del perimetro e vediamo che quando sta per toccare 13 inizia a salire salire a salire e non lo tocca mai ed e un po' quello che abbiamo visto che i dati quindi aumenta aumenta aumenta ma non arriva mai a 13. [...] potrebbe esserci lì una sorta di asintoto

Edoardo: Ecco, oh
Francesco: ecco, io tiro giù qua
Edoardo: tu tira giù di lì
Francesco: è tutto un tirar giù
Risate
Francesco: ma no, ma cosa sto facendo
Edoardo: ma, non è che… ma bon
[….]

Edoardo: ma non va piuuuuù
Francesco: e ma perché diventa sempre più piccolo
Edoardo: sì, ho capito però…
Francesco: quindi cresce sempre di meno

Edoardo: ma non è che magari poi proprio a 13 non arriva?
Paolo: e, sarà… cioè magari ci mette tanto di più di quello che ci aspettavamo
Edoardo: eh… sa, intanto io tiro giù fino a 100
Francesco: vabbè puoi…

Andrea: intanto di sto passo, ciò anche se tiri giù fino a 100 diventerà sempre più piccolo quindi prima che arrivi a 13 ci vorrà un sacco di tempo
Edoardo: si, ma qui…
Francesco: è sempre quella storia del fatto che si avvicina sempre di più ma non tocca mai
Edoardo: e, anche perché qui dopo gli stessi numeri, quindi varia di talmente poco che non, non arriva mai più a 13
Francesco: volendo possiamo fare un grafico, in teoria perché gli mettiamo le…
Edoardo: e come si fa?
Francesco: allora, se non sbaglio evidenzi le varie, il tutto
Edoardo: no prima non devi fare… com'è che fai il grafico?
Francesco: evidenzi tutto e fai inserisci grafico, io ci provo magari non viene

Paolo: ma volete anche scrivere a parole quello che avete detto?
Edoardo: sì, io avevo già scritto qualcosa…ah, sì, ho messo che il bordo della lunula è uguale al perimetro per noi e ho scritto che calcoliamo il perimetro delle lunule fino a che la somma dei perimetri è maggiore di 13
Paolo: ok, posso scrivere che usando Excel abbiamo visto ehm..
Edoardo: che aumenta… aumenta sempre di più, ma cioè di poco. Quindi non arriverà cioè non arriverà a 13
Paolo: arriverà ad aumentare di talmente poco che si arriva a non segna la differenza
Edoardo: non è che non segna più nessuna differenza perché in teoria la differenza c'è, ma è sempre minore
Paolo: non, quello che intendevo è che Excel dopo un po' ci dice il numero… cioè ci dice sempre il numero uguale.
Edoardo: ah, non segna più nessuna differenza tra una somma e la successiva… in teoria approssimando, dovresti aggiungere quello
Paolo: ok, sì sì. Ma puoi aggiungere anche tu!

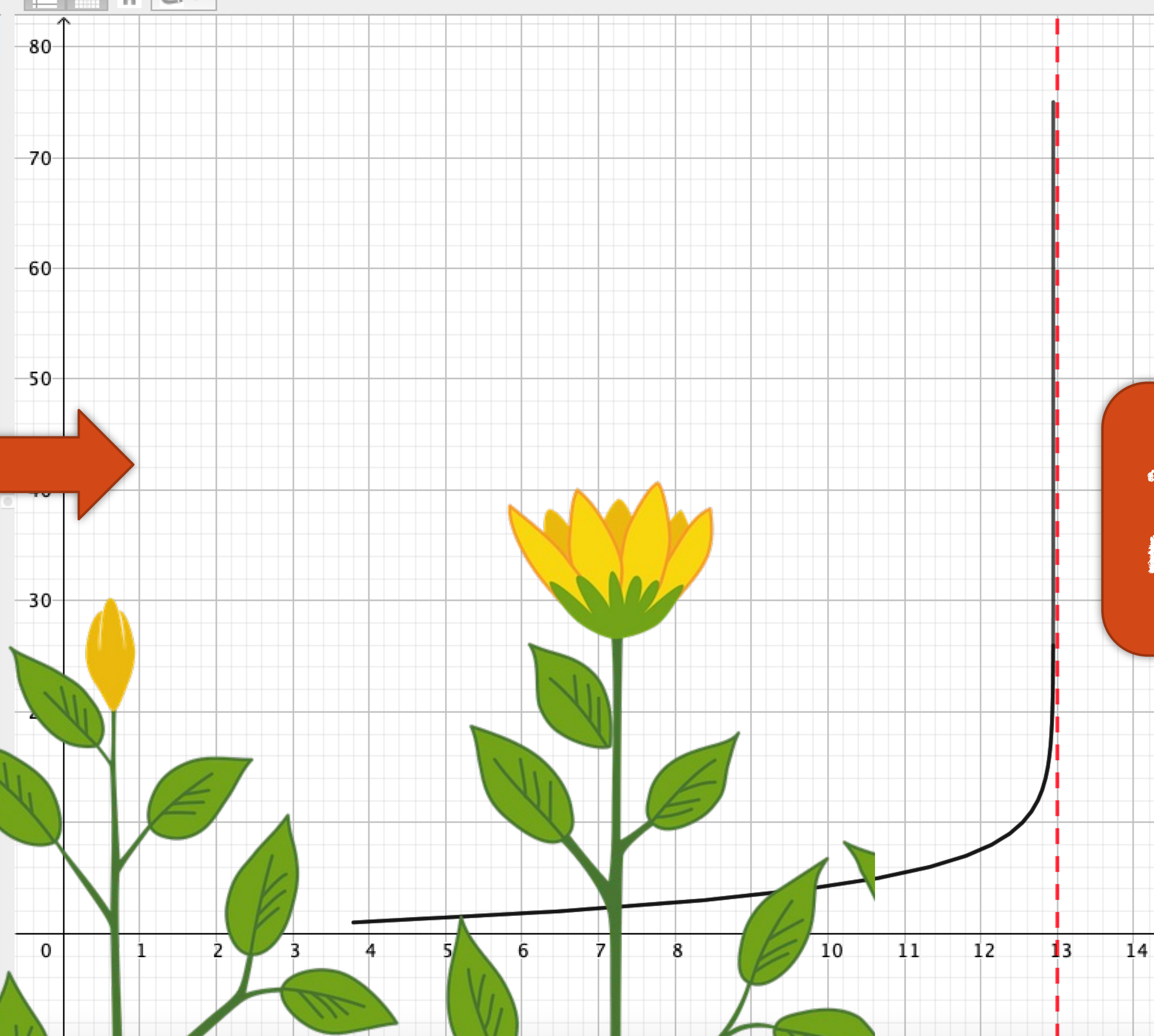
DAD

N
Natalia Kubiak

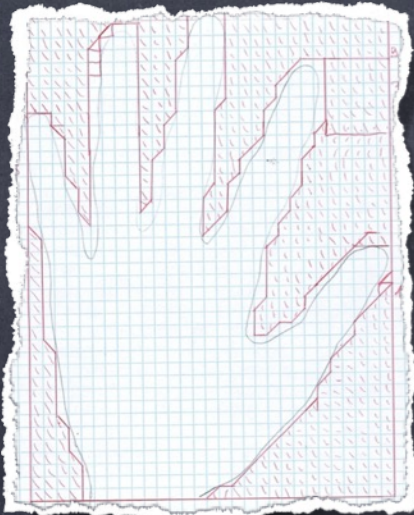
Foglio di calcolo

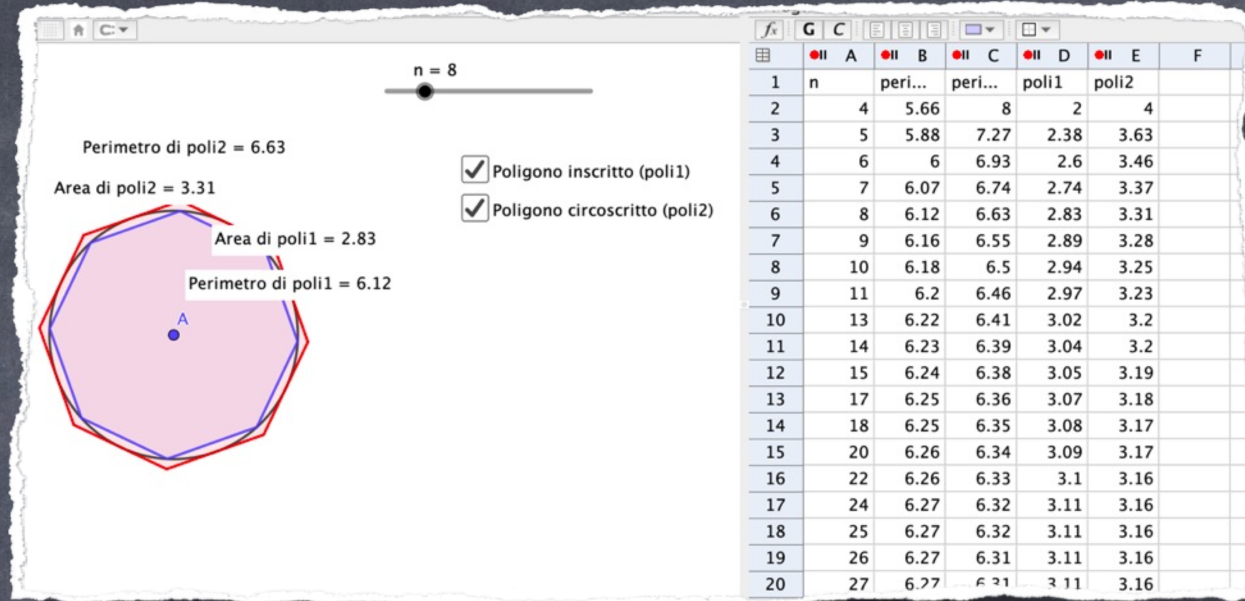
	A	B	C	D
1	Passo	Perimetro L	Perimetro Tot	Passo
2	1	3.7922377959	3.7922377959	1
3	2	2.6815170613	6.4737548572	2
4	3	1.8961188979	8.3698737551	3
5	4	1.3407585307	9.7106322858	4
6	5	0.948059449	10.6586917348	5
7	6	0.6703792653	11.3290710001	6
8	7	0.4740297245	11.8031007246	7
9	8	0.3351896327	12.1382903573	8
10	9	0.2370148622	12.3753052195	9
11	10	0.1675948163	12.5429000358	10
12	11	0.1185074311	12.661407467	11
13	12	0.0837974082	12.7452048751	12
14	13	0.0592537156	12.8044585907	13
15	14	0.0418987041	12.8463572948	14
16	15	0.0296268578	12.8759[illegible]1526	15
17	16	0.020949352	12.8969[illegible]046	16
18	17	0.0148134289	12.9117[illegible]35	17
19	18	0.010474676	[illegible]	18
20	19	0.0074067144	[illegible]	19
21	20	0.005237338	[illegible]	20
22	21	0.0037033572	12.93856[illegible]192	[illegible]
23	22	0.002618669	12.9411876882	[illegible]
24	23	0.00185167[illegible]	12.9430393668	23
25	24	[illegible]0013093345	[illegible]443487013	[illegible]

Grafici 2

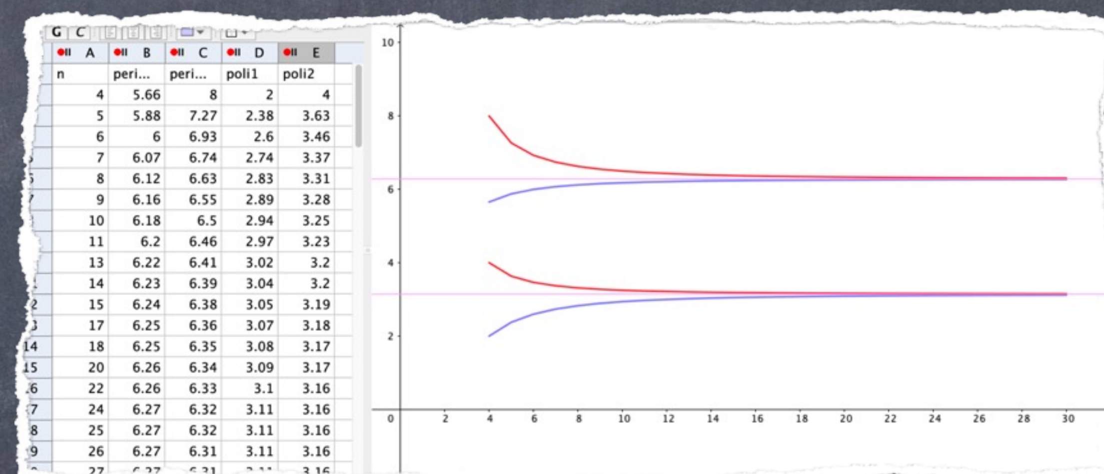


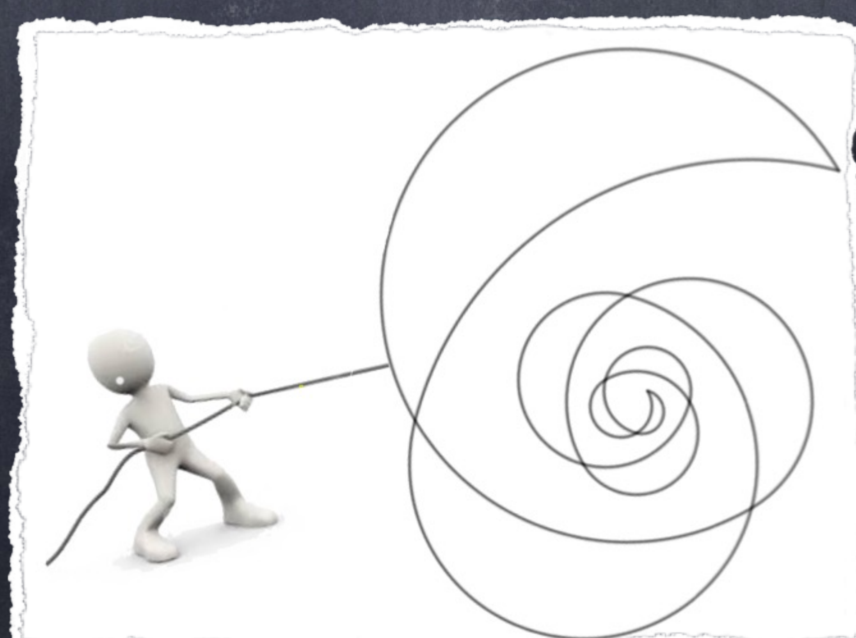
Per fortuna lo vedo!

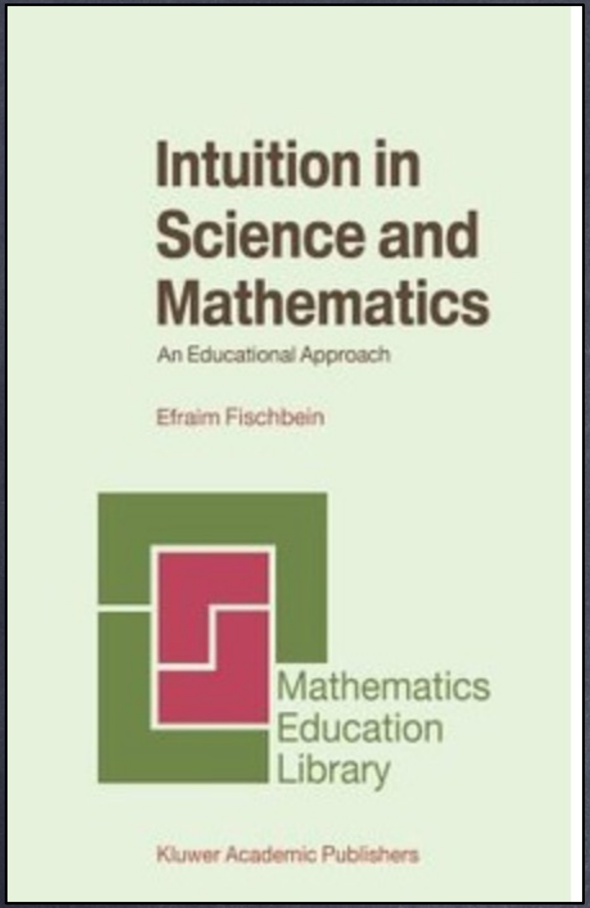




	A	B	C	D	E	F
1	n	peri...	peri...	poli1	poli2	
2	4	5.66	8	2	4	
3	5	5.88	7.27	2.38	3.63	
4	6	6	6.93	2.6	3.46	
5	7	6.07	6.74	2.74	3.37	
6	8	6.12	6.63	2.83	3.31	
7	9	6.16	6.55	2.89	3.28	
8	10	6.18	6.5	2.94	3.25	
9	11	6.2	6.46	2.97	3.23	
10	13	6.22	6.41	3.02	3.2	
11	14	6.23	6.39	3.04	3.2	
12	15	6.24	6.38	3.05	3.19	
13	17	6.25	6.36	3.07	3.18	
14	18	6.25	6.35	3.08	3.17	
15	20	6.26	6.34	3.09	3.17	
16	22	6.26	6.33	3.1	3.16	
17	24	6.27	6.32	3.11	3.16	
18	25	6.27	6.32	3.11	3.16	
19	26	6.27	6.31	3.11	3.16	
20	27	6.27	6.31	3.11	3.16	

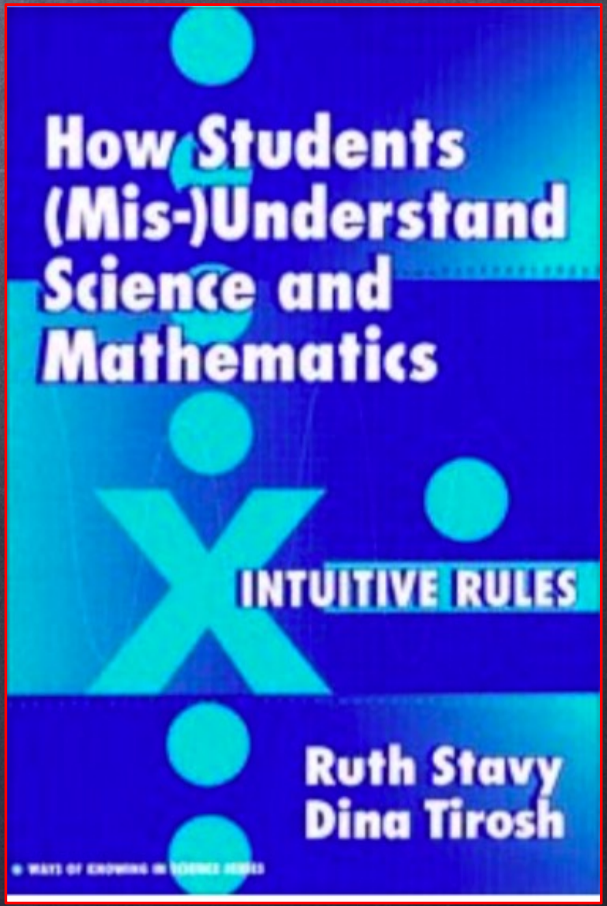






Spesso [...] le idee sbagliate [...] sorgono da un'incompatibilità tra una proprietà formale del sistema modellato e una proprietà intuitiva della rappresentazione modellistica, che guida consapevolmente o tacitamente i processi cognitivi. (p. 143)

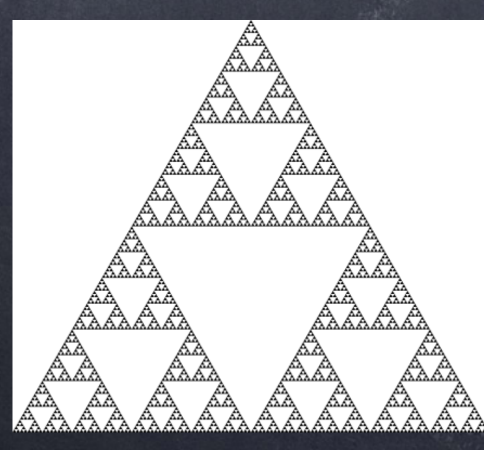
Regole intuitive:
più (meno) A – più (meno) B
stesso A – stesso B

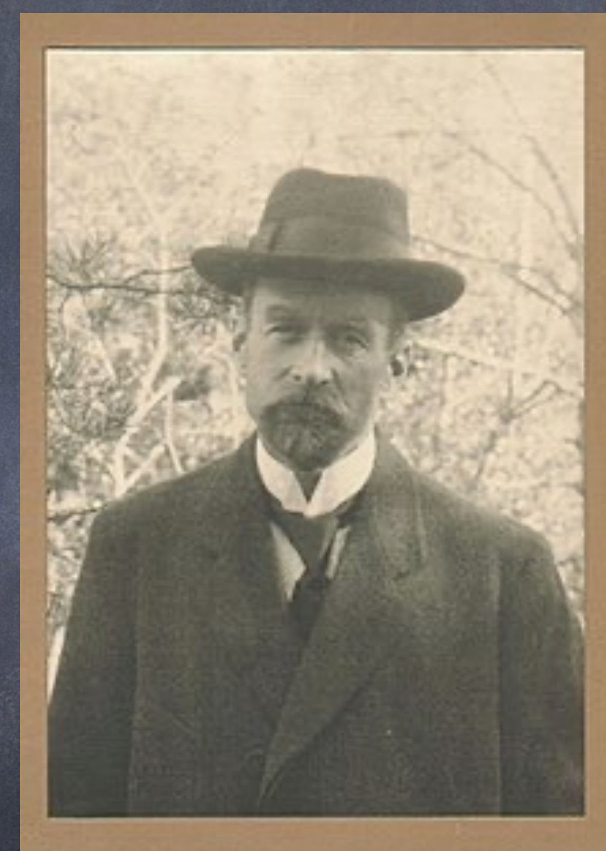


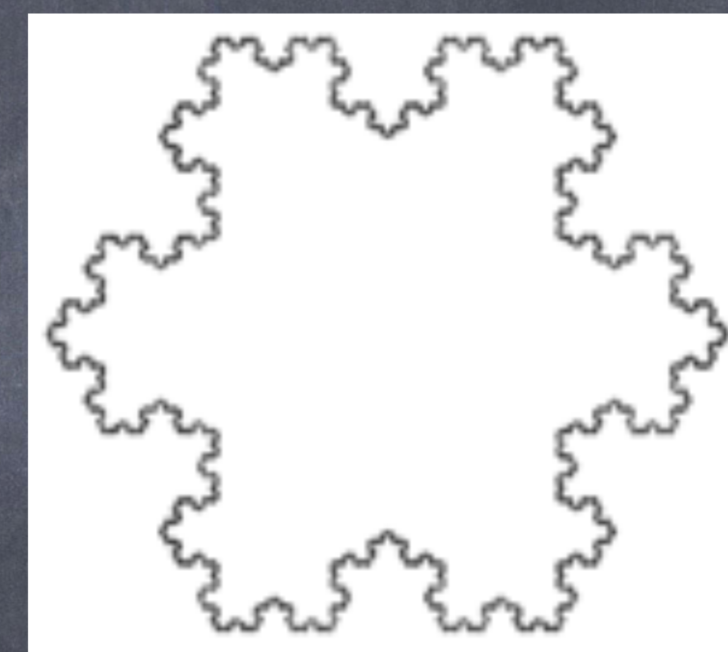
Proposta

Rendere espliciti gli ostacoli e affrontarli con i nostri studenti

Fiocco di Von Koch
Triangolo di Sierpiński







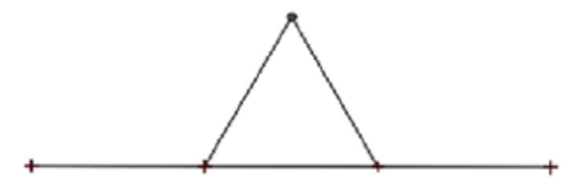
Work In Progress

- Utilizzereste l'attività in classe? Quale classe?
- Provate a rispondere come se foste studenti. Quali risposte vi aspettate?
- Quali errori? Con quale precisione di linguaggio?
- Quanto tempo dedichereste all'attività?
- Con quali obiettivi? E quali prerequisiti?
- Quali strumenti possono utilizzare gli studenti? Gli strumenti li suggerite voi o lasciate loro libera scelta?
- Cosa cambiereste? Perché?
- Altri suggerimenti, osservazioni…

Osserva la figura. Si ottiene seguendo il seguente algoritmo

1) dividi il segmento in 3 parti di ugual lunghezza

2) costruisci sul segmento mediano un triangolo equilatero



3) escludi il lato del triangolo sul segmento iniziale

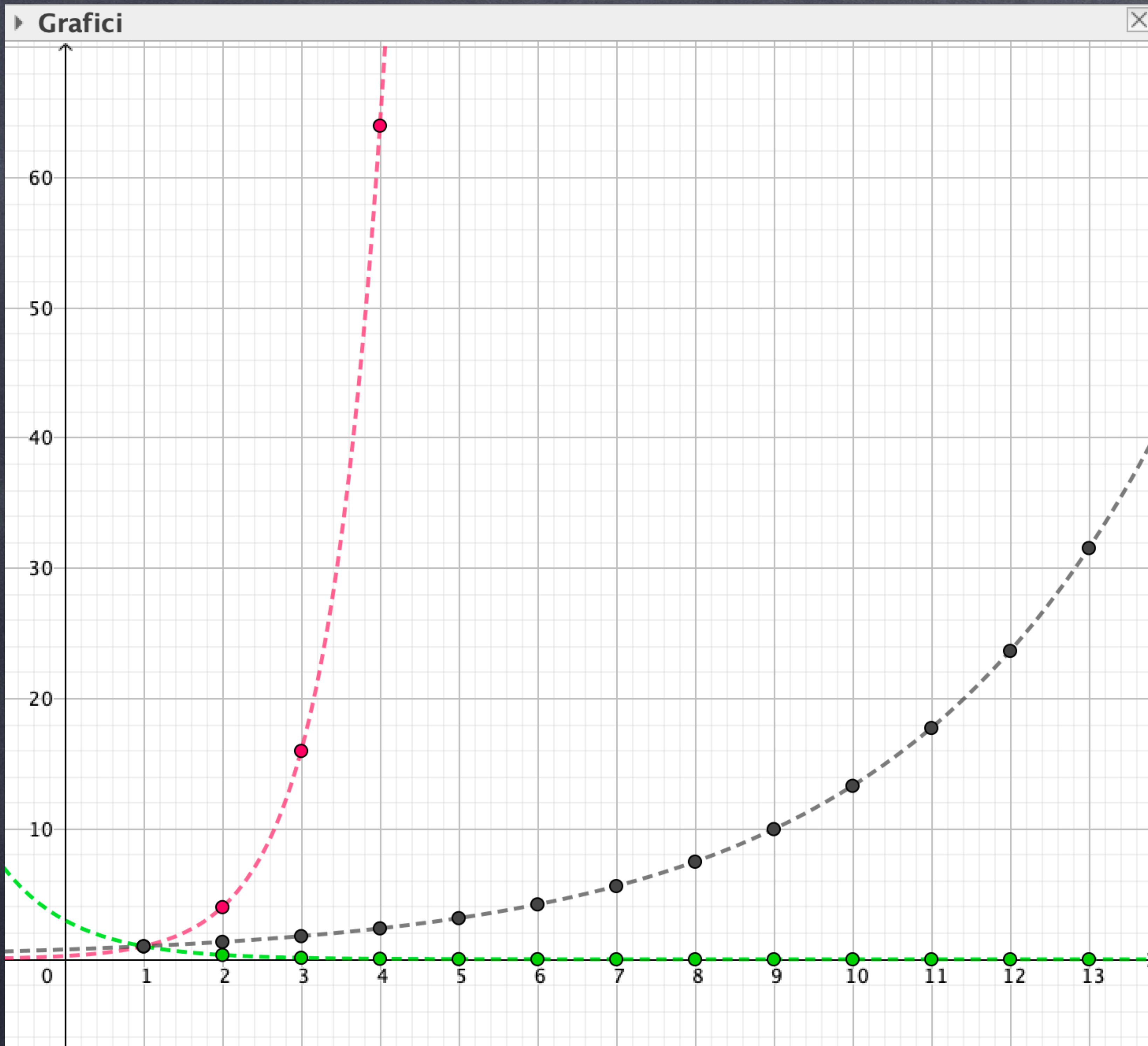
Considera un segmento lungo 1m.

Osserva la sequenza e continua

Passo		***Numero di parti***	***Lunghezza di una parte***	***Lunghezza della linea spezzata***
0				
1				
2				

Disegna il passo 4 e il passo 5.

Passo	Numero di parti	Lunghezza della parte	Lunghezza linea spezzata
0	$1 = 4^0$	$1 = \frac{1}{3^0}$	1
1	4^1	$\frac{1}{3^1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^1$
2	4^2	$\frac{1}{3^2}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$
3	4^4	$\frac{1}{3^3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$
…	…	…	…
n	4^n	$\frac{1}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

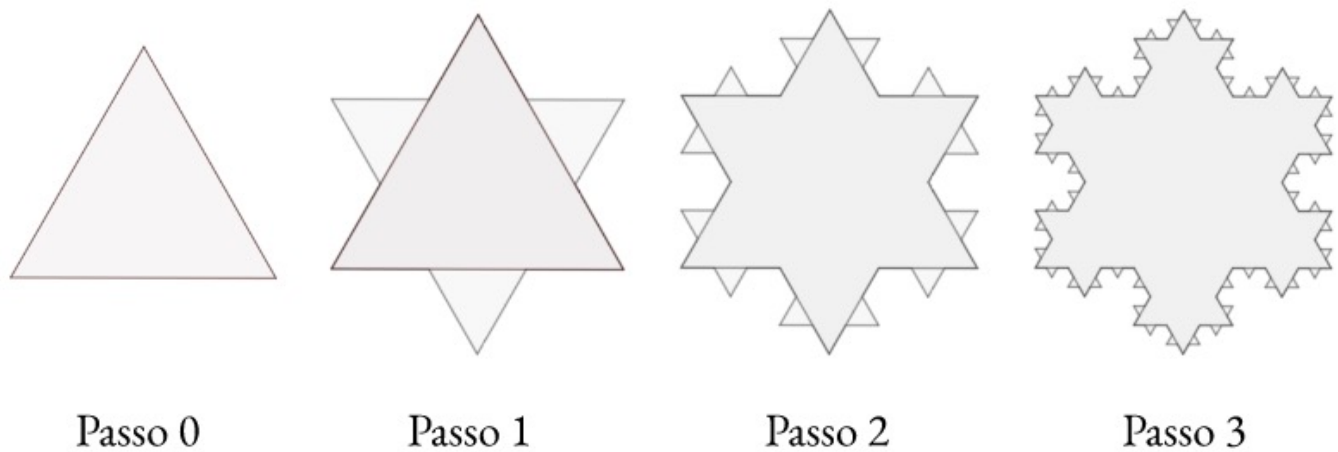


Foglio di calcolo

	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	2	4	0.33	1.33
3	3	16	0.11	1.78
4	4	64	0.04	2.37
5	5	256	0.01	3.16
6	6	1024	0	4.21
7	7	4096	0	5.62
8	8	16384	0	7.49
9	9	65536	0	9.99
10	10	262144	0	13.32
11	11	10485...	0	17.76
12	12	41943...	0	23.68
13	13	16777...	0	31.57
14	14	67108...	0	42.09
15	15	26843...	0	56.12
16	16	10737...	0	74.83
17	17	42949...	0	99.77
18	18	17179...	0	133.03
19	19	68719...	0	177.38
20	20	27487...	0	236.5
21	21	10995...	0	315.34
22	22	43980...	0	420.45

Osservate la successione di figure: ogni lato viene diviso in tre parti uguali, sulla parte centrale si costruisce un triangolo equilatero e in seguito si esclude il lato del triangolo sul lato iniziale.

Si procede così a ogni passo.



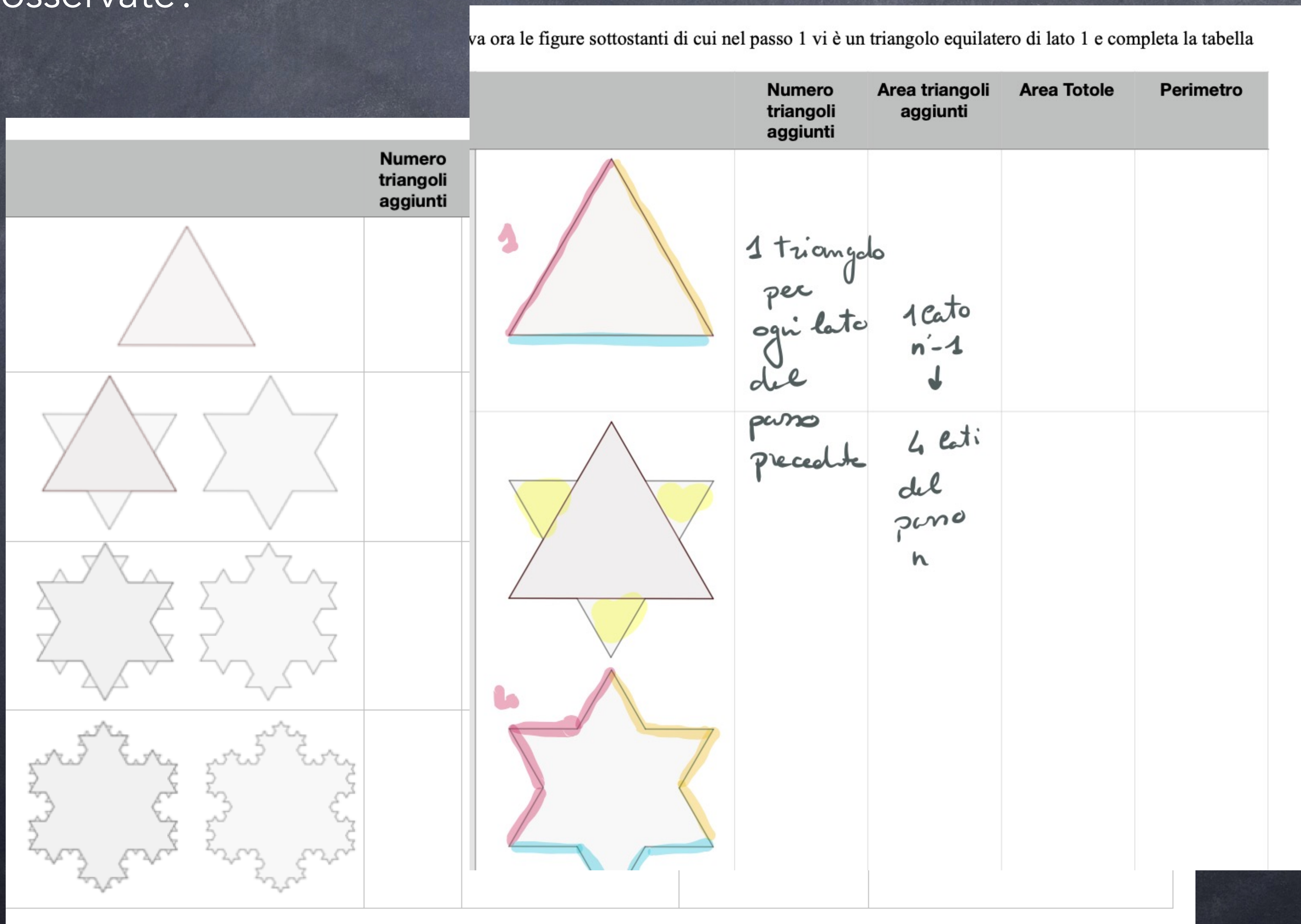
Calcola l'area e il perimetro delle figure qui rappresentate

Qual è il perimetro e quale è l'area della figura al Passo 5? E al passo 10?

Cosa succede all'area e al perimetro della figura al crescere del passo n? Riuscite a trovare un modello matematico che approssimi l'andamento?

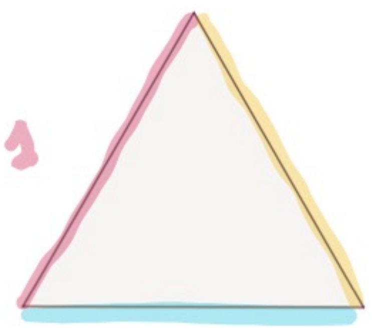
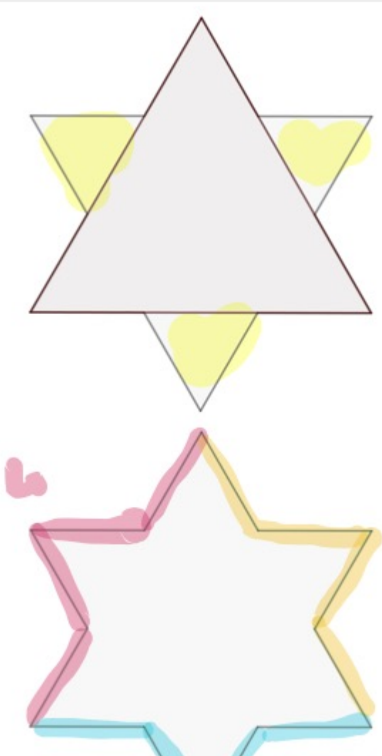
Che cosa osservate?

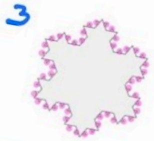
Cosa succede all'area e al perimetro della figura al crescere del passo n?
Riuscite a trovare un modello matematico che approssimi l'andamento?
Cosa osservate?



Passo	N. lati	Lungh. lato	Perimetro	N. triangoli aggiunti	Area triang aggiunti	Area
0	3	1	3		$\frac{1}{2}\sin(60°) =$ $= k$	$A_0 = \frac{1}{2}\sin(60°) = k$
1	$3 \cdot 4^1$	$\frac{1}{3}$	$3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$	3	$k\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}k$	$A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9}k = k\left(1 + 3\frac{1}{9}\right)$
2	$3 \cdot 4^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$	$3 \cdot 4^1$	$k\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 =$ $= \left(\frac{1}{9}\right)^2 k$	$A_2 = A_1 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 k = k\left(1 + 3\frac{1}{9} + 3 \cdot 4\left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$
3	$3 \cdot 4^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$	$3 \cdot 4^2$	$k\left(\frac{1}{3^3}\right)^2 =$ $= \left(\frac{1}{9}\right)^3 k$	$A_3 = A_2 + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 k =$ $= k\left(1 + 3\frac{1}{9} + 3 \cdot 4\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot 4^2\left(\frac{1}{9}\right)^3\right)$
n	$3 \cdot 4^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$	$3 \cdot 4^{n-1}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^n k$	$A_n = A_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n k$

Osserva ora le figure sottostanti di cui nel passo 1 vi è un triangolo equilatero di lato 1 e completa la

Passo		Numero triangoli aggiunti	Area triangoli aggiunti	Area Totole	Peri
1		1 triangolo per ogni lato del passo precedente	1 lato n-1 ↓ 4 lati del passo n		
2					

PASSO		LUNGHEZ LATO	AREA TRIANGOLINO	NUMERO TRIANGOLINI	AREA TOTALE
0		1	$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\sin(60°)}_{\text{costante } k}$	1	$a_0 = \frac{\sin(60°)}{2}$
1		$\frac{1}{3}$	$k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$	3 3·4 lati	$a_1 = k + 3k\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $a_1 = a_0 + 3k\left(\frac{1}{3}\right)^2$
2		$\frac{1}{3^2}$ Legge del perimetro	$k\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^2$	3·4 (1 per ogni lato passo prima) $3\cdot 4^2$ lati	$a_2 = a_1 + 3\cdot 4\cdot k\left(\frac{1}{3^2}\right)^2$
3		$\frac{1}{3^3}$	$k\cdot\left(\frac{1}{3^3}\right)^2$	$3\cdot 4^2$ (48)	$a_3 = a_1 + 3\cdot 4^2\cdot k\cdot\left(\frac{1}{3^3}\right)^2$
n		$\frac{1}{3^n}$	$k\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 =$ $= k\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n$	$3\cdot 4^{n-1}$	$a_n = a_{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}\cdot k\left(\frac{1}{9}\right)^n$

L'andamento dell'area e del perimetro sono rappresentabili con una funzione esponenziale

Al crescere di n aumenta sia l'area che il perimetro della figura, dato che ad ogni passo vengono aggiunti dei nuovi triangoli a quelli già presenti in precedenza

a_{n-1} = area passo precedente
atg = area triangoli aggiunti
$a_n = a_{n-1} + 3*4^{n-1}$ atg
Al crescere di n sia l'area sia il perimetro aumentano

Non siamo riusciti a rappresentare graficamente perché ci mancavano dei dati che non siamo riusciti a calcolare correttamente. Con il grafico avremmo potuto trovare la risposta, forse

Apparentemente l'area della figura sembra costante in ogni passo, secondo noi però si tratta di un'approssimazione poiché l'area dei triangolini è talmente piccola che rimane difficile trovare le differenze

Secondo noi l'andamento del grafico deve sicuramente essere un qualcosa di esponenziale, dato che la maggior parte dei dati aumentano sempre.

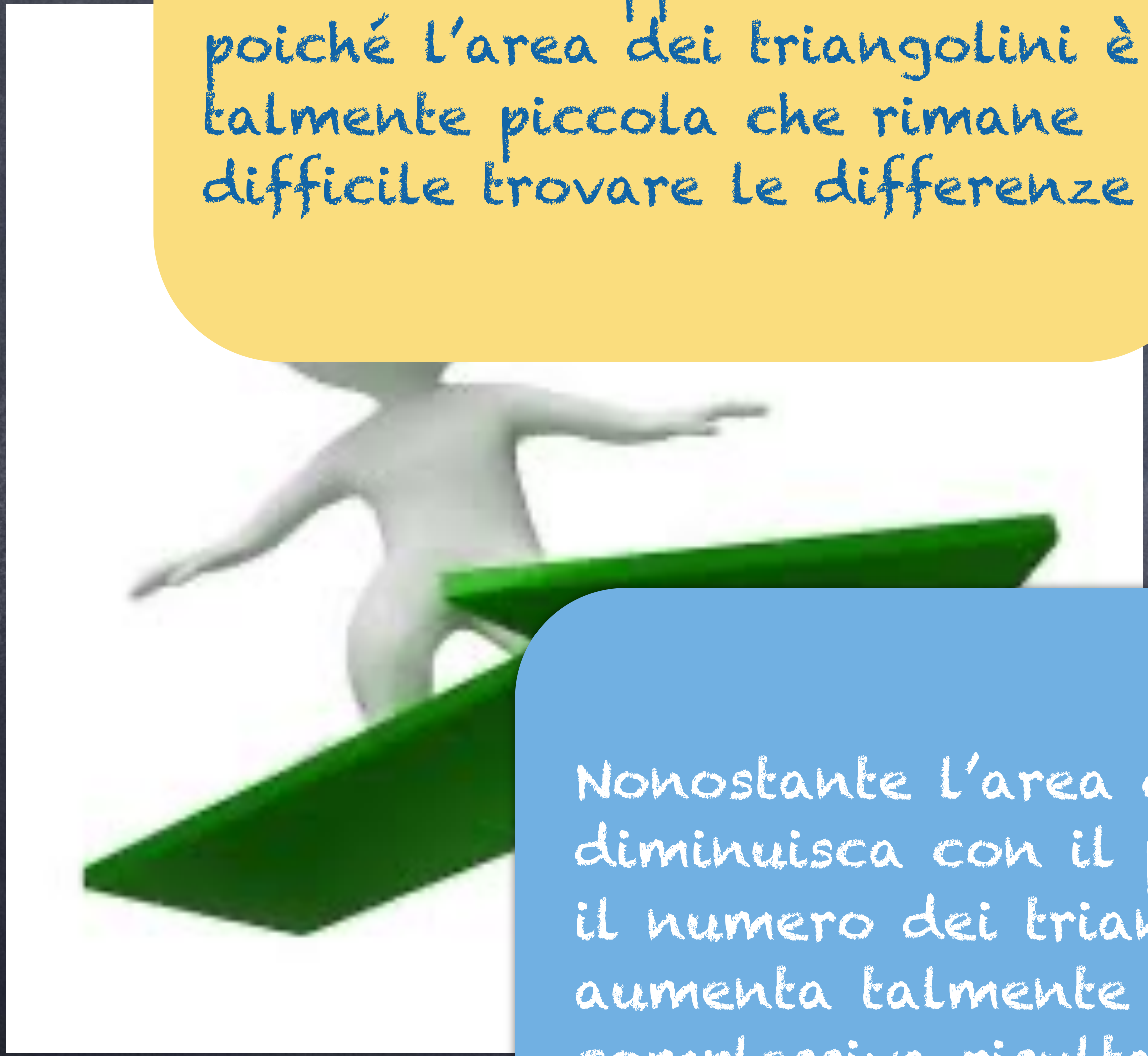
Al crescere di n l'area ed il perimetro della figura aumentano. Nello specifico, all'area e al perimetro della figura precedente si sommano quelli dei triangoli in più

Nonostante l'area dei triangolini diminuisca con il passare dei passi, il numero dei triangolini che aumenta talmente tanto che l'area complessiva risulta crescere

Tutti in accordo nel pensare che perimetro e area si comportano allo stesso m
Entrambi,
credenza?

Apparentemente l'area della figura sembra costante in ogni passo, secondo noi però si tratta di un'approssimazione poiché l'area dei triangolini è talmente piccola che rimane difficile trovare le differenze

Non siamo riusciti a rappresentare graficamente perché ci mancavano dei dati che non siamo riusciti a calcolare correttamente. Con il grafico avremmo potuto trovare la risposta, forse



Nonostante l'area dei triangolini diminuisca con il passare dei passi, il numero dei triangolini che aumenta talmente tanto che l'area complessiva risulta crescere

Passo	N lati	Lunghezza lati	N tr aggiunti	Area tr aggiunto	Area Tot	Perimetro
1	3	1	0	0	0.43301270...	3
2	12	0.333333333333333	3	0.048112522432469	0.57735026...	4
3	48	0.111111111111111	12	0.00534583582583	0.64150029...	5.33333...
4	192	0.037037037037037	48	0.000593981758426	0.67001142...	7.11111...
5	768	0.012345679012346	192	0.000065997973158	0.68268303...	9.48148...
6	3072	0.004115226337449	768	0.000007333108129	0.68831486...	12.6419...
7	12288	0.001371742112483	3072	0.000000814789792	0.69081789...	16.8559...
8	49152	0.000457247370828	12288	0.000000090532199	0.69193035...	22.4746...
9	196608	0.000152415790276	49152	0.000000010059133	0.69242478...	29.9661...
10	786432	0.000050805263425	196608	0.000000001117681	0.69264452...	39.9548...
11	3145728	0.000016935087808	786432	0.000000000124187	0.69274219...	53.2731...
12	12582912	0.000005645029269	3145728	0.000000000013799	0.69278559...	71.0309...
13	50331648	0.000001881676423	12582912	0.000000000001533	0.69280488...	94.7078...
14	201326592	0.000000627225474	50331648	0.00000000000017	0.69281346...	126.277...
15	805306368	0.000000209075158	201326592	0.000000000000019	0.69281727...	168.369...

08:09 Dom 27 feb — 3G 13%

Passo	N lati	Lunghezza lati	N tr aggiunti	Area tr aggiunto	Area Tot	Perimetro
1	3	1	0	0	0.43301270...	3
2	12	0.333333333333333	3	0.048112522432469	0.57735026...	4
3	48	0.111111111111111	12	0.00534583582583	0.64150029...	5.33333...
4	192	0.037037037037037	48	0.000593981758426	0.67001142...	7.11111...
5	768	0.012345679012346	192	0.000065997973158	0.68268303...	9.48148...
6	3072	0.004115226337449	768	0.000007333108129	0.68831486...	12.6419...
7	12288	0.001371742112483	3072	0.000000814789792	0.69081789...	16.8559...
8	49152	0.000457247370828	12288	0.000000090532199	0.69193035...	22.4746...
9	196608	0.000152415790276	49152	0.000000010059133	0.69242478...	29.9661...
10	786432	0.000050805263425	196608	0.000000001117681	0.69264452...	39.9548...
11	3145728	0.000016935087808	786432	0.000000000124187	0.69274219...	53.2731...
12	12582912	0.000005645029269	3145728	0.000000000013799	0.69278559...	71.0309...
13	50331648	0.000001881676423	12582912	0.000000000001533	0.69280488...	94.7078...
14	201326592	0.000000627225474	50331648	0.00000000000017	0.69281346...	126.277...
15	805306368	0.000000209075158	201326592	0.000000000000019	0.69281727...	168.369...

$n \qquad 3\cdot 4^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad 3\cdot 4^{n-2}$

$\underline{\ell^2} \quad \underline{\sin(60^\circ)}$

$\frac{1}{2}\cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \sin(\alpha)$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]^2 \sin(60^\circ) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} K$$

AREA TOTALE: $A_n = A_{n-1} + 3\cdot 4^{n-2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} \cdot \sin(60^\circ)$

08:09 Dom 27 feb — 3G 13%

Se $K = \frac{\sin(60^\circ)}{2}$

$$A_1 = K$$

$$A_2 = K + 3\cdot 4^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2} K = K\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$A_3 = K + 3\cdot 4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 K + 3\cdot 4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 K = K\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}\right)$$

$$A_4 = K\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}\right) + 3\cdot 4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^6 K = K\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5}\right)$$

$$A_6 = K\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \frac{4^3}{3^7} + \frac{4^4}{3^9}\right)$$

$\frac{4^0}{3}$

$2\cdot 4+1$

$$A_n = K + K\left(\frac{4^0}{3} + \frac{4^1}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \dots + \frac{4^{n-2}}{3^{2(n-2)+1}}\right)$$

$$\frac{4^{n-2}}{9^{n-2}\cdot 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$$

$$A_n = K + \frac{1}{3}K\left(\left(\frac{4}{9}\right)^0 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

13 / 14

$$A_n = A_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n} \cdot K$$

$$A_n = A_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9} \cdot K$$

$$A_n = A_{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot$$

$$\boxed{A_n = A_{n-1} + \frac{K}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-}}$$

$$A_0 = K = \frac{1}{2}\sin(60)$$

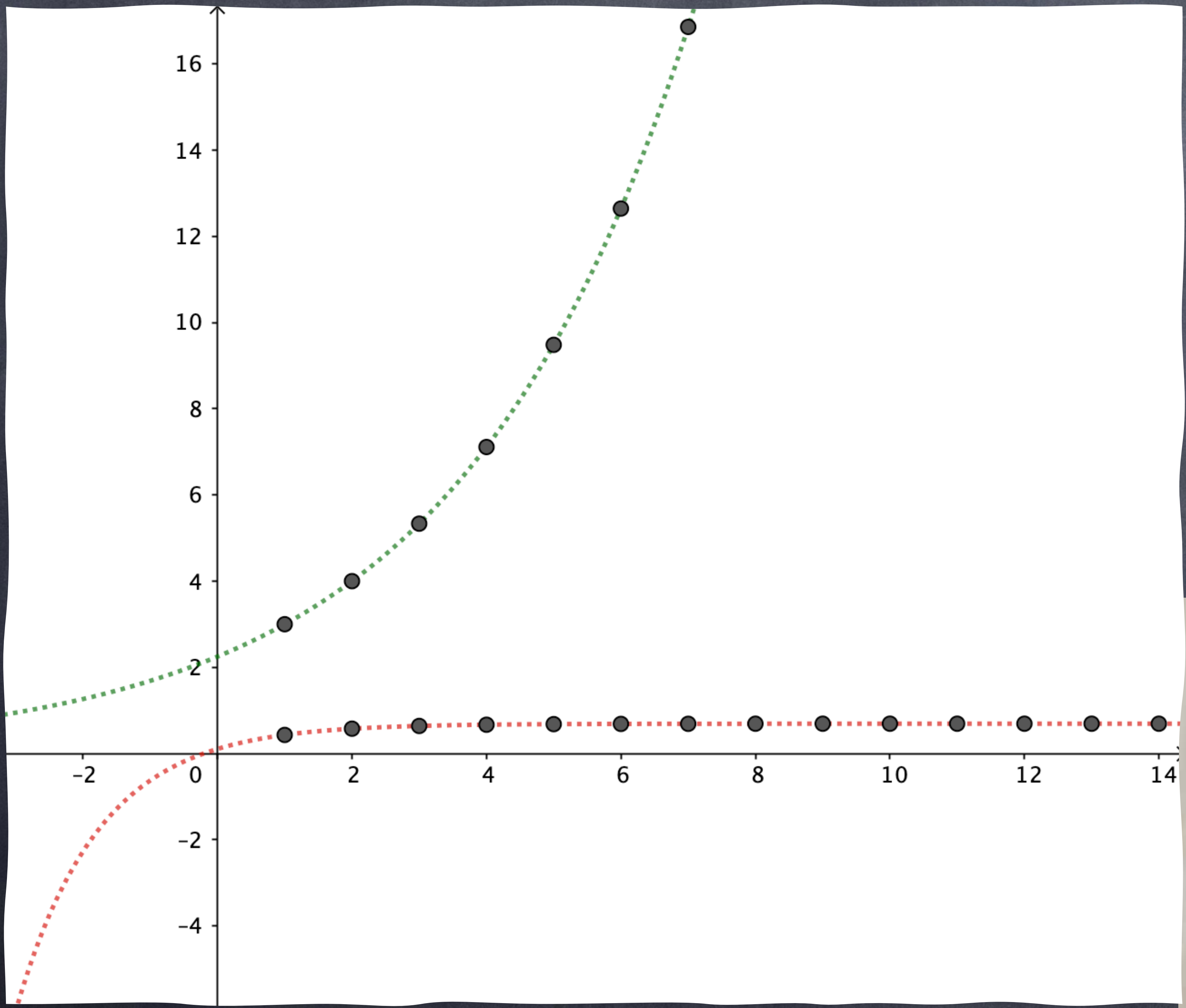
$$A_1 = K + \frac{K}{3}$$

$$A_2 = K + \frac{K}{3} + \frac{K}{3}\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$A_3 = K + \frac{K}{3} + \frac{K}{3}\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{K}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

...

$$A_n = K + \frac{K}{3}\underbrace{\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)}_{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^i}$$


16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14


Conflitti e punti di vista diversi
Registri diversi
Esponenziali
Progressioni
Limiti
Infinito: sempre uguale?
Algebra

IL TRIANGOLO DI SIERPINSKI

Individuate come si comporta la figura descritta al procedere dei passi. In particolare calcolare l'area e il perimetro della figura descritta.

La figura è costruita seguendo il seguente metodo iterativo in cui il passo zero corrisponde alla figura di partenza non ancora trasformata:

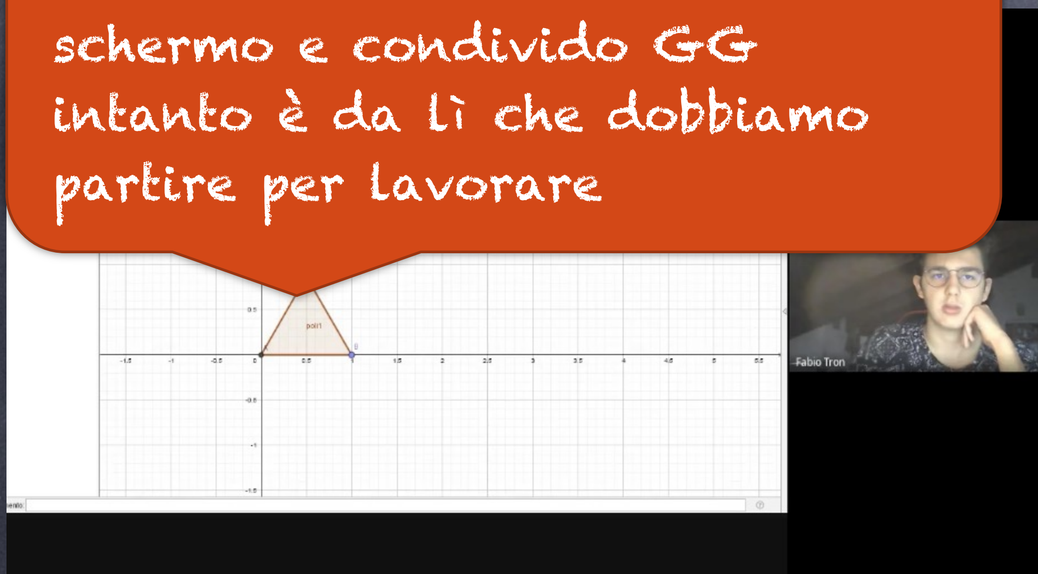
Passo 0: la figura di partenza è un triangolo equilatero, per comodità la lunghezza del lato è 1

Passo 1: si elimina dalla sua superficie il triangolo che ha come lati i segmenti che uniscono i punti medi dei lati del triangolo precedente, si ottengono 3 triangoli di lato ½

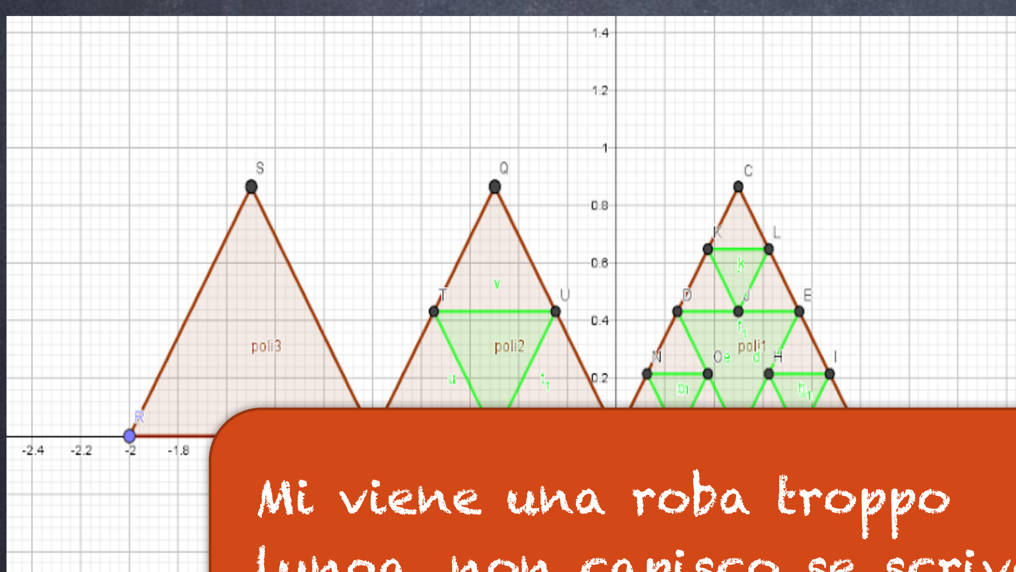
Passo 2: si ripete il procedimento su ognuno dei 3 triangoli che si sono così formati

…

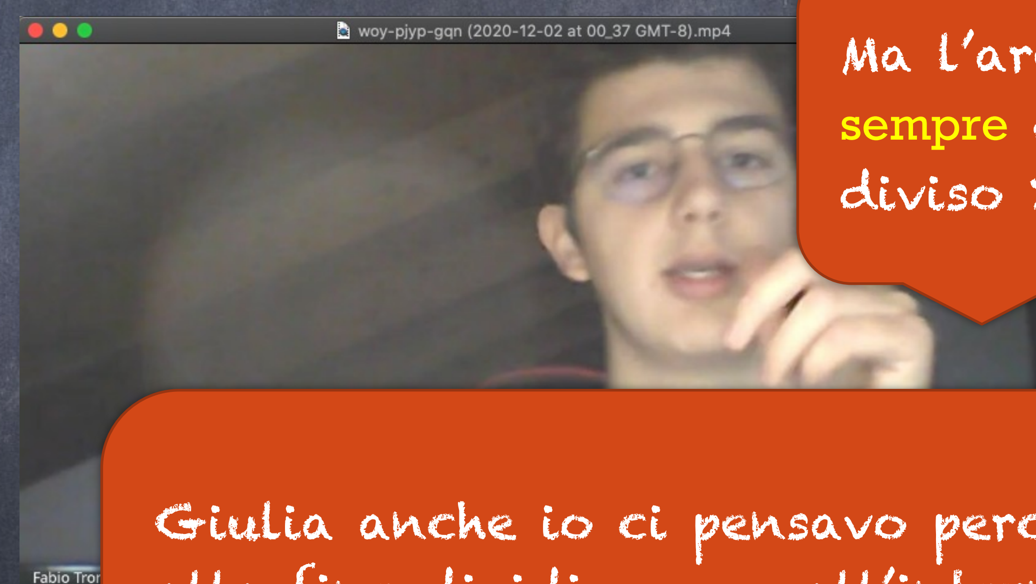
Fabio: Connetto un secondo lo schermo e condivido GG intanto è da lì che dobbiamo partire per lavorare



Proverei a fare almeno ancora una volta questo procedimento così poi vediamo i risultati. Voi magari iniziate a pensare al calcolo basandoci sul fatto che come dice dal testo un triangolo di questi piccoli è 1/3 di quello più... è 1/2 di quello più grande e sicuramente dovremmo lavorare con una funzione esponenziale o logaritmica

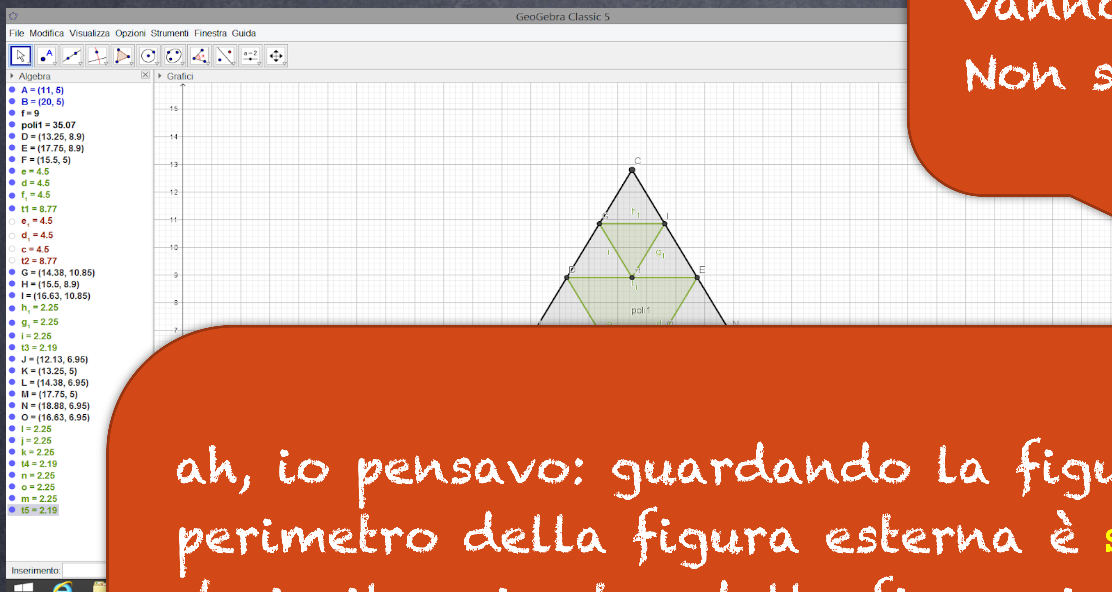


Mi viene una roba troppo lunga, non capisco se scrivo giusto o no



Ma l'area non è sempre diviso 4, diviso 8 e così via

Giulia anche io ci pensavo perché alla fine dividi sempre all'interno del triangolo in altri triangolini quindi si rimpicciolisce sempre di più

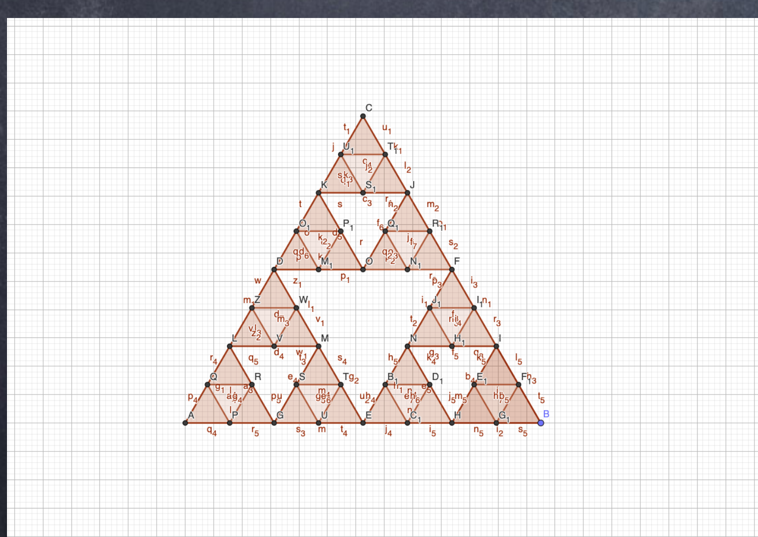


per perimetro si intende anche quel pezzo dei triangoli che si vanno a formare dentro o no? Non so...

per forza entrambi altrimenti è troppo semplice

ah, io pensavo: guardando la figura, il perimetro della figura esterna è sempre 3. Varia il perimetro della figura interna e delle figure interne se io immagino che il triangolino verde lo vado a togliere alla fine devo aggiungere al perimetro quei tre lati che mi rimangono, cioè devo aggiungere i lati del triangolo che tolgo

Dora: sì, sarà una successione di aree e una di perimetri
Emanuele: il perimetro esterno della figura è sempre lo stesso
Fabio: sì, quello esterno però ci sono tutti i triangolini dentro… è un po' un casino
Dora: sì ma è allucinante, non so quanto ci serva fare tutti i triangolini minuscoli
Fabio: era solo per vedere
Emanuele: secondo me sono due cose diverse



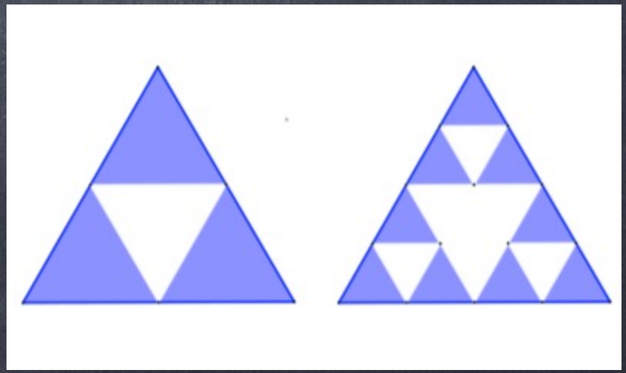
Chiara: io calcolerei il perimetro del triangolo più piccolo
Dora sì, ma di tutti i triangolini oppure di uno?
Erik sono uguali
Dora sì, ma tipo…il perimetro è il perimetro di un triangolo o di tutti i triangoli che ovviamente sono uguali?
Chiara secondo me di uno
Fabio di tutti

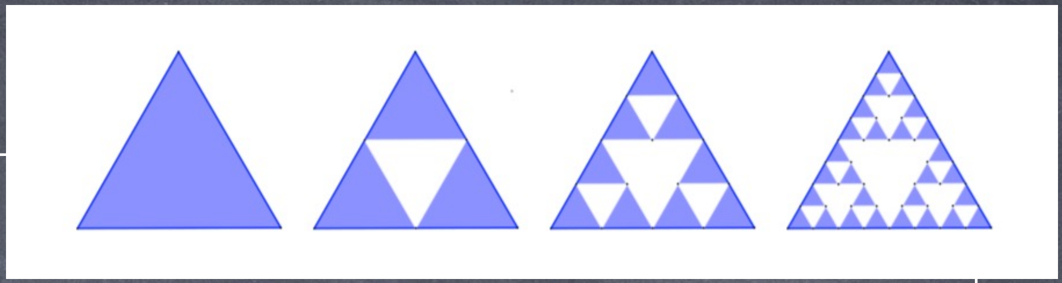
Fabio possiamo mettere perimetro totale, di un triangolo, ecc
alla fine per trovare il perimetro di un triangolo è facile perché il lato si dimezza sempre di due e poi devi moltiplicare per tre

Dora quindi cosa scriviamo? Perimetro di un triangolo e poi perimetro della somma dei triangoli?
Erik: il perimetro del passo zero è 3, il perimetro di un triangolo al passo 1 è $\frac{3}{2}$ perché fai $3 \cdot \frac{1}{2}$

Chiara passo due perimetro è $3 \cdot \frac{1}{4}$ e poi l'area $\frac{9}{4}$
Dora Ne prendi 9, ma dividi per 4 un quarto del triangolo

Fabio anche il numero dei triangoli si ripete sempre… dividi per 3…. 3n



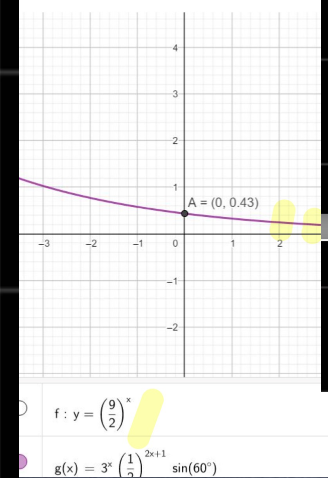


Passo	Lunga. Lato	N. Triangoli	Perimetro	Area
0	1	1	3	$\frac{1}{2}\sin(60°)$
1	$\frac{1}{2}$	3	$3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{1}{2}\cdot 9$	$\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3=\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	3^2	$3\cdot\frac{1}{4}\cdot 3^2$	$\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\cdot 3^2=\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	3^3	$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 3^3$	$\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)^2\cdot 3^3=\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	3^4	$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 3^4$	$\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{1}{2^4}\right)^2\cdot 3^4=\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	3^n	$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\cdot 3^n=\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Per ottenere la formula per tutto il complesso della figura, moltiplico per il numero dei triangoli più piccoli che si sono fotmati all'alumentare dei passi:

Area=(3^n)•(½^2n+1)•t

vedere il comportamento dell'area in base
ottenendo una funzione che incontra l'ass
neno formando un asintoto orizzontale sull'



Dal grafico sovrastante si può notare e quindi affermare che ALL'AUMENTARE DEI PASSI L'AREA DECRESCERÀ, IL SUO ANDAMENTO PREVEDE UNA DECRESCITA SEMPRE MAGGIORE SINO

A TENDERE A ZERO.

guardando la funzione del perimetro(g(x)).
Ovviamente questo grafico non rappresenta perfettamente il modello, in quanto dovremmo considerare soltanto i punti delle funzioni con il valore sull'asse delle x Є N

CONCLUSIONI:

Dopo aver analizzato le due funzioni posso quindi dire che in base all'aumentare di n, si comportano in maniera opposta:

- Il perimetro cresce sempre più
- L'area decresce sempre di meno

Alla luce di quanto detto in classe e in gruppo prova a rispondere alla stessa consegna del lavoro di gruppo. Scrivi a parole la risposta supportata da tutti gli aspetti grafici, algebrici, numerici che ritieni importanti e necessari. Giustifica matematicamente le tuo risposte

Lo scopo dei grafici che ho realizzato è quello di spiegare come variano perimetro e area al variare di n e che cosa succede quando il passo n cresce, anche se per essere pienamente corretti dovrebbero essere di tipo discreto, e non continuo. Il valore del perimetro aumenta progressivamente, all'aumentare di n, mentre quello dell'area diminuisce.

COMPITI DELLE VACANZE: IL TRIANGOLO DI SIERPINSKI

CONSEGNA:

Alla luce di quanto detto in classe e in gruppo prova a rispondere alla stessa consegna del lavoro di gruppo.
Scrivi a parole la risposta supportata da tutti gli aspetti grafici, algebrici, numerici che ritieni importanti e necessari.
Giustifica matematicamente le tue risposte.

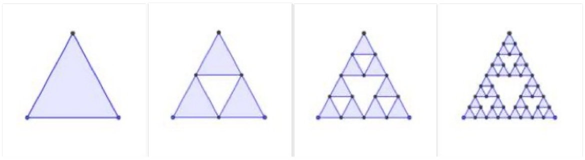
Questo triangolo è costruito seguendo il seguente metodo iterativo in cui il passo zero corrisponde alla figura di partenza non ancora trasformata:

- Passo 0: la figura di partenza è un triangolo equilatero, per comodità la lunghezza del lato è 1
- Passo 1: si elimina dalla sua superficie il triangolo che ha come lati i segmenti che uniscono i punti medi dei
lati del triangolo precedente, si ottengono 3 triangoli di lato 1⁄2
- Passo 2: si ripete il procedimento su ognuno dei 3 triangoli che si sono così format
- ...

Come varia il perimetro e l'area al variare di n? Cosa succede se il passo n cresce?

RISPOSTE:

Innanzitutto disegno su GeoGebra i primi passi della costruzione del Triangolo di Sierpinski, per avere un riferimento visivo durante la risposta alle domande.

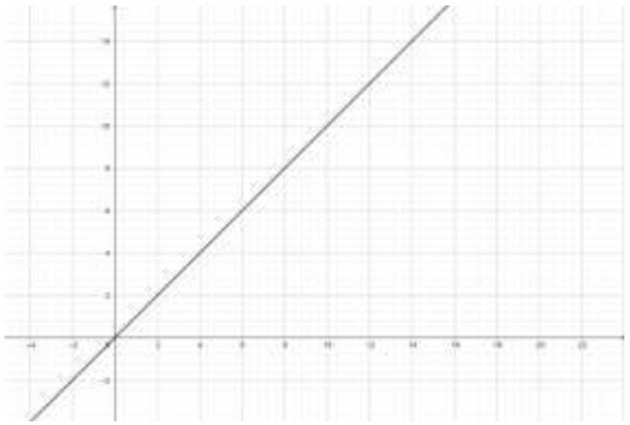
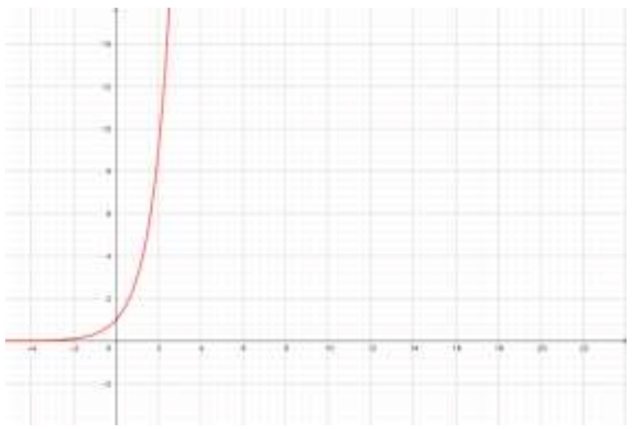


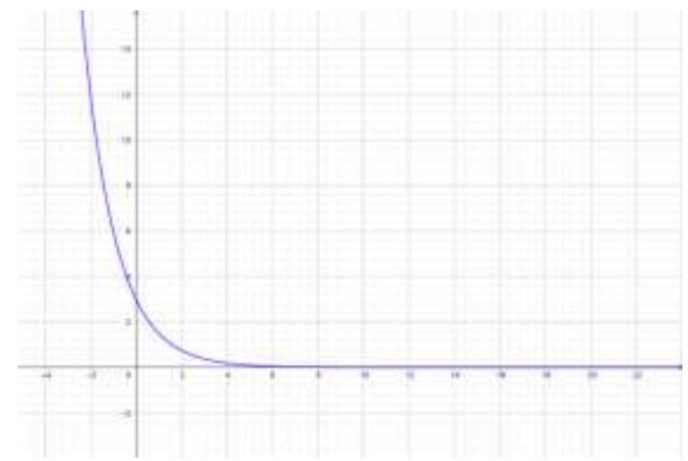
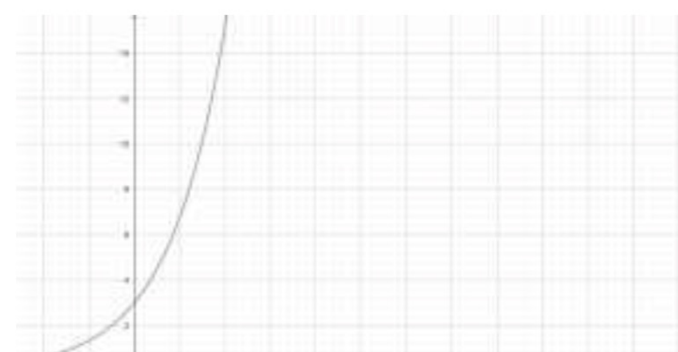
Passo 0 Passo 1 Passo 2 Passo 3

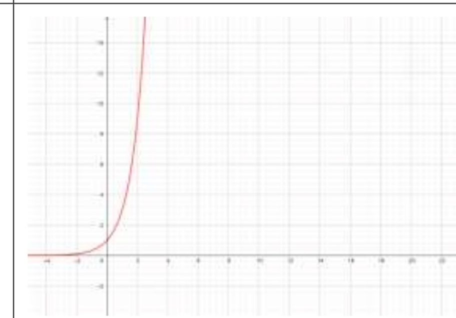
Ho deciso di far partire la numerazione dei passi da 0.
Procedo ora a trovare il numero di triangolini che ci sono a ogni passo da 0 a 3, dato che poi utilizzo per trovare un'equazione che rappresenti questo valore al variare di n (incognita con cui definisco il numero del passo).

Passo	Numero di triangolini
0	$1=3^0$
1	$3=3^1$
2	$9=3^2$

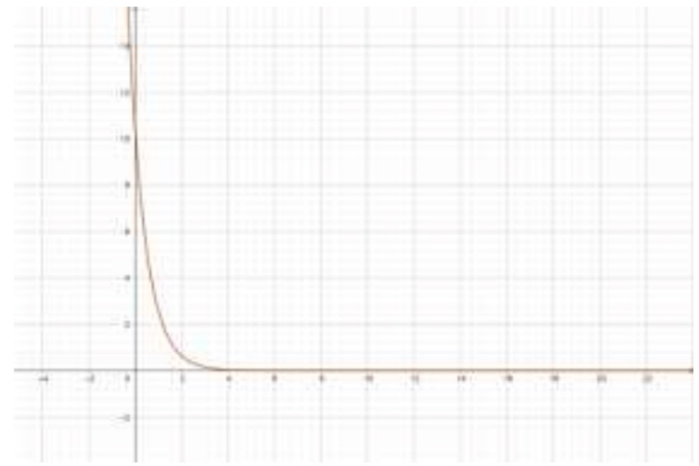
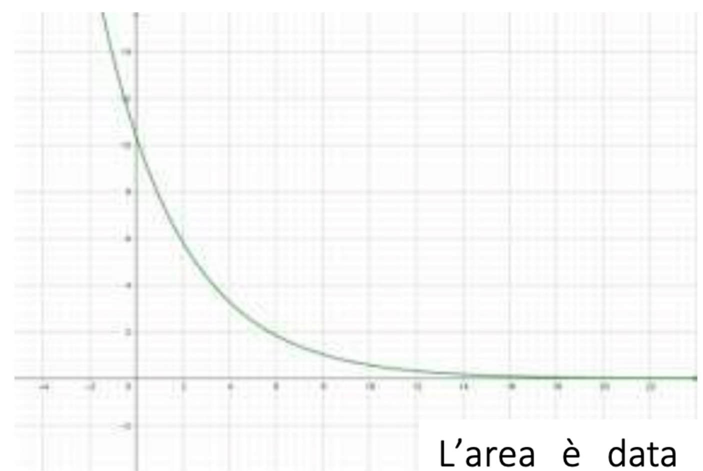
Tabella riassuntiva con le formule, le funzioni e il loro grafico:

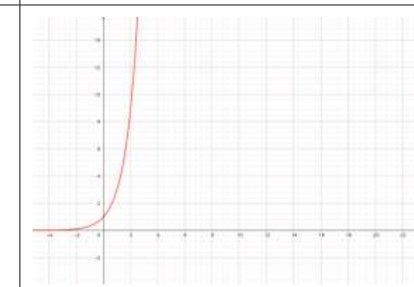
Definizione	Formula	Funzione	Grafico
Passo	n	$y=x$	
Numero di triangolini	3^n	$f(x)=3^x$	

Perimetro di un triangolino	p=$\frac{1}{2^n}\cdot 3$	g(x)= $\frac{1}{2^x}\cdot 3$	
Perimetro totale del triangolo	p= $\frac{1}{2^n}\cdot 3^{n+1}$	h(x)= $\frac{1}{2^x}\cdot 3^{x+1}$	

Numero di triangolini	3^n	f(x)=3^x	

Il perimetro è dato dal numero dei triangolini moltiplicato per il perimetro di un singolo triangolino; osservando le funzioni che rappresentano questi due valori si può vedere come la prima cresce notevolmente (in modo, per l'appunto, esponenziale), mentre la seconda decresce. Tuttavia, è osservabile che g(x) decresce meno di quanto non cresca f(x) o, in altre parole, che il valore assoluto delle differenze finite prime della funzione f(x) è maggiore di quello delle differenze finite prime della funzione g(x). Si spiega così il motivo per cui la funzione del perimetro totale del triangolo di Sierpinski cresce procedendo con i passi, ma meno di quanto non faccia il numero dei triangolini.

Area di un triangolino	$A=\frac{6\sqrt{3}}{2^{2n}}$	$i(x)= \frac{6\sqrt{3}}{2^{2x}}$	
Area totale del triangolo	$A=3^{n}\cdot \frac{6\sqrt{3}}{2^{2n}}$	$j(x)= 3^{x}\cdot \frac{6\sqrt{3}}{2^{2x}}$	

Numero di triangolini	3^n	$f(x)=3^x$	

L’area è data dal numero di triangolini moltiplicato per l'area di un singolo triangolino; osservando le funzioni che rappresentano invece questi due valori si può vedere come la seconda, al contrario della prima, decresca notevolmente. In questo caso, però, la funzione f(x) cresce meno di quanto non decresca i(x) o, in altre parole, il valore assoluto delle differenze finite prime della funzione i(x) è maggiore di quello delle differenze finite prime della funzione f(x). Si spiega così il motivo per cui la funzione dell’area totale del triangolo di Sierpinski decresce procedendo con i passi, ma meno di quanto non faccia l’area di un singolo triangolino. Ciò può anche essere “confermato” visivamente, in quanto a ogni passaggio si ritagliano e si tolgono alcuni triangolini sempre più piccoli dalla figura.

Qualcosa di più "semplice"

Immagina di avere una successione di figure costruita in modo ricorsivo:

- Passo zero: quadrato di lato 1 (un rettangolo di base 1 e altezza 1)

- Passo ennesimo: base doppia alla base del rettangolo del passo precedente e altezza pari alla metà dell'altezza del rettangolo del passo precedente

- Cosa succede all'area e al perimetro del rettangolo al variare di n?

La parola sempre e l'uso del futuro (gesti)
Riferimenti alla teoria "del momento"
Registro numerico e valori in tabella
Far parlare la formula (che diventa dinamica)
Confronto tra situazioni diverse
Confroto per convincersi (attraverso grafico o ripetendo i concetti)
Uso del disegno
Dubbi e stupori espliciti che "profumano" per i docenti

Grazie!

silvia.beltramino@gmail.com