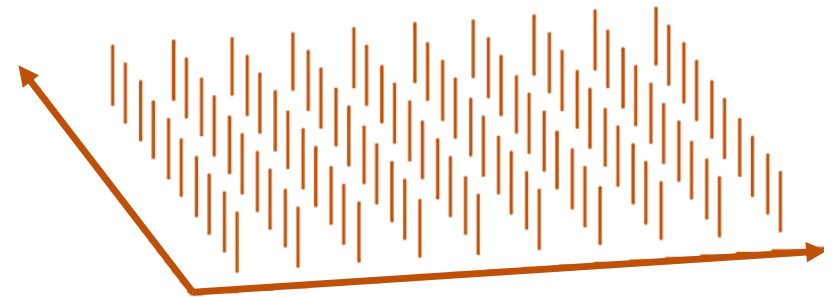


Visualizzazione dinamica di concetti matematici

3. Il frutteto di Euclide

Quali alberi di coordinate (m,n)
sono visibili dall'origine? $(m,n > 0)$



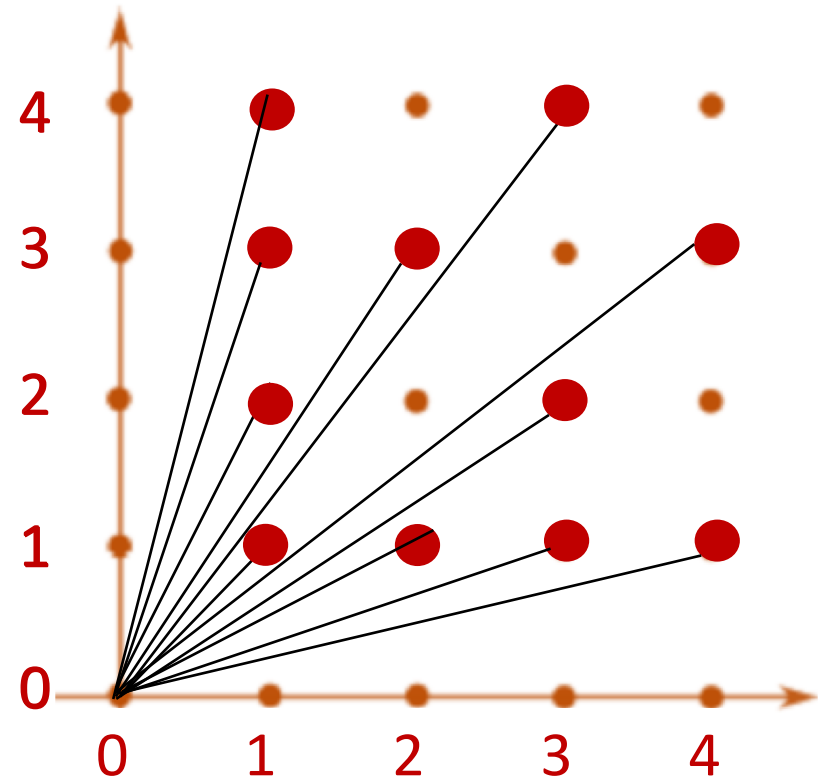
Visualizzazione dinamica di concetti matematici

3. Il frutteto di Euclide

Quali alberi di coordinate (m,n)
sono visibili dall'origine? $(m,n>0)$

Quelli nei punti del reticolo (m, n) ,
dove m e n sono coprimi.

Un nuovo 'visual pattern'.



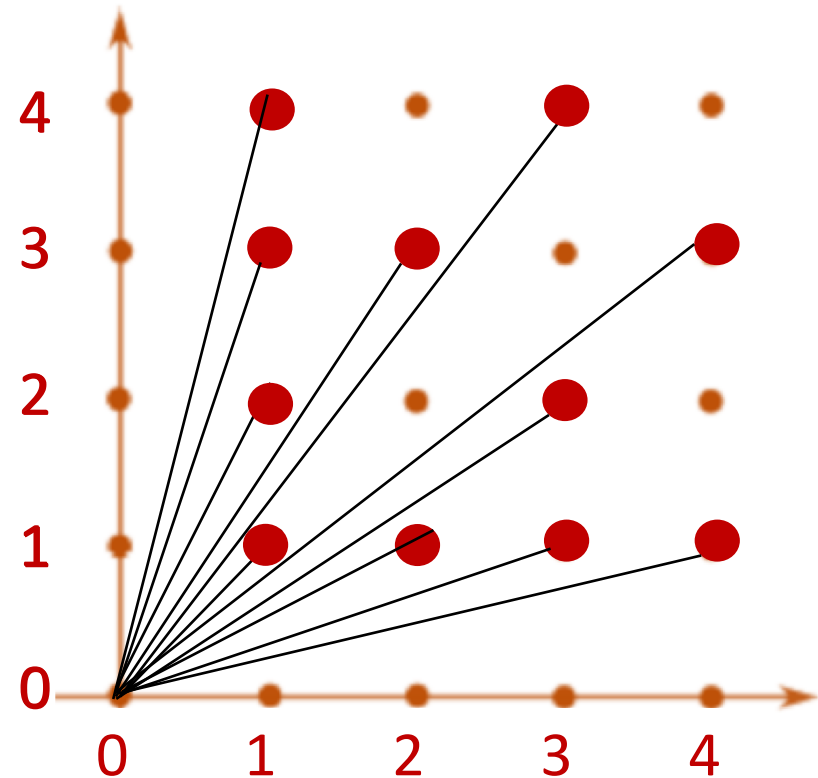
Visualizzazione dinamica di concetti matematici

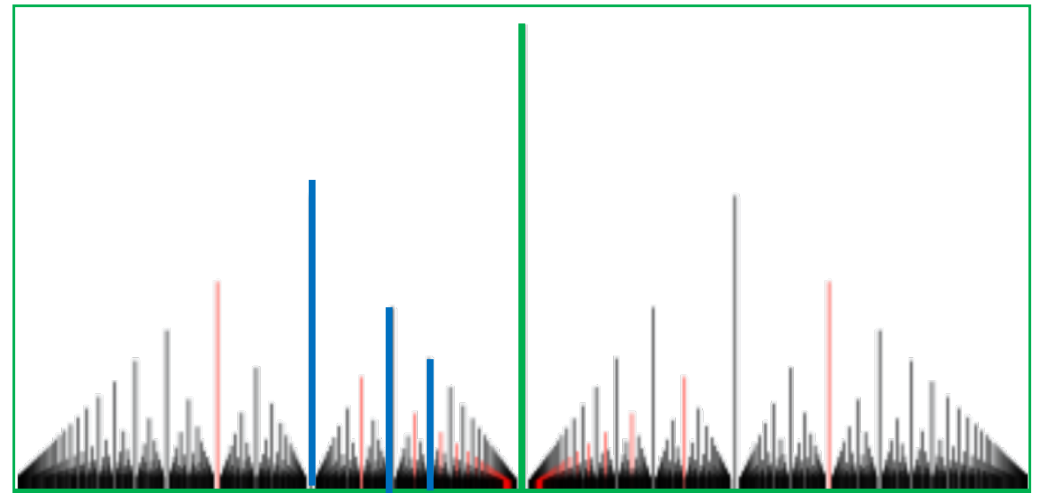
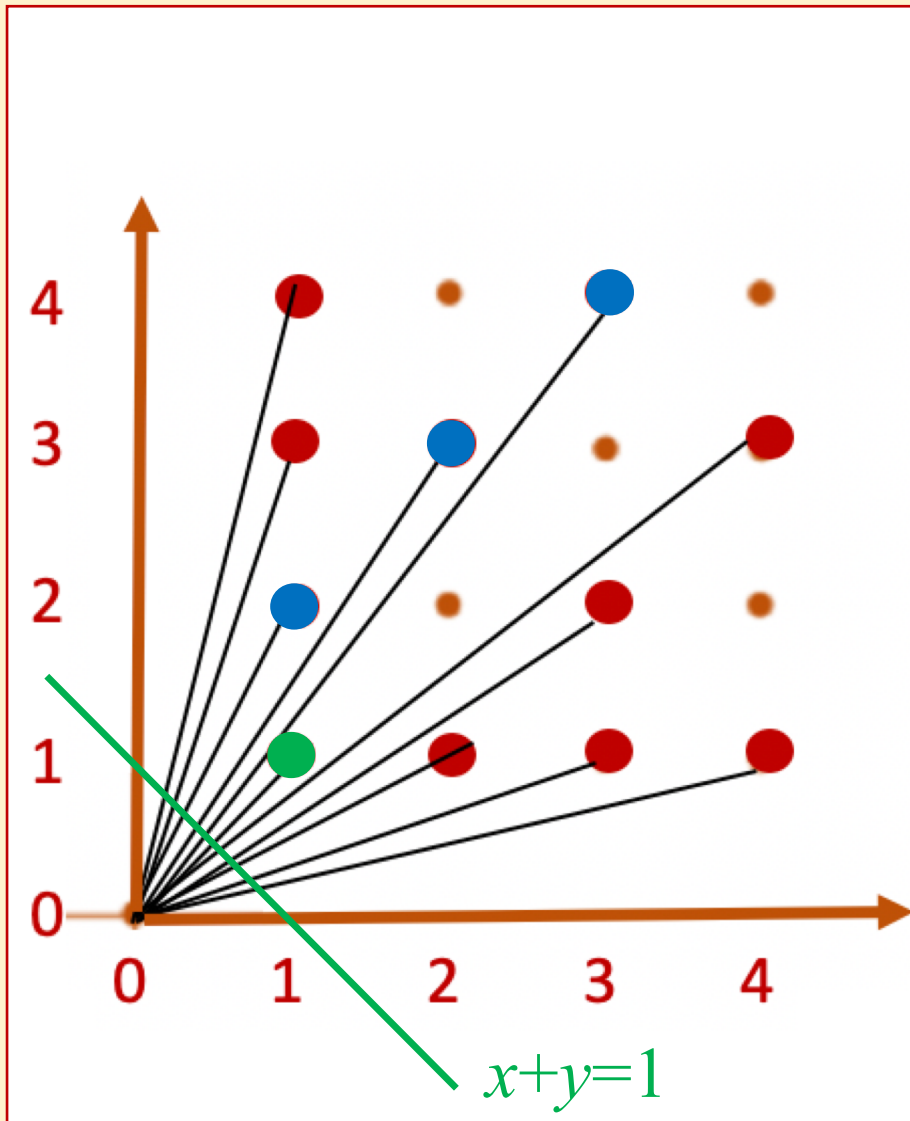
3. Il frutteto di Euclide

Quali alberi di coordinate (m,n)
sono visibili dall'origine? $(m,n>0)$

Quelli nei punti del reticolo (m, n) ,
dove m e n sono coprimi.

Un nuovo 'visual pattern'.

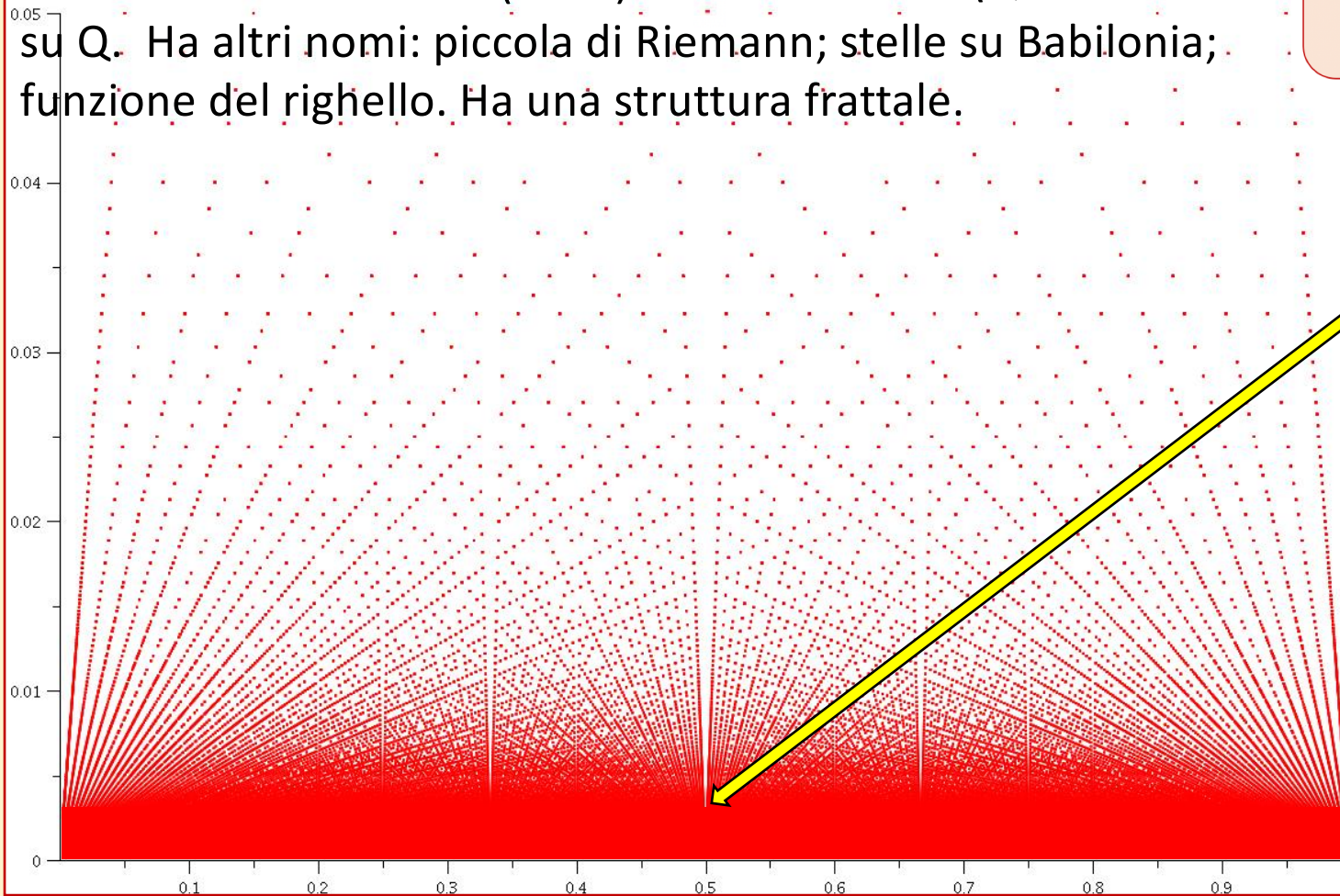




L'albero (m,n) è visto con traccia $(m/(m+n), n/(m+n))$ sul piano $z=0$.
 È alto $1/(m+n)$ sul piano $x+y=1$.

La funzione (Thomae, 1875) raffina la funzione totalmente discontinua di Dirichlet (1829): è continua su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e discontinua su \mathbb{Q} . Ha altri nomi: piccola di Riemann; stelle su Babilonia; funzione del righello. Ha una struttura frattale.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{se } x = p/q \\ & (p/q \text{ ai minimi termini e } q > 0) \end{cases}$$



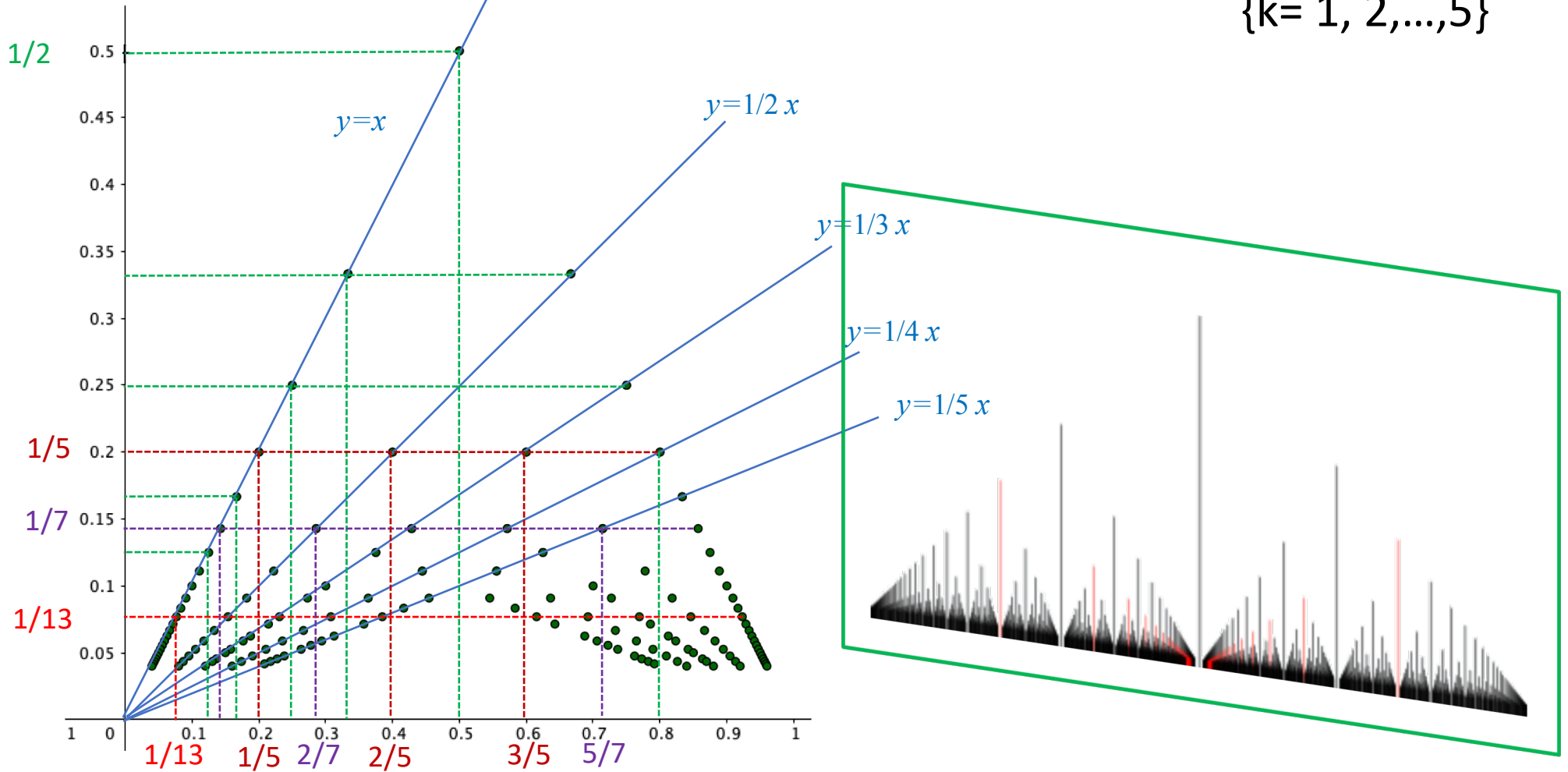
C.J. Thomae
(1840-1921)

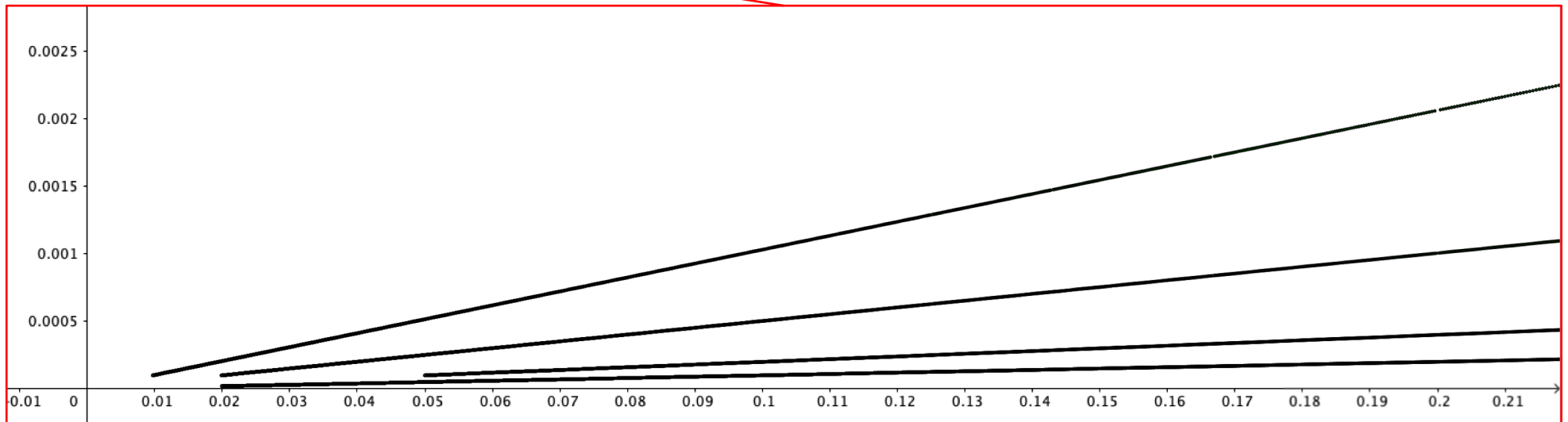
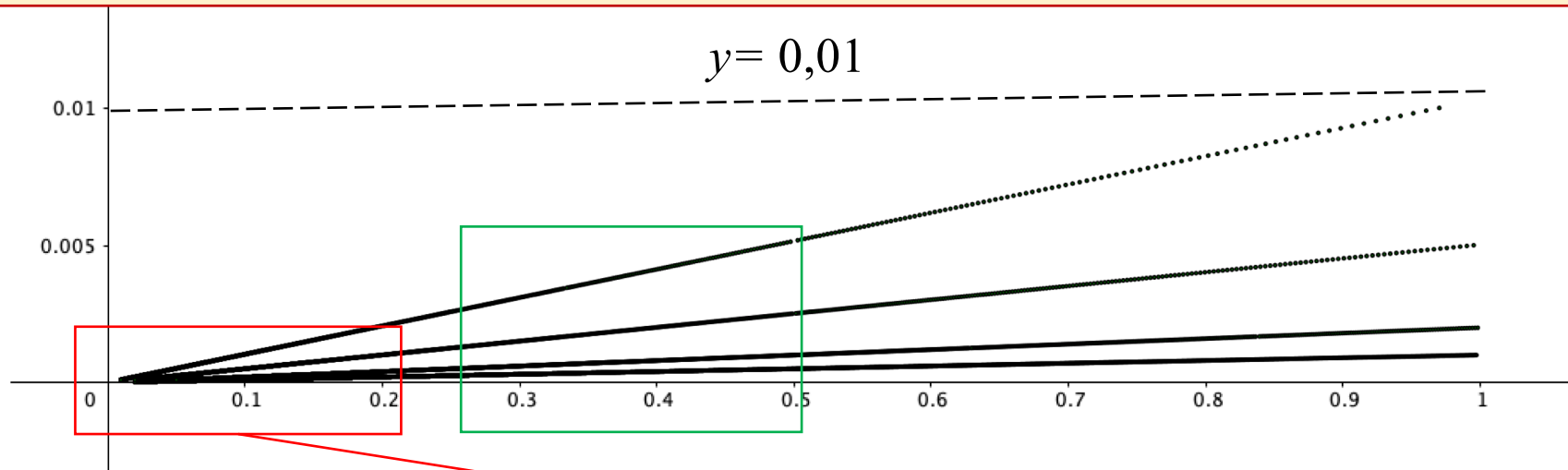
Visualizzazione dinamica di concetti matematici

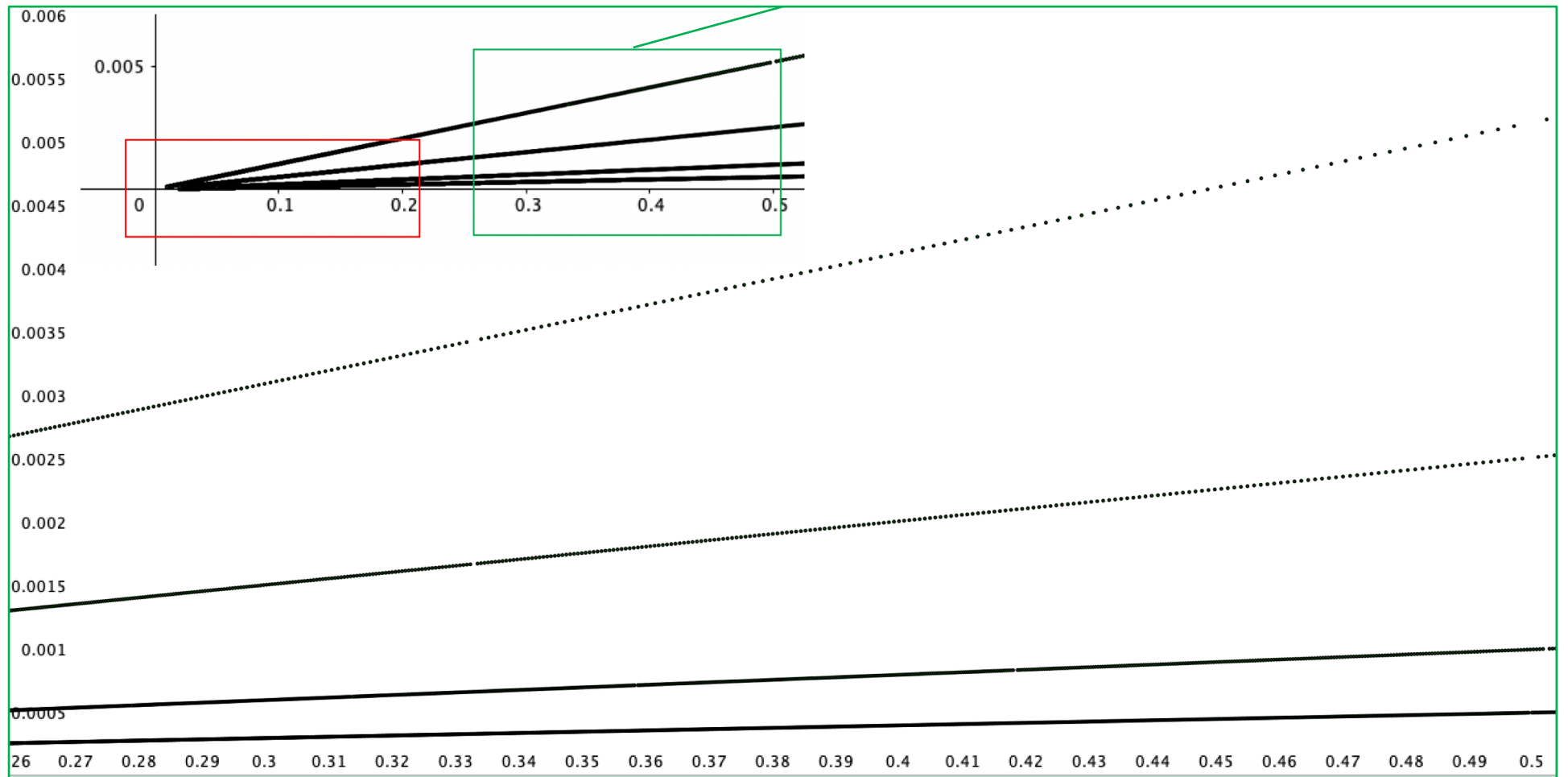
(Dis)continuità e funzione popcorn (non-esempi e controesempi)

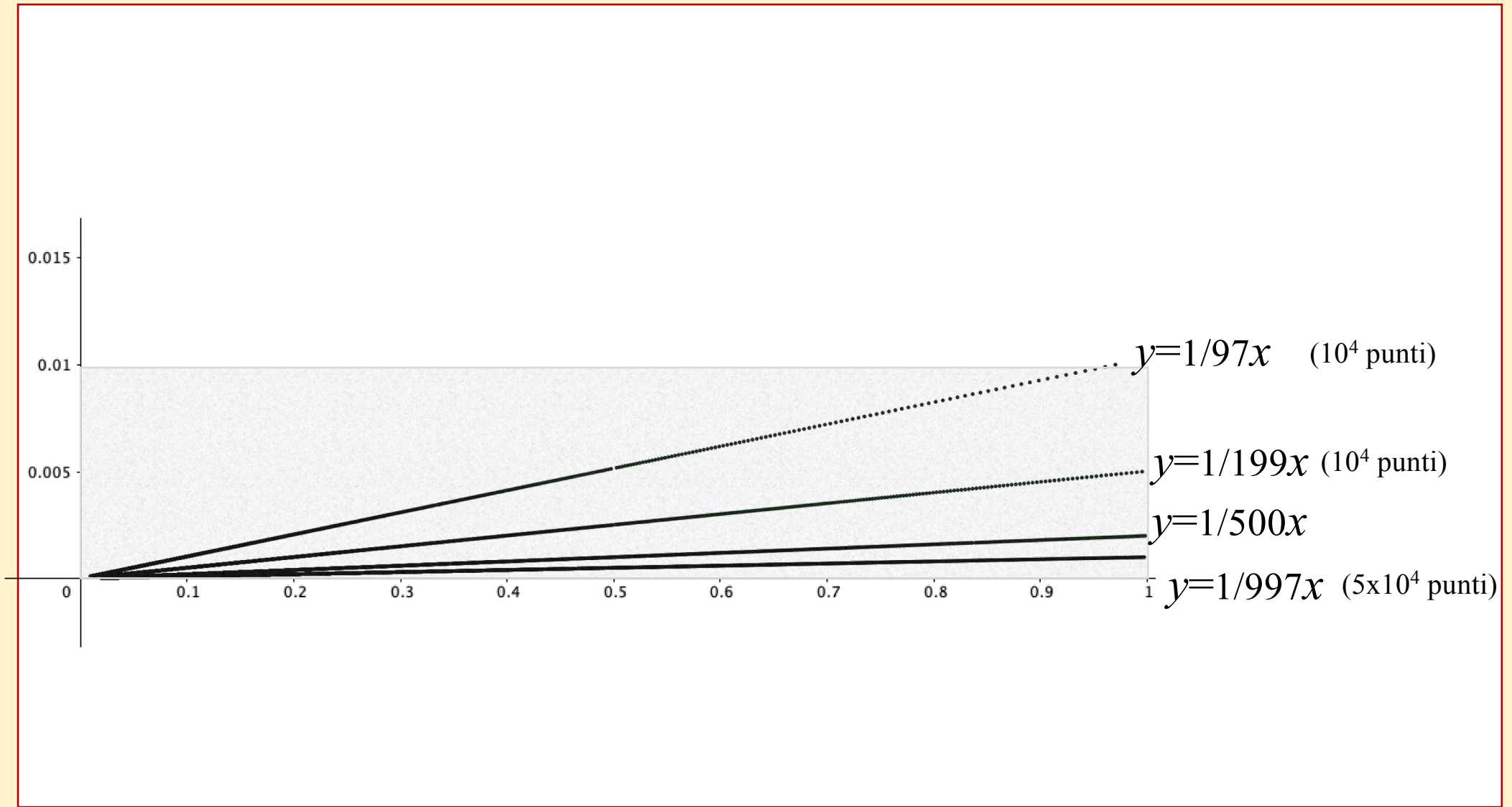
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{se } x = p/q \\ & (p/q \text{ ai minimi termini e } q > 0) \end{cases}$$

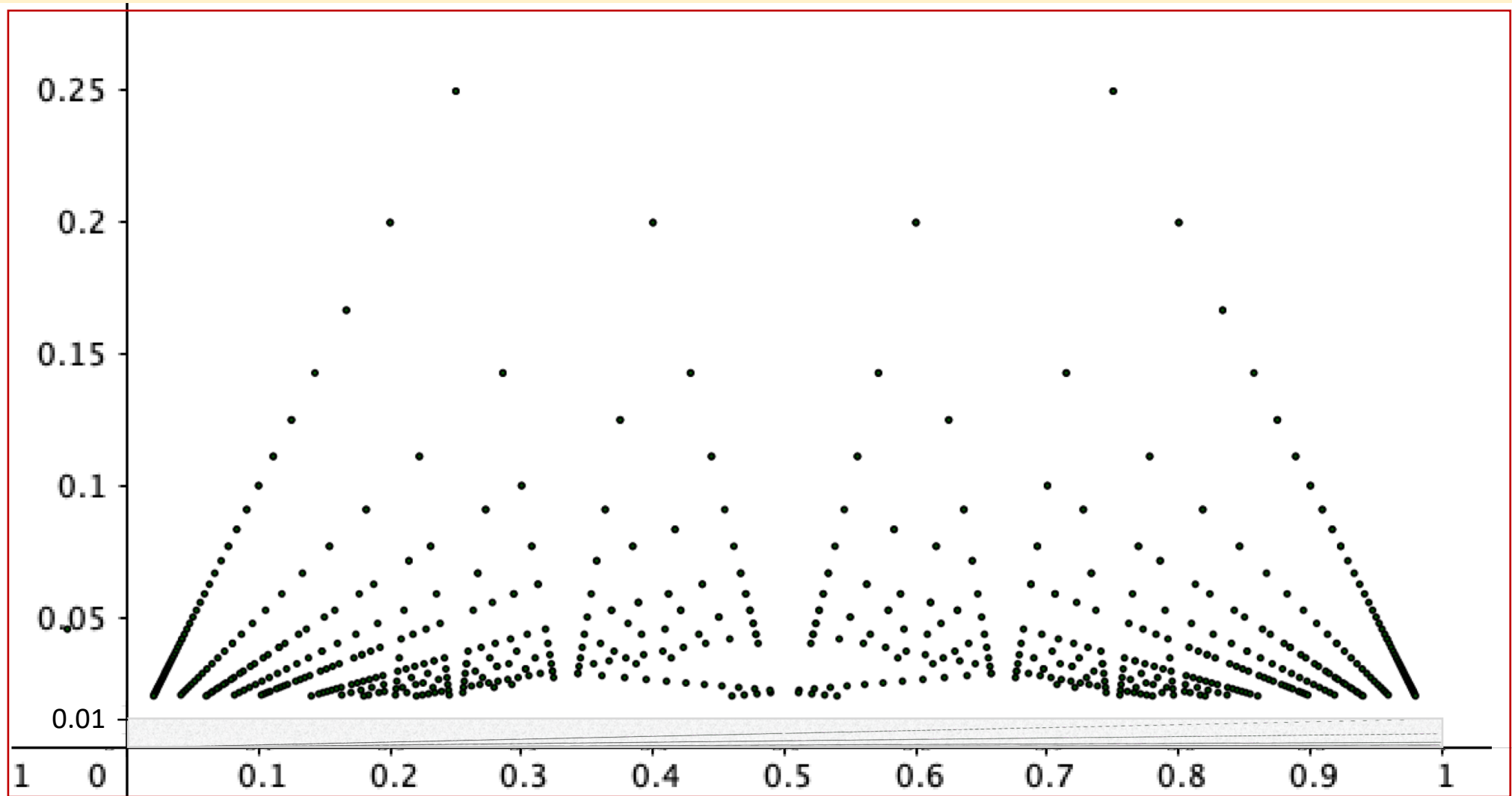
Successione $(Se(MCD(k, q) \stackrel{?}{=} 1, (k / q, 1 / q), (0, 0.5)), q, 1, 25)$
 $\{k = 1, 2, \dots, 5\}$







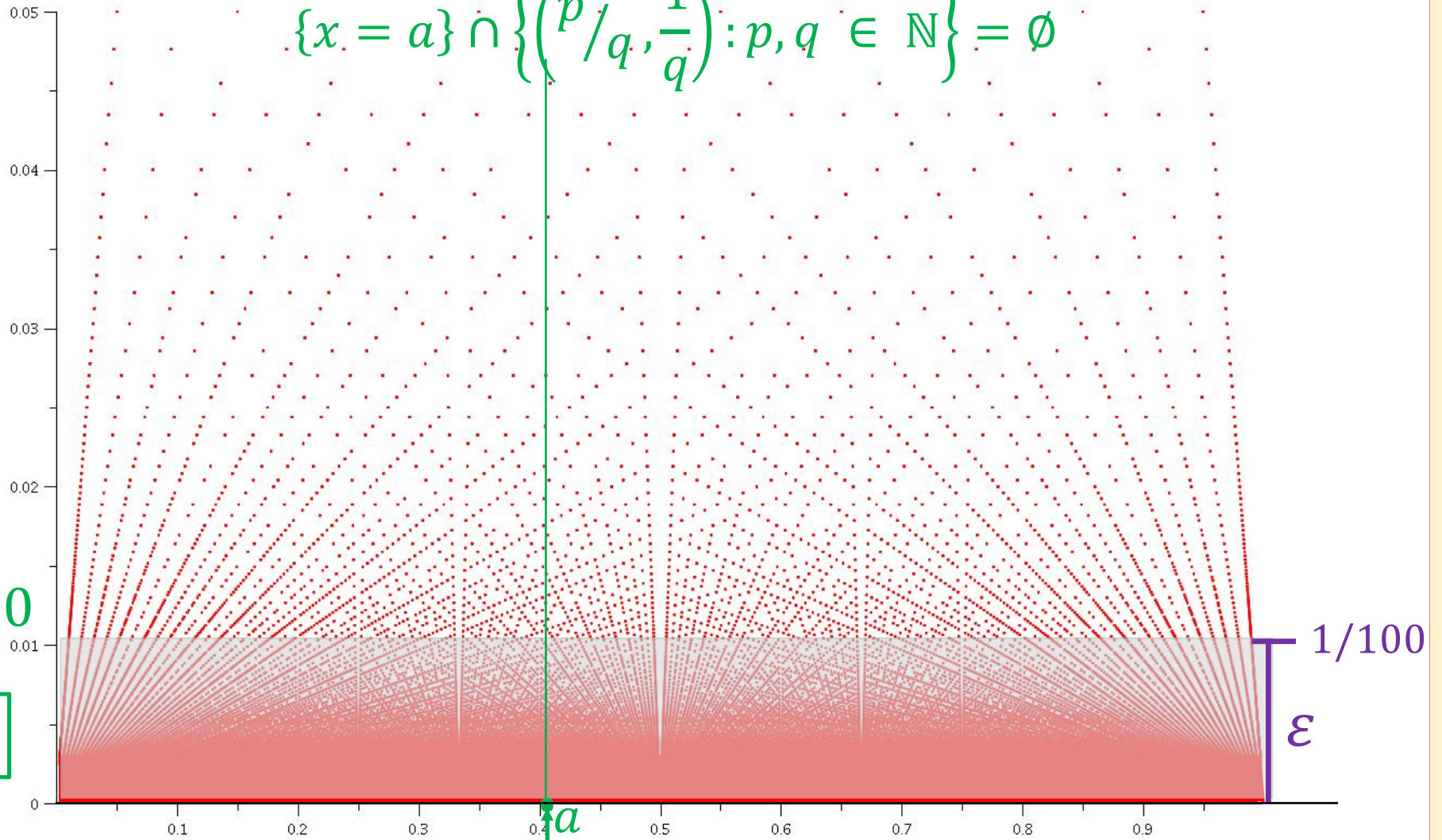




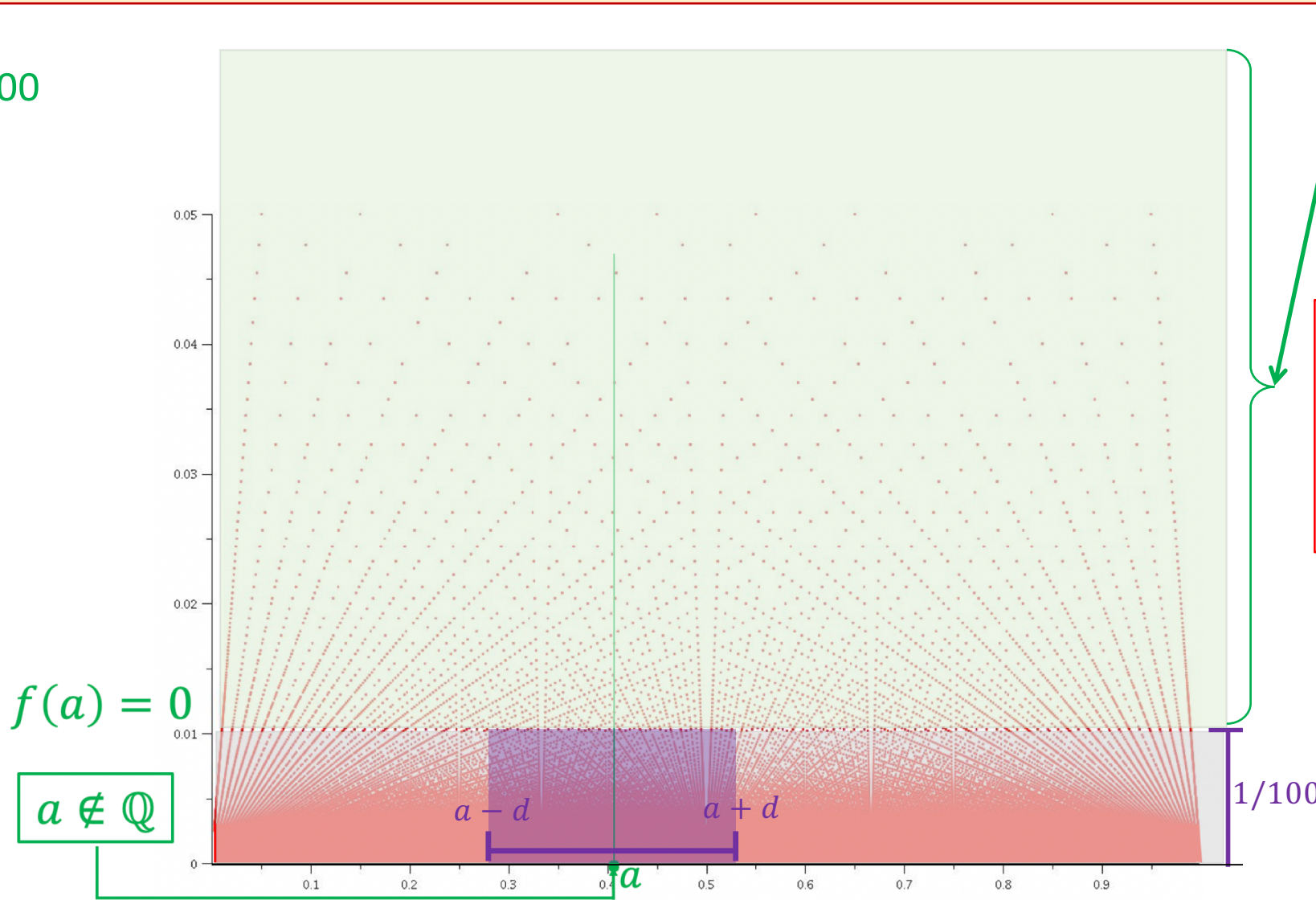
$$\{x = a\} \cap \left\{ \left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q} \right) : p, q \in \mathbb{N} \right\} = \emptyset$$

$$f(a) = 0$$

$$a \notin \mathbb{Q}$$



< 100



$$f(a) = 0$$

$$a \notin \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} 1/q &> 1/100 \\ q &< 100 (*) \end{aligned}$$

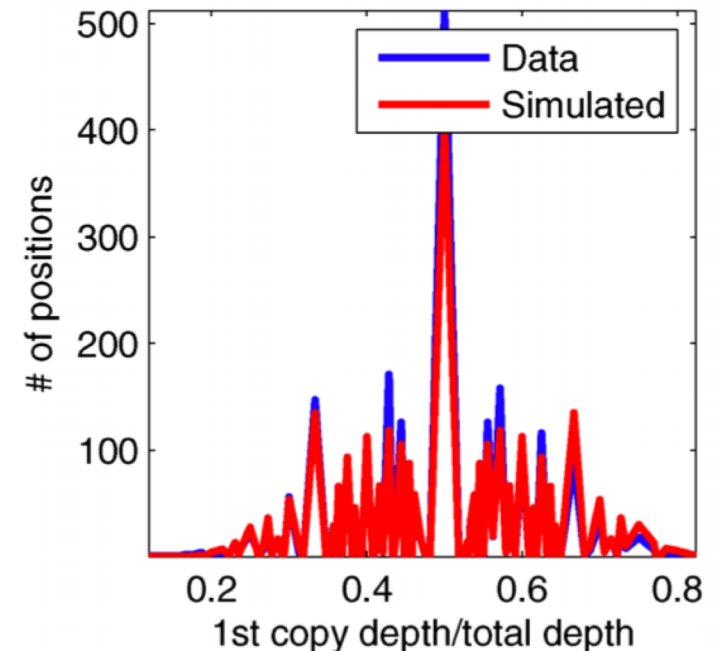
I p/q ($p < q$)
che soddisfano (*)
sono in numero **finito**.
Cerchiamo quello/i
più vicini ad a .
Sia(no) a distanza d .

Se p/q dista da a
meno di d
 $f(p/q) < 1/100$

Ma la funzione di Thomae non è solo un intrigante ed elegante esempio matematico.

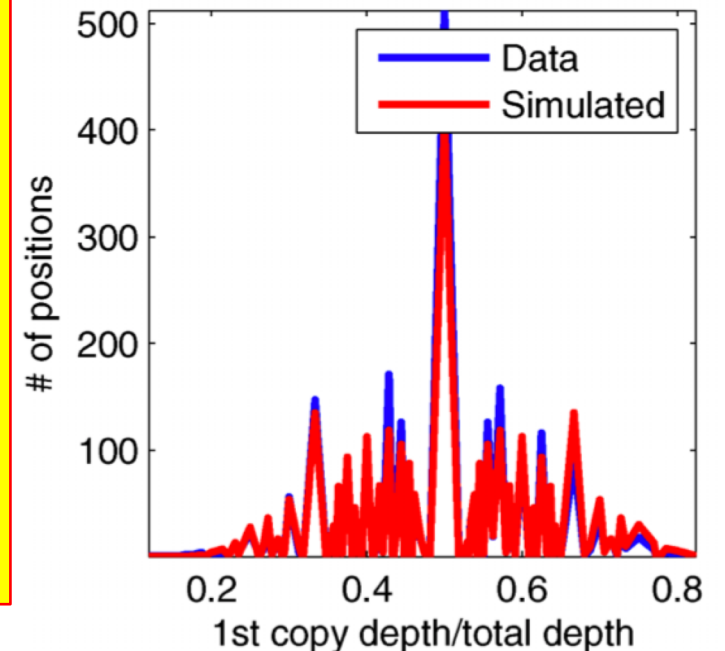
Essa appare infatti come distribuzione di probabilità in molti problemi biofisici. Un esempio fra i tanti: la distribuzione delle letture in esperimenti di sequenziamento del DNA per la diagnosi di malattie cancerogene.

(Trifonov et al., 2011)



Ma la funzione di Thomae non è solo un intrigante ed elegante esempio matematico.

Nel comportamento teorico dei numeri in natura compare spesso uno schema probabilistico generale, che assume le sembianze di manifestazioni tipo popcorn.
(Cabrera et al., 2021)



Sommario

- Intuizione e conflitti in matematica
- Modelli visivi e infinito (proposte):
 - scuola primaria
 - scuola secondaria
- **Riflessioni conclusive:**
 - sensate esperienze e necessarie dimostrazioni
 - Cambiamenti strutturali nell'ins./appr. della matematica



a) Il problema didattico di fondo nell'insegnamento/apprendimento della matematica riguarda principalmente quali meccanismi cognitivi coltivare in classe per innescare e supportare una comprensione dei concetti astratti della matematica, che non si limiti alla pura adesione a regole formali, il più delle volte mal comprese.

b) L'approccio didattico di base che può aiutare gli studenti a far fronte a tali situazioni è di renderli consapevoli dei propri vincoli intuitivi e delle contraddizioni mentali che ne conseguono, per far loro comprendere che si tratta di difficoltà umane generali che si incontrano nella elaborazione e nella gestione delle nozioni astratte.

c) Diviene importante coltivare in classe l'elaborazione di interpretazioni intuitive il più possibile unitamente a modelli di ragionamento logico strettamente legate a queste.

In questo, di grande aiuto possono essere rappresentazioni grafiche e numeriche (per es. i modelli visivi), i narrativi e l'utilizzo di strumenti tecnologici che stimolino una visualizzazione dinamica.

Opportunamente strutturati in sequenze didattiche, possono supportare gli studenti a vedere in questi e oltre questi i costrutti formali propri della disciplina.

Per questo, l'interazione con l'insegnante è fondamentale (discussioni matematiche).




d) Un punto principale è che, come in tutte le cose, le posizioni estreme, che spingono esclusivamente il lato formale o, al contrario, propongono quello puramente metaforico, sembrano entrambe da evitare. Da un lato, nell'insegnamento è quasi impossibile rimanere esclusivamente sul registro formale e comunque può essere inutile per la comprensione, e, dall'altro, può essere rischioso lasciare gli studenti soli nella loro elaborazione di attività metaforiche.

Sommario

- Intuizione e conflitti in matematica
- Modelli visivi e infinito (proposte):
 - scuola primaria
 - scuola secondaria
- **Riflessioni conclusive:**
 - sensate esperienze e necessarie dimostrazioni
 - Cambiamenti strutturali nell'ins./appr. della matematica





- **0. Matematica tradizionale :** prevale una **genesi discorsiva** (...semiotica, ...instrumentale) 
- **1. Matematica instrumentata:** emerge sempre più una **genesi strumentale**, che erode, supporta, completa le altre genesi (semiotica, discorsiva) 
- **2. Matematica DAD?:** la DAD ha modificato la genesi strumentale standard (?!)? 



t



0. Apprendimento tradizionale della Matematica

	COSE	RELAZIONI	RELAZ. DI RELAZ.
VEDERE	X	[X]	
FARE	X		
NOMINALIZZARE	X	X	
ABDURRE	[X]	X	X
ARGOMENTARE	[X]	X	X
CONGETTURARE		X	X
DIMOSTRARE			X

DISCORSO (highlighted area)

MATEMATICO (highlighted area)

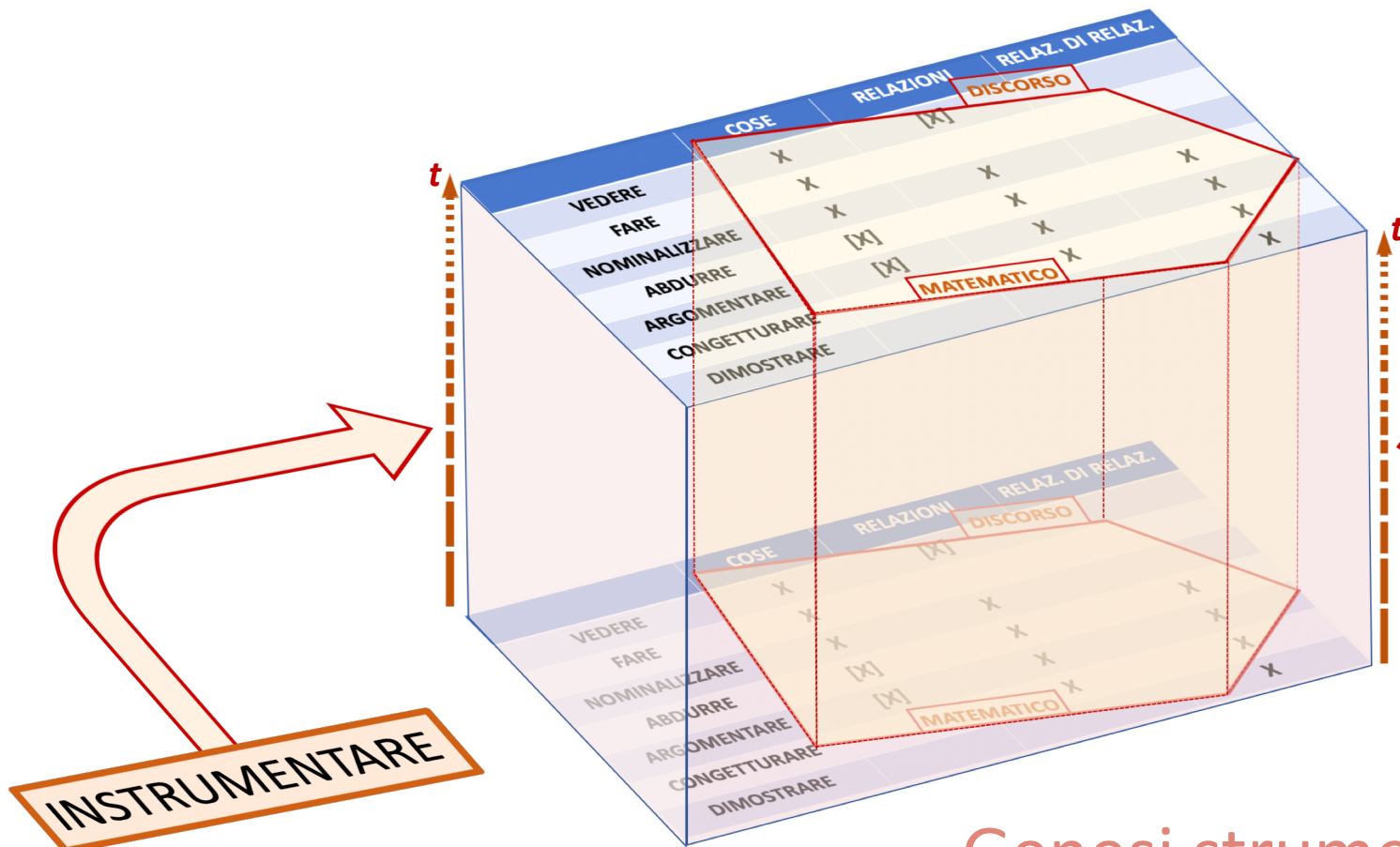
RAPPRESENTARE (label with arrow pointing to the table)

Genesi discorsiva (semiotica... strumentale)



1. Matematica instrumentata

RAPPRESENTARE



INSTRUMENTARE

Genesi strumentale



Matematica instrumentata 2(?)



una nuova
genesi ?

