Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica

Unione Matematica Italiana

UMI - CIIM

Ferdinando Arzarello

Dipartimento di Matematica – Università di Torino

Le attività matematiche in classe tra sensate esperienze e necessarie dimostrazioni

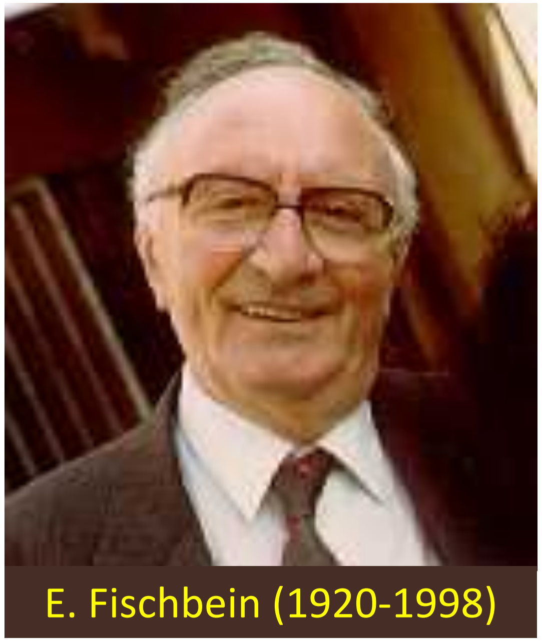
L’EDUCAZIONE MATEMATICA TRA INTUIZIONE E RIGORE

Settima Scuola Estiva per Insegnanti di Matematica

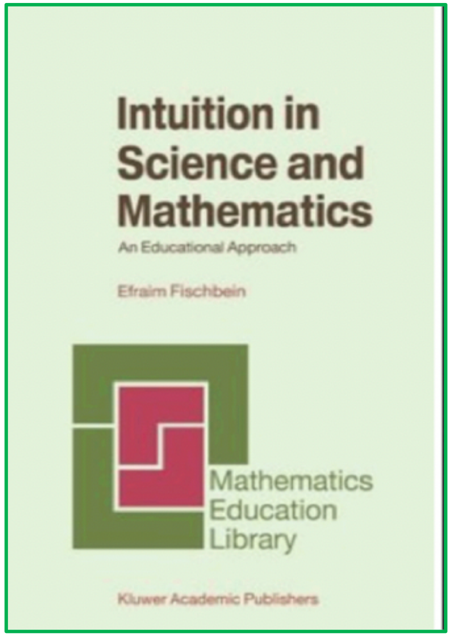
25-28 AGOSTO 2022-BISCEGLIE (BT)

Sommario

- Intuizione e conflitti in matematica
- Modelli visivi e infinito (proposte):
  - scuola primaria
  - scuola secondaria
- Riflessioni conclusive:
  - sensate esperienze e necessarie dimostrazioni
  - cambiamenti strutturali nell’ins./appr. della matematica



Intuizione



L'intuizione è una forma particolare di **cognizione**. È un fenomeno primario che può essere descritto ma che non è riducibile a componenti più elementari.

Le intuizioni si riferiscono ad affermazioni evidenti che eccedono i fatti osservabili.

(Fischbein, 1987, 2002)

Modelli mentali

Ogni volta che si ha a che fare con una nozione che è intuitivamente poco accettabile, si tende a produrre - a volte deliberatamente, a volte inconsciamente - sostituti di quella nozione che sono intuitivamente più familiari, più accessibili, più facilmente manipolabili: i **modelli mentali** (detti **taciti** se non sono coscienti).

Essi sono uno strumento essenziale per modellare cognizioni intuitivamente accettabili.

(Fischbein, cit., p. 121)

Credenze, aspettative, spunti , analogie e paradigmi non sono meri residui di forme più primitive di ragionamento, ma **componenti proprie del ragionamento matematico** e, in generale, di ogni tipo di ragionamento scientifico. (Fischbein, cit.)

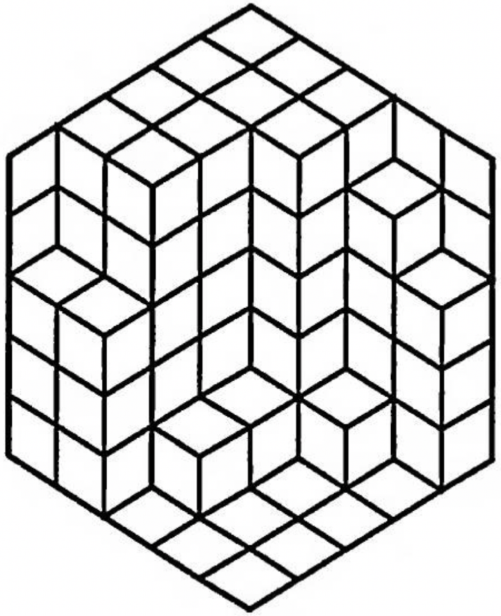
L'intuizione matematica può essere così descritta come una forma di razionalità che mette nella posizione di accettare alcuni fatti matematici. Ricorrendo all'intuizione, i matematici trovano un modo per "accelerare" le proprie convinzioni. e di conseguenza arrivare a qualche conclusione matematica. (V. Giardino, 2010, p.30)

Giardino, V. (2010). Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. *Topoi*, 29. p. 29–39

In molti casi il **ragionamento matematico**, il **pensiero intuitivo** e la **visualizzazione** sono intrecciati: la visualizzazione non solo organizza i dati a portata di mano in strutture significative, ma è anche un fattore importante che guida lo sviluppo analitico di una soluzione.

Quanti rombi?

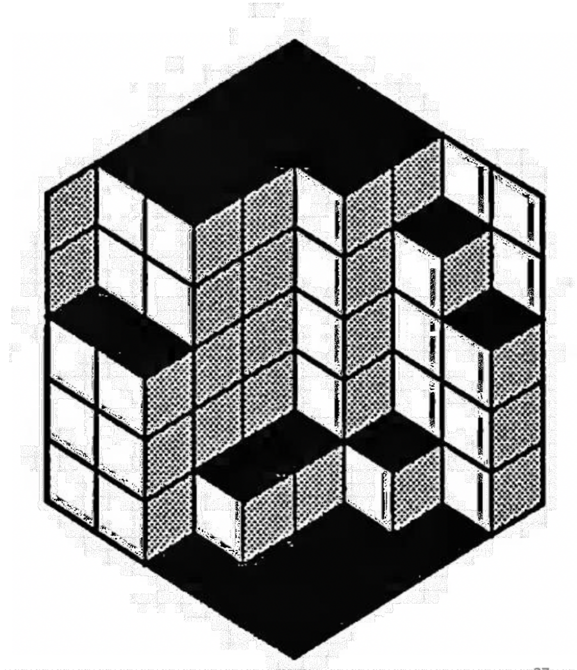
(senza contarli uno a uno)



In molti casi il **ragionamento matematico**, il **pensiero intuitivo** e la **visualizzazione** sono intrecciati: la visualizzazione non solo organizza i dati a portata di mano in strutture significative, ma è anche un fattore importante che guida lo sviluppo analitico di una soluzione.

Quanti rombi?

(senza contarli uno a uno)



Però, i modelli intuitivi di ragionamento, in particolare se taciti, possono produrre a volte **misconcezioni** e **conclusioni distorte** in quanto portano con sé anche proprietà che possono non essere rilevanti per l'originale.

Possono quindi sorgere **conflitti** (cognitivi e/o epistemologici).

che fare?

L. Radford parla della necessità di addomesticare l'occhio dello studente:

Luis Radford

Gli occhi dei matematici hanno subito un lungo processo di 'addomesticamento'. Che un tale processo non sia 'naturale' è derivato non solo dai risultati della psicologia interculturale, ma anche dalle risposte dei nostri giovani studenti.

L'addomesticamento dell'occhio è un lungo processo nel corso del quale arriviamo a vedere e riconoscere le cose secondo mezzi culturali "efficienti". È il processo che converte l'occhio (e altri sensi umani) in un sofisticato organo intellettuale -"teorico" come lo definì Marx. (L. Radford, 2010)

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(2). pp. 2-7.

che fare?

Fischbein a sua volta argomenta che:

Il problema principale è imparare a convivere con il peso intuitivo dei concetti - necessario alla fluidità produttiva del ragionamento - e, allo stesso tempo, controllare l'impatto di queste cause intuitive sul corso stesso del ragionamento.

Suggeriamo che nell'insegnamento della matematica gli studenti siano resi consapevoli dell'impatto dei modelli taciti sui loro processi di ragionamento.

Gli studenti saranno così aiutati a controllare meglio il loro ragionamento matematico ed evitare possibili insidie.

(Fischbein, cit., p. 207)

che fare?

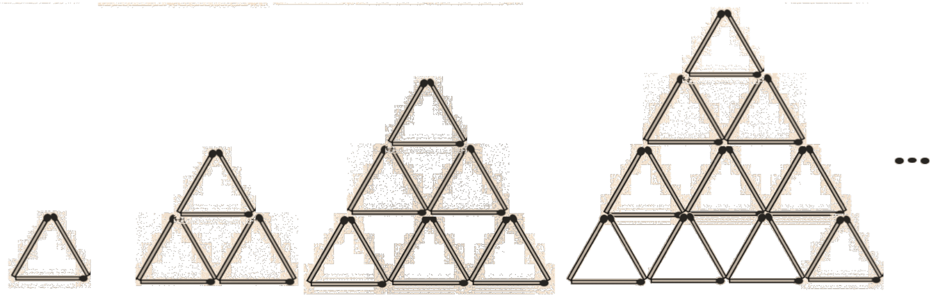
Vedremo ora alcune proposte didattiche che vanno in questa direzione

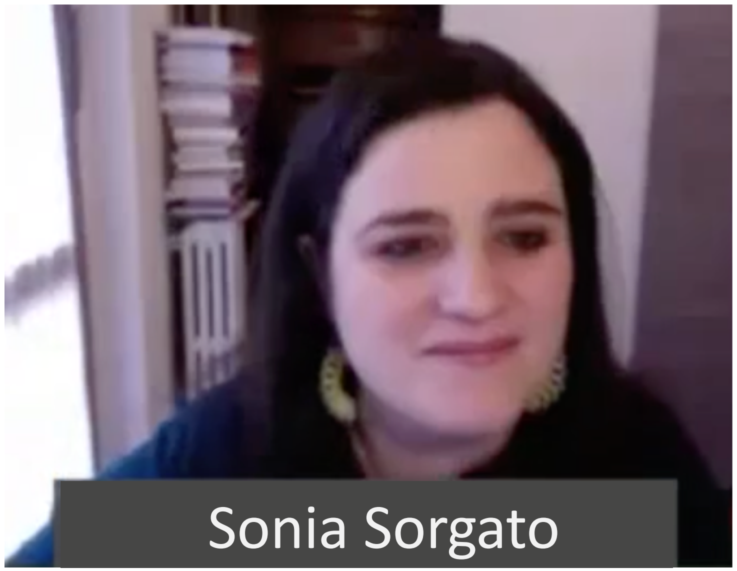
Sommario

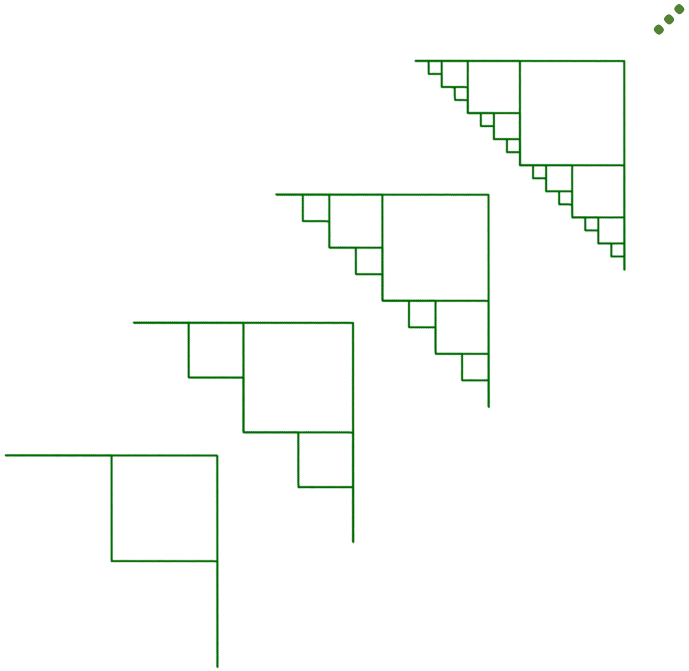
- Intuizione e conflitti in matematica
- Modelli visivi e infinito (proposte):
  - scuola primaria
  - scuola secondaria
- Riflessioni conclusive:
  - sensate esperienze e necessarie dimostrazioni
  - Cambiamenti strutturali nell'ins./appr. della matematica


Quando l'infinito entra in classe
CONFLITTI

Modelli visivi (visual patterns)
dalla primaria alla secondaria di II grado



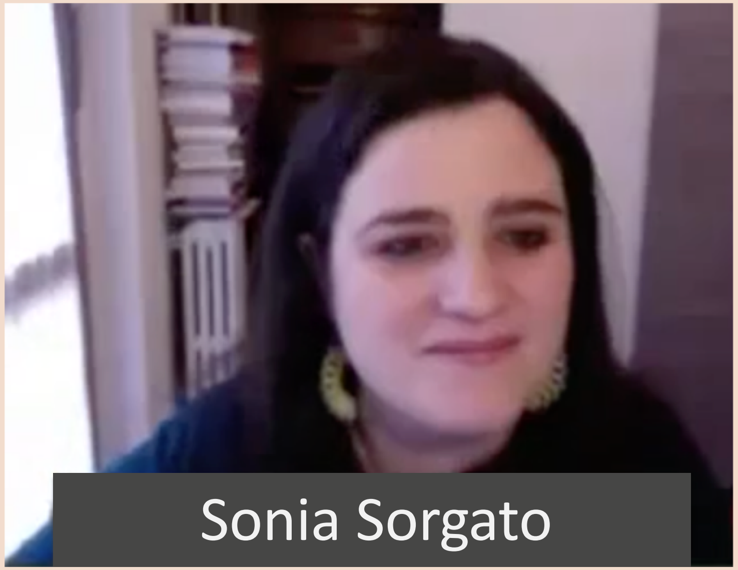




https://www.visualpatterns.org Silvia Beltramino

COVARIAZIONE CON I PATTERN

- Intuizione e conflitti in matematica
- Modelli visivi e infinito (proposte):
  - scuola primaria
  - scuola secondaria
- Riflessioni conclusive:
  - sensate esperienze e necessarie dimostrazioni
  - Cambiamenti strutturali nell'ins./appr. della matematica



I.C. Perasso-Milano

Il tema ricorrente dell’infinito: già nella primaria, tra numeri e geometria

Il tema ricorrente dell’infinito emerge in modo sistematico nelle discussioni dei bambini e nei loro interventi spontanei anche in situazioni non strutturate.

Classe I

Bambini: i numeri **non finiscono mai**.
Jana: esiste un numero molto grande e quello è **l’ultimo numero**!
Giorgio e Cloe: esiste il numero infinito e noi conosciamo anche il simbolo.
Alessandro: possiamo contare come gli ingegneri 10, 20, 30, 40… così facciamo prima!
Matteo: ma anche quelli sono infiniti…
…

…

Marco: Sono infiniti i numeri"

Davide: "Ecco io scrivo così…"

Davide inizia a scrivere un numero lunghissimo…lo passa a Marco.

Marco: "Io posso continuare a mettere altri numeri…**non si finisce**"

Anche Karas e Alessandro aggiungono cifre.

Marco: "Possiamo continuare a mettere numeri, non finiscono mai i numeri…"

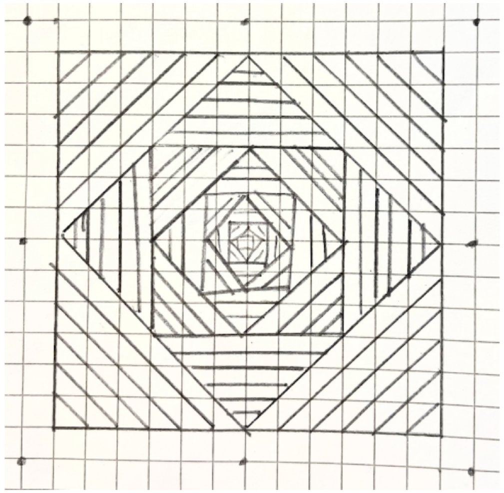
Davide: "Sì"

Maestra: **"Posso contare fino all'infinito?"**

Alessandro: "Ci metti anni… diventi un vecchietto"

Marco: "No, non puoi. Non finisci mai. Anche con un numero lunghissimo, **puoi sempre mettere un numero dopo gli altri**".

Il tema dell’infinito emerge anche arricchito di collegamenti geometrici:



Gaia: ho visto tanti triangoli, l’infinito e poi, quando sono finiti i triangoli, ha fatto i quadrati.
Sveva: in questa creazione mi viene in mente una galleria piena di forme, che sembra infinita come ha detto Gaia, ma c’è un certo limite che arriva dal più grande al più piccolo.

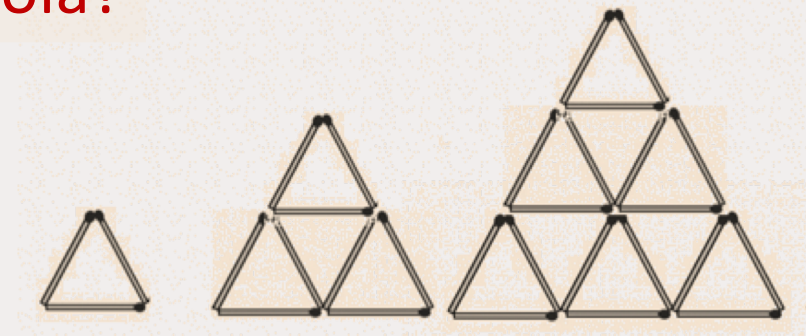
Maestra: quindi ci vedi anche un ordine?
Sveva: sì.
Maestra: tu hai parlato di “limite”, ci puoi spiegare di più?
Sveva: limite perché non è proprio infinito ma arriva fino a un certo punto.
Cloe: secondo me no, secondo me è sempre più piccola, è sempre più profondo, secondo me è **un buco che continua a essere sempre più profondo**.

Qual è la regola?

Classe quarta:

La situazione-problema

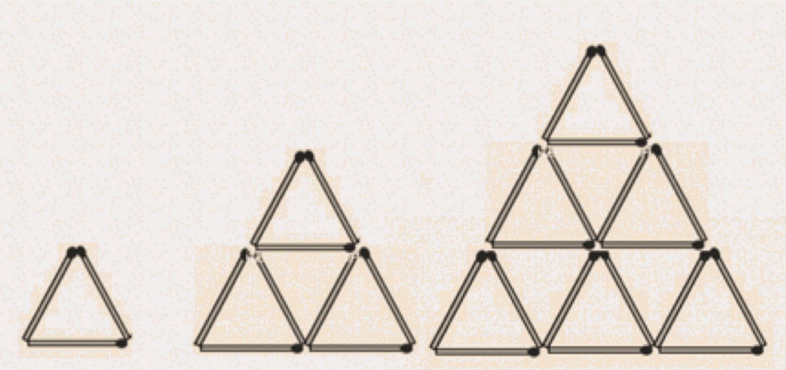
Consegna riformulazione condivisa



Insegnante: vi ho consegnato un pattern e ora dobbiamo capire che cosa dobbiamo fare su questo pattern.
Alessandro: dobbiamo fare il **disegno**.
Insegnante: secondo Alessandro dobbiamo fare il disegno.
Sara: prima bisogna **scrivere**.
Insegnante: che cosa dobbiamo scrivere?
Sara: **quello che vediamo**.
Insegnante: secondo Sara è importante descrivere quello che vediamo.
Davide: però prima dobbiamo **interpretare quello che facciamo**.
Insegnante: interpretare.

La situazione problema

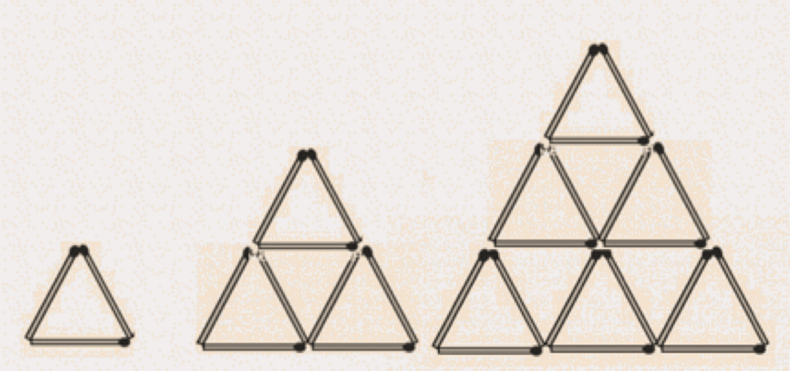
Consegna riformulazione condivisa



Davide: intendo dire che dobbiamo scrivere ciò di cui stiamo parlando. Dobbiamo specificare di chi stiamo parlando.
Insegnante: dopo avere fatto tutte queste cose che avete detto che cosa ci domandiamo di fronte a queste immagini?
Alessandro: ci domandiamo come è fatto. **Spieghiamo, mettiamo a confronto**.
Sara: mettiamo a confronto i lavori di gruppo con quello che abbiamo fatto noi.
Davide: possiamo **chiederci cosa sembra**.
Omar: possiamo **fare i pattern un po' più grandi**.
Insegnante: vuoi farla più grande, perché Omar pensi di farla più grande?
Omar: di andare avanti.

La situazione problema

Consegna riformulazione condivisa



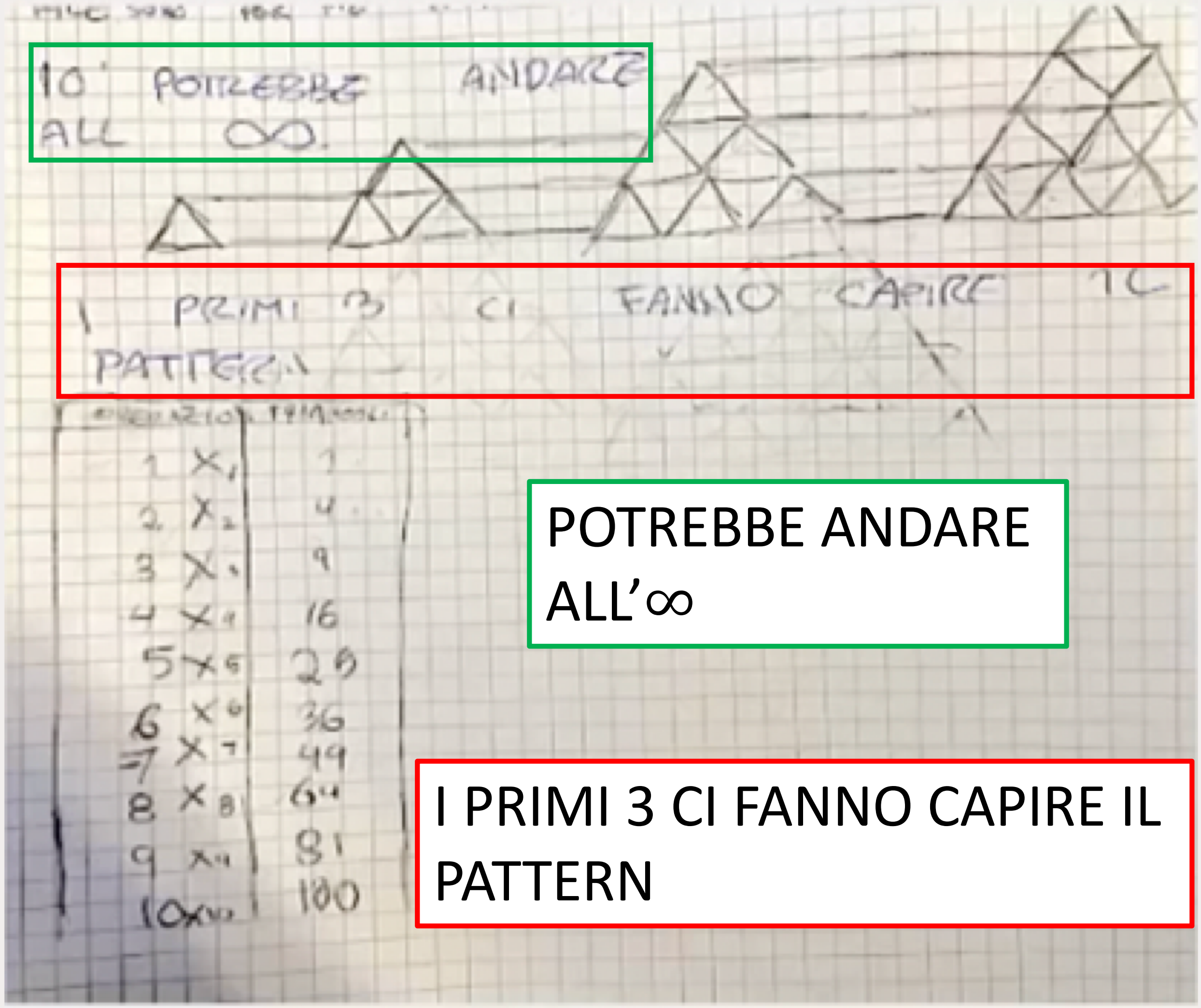
Insegnante: quindi Omar propone di fare l'immagine che viene dopo.
Omar: sì, **il quarto e magari anche il quinto**.
Cloe: **tipo le tabelline**.
Omar: e magari può andare pure all'**infinito**.
Antonio: dobbiamo scoprire che cosa cambia.
Insegnante: Antonio dice che dobbiamo scoprire che cosa cambia.
Sara: secondo me è giusto perché come ha detto Antonio può cambiare.
Alessandro: dobbiamo **scoprire cosa viene dopo**.
Cloe: in realtà è sempre uguale, **se scopri il quarto scopri pure tutti gli altri**.
Se scopri il quarto scopri tutti gli altri perché sai quanto devi aggiungere.

Lavori di gruppo

L'utilizzo della tabella rappresenta per alcuni gruppi la strategia che permette la scoperta della variazione.

In molti casi il pattern è stato scomposto ed è stato analizzato per livelli.

Nelle parole dei bambini è possibile rintracciare il tentativo di descrivere il pattern senza ricorrere ai numeri: "più ne metti più questi aumentano", "uno in meno della riga in cui c'è", "è come una conta che si ripete al contrario".



La scoperta della regola (1)

La scoperta della regola (2)

Sommario

- Intuizione e conflitti in matematica
- Modelli visivi e infinito (proposte):
  - scuola primaria
  - scuola secondaria
- Riflessioni conclusive:
  - sensate esperienze e necessarie dimostrazioni
  - Cambiamenti strutturali nell'ins./appr. della matematica

Visualizzazione dinamica

La visualizzazione dinamica permessa dai software (ad es. GeoGebra) può produrre intuizioni adatte alla comprensione:

- dei concetti matematici;
- delle loro reciproche relazioni logiche.

Si è visto che un'intuizione non è riducibile a componenti più elementari: perciò può essere difficile scomporla in un ordine logico deduttivo.

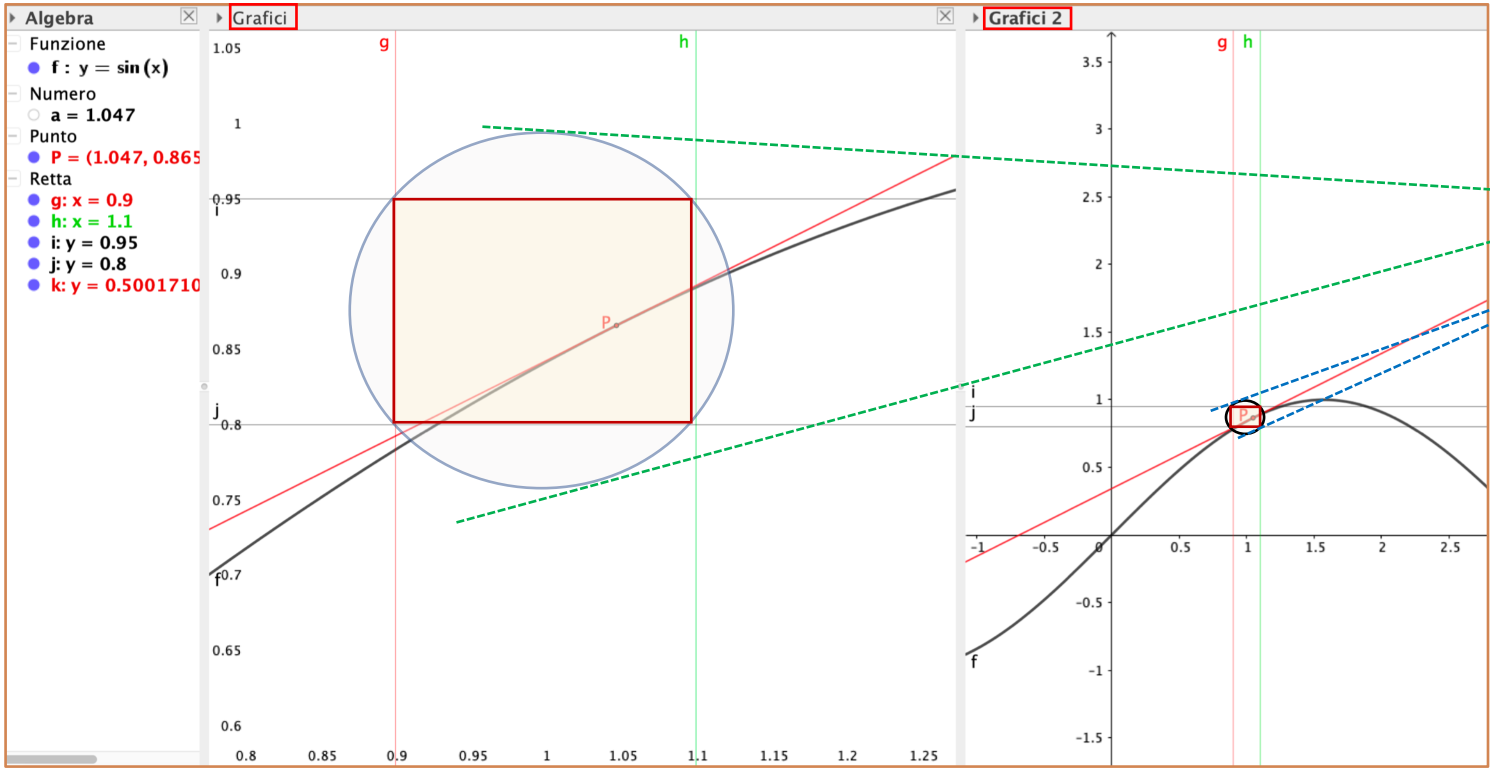
Per superare tale difficoltà D. Tall ha introdotto la nozione di **organizzatore generico**, che estende la nozione di ‘advance organizer’ di D. Ausubel: un OG consente allo studente di manipolare concretamente gli esempi di un concetto matematico specifico o di un sistema correlato di concetti.

Il termine "generico" significa che l'attenzione dello studente è diretta su alcuni aspetti degli esempi che incarnano il concetto più astratto (simili in ciò agli esempi paradigmatici/prototipici di Fischbein/Schwarz & Herschkovitz).

Schwarz, B. & Herschkovitz, R.(1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. JRME, 30(4). 362-389.

D. Tall (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3). 37-42.

Qui useremo come OG la funzione ZOOM di GeoGebra (e di altri software): la possibilità di realizzare **ingrandimenti** a piacere e di visualizzare simultaneamente (le rappresentazioni de-) gli oggetti matematici (per es. dell’Analisi) e i loro ingrandimenti.



Si progettano così sequenze didattiche in cui lo zoom permette al discente di generare un ricco **spazio degli esempi** con esempi, non esempi e controesempi di vari concetti matematici (Antonini, 2003; Watson & Mason, 2005) .

Tali attività possono supportare la *struttura cognitiva su cui lo studente può riflettere per costruire concetti più astratti* in una dialettica continua tra intuizione e rigore, tra visivo e deduttivo, tra immagini concettuali personali e definizione formale del concetto (Tall & Vinner, 1981), stimolata dalle esperienze di visualizzazione dinamica col software .

Antonini, S. (2003). Non-examples and proof by contradiction. *Proceedings of the Joint Meeting of PME and PMENA*, vol.2 , pp. pp. 49-55.

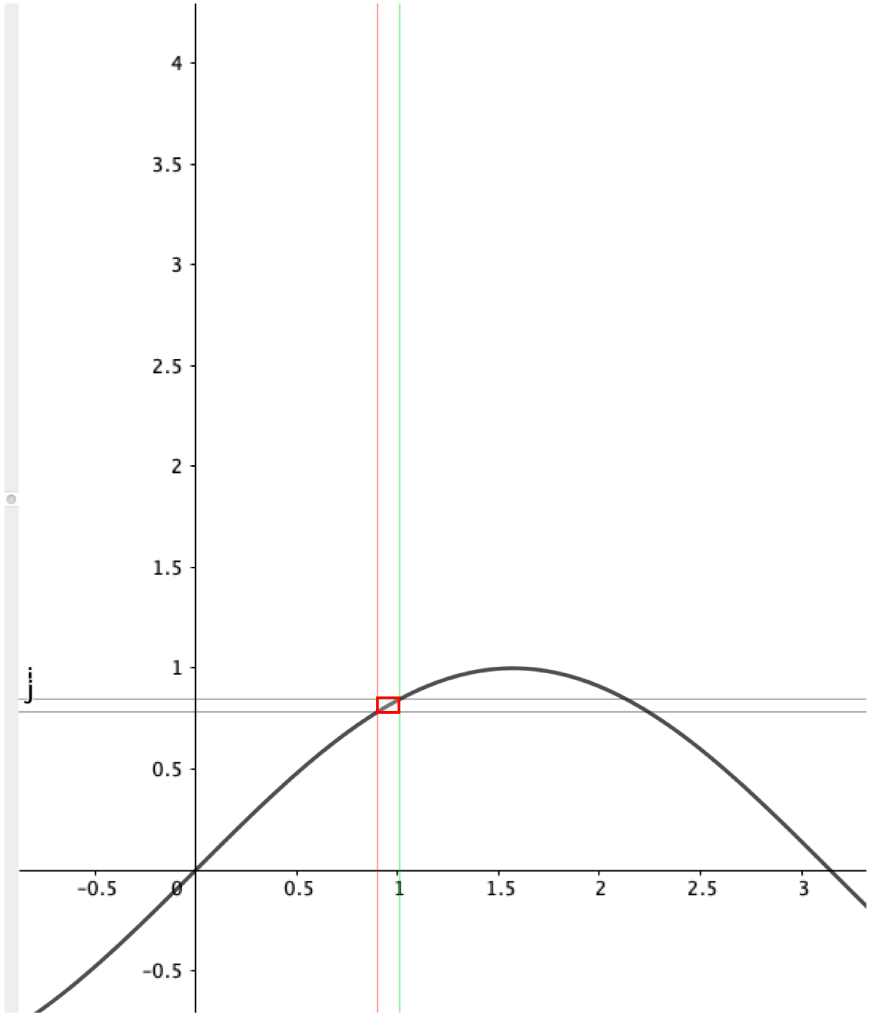
Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2). 151-169.

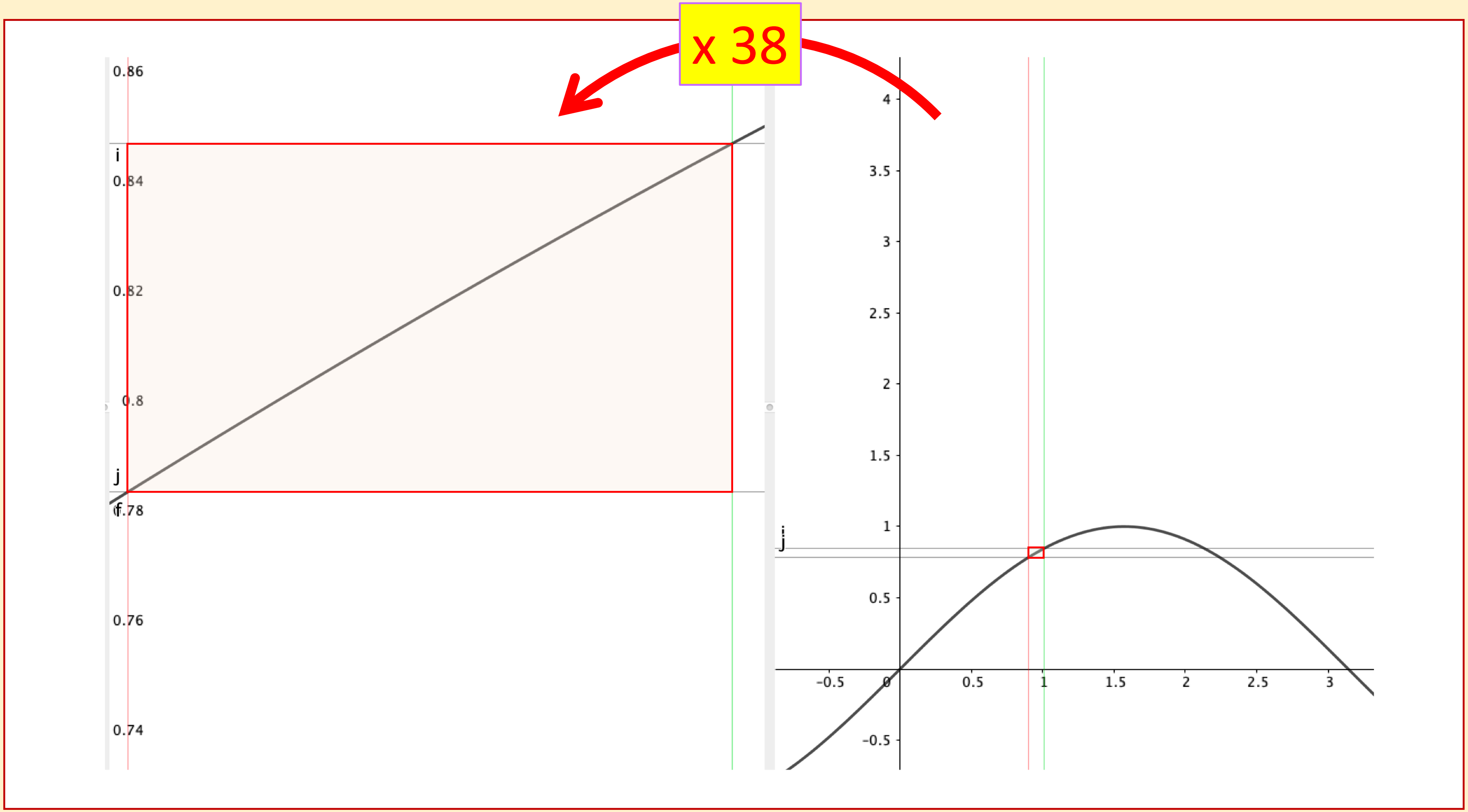
Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity*. Lawrence Erlbaum Associates.

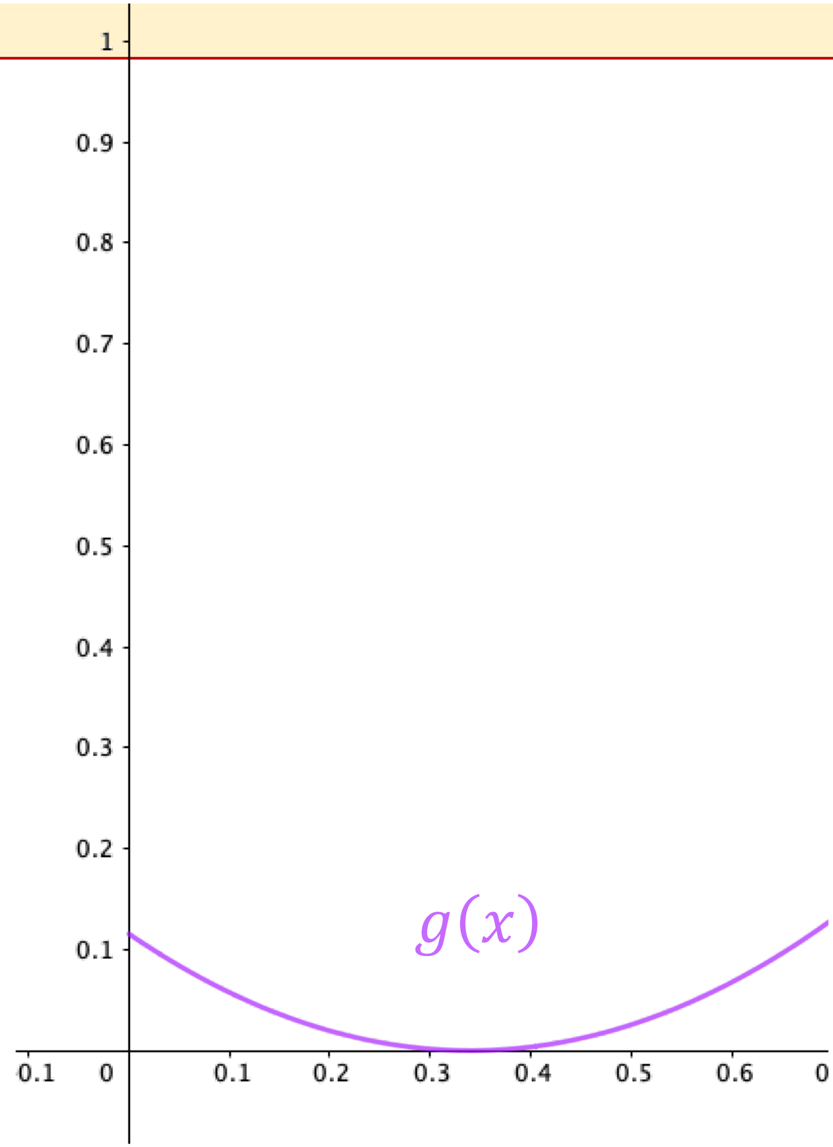
Visualizzazione dinamica di concetti matematici

1

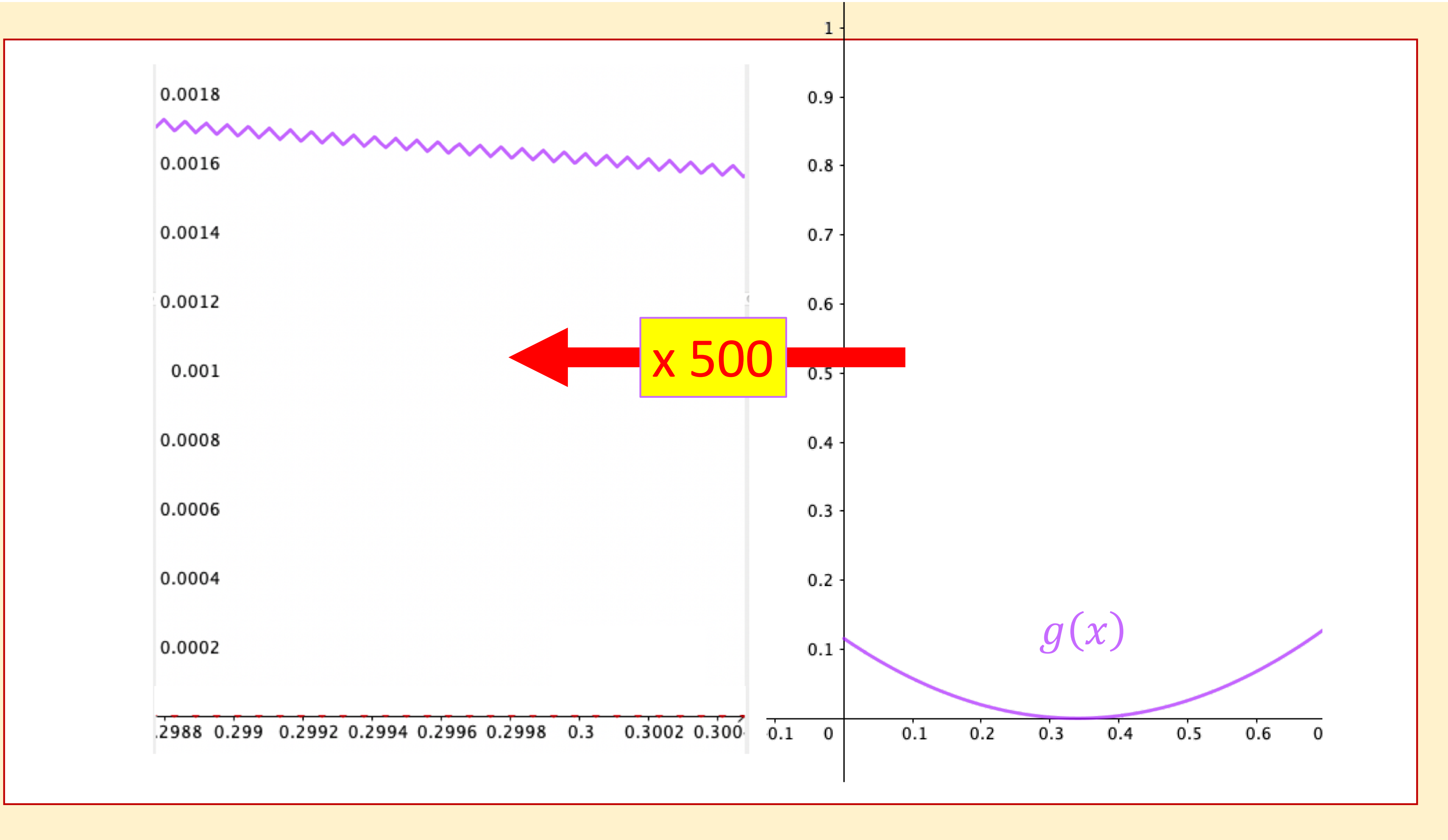
La linearità locale (esempio)


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
j
0.5
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

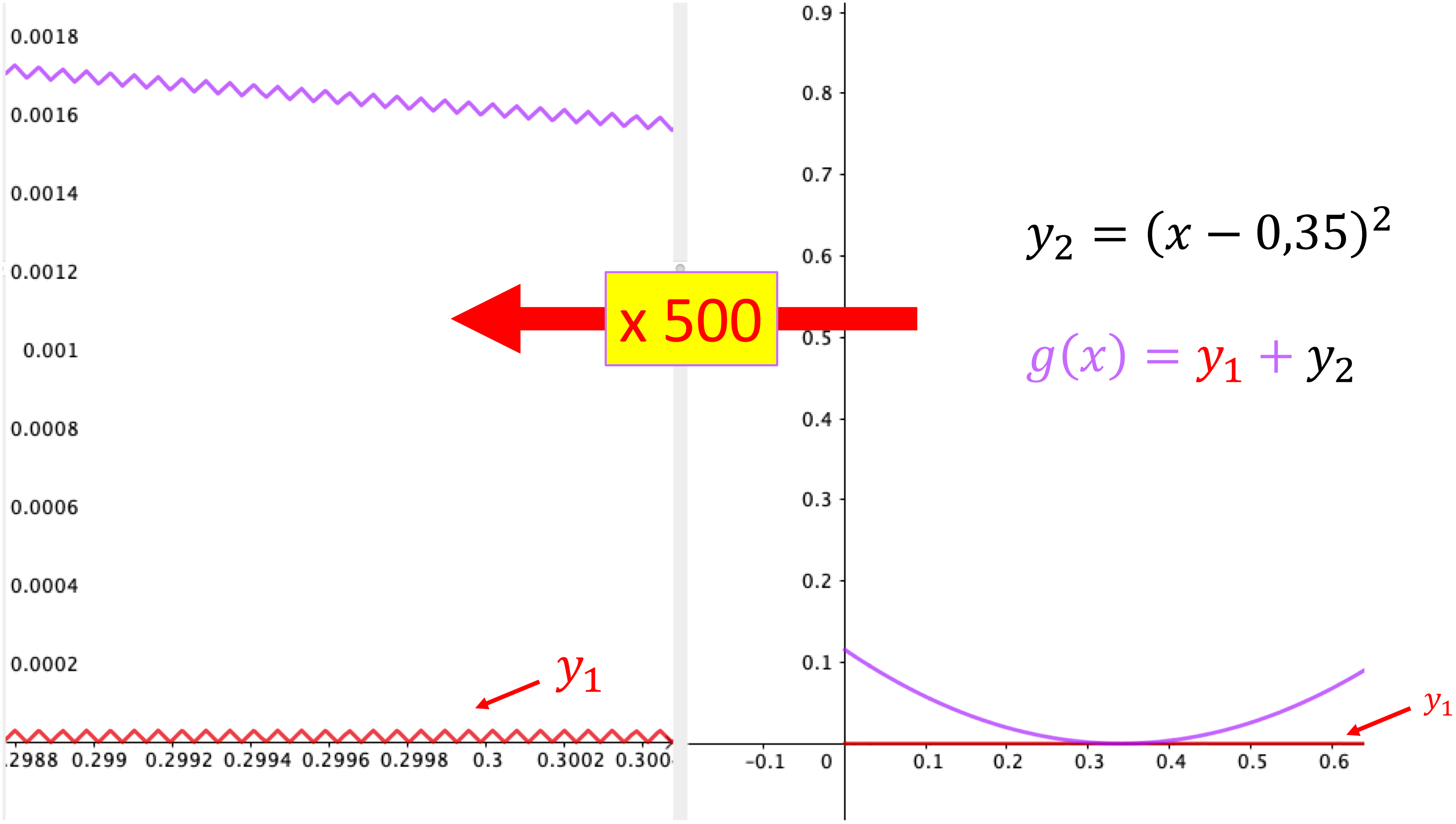

x 38
0.86
i
0.84
0.82
0.8
j
f.78
0.76
0.74
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
j
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0
$g(x)$



x 500
g(x)
0.0018
0.0016
0.0014
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
.2988
0.299
0.2992
0.2994
0.2996
0.2998
0.3
0.3002
0.300
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0

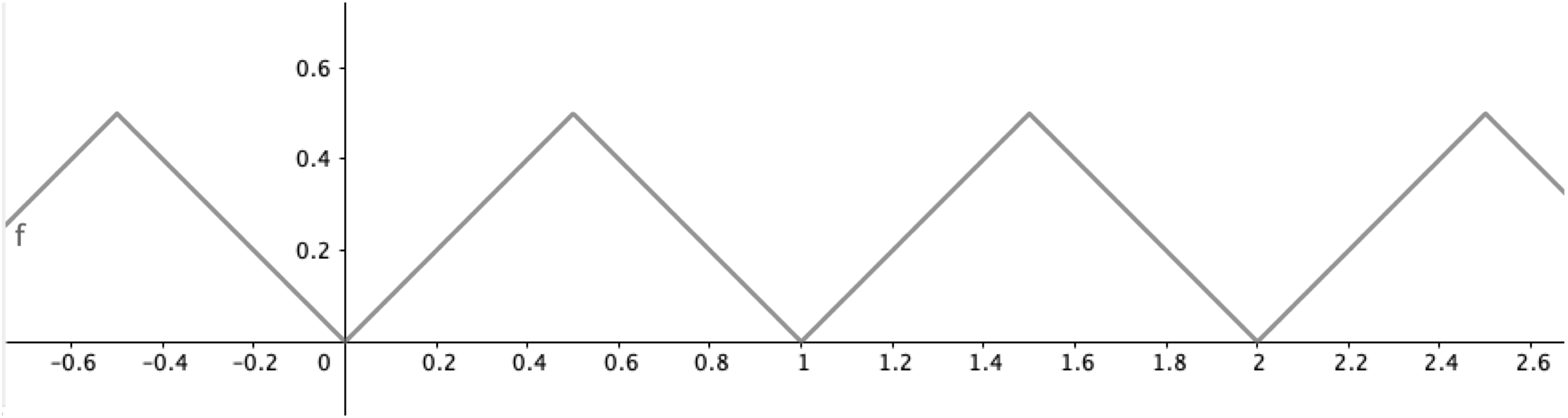


$$y_2 = (x - 0{,}35)^2$$

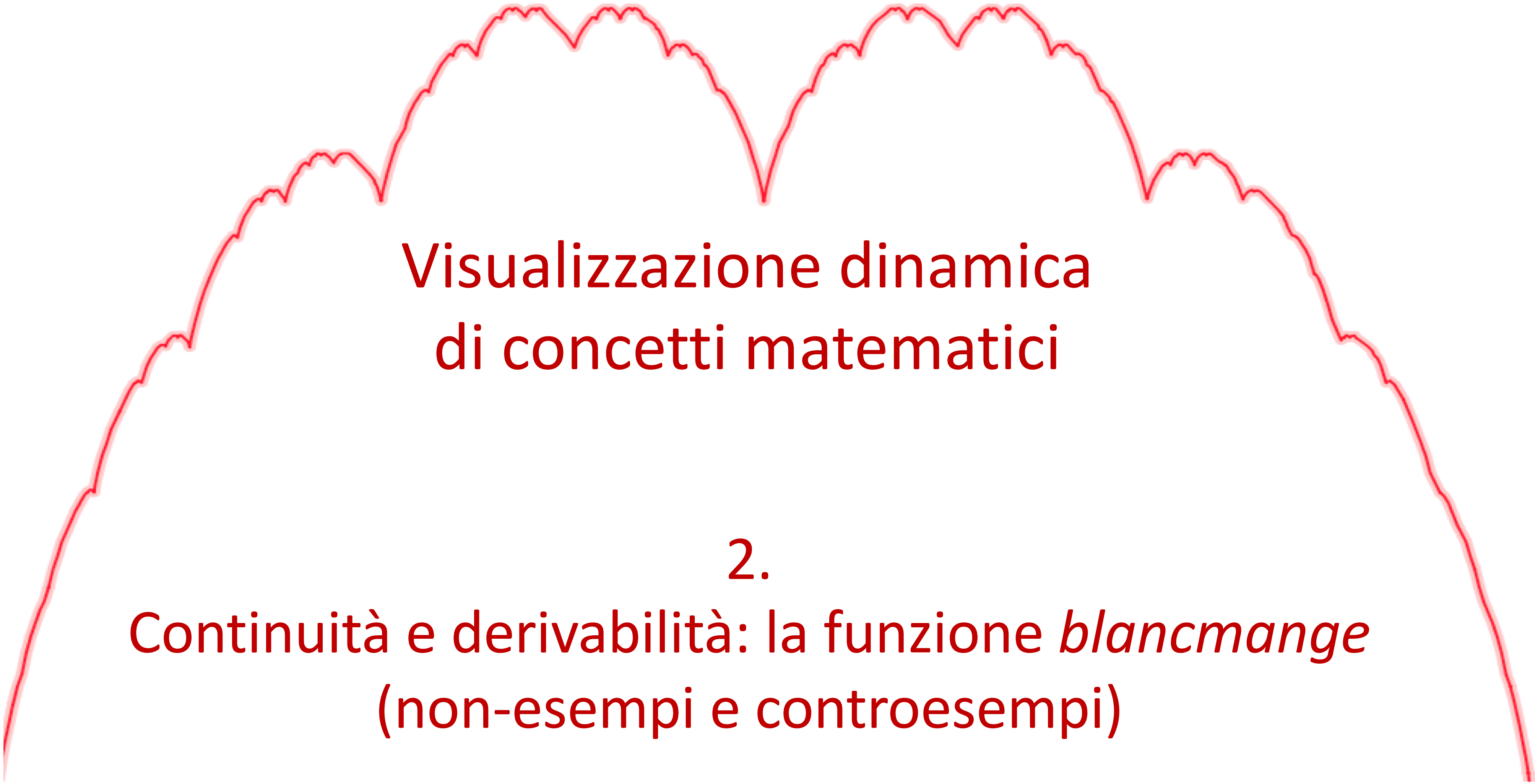
$$g(x) = y_1 + y_2$$

La funzione a denti di sega $f(x)$

$$f(x) = |x - round(x)|$$



$$y_1 = \frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}}$$



Visualizzazione dinamica
di concetti matematici

2.
Continuità e derivabilità: la funzione *blancmange*
(non-esempi e controesempi)

L'idea formale di limite risulta difficile da comprendere nelle fasi iniziali del calcolo.

Di solito viene introdotta attraverso idee visive, come la derivata vista come il limite di una sequenza di secanti che si avvicinano a una tangente.

La ricerca dimostra che i principianti incontrano una serie di ostacoli concettuali (misconcezioni per immagini concettuali parziali o conflittuali, Herschkovitz, 1987) che occorre superare anche seguendo questa via.

Herschkovitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry. In: Novak, J.D. (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. 3). Ithaca, NY: Cornell University. pp. 238-251.

B. Bolzano (1830-1930)
K. Weierstrass (1860-1872)

CONFLITTI

T. Takagi (1901)
B. Van der Waerden (1930)
D. Tall (1989)

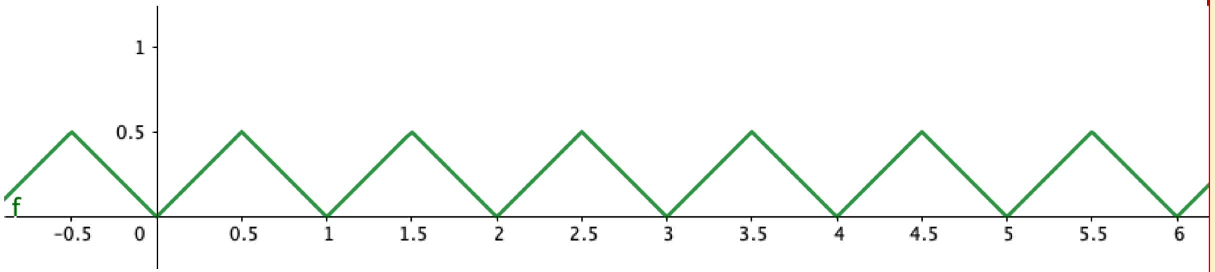
Alcuni di questi ostacoli si sono incontrati anche storicamente: per es. a gran parte dei matematici ancora oltre la prima metà del sec. XIX non sembrava plausibile che potesse esistere una funzione continua dappertutto e mai differenziabile: ciò era controintuitivo.

Solo nel 1901 Teiji Takagi (1875-1960) trovò una funzione intuitivamente più comprensibile (detta blancmange), a sua volta (re-)introdotta da van der Waerden. Essa fu studiata didatticamente da D. Tall.

Vedremo ora una sequenza didattica che introduce la funzione ***blancmange*** *col nostro OG di Geogebra.*

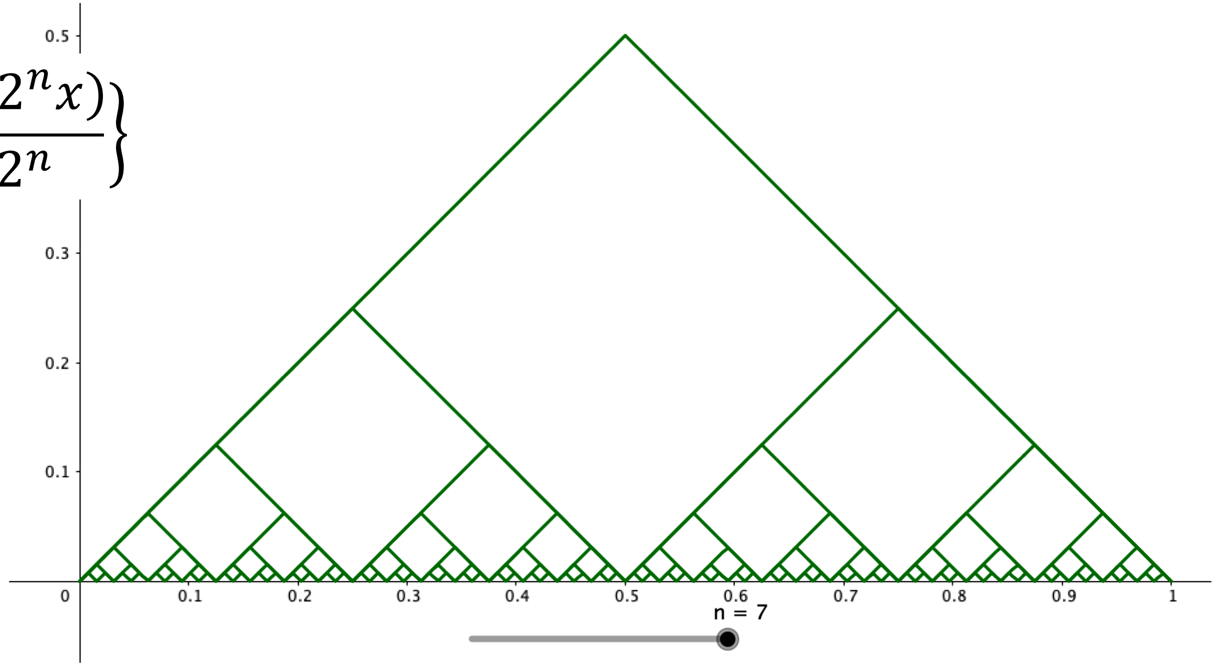
Tall, D. (1982). The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere.
The Mathematical Gazette, 66 (435), pp. 11-22

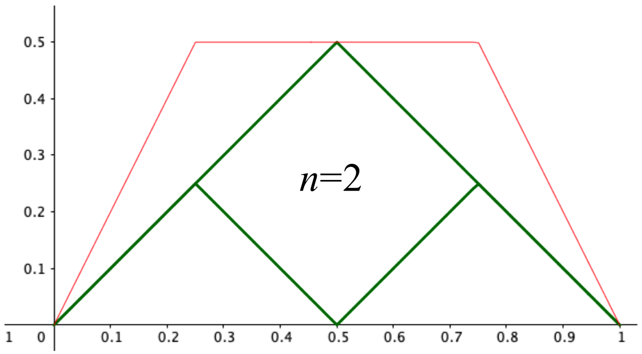
$f(x) = \text{abs}(x - \text{round}(x))$

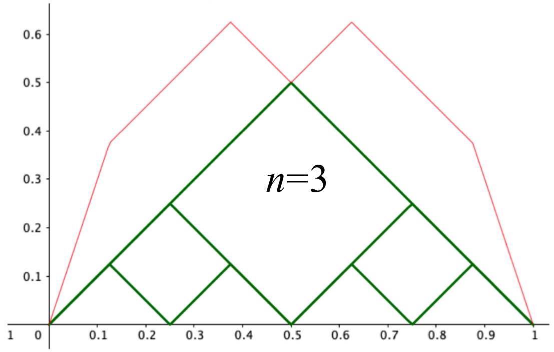


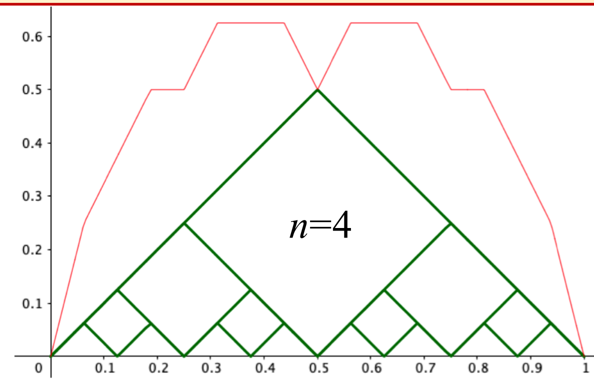
L_n: Successione(Se($0 \leq x \leq 1$, f(2^(j - 1) x)) / 2^(j - 1), j, 1, n)

$$L_n = \left\{ \frac{f(x)}{1}, \frac{f(2x)}{2}, \frac{f(4x)}{4}, \ldots \frac{f(2^n x)}{2^n} \right\}$$



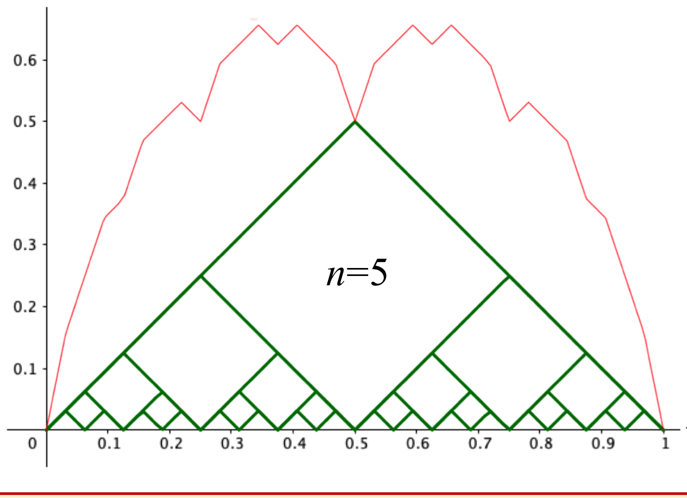


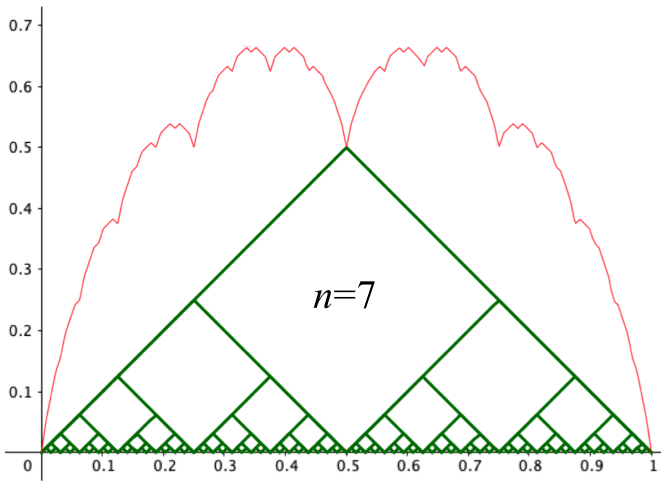


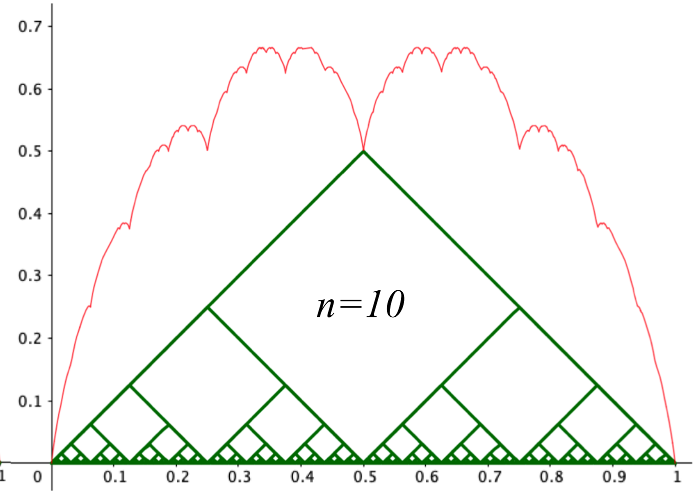


$$g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(2^n x)}{2^n} \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2 \cdot 2^n} \to 1$$

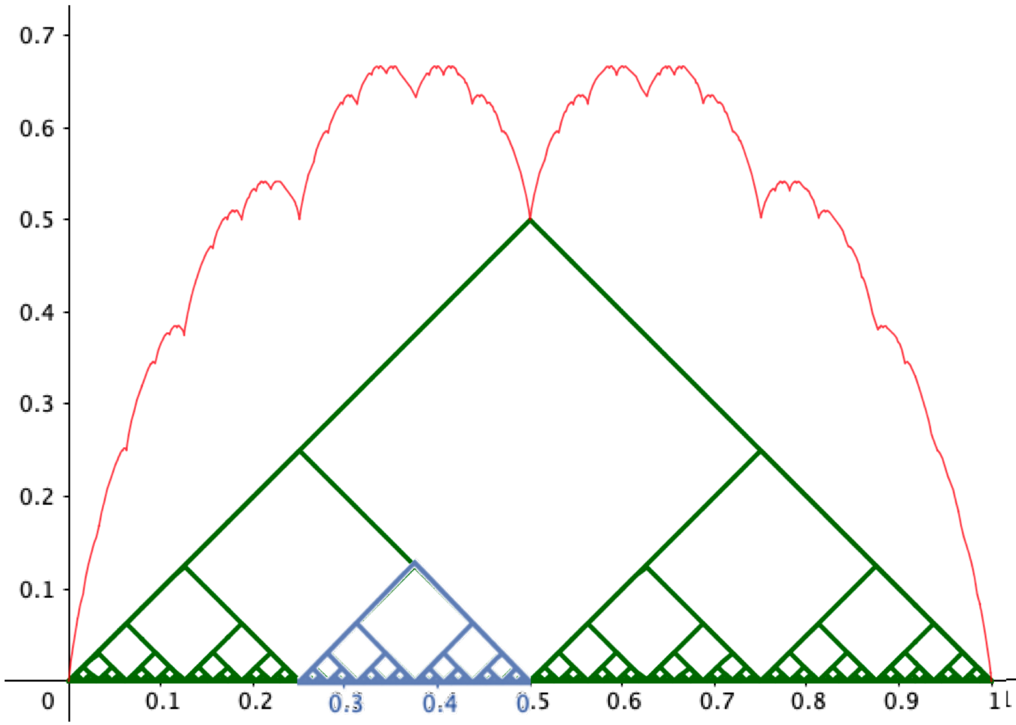
$g_n(x)$: Somma(L_i) $\{i=1,\ldots n\}$

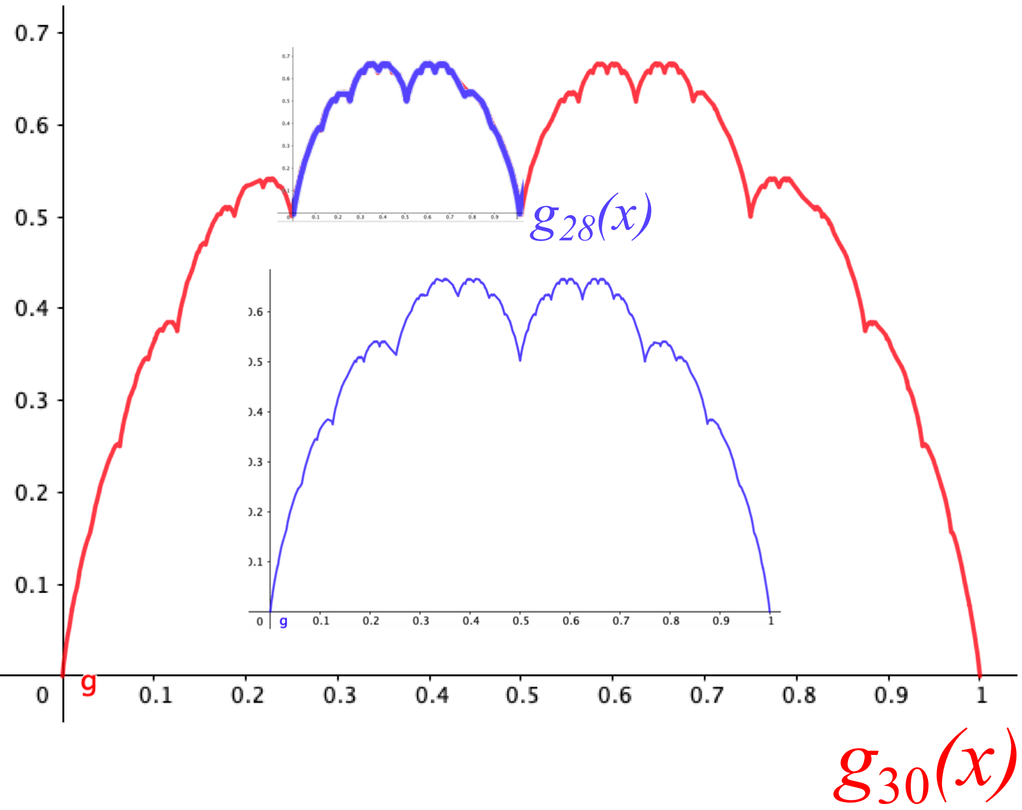






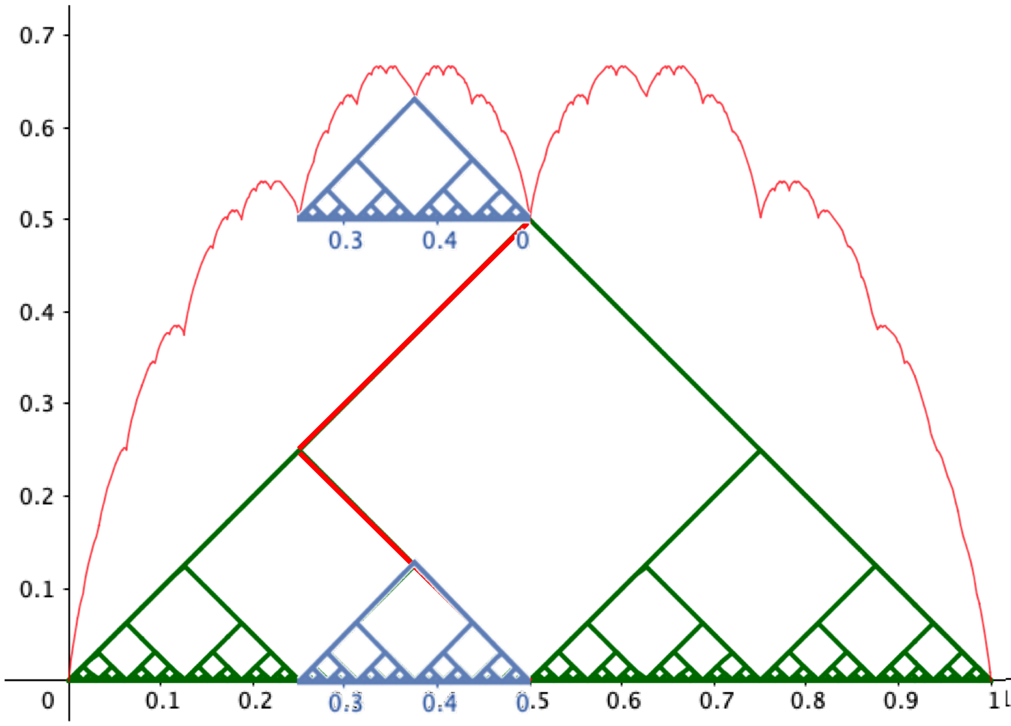
g(x) è un frattale



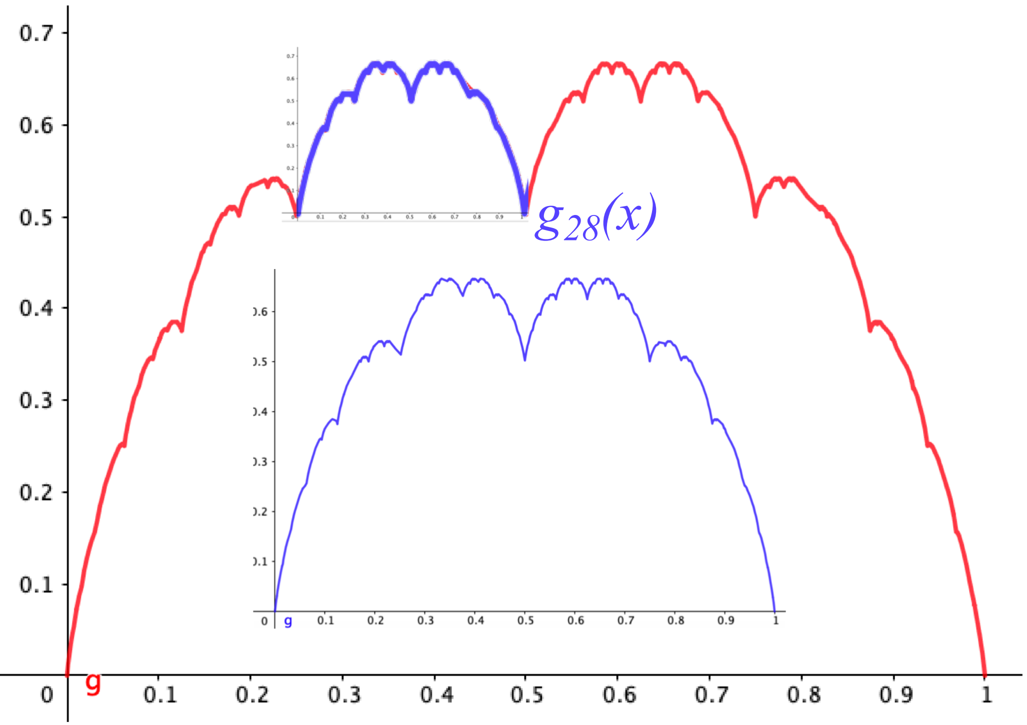


$n = 30$

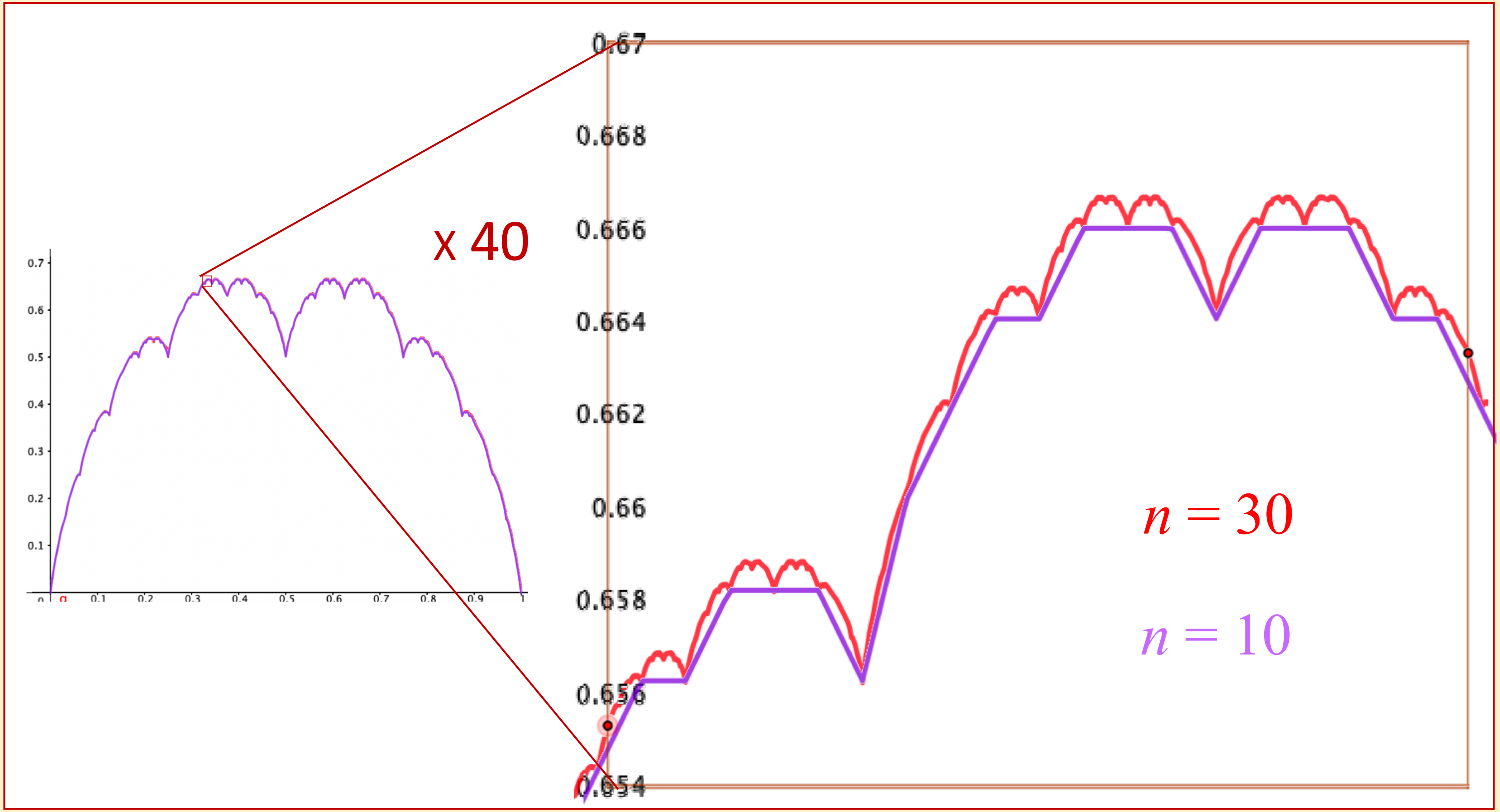
$g(x)$ è un frattale



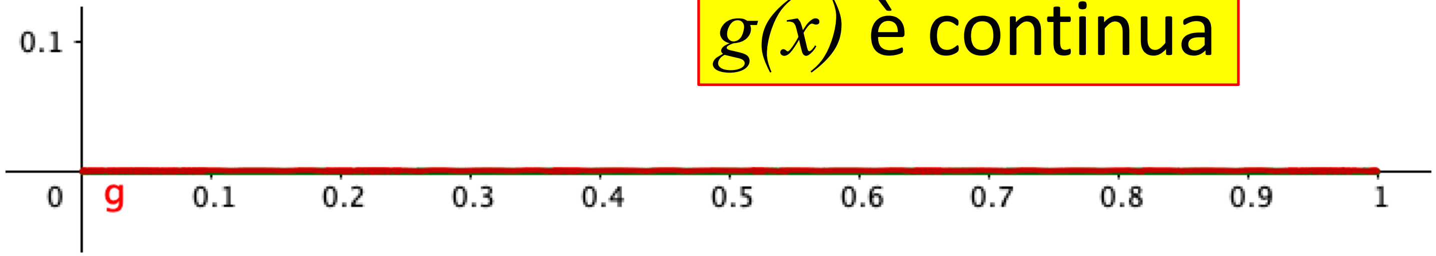
$n = 30$



$g_{30}(x)$

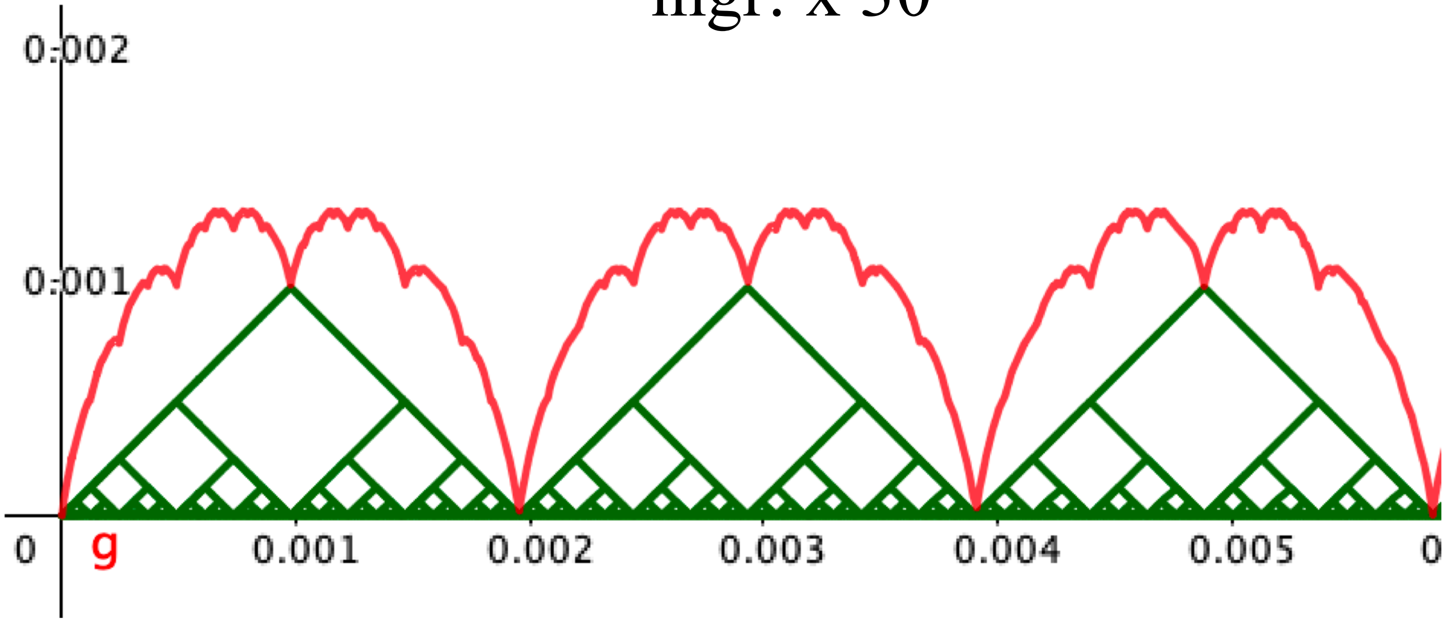

x 40
0.67
0.668
0.666
0.664
0.662
0.66
0.658
0.656
0.654
$n = 30$
$n = 10$

$g(x)$ è continua

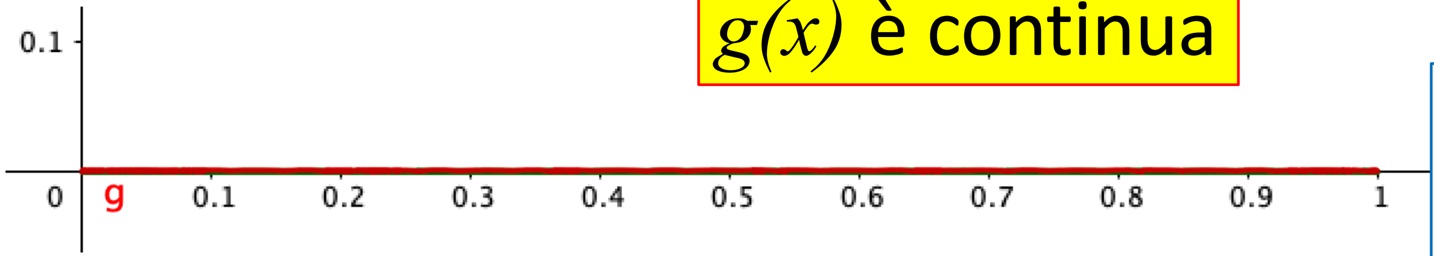


n=10 - 30

ingr: x 30

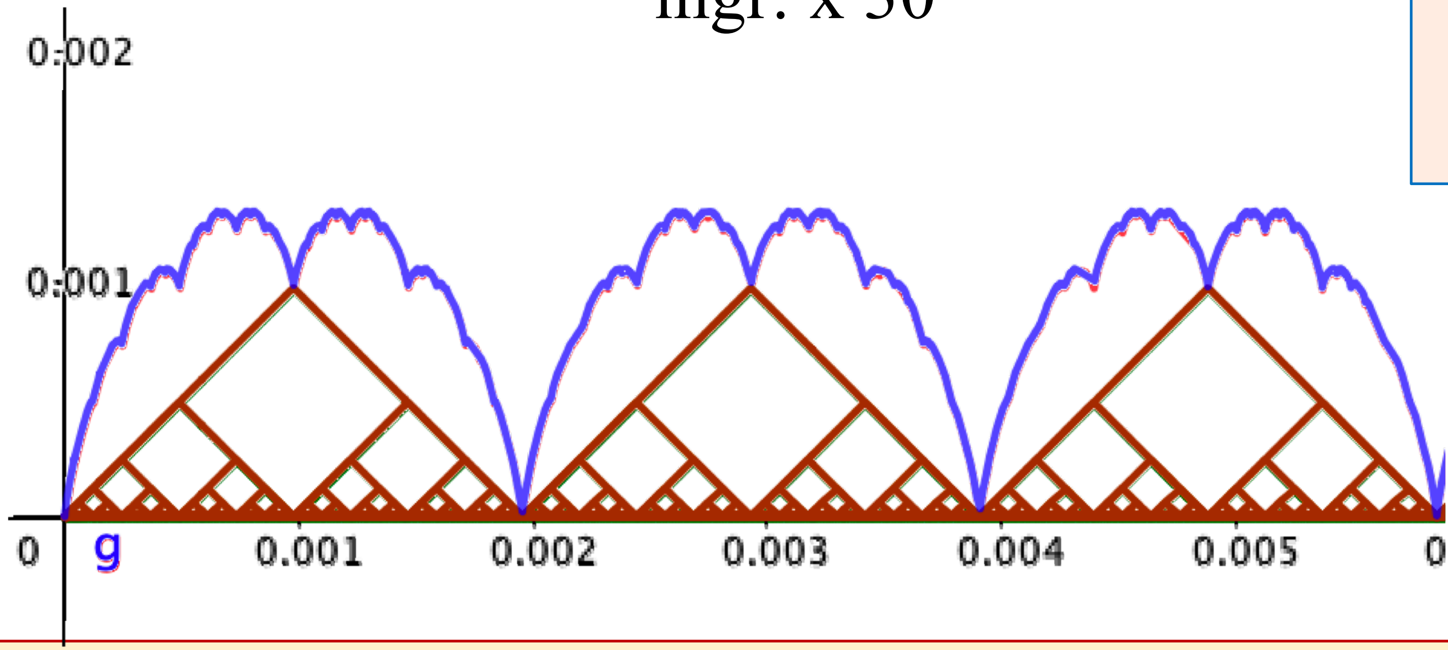


g(x) è continua



n=10 - 30

ingr: x 30



$$g_{30}(x) - g_{10}(x) =$$

$$= \sum_{i=11}^{30} \frac{f(2^i x)}{2^i}$$

$$< 1{,}8 \cdot 10^{-9}$$

Numericamente: maggiorazione della distanza tra g e g_n

$$g(x) - g_n(x) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f(2^i x)}{2^i} <$$

$$< \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

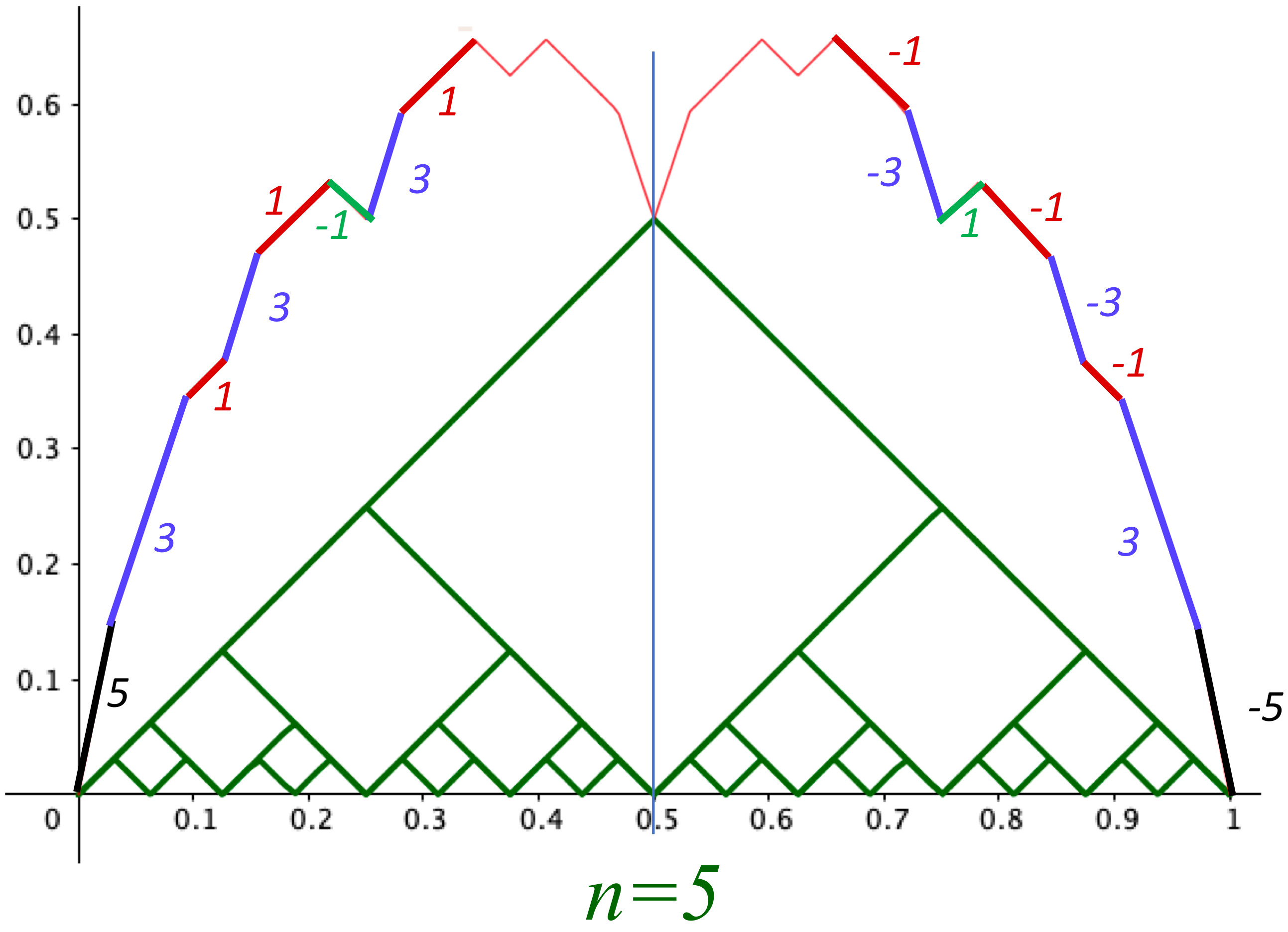
Con prime conoscenze sulle serie geometriche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};\ \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8};\ \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \ldots$$

si può capire (inferire) [dedurre] che:

- $g(x)$ è ovunque definita (maggiorata dalla serie geometrica di ragione $^1/_2$).
- la distanza tra $g(x)$ e $g_n(x)$ può essere resa piccola a piacere prendendo n sufficientemente grande.
- questo vale uniformemente per ogni x.

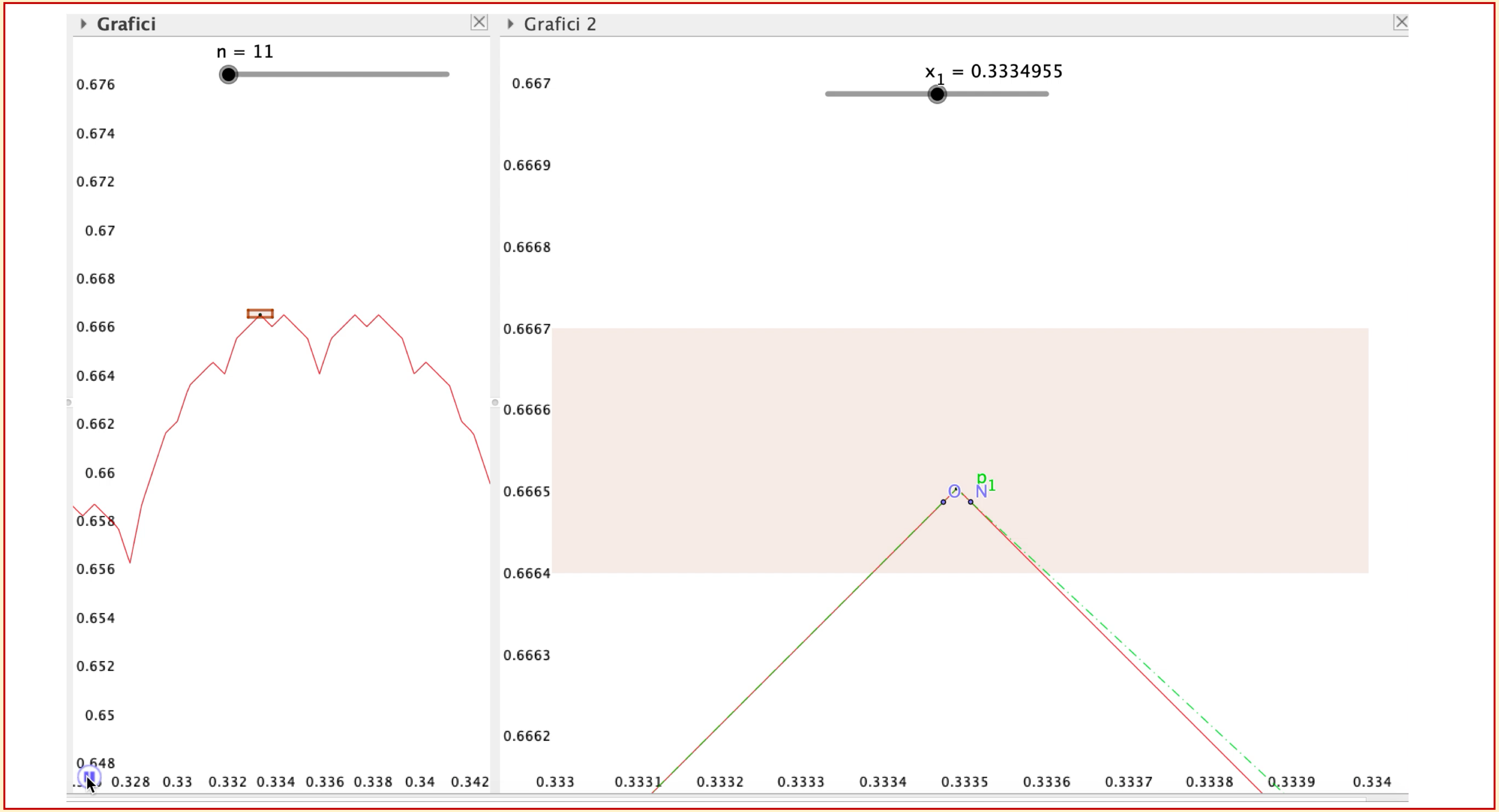

Come mai *g(x)* non è
derivabile in alcun punto?

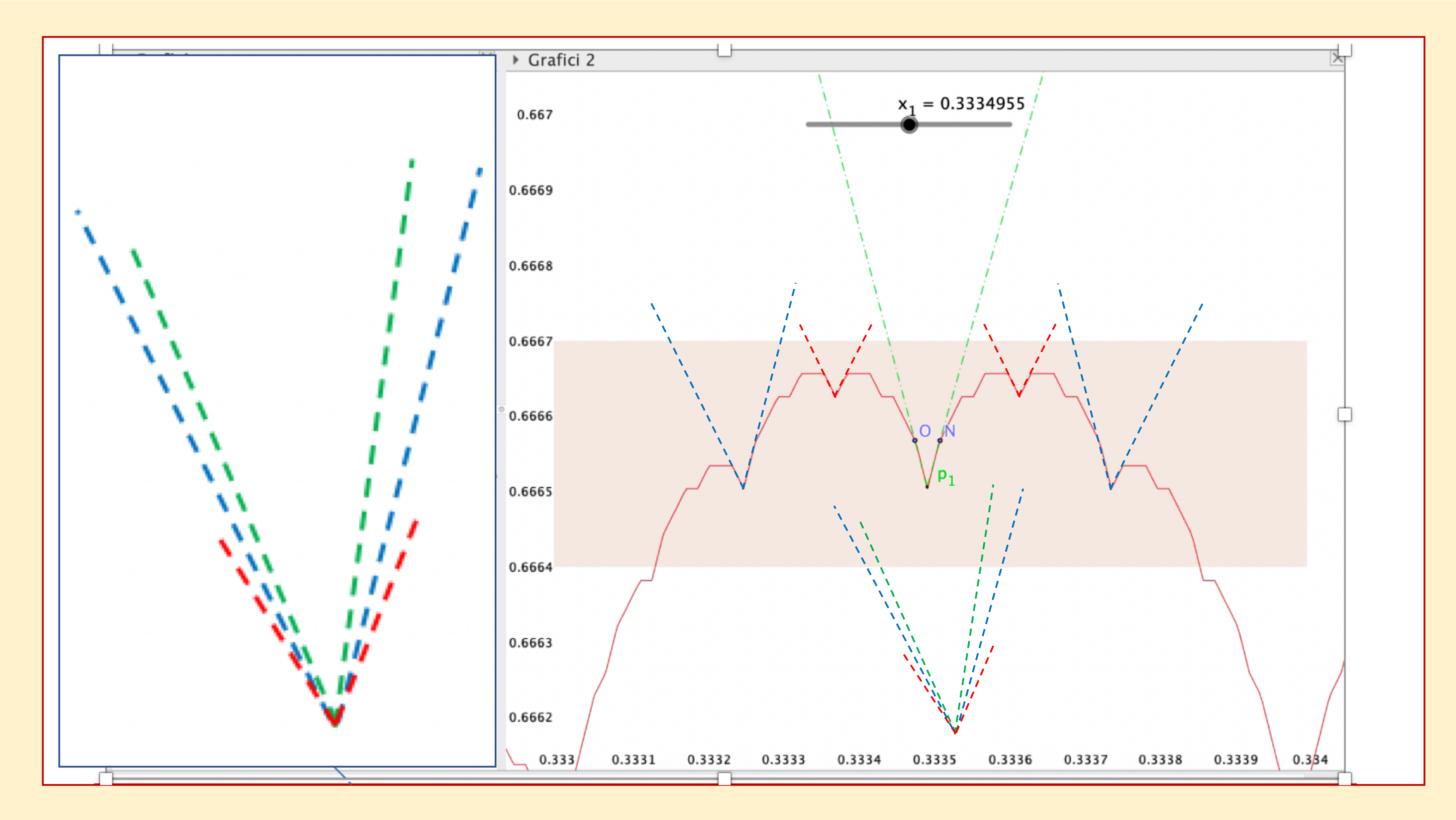


Il gradiente di $g_5(x)$ cambia di ± 1 a ogni passo. Quindi varia tra -5 e $+5$.

In generale la cosa vale per ogni $g_n(x)$.

Questo fenomeno ha effetti importanti su $g'(x)$


Grafici
n = 11
0.676
0.674
0.672
0.67
0.668
0.666
0.664
0.662
0.66
0.658
0.656
0.654
0.652
0.65
0.648
0.328 0.33 0.332 0.334 0.336 0.338 0.34 0.342
Grafici 2
x1 = 0.3334955
0.667
0.6669
0.6668
0.6667
0.6666
0.6665
0.6664
0.6663
0.6662
0.333 0.3331 0.3332 0.3333 0.3334 0.3335 0.3336 0.3337 0.3338 0.3339 0.334
p1
N



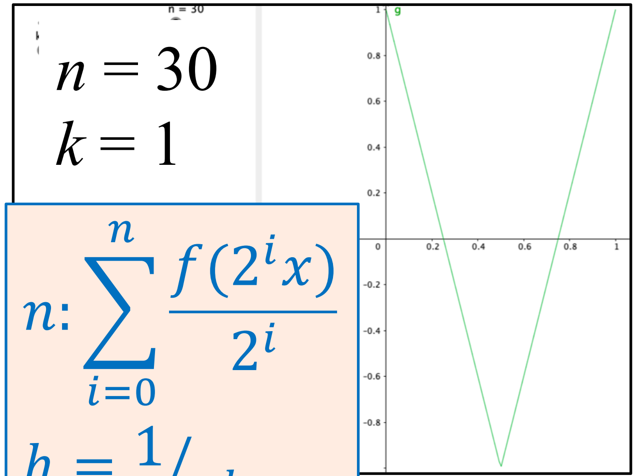
Grafici 2
x1 = 0.3334955
0.667
0.6669
0.6668
0.6667
0.6666
0.6665
0.6664
0.6663
0.6662
O
N
P1
0.333
0.3331
0.3332
0.3333
0.3334
0.3335
0.3336
0.3337
0.3338
0.3339
0.334

Il rapido cambiamento grafico dell’angolo fra le tangenti alla curva è un indizio per la non derivabilità della funzione blancmange $g(x)$.

È possibile approfondire il problema tramite un’opportuna visualizzazione dinamica del rapporto incrementale di $g(x)$ tramite lo ZOOM.

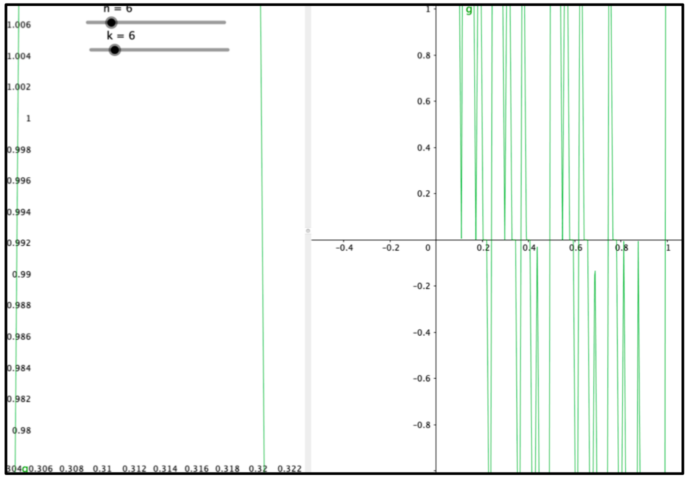
$n = 30$

$k = 1$

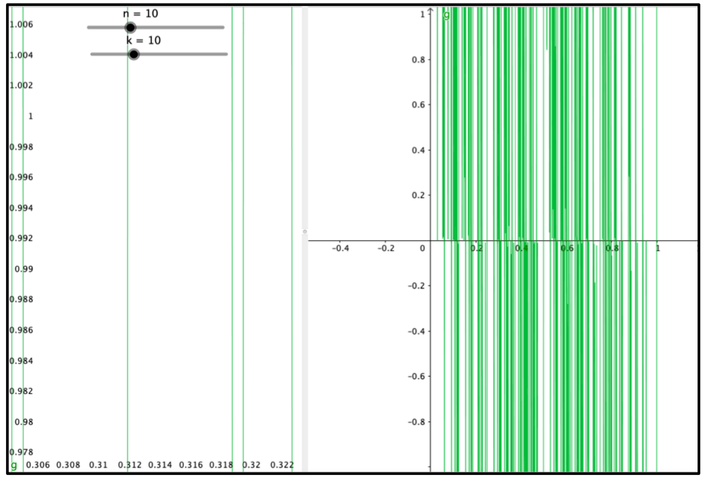


$$n: \sum_{i=0}^{n} \frac{f(2^i x)}{2^i}$$

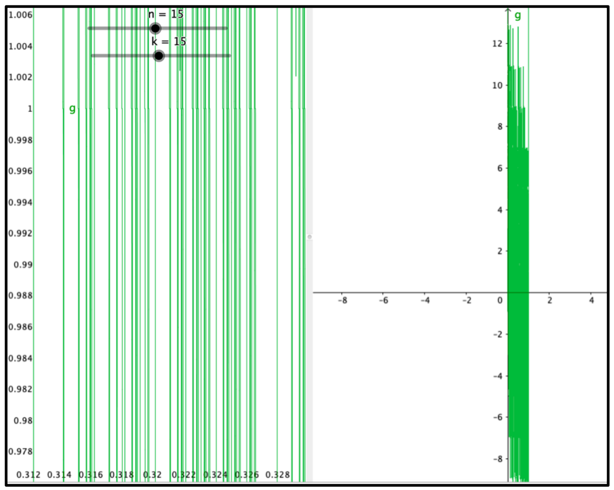
$$h = {}^{1}/_{2^k}$$

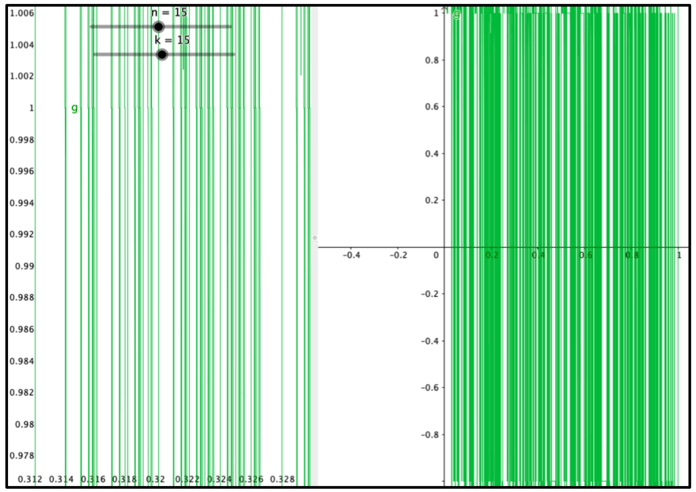


$n = k = 6$

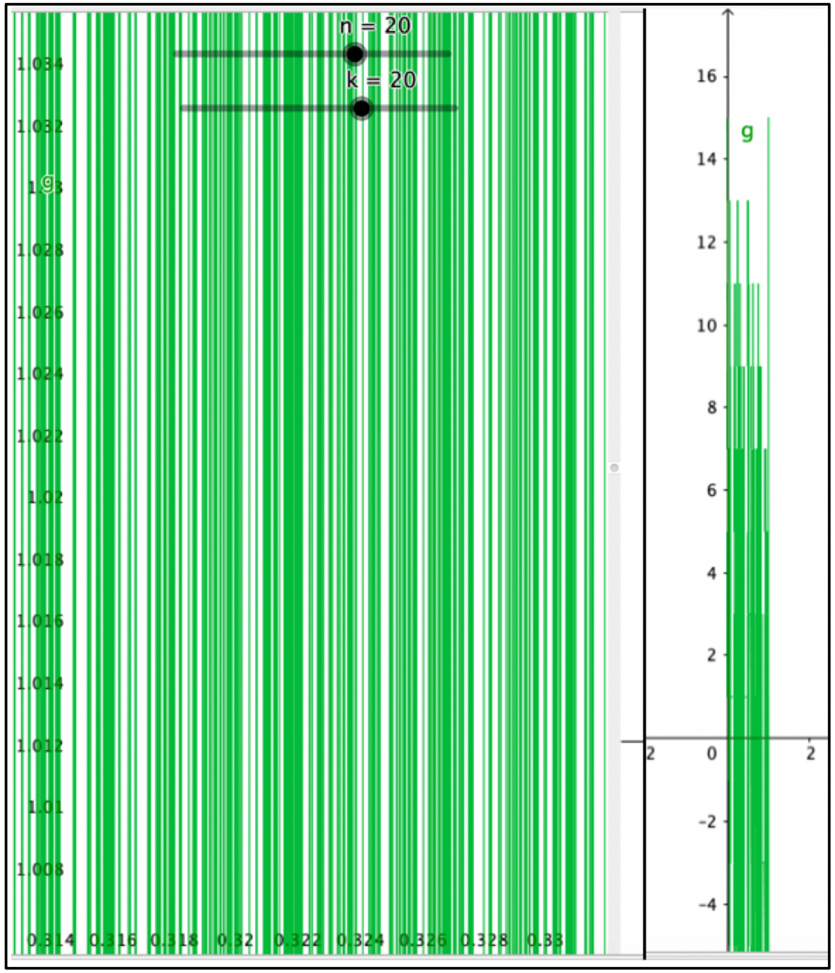


$ingr \approx 65$ $\quad$ $n = k = 10$

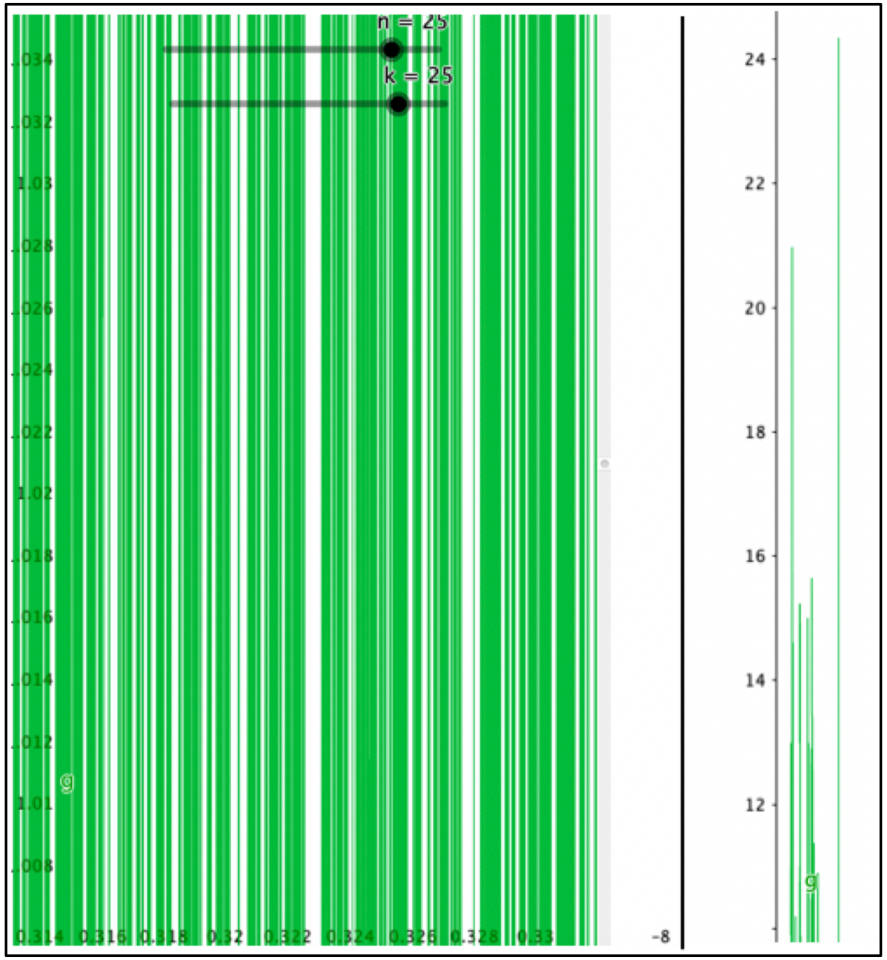




$n = k = 15$, $ingr \approx 750$



$n = k = 20$, $ingr \approx 700$

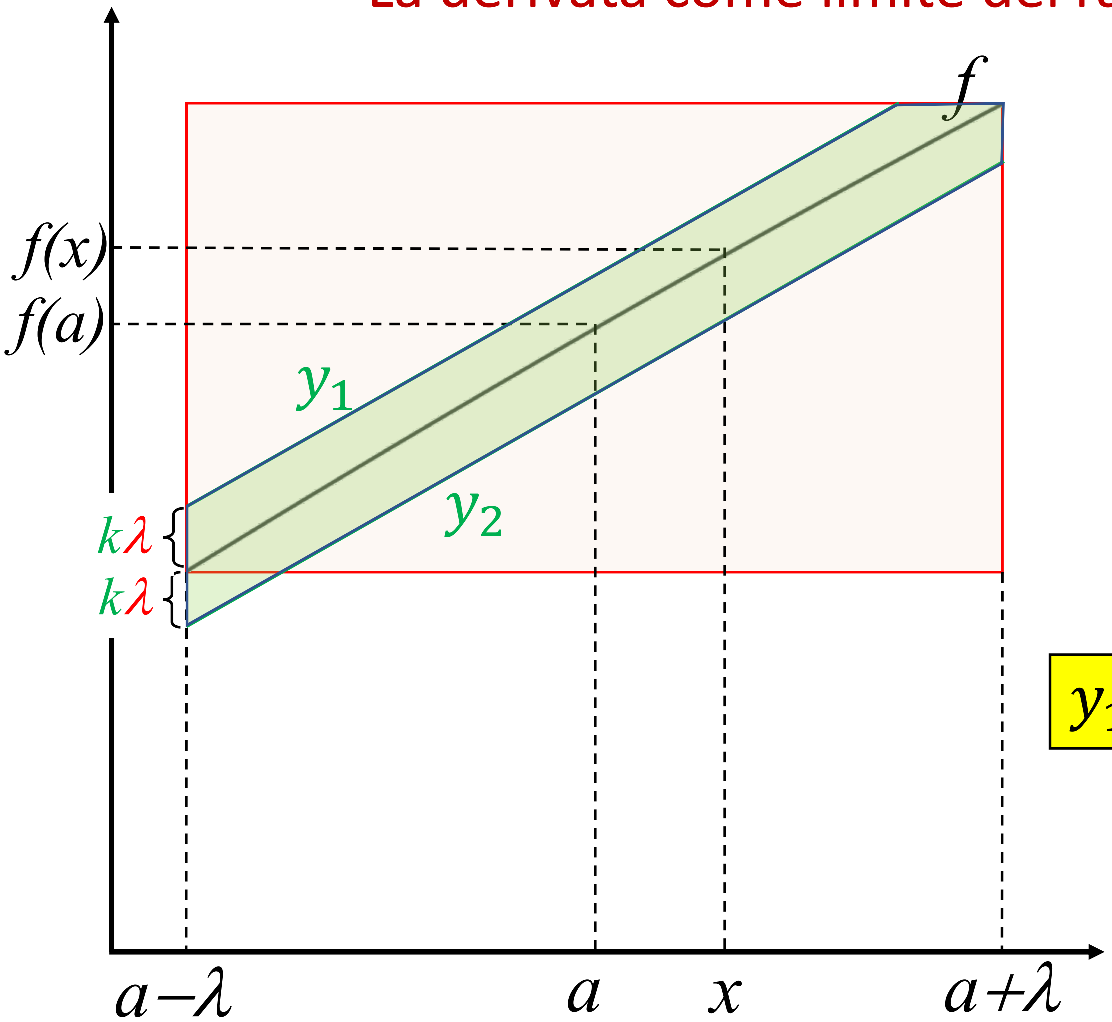


$n = k = 25$, $ingr \approx 500$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Zoomiamo in un altro modo sul rapporto incrementale

La derivata come limite del rapporto incrementale



$$\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \sim f'(a)}$$

Cioè:

Dato k esiste λ t.c.:

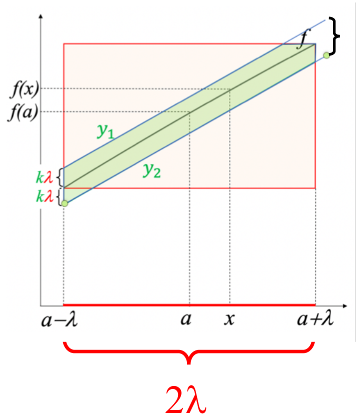
$$|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| < k\lambda$$

Cioè:

$$\boxed{y_1 = f(a)+f'(a)(x-a)-k\lambda} <$$

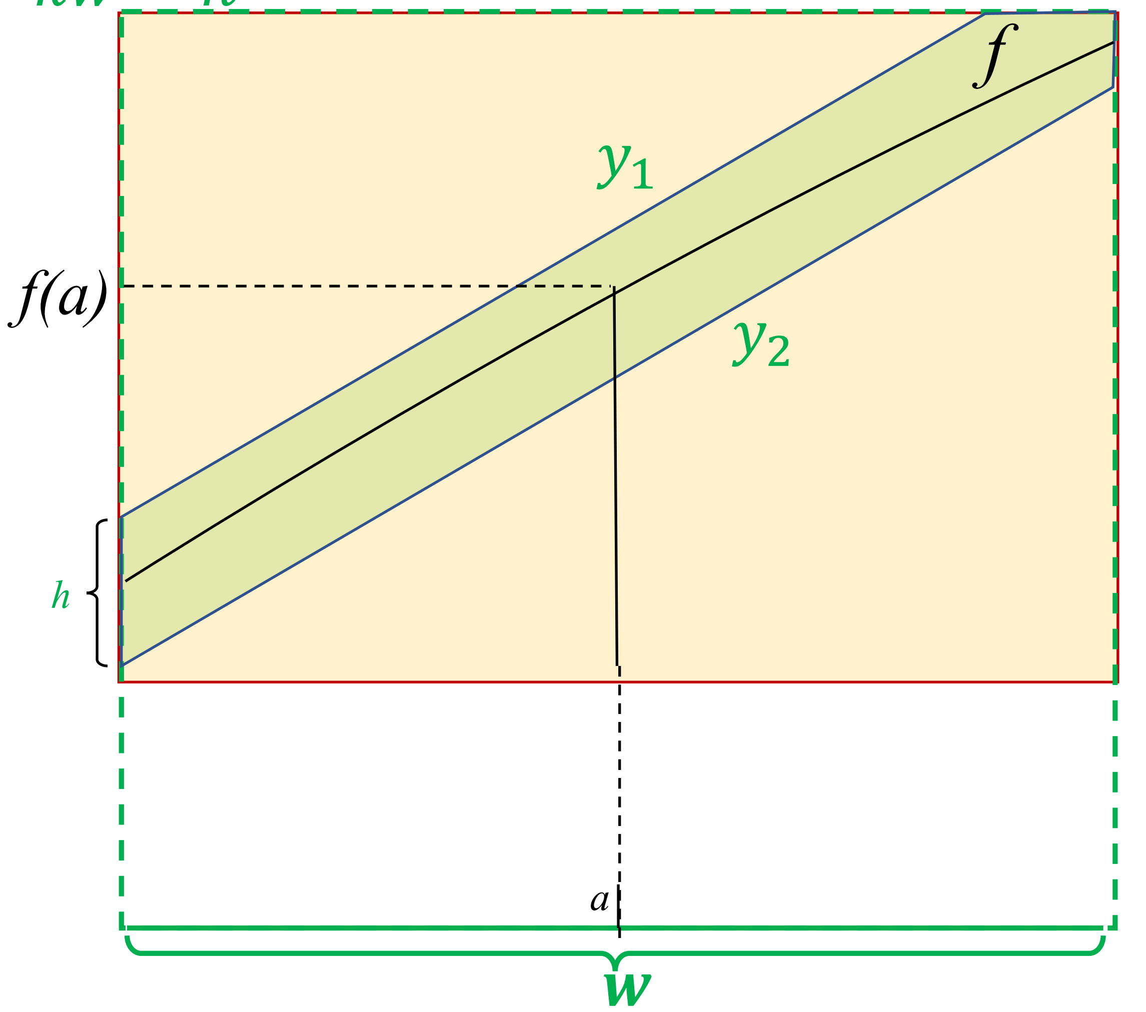
$$< f(x) <$$

$$< \boxed{f(a)+f'(a)(x-a)+k\lambda = y_2}$$



$$2k\lambda \rightarrow 2k\lambda \cdot {}^{w}/_{2\lambda} = kw = h$$

$$\times\ \frac{w}{2\lambda}$$



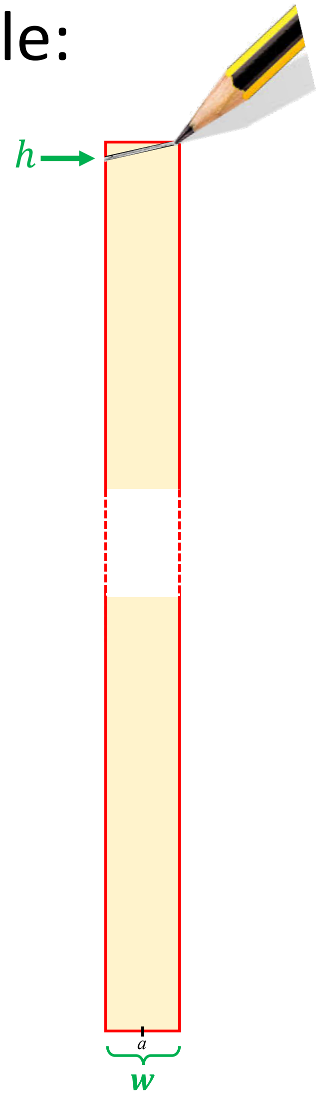
k, w (*h*) possono essere fissati a piacere.

λ dipende da *k*.

Pendenza di y_i: $f'(a)$

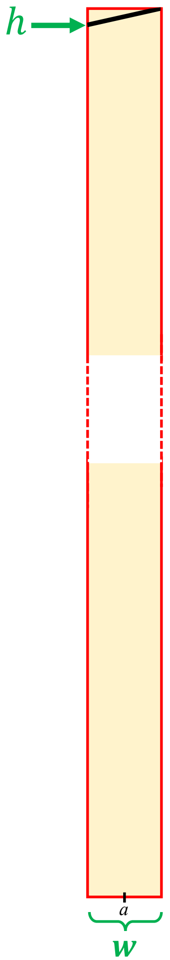
Un’immagine più verosimile:

w = 20 cm; h= 0,01 cm.

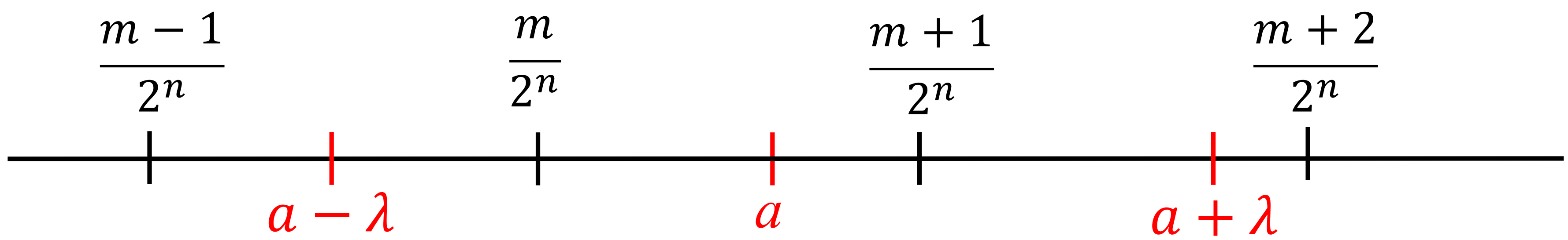


Un grafico di funzione dentro alla traccia di una matita

(w = 20 cm; h= 0,01 cm)



Siano ora n, m t.c.:

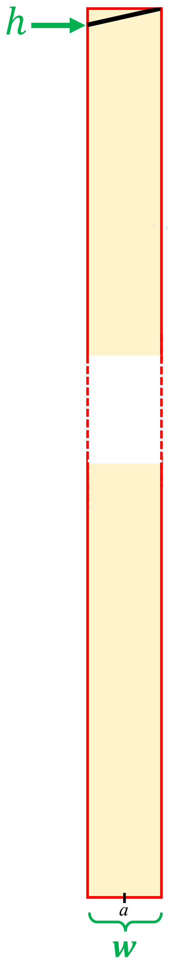


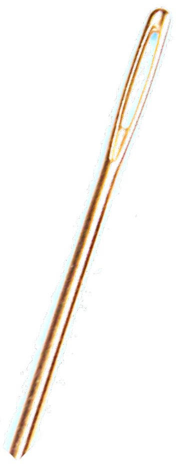
$$2\,\lambda = (a+\lambda) - (a-\lambda) < \frac{m+2}{2^n} - \frac{m-1}{2^n} = \frac{3}{2^n} \rightarrow \frac{1}{2^n} > \frac{2\lambda}{3}$$

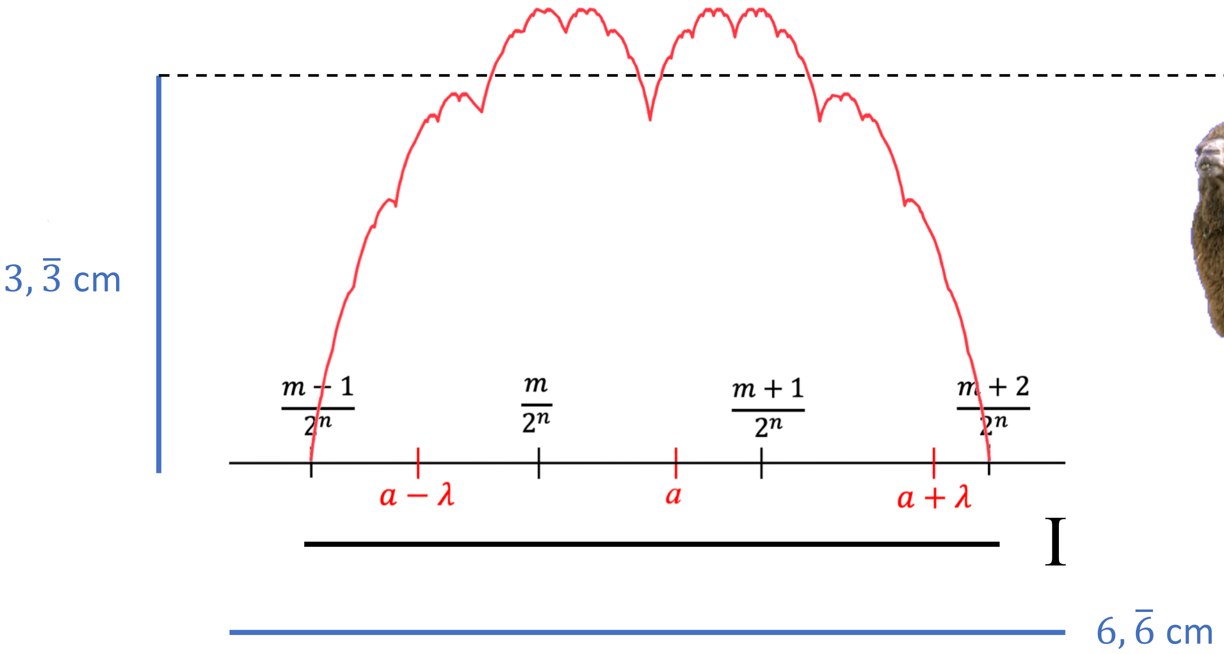
Quindi, con w = $2\lambda = 20$ cm,

I=$\left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m+2}{2^n}\right]$ risulta ampio almeno $\frac{20}{3}$ cm.

w = 20 cm; h= 0,01 cm.

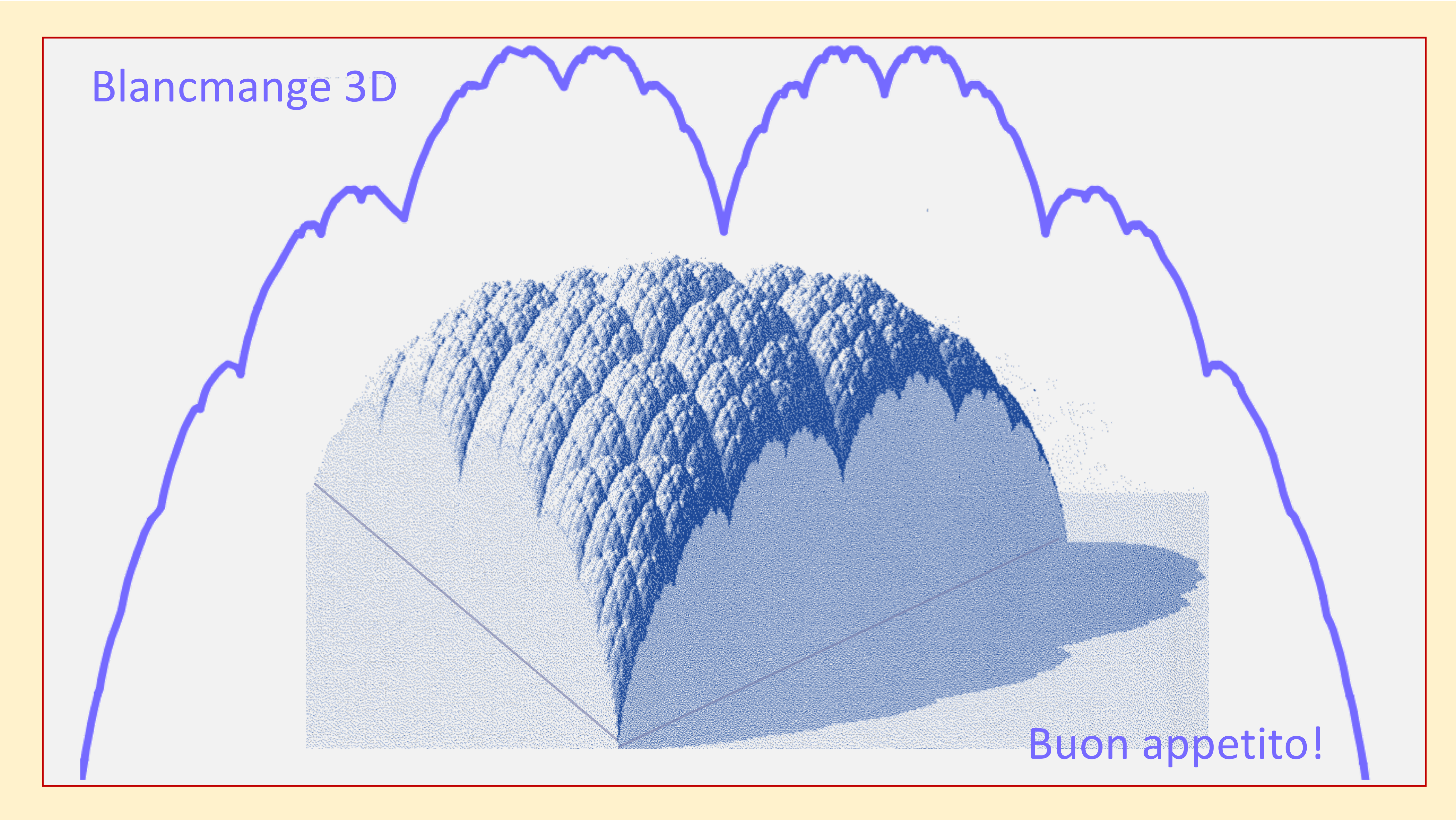






Ma in I si genera una copia di blancmange, alta più della metà della sua lunghezza (> $3,\overline{3}$ cm). Questa non può stare in una striscia alta 0,01 cm.

Quindi g(x) non è derivabile in alcun punto.


Blancmange 3D
Buon appetito!

Visualizzazione dinamica
di concetti matematici

3. Il frutteto di Euclide

Quali alberi di coordinate (m,n)
sono visibili dall'origine? (m,n>0)

Quelli nei punti del reticolo (m, n),
dove m e n sono coprimi.

Un nuovo ‘visual pattern’.