La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

A. Ambrosetti, A. Marino

Riflessioni sul ruolo di Giovanni Prodi nella ricerca scientifica e nella cultura della seconda metà del '900

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.3, p. 337–394.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_3_337_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Dicembre 2011, 337-394

Riflessioni sul ruolo di Giovanni Prodi nella ricerca scientifica e nella cultura della seconda metà del '900

A. Ambrosetti - A. Marino

Ripensando oggi alla figura di Giovanni Prodi nel quadro della ricerca internazionale della seconda metà del '900, si rimane colpiti dalla ampiezza e dalla originalità degli orizzonti scientifici e culturali di questo nostro maestro e dal livello alto delle mete alle quali egli rivolse la sua indagine. Il ruolo che svolse lo colloca in continuità con quella pattuglia di innovatori che nei decenni precedenti avevano tenute aperte le porte dell'ambiente scientifico italiano ai rapporti fecondi con la scienza europea e mondiale e al vento nuovo che vi spirava.

Questo scritto è soprattutto dedicato alla sua ricerca scientifica, ai problemi ardui ai quali si dedicò riportando brillanti risultati, ai metodi nuovi che promosse in Italia creando una scuola di alto prestigio, ricca di numerosi e affezionatissimi seguaci.

Ma il suo ruolo non fu limitato al solo ambito strettamente scientifico. Sensibile ai problemi di tutta la società Prodi dedicò molte energie anche ad altri impegni culturali nei quali ritenne gli fosse possibile mettere a servizio della comunità la sua esperienza e le sue capacità.

Anzitutto fu notevolissimo il suo contributo al rinnovamento della scuola, dalla riforma dei programmi alla elaborazione di libri di testo per le scuole e alla preparazione degli insegnanti. Egli considerava la formazione culturale dei giovani come uno strumento determinante per la realizzazione dei loro talenti e quindi della loro autonomia intellettuale e come la vera strada per la crescita civile e politica di un paese.

Per promuovere contenuti e metodi dell'insegnamento diede origine a numerosissimi gruppi di insegnanti che in varie città italiane esercitavano ed esercitano tuttora una vivace attività di elaborazione e di formazione e divenne una guida e un punto di riferimento per tutta la ricerca didattica in Italia ([1]).

Mosso da questa sollecitudine Prodi si impegnò anche in incarichi pubblici legati all'istruzione in tutte e due le città, Trieste e Pisa, nelle quali svolse il ruolo di professore universitario.

Quello stesso senso di solidarietà, culturale e umana, lo indusse a compiere gratuitamente assai impegnative missioni volte alla promozione dell'insegnamento in alcuni paesi in via di sviluppo come l'Eritrea e l'Ecuador. Quelle popolazioni, per lo stato di depressione culturale e sociale nel quale si trovano, hanno una vera sete di un sistema di istruzione organizzato e aggiornato, nel quale possono trovare la maggiore e più vera opportunità di riscatto.

In questa breve premessa di carattere generale occorre aggiungere una notazione che offre un aiuto per comprendere un po' di più l'impegno scientifico e sociale di Prodi e il suo modo di concepire il rapporto fra cultura, scienza e problemi umani. Nella sua visione quel rapporto non è circoscritto ad alcuni aspetti della vita e della società ma riguarda tutto l'uomo, nella sua interezza, riguarda il suo desiderio di conoscere, di capire e anche di comprendersi reciprocamente fra uomini. In questa prospettiva fu di estrema importanza la sua iniziativa di dare vita, negli anni '70, ai "gruppi su Scienza e Fede": gruppi di studiosi di varie sedi italiane che si riunivano e si riuniscono ancora oggi per riflettere e approfondire in piena libertà e autonomia, alla luce delle proprie competenze specifiche, il significato e il ruolo della scienza in relazione alle domande di senso riguardanti l'universo, l'umanità e la vita di ogni uomo. Questi gruppi sono diventati negli anni sempre più numerosi e offrono il loro contributo alla ricerca di un linguaggio che permetta finalmente un confronto non superficiale fra il pensiero filosofico, il pensiero religioso e il pensiero scientifico moderno.

([1]) Vedi in questa stessa rivista l'articolo di Alessandra Mariotti dedicato a questo aspetto dell'opera di Prodi.

Per tutto il suo apporto alla scienza e alla cultura Giovanni Prodi è stato fra quei maestri che hanno segnato una svolta significativa nella crescita del nostro paese.

Noi desideriamo comunicare qualche tratto della sua personalità scientifica e umana, nella speranza di condividerne i frutti e di rendere partecipe la comunità scientifica della bellezza della matematica nella quale egli ha introdotto i suoi allievi e i suoi collaboratori. Perciò questa esposizione è divisa in tre parti: nella prima cerchiamo di dare uno sguardo alla formazione culturale e scientifica di Prodi, nel periodo storico in cui lui si è trovato a vivere, ricordando in particolare alcuni suoi decisivi incontri; nella seconda mettiamo in evidenza le linee portanti e le idee essenziali della sua opera scientifica e della sua ricca scuola, in confronto con le acquisizioni e le prospettive della ricerca in Analisi nella seconda metà del ’900; nella terza alcuni degli enunciati principali delle sue ricerche vengono esposti, senza dimostrazioni, in termini matematici espliciti.

1. – Qualche dato biografico

Nato a Scandiano, in provincia di Reggio Emilia, il 28 luglio 1925, Giovanni Prodi era il primo di nove fratelli. Il padre, Mario, era ingegnere, la madre, Enrica Franzoni, maestra elementare.

Prodi frequentò le scuole medie superiori a Reggio Emilia e di quel periodo conservò bellissimi ricordi. Da un recente articolo di un suo amico e compagno di studi [2] apprendiamo che quelli del liceo furono per lui e per il gruppo dei suoi amici anni felici e anche fecondi per la loro formazione culturale ed umana. Frequentando la Gioventù Cattolica, Prodi ebbe modo di ascoltare le lezioni di alcune delle menti più illuminate di quel periodo buio nel quale l’Italia era pervasa da idee dittatoriali. Erano Giuseppe Dossetti, Giuseppe Lazzati, Don Sergio Pignedoli (diventerà Cardinale), per citare solo alcuni dei nomi più

[2] S. Chesi, *Il professor Giovanni Prodi: quando la scienza apre nuovi cieli per narrare la gloria di Dio,* Memoria Ecclesiae n. 16, 1 maggio 2010; Supplemento a “La Libertà” n. 17, 1 maggio 2010.

Fig. 1. – Nel 1952 Prodi indossa di nuovo la divisa militare per servire il nuovo Stato italiano. Prodi aveva già prestato servizio nei primi anni '40, a 19 anni: *Il momento tanto atteso del passaggio dal liceo all'Università fu l'inizio di infiniti guai ed apprensioni per la degradazione della nostra società e per la ferocia dei rapporti umani. [...] durante le peregrinazioni cui fui costretto, avevo nel mio zaino due libri di matematica, che talvolta mi servirono da barriera protettiva contro l'ambiente militare* ... .

noti. In seguito con i suoi amici frequentò anche gli incontri periodici a casa di Dossetti, nei quali si studiavano i testi di Jacques Maritain, Dom Columba Marmion, Arturo Carlo Jemolo, ...

Qui troviamo alcune delle radici più profonde della cultura ampia e intrinsecamente cristiana di Giovanni Prodi, nella quale la ricerca scientifica, l'impegno politico e la fede religiosa si sarebbero nutrite e stimolate a vicenda.

Conseguita la maturità a Reggio Emilia nel 1943, Prodi si trovò ad affrontare appena diciottenne uno dei momenti più oscuri della nostra storia recente. Seppur giovanissimo, aveva ben compreso il dramma della guerra e della dittatura, alla quale era come pochi profondamente avverso, per la sua formazione cristiana e anche per il carattere, che rifiutava qualunque imposizione insensata e qualunque prepotenza. Nell'intervista che Salvatore Coen gli fece nel 2000, per il Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (3), Prodi preferisce dedicare poche ma significative parole a quel periodo:

> *Il momento tanto atteso del passaggio dal liceo all'Università [autunno 1943] fu l'inizio di infiniti guai ed apprensioni per la degradazione della nostra società e per la ferocia dei rapporti umani. Di questo non parlerò limitandomi a dire che durante le peregrinazioni cui fui costretto, avevo nel mio zaino anche due libri di matematica, che talvolta mi servirono da barriera protettiva contro l'ambiente militare ....*

Ma nonostante la sua giovane età Prodi mantenne una rigorosa lucidità anche nel distinguere la giustizia dalla vendetta, e nell'opporsi coraggiosamente alla rappresaglia e alla violenza, anche in circostanze assai difficili.

Si laureò nell'Università di Parma il 24 novembre del 1948, con una tesi "Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari", della quale fu relatore il professor Giovanni Ricci, titolare allora di una cattedra presso l'Università degli Studi di Milano e di un incarico a Parma.

I primi passi della sua carriera universitaria Prodi li compì a Milano dove lo chiamò il professor Ricci nel 1949.

Nel 1956 vinse la cattedra di Analisi Matematica presso l'Università di Trieste, nel 1963 fu chiamato su una cattedra dell'Università di Pisa, dove allora, si stavano raccogliendo alcune delle migliori menti matematiche italiane.

Accettò l'incarico di Assessore all'Istruzione nel Comune di Trieste alla fine degli '50 e nel Comune di Pisa, negli anni '70.

Le missioni prima ricordate in Eritrea e in Ecuador risalgono alla seconda metà di quello stesso decennio.

Nel 1983 gli fu conferita la medaglia d'oro da parte dell'Accademia Nazionale delle Scienze, detta dei XL. Nel 1987 Prodi fu eletto Socio

(3) S. Coen, *Ascoltando Giovanni Prodi*, Boll. U.M.I., La Matematica nella Società e nella Cultura S. VIII, V. II-A, 2000, 147-173.

Corrispondente dell'Accademia Nazionale dei Lincei ma, per eccessiva modestia, rinunciò al prestigioso riconoscimento. Nel 2001 ricevette la laurea *honoris causa* in Scienze della formazione dall'Università di Palermo. Nel 2006 il Dipartimento di Matematica dell'Università di Wurzburg, in Germania, intitolò al suo nome una *Visiting University Chair*, denominandola "Giovanni Prodi Chair in Nonlinear Analysis". Nella motivazione Prodi viene indicato come il "Nestore" dell'analisi non lineare in Italia.

Colpito dal morbo di Parkinson (gli fu diagnosticato nel 1990) Prodi ha resistito a lungo alla malattia e alla progressiva invalidità, conducendo una vita attiva, intellettualmente e, per quanto ha potuto, anche fisicamente, con serenità e forza. È deceduto il 29 gennaio 2010.

2. – Alcuni incontri decisivi nel suo ricordo.

Con Giovanni Ricci, Prodi ebbe la fortuna di incontrare all'inizio della sua formazione scientifica altri due matematici, anch'essi di alto livello: Guido Ascoli e Luigi Amerio, che avevano entrambi la cattedra a Milano, dove come si è detto Prodi fu chiamato da Ricci subito dopo la laurea.

Ascoli da pochi anni era stato reintegrato al suo posto nell'Università, che aveva dovuto lasciare a causa delle leggi razziali. Amerio proprio nel 1949 si trasferì da Genova alla Facoltà di Ingegneria del Politecnico (il relatore della sua tesi di laurea era stato lo stesso Ascoli).

Prodi provava per quei suoi maestri ammirazione e gratitudine. Nel "Ringraziamento" che rivolse agli amici nel 1991, in occasione di un Convegno che gli dedicammo presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, troviamo per loro espressioni particolari, che sono interessanti e significative del clima che, in tempi non facili, quei professori sapevano instaurare nell'Università:

> *L'avere incontrato a Parma, dove studiavo, il prof. Giovanni Ricci [...] fu per me una fortuna immensa. Ricci era un matematico di straordinaria finezza e di grande calore umano. [...] Fu una cosa meravigliosa quando mi propose di trasferirmi a Milano come "coadiutore" a 18.000 lire al mese. Lo stipendio era basso, [...] ma se tengo conto che nella prima scolaresca di cui fui assistente, incontrai Silvia, non posso lamentarmi [...].*

A Milano conobbi anche Guido Ascoli, matematico molto acuto e anche molto gentile [...]. Ricordo che una mia nota, abbastanza lunga, sotto la sua critica si ridusse a poche pagine che contenevano le cose essenziali. Forse di tipi come Guido Ascoli ce ne vorrebbero molti anche oggi.

Ma a Milano fu soprattutto importante l'incontro con Luigi Amerio; da lui potevo avere indicazioni per i problemi verso cui mi sentivo istintivamente portato: le questioni di Analisi che scaturivano in ambiente di Fisica Matematica. [...] Il mio debito di riconoscenza verso Amerio è enorme: da lui ho imparato l'atteggiamento corretto verso i problemi [...]; da lui ho avuto incoraggiamenti ed aiuti decisivi.

La studentessa Silvia di cui Prodi parla in questo testo era Silvia Dentella, la sua futura moglie. Si sposeranno il 29 maggio 1954.

A quel periodo si riferisce anche un breve e interessantissimo scritto di Prodi, intitolato "Può bastare un convegno di poche ore per orientare un giovane", in cui lui racconta di un piccolo convegno sulla Analisi Funzionale, che si svolse all'Università di Parma in una unica mattinata verso la fine della primavera del 1949. Quell'incontro ebbe molta influenza sugli orientamenti matematici del giovane Prodi,

Fig. 2. – Nei primi anni '70,
Giovanni Prodi con la moglie Silvia Dentella.

laureato da pochi mesi. Riportiamo qualche riga di quel breve testo che ci mostra anche quanta importanza ebbe in quel periodo, nel quale il nostro paese viveva una difficile rinascita, quella che potremmo chiamare l'alta tensione culturale di alcuni ambienti scientifici italiani.

> *[...] Il momento centrale fu la conferenza di Caccioppoli; [...]. Ricordo che parlò della "foresta funzionale", in cui non ha senso studiare un albero solo, [...]. Poi ricordo che illustrò in termini suggestivi il teorema di Leray-Schauder* (4)*, indicandone le potentissime applicazioni. Seguì una conferenza di Cimmino, dedicata alla analisi funzionale e in particolare al principio dell'alternativa. Ci fu anche un intervento tecnico di Zwirner ancora sul teorema di Leray Schauder, dove per la prima volta sentii parlare di simplessi e di tecniche topologiche. [...] A conclusione del Convegno mi resi conto che l'analisi funzionale era ciò che cercavo. Finite le conferenze, mi avvicinai timidamente al prof. Cimmino, per chiedergli da quale libro cominciare. La risposta fu "Dal Banach"* (5)*. Cominciò così la mia fatica, fra la bellezza degli spazi funzionali e il sesto grado dei metodi transfiniti.*

3. – Sul ruolo della cultura nei paesi emergenti.

È molto utile riportare una riflessione di Prodi che testimonia il suo modo, alto eppure realistico, di concepire il ruolo della cultura nella crescita civile della società. Si tratta del brano di una lettera che egli scrisse il 20 novembre 1982 a Padre Alesssandro Zanotelli, Direttore di "Nigrizia", la rivista che rende conto dell'enorme lavoro dei Padri Comboniani in Africa: una missione generosa, a volte fino al sacrificio della vita, che vuole promuovere le condizioni umane e spirituali di quelle popolazioni nel rispetto assai scrupoloso della loro cultura.

> *Trovo – scrive Prodi a Zanotelli – che mettete molta cura, giustamente, nel salvaguardare i valori e le peculiarità delle civiltà africane, ma vi ponete*

(4) J. Leray et J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles* Ann. Éc. Norm. Sup. s. III, t. 51 (1934).

(5) Stefan Banach, *Opérations linéaires, Chelsea Publishing Company, New York* 1932.

assai meno il problema del confronto di quel mondo con il mondo del pensiero scientifico moderno. [. . .] Non mi è mai capitato di trovare su "Nigrizia" uno studio approfondito sulle difficoltà che incontrano i giovani africani nel contatto con il pensiero scientifico o filosofico, difficoltà che certamente ci sono e che sarebbe molto importante riuscire a superare (io stesso ne ho fatto esperienza, insegnando saltuariamente in una Università africana). Occorrerebbe fare un confronto fra le categorie logiche del pensiero africano e quelle del pensiero greco-occidentale, che sono quelle della scienza moderna. Questo confronto potrebbe forse rivelare interessanti vie d'accesso alla scienza tipiche del pensiero africano, che potrebbero forse consentire in futuro a quei popoli di dare contributi fondamentali (come hanno già fatto indiani, cinesi, giapponesi).

Più rifletto ai problemi del terzo mondo (ho avuto anche un'altra occasione di farlo recentemente in Ecuador) e più mi convinco che il nocciolo della questione non è tanto sul terreno economico quanto sul terreno culturale: si tratta di un conflitto fra civiltà diverse, e il grosso problema delle nazioni emergenti è quello di impadronirsi rapidamente (ai vari livelli, naturalmente) delle linee fondamentali del pensiero scientifico senza perdere la sapienza tradizionale. E non si può pensare che basti prendere possesso semplicemente della tecnologia: l'impiego della pura tecnologia senza l'assimilazione dei principi che le stanno alla base crea la nuova, vera dipendenza coloniale.

Dunque non si tratta solo di economia e nemmeno di un aiuto per una pur necessaria formazione tecnica. Si tratta di puntare in alto: il pensiero scientifico e filosofico greco-occidentale può giocare un ruolo determinante in quelle popolazioni per porre fine alla loro sudditanza e alla loro sofferenza, purché sappiamo collaborare per un incontro ad alto livello delle due culture.

Sulle idee e sulla scuola di Giovanni Prodi nella matematica del '900

Il rigore intellettuale di Prodi emerge anche dalla sua ricerca, nella quale decise fin da giovane, di guardare in alto, ai temi che considerava di più elevato interesse scientifico, non importa se difficili o difficilissimi, anche a costo di rischiare un grande dispendio di tempo e di energie. I poli forti delle sue ricerche, quelli ai quali è dedicata la gran parte delle sue pubblicazioni, furono sostanzialmente due: la fluidodinamica e la cosiddetta "analisi non lineare". Ma la sua riflessione fu assai ampia. Nel bellissimo testo dattiloscritto [39] [1995] "I miei problemi" che lui scrisse per un piccolo convegno organizzato in suo onore, nel momento in cui andava in pensione, si trovano – ne faremo cenno – profonde considerazioni su campi della matematica molto diversi, come l'informatica e la probabilità.

4. – Il contesto internazionale

Per cercare di accostarci meglio alla figura scientifica di Prodi è utile, ed è anche molto interessante, dare anzitutto un rapido sguardo ad alcune fondamentali novità che si andavano sviluppando alla fine degli anni '50 del '900, alle origini del suo percorso scientifico, e che sono fortemente collegate con le sue ricerche. Nate in gran parte da antiche intuizioni, alla fine dell'ottocento o nei primi decenni del secolo, quelle nuove idee stavano cambiando notevolmente il volto dell'Analisi Matematica e l'avrebbero dotata di mezzi nuovi e anzi di nuovi punti di vista.

Alla grande conquista della analisi funzionale, ad opera soprattutto di David Hilbert, Maurice Fréchet e Stefan Banach, fra la fine dell' '800 e l'inizio del '900, si aggiungevano le derivate deboli e le strutture degli spazi di Sobolev che ritroviamo già nei lavori di fluidodinamica di Jean Leray (le *quasi-derivées*) dei primi anni '30 – ne parleremo tra poco – e che pochi anni dopo furono studiate sistematicamente dal matematico russo Sergej L'vovič Sobolev (6), nell'ambito delle sue ricerche sulle equazioni iperboliche. Leray aveva già cominciato a inserire nel nuovo quadro funzionale le equazioni della fluidodinamica che in quel momento costituivano uno degli argomenti più ardui e inesplorati.

Fréchet, sulla scia degli studi del suo maestro Jacques Hadamard, aveva posto le prime basi del calcolo delle variazioni. La topologia

(6) S. L. Sobolev, "*Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*", Rec. Mat. (Matematicheskiĭ Sbornik) 1(43) (1) 1936, 39-72, Zbl 0014.05902.

aveva avuto una crescita formidabile, e anche di questo argomento riparleremo a proposito delle ricerche di Prodi.

Fu in quella fase ricca di tanti fermenti creativi che seppe inserirsi il giovane Prodi. Dotato fin da allora di una apertura scientifica e di una curiosità sorprendenti egli seppe impadronirsi dei nuovi strumenti e dei nuovi punti di vista. Le sue grandi capacità, la sua preparazione, l'inventiva di cui era dotato diedero così origine ad una attività di ricerca che aprirà ampi orizzonti e darà luogo a bellissimi risultati.

Vedremo in seguito un esame completo delle sue ricerche in termini matematicamente espliciti, ma, almeno per quanto riguarda i due filoni principali della fluidodinamica e dell'analisi non lineare, possiamo ora mettere in risalto alcune delle idee portanti che introdusse inquadrandole nei problemi e nei risultati cui era giunta la ricerca scientifica internazionale.

5. – La fluidodinamica negli anni '50 del '900

Prodi cominciò a dedicarsi allo studio della fluidodinamica già alla fine degli anni '50. In quegli anni possiamo dire che questa materia, e in particolare il sistema delle equazioni di Navier-Stokes, costituisse uno dei temi considerati più ardui.

Da un certo punto di vista si può dire che non sono molto più antichi i primi passi avanti significativi compiuti dalla ricerca internazionale riguardo a questo sistema di equazioni. Ci riferiamo qui al problema di Cauchy: assegnata una configurazione iniziale per il campo delle velocità del fluido si studia l'esistenza e l'unicità della evoluzione nel tempo di questo campo.

Negli anni '20 ci si era presto imbattuti in una grossa difficoltà: nel cercare ad esempio di risolvere il problema per approssimazioni successive non si riusciva ad assicurare alle funzioni limite delle soluzioni approssimanti quella regolarità in senso classico (C^2) che la scrittura di quelle equazioni sembra esigere. Dobbiamo in particolare a C. W. Oseen [7] una critica approfondita a quella impostazione. Per

[7] M. Oseen, *Hydrodynamik* Leipzig 1927.

Fig. 3. – Nel 1979, la famiglia Prodi in giardino.

questo Oseen aveva introdotto delle equazioni "integro-differenziali" che non presumevano che le soluzioni fossero di classe C^2. Ma si deve ai fondamentali e approfonditi studi di J. Leray agli inizi degli anni '30 ([8]) una vera impostazione "debole" del problema oltre ad una copiosa messe di risultati e di tecniche. Leray interpreta in senso ancora più debole le equazioni di Oseen. (Leggendo quei lavori si scorge chiaramente il nascere e l'evolversi della nozione di derivata debole e l'idea degli spazi di funzioni le cui derivate deboli abbiano un certo grado di sommabilità.)

Leray aveva suggerito esplicitamente di chiamare "soluzioni turbolente" le soluzioni della sua versione debole del problema. In seguito, quando esamineremo con qualche dettaglio le ricerche di Prodi, citeremo con precisione il problema debole, nella forma studiata da lui, che è poi quella attuale.

([8]) J. Leray, *Ètude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique,* J. Math. Pures Appl., Ser. 9, 12 (1933), 1-82.
– *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visquex que limitent des parois,* J. Math. Pures Appl., Ser. 9, 13 (1934), 331-418.
– *Sur le mouvement d'un liquid visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., 63 (1934), 193-248.

Nei suoi fondamentali studi Leray aveva in particolare dimostrato che nel caso in cui il contenitore Ω del fluido studiato coincida con tutto lo spazio esiste per ogni configurazione iniziale a delle velocità una soluzione turbolenta definita per tutto il tempo successivo e che lo stesso può dirsi nel caso piano nel quale Ω sia un sottoinsieme convesso e regolare di $\mathbb{R}^2$.

Leray aveva anche dato, sotto diverse ipotesi, alcuni teoremi di esistenza locale per soluzioni con un certo grado di regolarità. Inoltre aveva congetturato che il teorema di esistenza in grande dovesse valere per un qualunque aperto Ω.

Ma nei suoi lavori troviamo anche due domande di importanza cruciale, per le quali egli afferma di non avere una risposta e nemmeno, sembra, una chiara congettura. Sono due questioni ormai famose. alle quali tutt'oggi non è stata data una risposta compiuta.

– Fissato il dato iniziale a si può dire che esista una unica soluzione per ogni $t > 0$?

– Può darsi che una soluzione inizialmente regolare divenga improvvisamente irregolare ?

Attorno a questi due interrogativi ha continuato a ruotare fino ad oggi gran parte della ricerca su questo tema.

Gli studi non subirono sostanziali progressi fino ad una pubblicazione di E. Hopf del 1951 ([9]) nella quale veniva dimostrato che, quale che sia il contenitore del fluido in $\mathbb{R}^3$, e quali che siano il dato iniziale a e il numero $\tau > 0$, esiste almeno una soluzione turbolenta definita in $[0, \tau]$.

Questo risultato ridestò l'interesse per il problema e fece si che altri matematici di valore vi si dedicassero.

In particolare nel 1957 era comparso un lavoro nel quale O. A. Ladyzenskaya e A. A. Kieselev ([10]) avevano dimostrato, fra l'altro, un interessante teorema di esistenza e unicità locale.

([9]) E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen,* Math. Nachr. 4 (1951), 213-231.

([10]) A. A. Kiselev et O.A. Ladyzenskaya *Sur l'existence et l'unicité des solutions du problème non stationnaire, pour un liquid visqueux incompressible,* Izvestia Akad, Nauk. SSSR, 21 (1957) 655-680.

Ma i problemi fondamentali sollevati delle domande di Leray restavano irrisolti. È in questo quadro che si inizia la ricerca di Prodi in fluidodinamica. Quella ricerca che lo porterà a conseguire brillanti risultati e a introdurre delle bellissime novità.

6. – Le idee introdotte da Prodi in fluidodinamica

Sul problema di Cauchy relativo alle equazioni della fluidodinamica, Prodi riuscì a compiere insieme a Jacques L. Lions un vero passo avanti nel 1959 (vedi [1959.a]) dimostrando l'unicità della soluzione nel caso in cui ci si può ricondurre al problema nel piano. Dello stesso anno è un enunciato simile della Ladyzenskaya ([11]), ottenuto, con tutta evidenza, in modo del tutto indipendente. Per capire l'importanza di questo teorema basti dire che in tre dimensioni il problema è tuttora aperto malgrado gli sforzi di numerosi matematici di prestigio.

Nello stesso anno, in [1959.b], Prodi ottenne un altro risultato che suscitò molte speranze, dimostrando che si ha l'unicità anche in tre dimensioni se è verificata una condizione che è poi divenuta famosa come la condizione Prodi-Serrin perché il matematico J. Serrin trovò nel 1962 la stessa condizione nello studio della regolarità delle soluzioni.

Altre idee molto originali, Prodi le sviluppò con Ciprian Foias. Nel 1967, in [1967.b], essi mostrarono che nel caso piano la dinamica asintotica delle soluzioni dipende sostanzialmente da un numero finito di parametri. Questo portava a cercare degli "attrattori" per le soluzioni, cioè delle regioni nelle quali il fluido, nel suo movimento, tende ad entrare: intuizione che questi autori furono i primi a proporre e che fu poi sviluppata ampiamente da molti altri.

Sul problema in tre dimensioni il contributo di Prodi fu fortemente innovatore. In [1961] e [1962.a] Prodi propose, per il problema in tre dimensioni, un'idea che destò vivo interesse e si rivelò assai feconda:

([11]) O. A. Ladyzenskaya, *Solution "in the Large" of the Nonstationary Boundary Value Problem for the Navier-Stokes System with Two Space Variables,* Comm. Pure Appl. Math., XII (1959) 427-433.

cercare una opportuna misura di probabilità nello spazio delle situazioni iniziali del fluido tale che per quasi tutte queste situazioni fosse univocamente determinata la successiva evoluzione. Un importante passo in questa direzione, ma con un punto di vista invero un po' diverso, lo fecero insieme Prodi e Fojas nel 1976 in [1961], con la introduzione e lo studio delle cosiddette "soluzioni statistiche". Anche quell'idea fu ripresa e variamente sviluppata da matematici illustri.

Come abbiamo detto, il problema in tre dimensioni è tuttora aperto. Anzi tutte e due le domande che Leray pose nei primi anni '30 non hanno ricevuto una risposta compiuta. Nel citato dattiloscritto "I miei problemi" Prodi espone interessantissime considerazioni su questi argomenti.

7. – L'analisi non lineare negli anni '50 del '900

I metodi topologici in analisi si presentavano, ancora nei primi anni '60, come un campo di ricerca sostanzialmente nuovo e affascinante, dotato di tecniche e di risultati di una potenza allora inaspettata, fiorito sui più brillanti esiti delle ricerche di tipo fondamentale fra analisi e geometria sviluppatesi sino dalla fine dell' '800 ad opera in particolare del grande Henri Poincaré (sullo studio della struttura "globale" degli spazi topologici fu celebre e innovatore il suo libro *Analysis situs*, pubblicato negli ultimissimi anni del secolo) e proseguiti con varii punti di vista da numerosi matematici di alto livello come L.E.J. Brouwer, K. Borsuk, L. Lusternik, L. Schnirelman e, in tempi più recenti, M. Morse.

Allo studio delle equazioni integrali o differenziali non lineari mediante i metodi topologici si erano dedicati con successo, già nella prima metà del '900, altri matematici molto illustri, fra i quali M. A. Krasnosel'skĭ, J. Leray, J. Schauder, R. S. Palais, S. A. Smale e O. Ladyzhenskaya.

Giovanni Prodi impresse un impulso decisivo alla introduzione ed allo sviluppo della cosiddetta Analisi non lineare in Italia, ridando vita agli studi coltivati negli anni '30 e '40 da due maestri come Renato Caccioppoli e Carlo Miranda ([12]), del quale basta ricordare il

([12]) C. Miranda, *Problemi di esistenza in analisi funzionale,* Quaderni matematici della Scuola Normale Superiore Anno accademico 1948 - 49. Litografia Tacchi, Pisa.

bellissimo libro citato in nota, che contiene anche una vasta bibliografia. Di quel libro Prodi diceva che è di una freschezza particolare.

Molti altri studiosi stavano sviluppando vari filoni di indagine in questo ambito in vari paesi europei e negli Stati Uniti. Dobbiamo precisamente a Prodi se l'Italia non è rimasta tagliata fuori da queste ricerche, che attraversavano allora una fase particolarmente fertile e creativa.

Con il famoso ciclo di lezioni della prima metà degli anni '70 presso la Scuola Normale di Pisa, Prodi diede origine ad una scuola di alto livello, che si è andata arricchendo continuamente di numerosissimi e affezionatissimi allievi, alcuni dei quali sono assurti ad una posizione di assai elevato prestigio internazionale.

8. – Le idee introdotte da Prodi in analisi non lineare

Gli studi e l'insegnamento di Prodi in Analisi non lineare si sono rivolti verso tutti i principali settori di questa materia: la biforcazione, l'invertibilità degli operatori, le teorie variazionali, ... e sono stati caratterizzati dalla ricerca costante del legame profondo fra queste teorie e i problemi concreti posti dalle altre scienze. Sono perciò diversi i filoni di ricerca nei quali il suo contributo ha portato ad un decisivo progresso. Richiamiamo qui per sommi capi alcune di quelle sue brillanti idee.

In [1972] Prodi pervenne ad un risultato di molteplicità per una equazione differenziale ellittica semilineare del secondo ordine. Gli autori riuscivano a valutare con precisione il numero delle soluzioni (0,1 o 2) a seconda della posizione della funzione a secondo membro nello spazio delle funzioni. Quell'operatore differenziale insomma ripiega in due, come un foglio di carta, lo spazio delle funzioni. Si giungeva al risultato mediante un teorema di inversione per operatori con singolarità in uno spazio di funzioni che costituiva una vera novità teorica: si riusciva a "risolvere" l'operatore malgrado il fatto che il suo “grado” complessivo fosse uguale a zero.

Un’altra importante intuizione di Prodi fu realizzata nel lavoro di Anna Maria Micheletti ([13]) riguardante la molteplicità degli autovalori dell’operatore di Laplace per il problema di Dirichlet su un insieme aperto Ω, in relazione alle variazioni di Ω. In esso si dimostrava che con una opportuna perturbazione, arbitrariamente piccola, di Ω gli autovalori dell’operatore di Laplace diventano semplici. Questa proprietà ha forti conseguenze in numerosi problemi ellittici non lineari.

Una bella idea di Prodi di quel periodo fu realizzata in [1975]. Negli anni ’60 la teoria di Morse ([14]) era stata estesa da R. Palais ([15]) e S. Smale ([16]) alla dimensione infinita, compiendo così un passo avanti verso la possibilità di utilizzare quella potente teoria nello studio delle equazioni differenziali. Ma occorreva una condizione di “non degenericità” che per i sistemi differenziali ordinari era ottenibile mediante una perturbazione delle condizioni al bordo. In quel lavoro gli autori dimostravano invece la possibilità di approssimare, in dimensione infinita, il funzionale studiato con funzioni soddisfacenti la condizione di “non degenericità”, senza modificare lo spazio funzionale di riferimento, in modo da poter affrontare anche le equazioni differenziali alle derivate parziali.

Alla fine degli anni ’70 fu un lavoro di Giovanna Cerami ([17]) a realizzare, ancora secondo una intuizione di Prodi, una versione molto più flessibile della ben nota “condizione di Palais-Smale”. Quella condizione serve ad assicurare una utile proprietà di compattezza per le successioni di punti che diventano progressivamente critici per un assegnato funzionale; il lavoro della Cerami ne dà una formulazione

([13]) A. M. Micheletti, *Perturbazione dello spettro dell’operatore di Laplace in relazione ad una variazione del campo* Annali della S.N.S. di Pisa, 26 (1972).

([14]) M. Morse, *The calculus of variations in large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 18 (1934).

([15]) R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds* Topology 2 1963, 299-340.

([16]) R. S. Palais, S. A. Smale *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 70 1964 165-172.

([17]) G. Cerami, *Un criterio di esistenza per punti critici su varietà illimitate* Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 112 (1978).

Fig. 4. – Nell’estate del 1992,
Prodi con la nipotina Anna sui monti di Gottro.

adatta a numerosi problemi di equazioni differenziali per le quali la condizione classica non è sufficiente.

Tutte le idee di Prodi furono in seguito riprese e ampiamente sviluppate da numerosi cultori dei metodi topologici per le equazioni differenziali non lineari.

9. – Il seminario di Biomatematica

Prodi aveva una sensibilità scientifica aperta alle più diverse discipline. Fu all’inizio degli anni ’80 che cominciò ad occuparsi in modo più sistematico di Biologia e da allora continuò ad approfondire questa materia, coinvolgendo con il suo entusiasmo numerosi studiosi. Egli diceva che la frontiera più avanzata della scienza nella prima metà del '900 si era trovata sulla Fisica ma da ultimo era passata alla Biologia, disciplina che in quegli anni compiva velocemente meravigliosi (e preoccupanti) progressi e vive ancora oggi una crescita tumultuosa.

Dapprincipio egli diede alcune tesi di laurea coinvolgendo anche un primo piccolo gruppo di biologi. Fu così che nacque il seminario di Biomatematica al quale all'inizio partecipavano i biologi Giuseppina Barsacchi, Marcello Buiatti, Lodovico Galleni, Piero Luigi Ipata, Sonia Senesi, la matematica Paola Cerrai ed un gruppetto di studenti. Poi il seminario si ingrandì e attrasse molti altri studiosi da Pisa e da altre Università. Nacquero così molte belle iniziative: la costituzione del gruppo interdisciplinare di Biologia teorica "Vito Volterra", i convegni ad Arcidosso e la collaborazione, tramite Paolo Freguglia, con la Domus Galileiana di Pisa, finché, alla fine degli anni '90, grazie in particolare a Vieri Benci, Paola Cerrai, Fabrizio Luccio, Leone Fronzoni e Manuela Giovannetti si giunse alla costituzione, nell'Università di Pisa, del CISSC, il Centro Interdisciplinare per lo Studio dei Sistemi Complessi.

Gli studi di Prodi in questo campo si svolsero per la maggior parte in collaborazione con Paola Cerrai e riguardarono soprattutto la elaborazione e l'analisi di modelli per la dinamica delle popolazioni, l'infiammazione dei tessuti, il moto dei batteri e la morfogenesi. Negli atti dei Convegni di Arcidosso del '97 e del '99 si trovano alcuni frutti assai interessanti di quella collaborazione.

Prodi volle dedicarsi anche all'insegnamento della matematica nel corso di laurea in biologia. Quando questo fu arricchito, all'inizio degli anni '90, con un nuovo corso di matematica, fu decisivo il contributo di Prodi nel deciderne metodi e contenuti. Egli scrisse anche due testi (vedi [1992] e [1994.a]) che diedero più ampie e aggiornate prospettive alla preparazione matematica dei giovani studenti di biologia.

10. – Altre collaborazioni e altri temi di ricerca

Prodi intrecciò collaborazioni e fecondi rapporti scientifici con molti altri studiosi, alcuni giovani altri già maturi, su una larga varietà di temi, a testimonianza della grande ampiezza dei suoi interessi e del suo desiderio di condividere il proprio cammino di ricerca. Negli anni

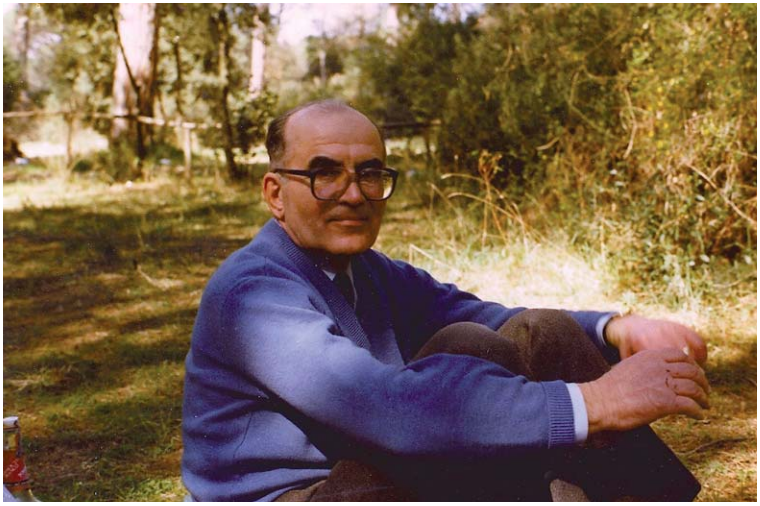

Fig. 5. – Negli anni ’90, nella pineta di San Rossore.

triestini ebbe fecondi scambi di idee con Giovanni Torelli e Luciano De Simon sulle equazioni iperboliche. In quel periodo ebbe inizio la collaborazione con Franco Chersi (che si laureò sotto la sua guida) sui problemi di interpolazione. A Pisa fu assai costruttivo il suo rapporto scientifico con Vieri Benci su argomenti di analisi non lineare. In questo campo Prodi ebbe anche occasione di collaborare con Giampaolo Cicogna, su problemi di biforcazione e con Giovanni Cimatti in problemi di Fisica-Matematica. Su problemi di idrodinamica ebbe lunghe conversazioni con Hisao Fujita, su problemi di analisi funzionale con Pietro Majer e Stefano Mortola.

Prodi volle riflettere a fondo anche sulla probabilità e sull’informatica, mirando anche qui a quelli che lui chiamava i “problemi di vertice”.

È interessantissimo, ancora ne “I miei problemi”, il paragrafo “Fra informatica e probabilità”, nel quale Prodi riflette su due concetti che giocano un ruolo fondamentale al confine fra la teoria dell’informazione e quella della probabilità, e per ognuno di essi formula un problema.

Il primo concetto riguarda i metodi per decidere se un intero sia un numero primo o no. Prodi osserva che se l’intero è abbastanza grande la decisione esige un calcolo molto complesso, mentre, con il “test di primalità di Rabin", si può trovare che un numero è "molto probabilmente" primo con un procedimento assai più leggero. Dunque ci si può porre il problema che segue.

PROBLEMA a): *Quali sono gli algoritmi che ammettono un "algoritmo semplificato" (cioè un algoritmo di complessità assai minore) che sia in grado di dare la risposta esatta con elevata probabilità?*

Nello stesso testo Prodi richiama la definizione di Kolmogorov-Chatin di successione aleatoria (cioè *una successione che non può essere costruita dal calcolatore con un programma più breve della successione stessa*) e ricorda che con il calcolatore si usano programmi molto semplici per costruire sequenze aleatorie (evidentemente non nel senso di Kolmogorov-Chatin) che nella gran maggioranza dei casi svolgono bene il loro ruolo. Da qui il secondo problema.

PROBLEMA b): *Come spiegare il generale successo delle sequenze pseudo-aleatorie?*

In questo tipo di studi Vieri Benci intraprese, incoraggiato da Prodi, un assai originale e fruttifero indirizzo di ricerca.

Vorremmo ancora qui dedicare un particolare ricordo al professor Enrico Magenes, un altro maestro della scuola matematica italiana che fu molto amico di Prodi e collaborò con lui sia nella organizzazione della ricerca in Italia sia nel rinnovamento della didattica. I testi per le scuole medie superiori che Prodi e Magenes hanno scritto in collaborazione sono fortemente innovatori, non solo sul piano scientifico. È a testi come questi che sono affidate le speranze per un futuro migliore della nostra scuola.

Da tutta l'opera di Prodi, dalla sua ricerca scientifica, dai testi che ha scritto per le scuole e per i corsi universitari e da tutto il suo atteggiamento culturale emerge l'invito a guardare in alto, a porsi prospettive elevate. Una proposta che egli rivolgeva soprattutto ai giovani, verso i quali era mosso da una sollecitudine particolare e anche da una certa apprensione. Nel 1990, di fronte alle difficoltà riguardanti l'ingresso dei giovani nel mondo della scuola, scriveva:

Fig. 6. – Negli anni 90, con il Prof. Enrico Magenes durante un incontro a Volterra per discutere del progetto *Scoprire la matematica*. Sullo sfondo alcuni collaboratori: Don Mario Ferrari, Maria Nello (dietro il prof. Magenes), Silvia Dentella e Luisa Prodi.

> *Si direbbe che in tutto questo ci sia una intenzione perversa: far entrare i giovani nella scuola non a testa alta, con la dignità e l'autonomia che possono derivare dalla vittoria in un concorso, ma con l'atteggiamento dimesso di postulanti che aspirano a un sussidio* ([18]).

Ma nella sua proposta c'era la fiducia e l'impegno verso tutti gli aspetti della vita:

> *Non vorrei con queste riflessioni indulgere al pessimismo; anzi penso che le qualità di generosità di cui davo atto ai giovani all'inizio di questo testo facciano sperare l'arrivo di una nuova generazione che sappia ritrovare lo slancio della dedizione e il fascino di un progetto a cui dedicare la vita intera, fino dalla giovinezza. Una generazione che sappia decidersi a spendere coerentemente la vita* ([19]).

([18]) G. Prodi, *"La scuola e i suoi mali"*, aprile 1990, La nuova secondaria.
([19]) G. Prodi, lettera al Direttore de "L'Avvenire", 26 settembre 1995.

Gli enunciati principali delle sue ricerche

11. – La stabilità per le equazioni ellittiche lineari

Si tratta di quattro lavori che proseguono lo studio intrapreso con la tesi di laurea. Uno di essi, il [4] [1951.c], riguarda un'equazione non lineare, cosa allora decisamente all'avanguardia, e ne accenniamo all'inizio del paragrafo successivo. Gli altri riguardano il comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni lineari in una variabile:

$$u'' + A(x)\, u = 0,$$

dove A è una assegnata funzione reale su $\mathbb{R}^+$.

Non poche ricerche erano state dedicate a questo problema fino dagli anni '30. Malgrado si tratti di equazioni lineari in una variabile spaziale, diciamo subito che i risultati di questi lavori conservano ancora oggi tutto il loro interesse.

Il lavoro [1] [1950] è la prima pubblicazione che conosciamo di Prodi su una rivista scientifica. In esso Prodi considera il caso in cui $A(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Ci si attendeva, egli dice, che in queste ipotesi le soluzioni su $\mathbb{R}^+$ tendessero a 0. Alcuni studi precedenti di G. Sansone e L. Tonelli imponevano ad A particolari condizioni di regolarità. Prodi dimostra in particolare il seguente enunciato.

TEOREMA: *Nell'ipotesi che A sia non decrescente e $A(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, esiste almeno una soluzione che tende a zero per $x \to +\infty$.*

Sono entrambe del 1951 le due note [2] [1951.a] e [3] [1951.b] nelle quali Prodi considera la stessa equazione nell'ipotesi che $A(x) \to l > 0$ per $x \to +\infty$. Il criterio al quale la ricerca era allora pervenuta era il seguente:

Se la funzione $A(x)$ è la somma di una funzione a variazione limitata e di una assolutamente integrabile, allora tutte le soluzioni dell'equazione si mantengono limitate.

Restavano però alcuni casi nei quali la stabilità era accertata anche se quelle condizioni su A non erano verificate. È G. Ascoli a segnalare a Prodi il problema e Prodi congettura che si dovesse fare i conti anche con i possibili fenomeni di risonanza. In queste due note Prodi trova delle interessantissime condizioni di questo tipo su A (rinviamo al testo di Prodi per la loro formulazione un po' complessa) che assicurano ancora che tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate. Queste condizioni contengono i criteri già noti come casi particolari.

Su questa classe di problemi Prodi ritorna con il lavoro [7] [1953.b]. In esso egli considera la stessa equazione nella forma

$$u'' + (\lambda - f(x))\, u(x) = 0,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e assume ora l'ipotesi che la funzione f sia continua e tenda a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$.

Egli parte dal fatto che le soluzioni non nulle che tendono a 0 per x che tende all'infinito costituiscono uno spazio unidimensionale $\{t\, u \mid t \in \mathbb{R}\}$ e, se ad esempio f è crescente, non si annullano per $x > f^{-1}(\lambda)$. Migliorando quindi dei risultati precedenti studia una formula che esprime una maggiorazione, in funzione del numero λ, del massimo x in cui tali u si annullano.

12. – Equazioni paraboliche non lineari

Nel lavoro [4] [1951.c] Prodi si occupa del comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni paraboliche non lineari con le condizioni sul bordo assegnate.

Se Ω è un sottoinsieme aperto e regolare di $\mathbb{R}^3$ e $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una assegnata funzione, il problema consiste nello studiare il comportamento asintotico delle soluzioni $u(x,t)$ $(x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}^+)$ di:

$$u_t = \Delta u + F(x,t,u), \quad con\ u = \varphi\ su\ \partial\Omega. \tag{12.1}$$

Prodi cita all'inizio un risultato di R. Bellmann del 1948 che considera un caso particolare in condizioni assai restrittive.

Mediante accorte tecniche di confronto (si noti che F dipende anche da t) Prodi dimostra fra l'altro quanto segue.

TEOREMA: *Se F e φ sono continue e F soddisfa la disuguaglianza:*

$$F(x,t,q_2) - F(x,t,q_1) \leq k(q_2 - q_1), \quad per\ ogni\ q_2 > q_1,$$

per un k minore del primo autovalore di Δ su Ω, allora le soluzioni dipendono con continuità dal dato iniziale, nel senso che se $u(x,t)$ e $v(x,t)$ sono soluzioni di (12.1), *risulta che*

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{x\in\Omega}|v(x,t)-u(x,t)| \textit{ tende a } 0 \textit{ se } \sup_{x\in\Omega}|v(x,0)-u(x,0)| \textit{ tende a } 0.$$

Inoltre, se u e v sono due soluzioni qualunque di (12.1) *allora*

$$\sup_{x\in\Omega}|v(x,t)-u(x,t)| \textit{ tende a } 0 \textit{ se } t \textit{ tende a } +\infty.$$

Nel lavoro [5] [1952] Prodi usa per la prima volta in una pubblicazione le “recenti” tecniche non lineari legate ai metodi topologici; in particolare si serve del metodo di Leray – Schauder.

Dunque nel lavoro [5] [1952] Prodi studia le soluzioni periodiche del problema parabolico non lineare:

$$u_t = u_{xx} + F(x,t,u,u_x), \qquad \textit{con} \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{12.2}$$

dove $l > 0$ e $F : [0,l]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è periodica in t di periodo $T > 0$.

Egli stesso osserva che a queste condizioni del tipo di Dirichlet ci si può ricondurre se l'intervallo delle x o i valori assegnati alla u ai suoi estremi dipendono dal tempo.

Prodi comincia con l'osservare che per il caso non lineare si conosceva molto poco: sui Doklady del 1940 e del 1947 erano riportati in modo sommario e in parte errato risultati di Dz. Ch. Karimov che considerava il caso molto particolare in cui $F(x,t,u,u_x) = \Phi(x,t) + g(u)$, dove g è pari e limitata.

Nel lavoro sono esposti due risultati, uno più elaborato nel quale F dipende effettivamente da u_t e uno più semplice nel caso contrario. A titolo di esempio presentiamo quest'ultimo.

TEOREMA: *Supponiamo che F non dipenda da u_t, sia hölderiana in $[0,l]\times\mathbb{R}^2$, sia periodica in t di periodo $T > 0$ ed esista una costante $k < \frac{\pi^2}{l^2}$ tale che*

$$\frac{F(x,t,q)}{q} \leq k.$$

Allora esiste almeno una soluzione u del problema, periodica in t di periodo T e tale che $u, u_x \in$ $C^0(\mathbb{R} \times [0, T])$.

Il lavoro termina con un controesempio all'unicità.

Anche nel lavoro [6] [1953.a] Prodi ricorre al metodo di Leray – Schauder. Questa volta egli studia il problema di Cauchy per lo stesso problema parabolico non lineare (12.2).

I risultati allora noti per il caso non lineare si limitavano alle situazioni nelle quali ci si poteva ricondurre ad un teorema del punto fisso collegato con le contrazioni e facevano capo ad un lavoro di M. Gevrey ([20]) nel quale veniva assunta l'ipotesi che F fosse lipschitziana rispetto ad u e u_x.

Prodi invece fa una analisi molto diffusa e approfondita e, mediante il metodo di Leray-Schauder, ottiene risultati assai più forti con ipotesi molto più leggere. Egli dimostra un teorema in condizioni assai generali (assumendo l'esistenza di sopra-soluzioni e sotto-soluzioni che imbottiglino la soluzione) dal quale deduce in particolare i seguenti enunciati.

TEOREMA: *Supponiamo che F sia localmente hölderiana in $]0, l[\times]0, T] \times \mathbb{R}^2$ e soddisfi la disuguaglianza:*

$$|F(x, t, q, p)| \leq K \ (|\psi(x, t)|^\gamma + |p|^\gamma),$$

dove

$$\psi(x, t) = \frac{1}{x} + \frac{1}{l - x} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad K > 0, \quad 0 < \gamma < 2.$$

Allora, se indichiamo con Σ_T lo spazio lineare delle u di $C^0([0, l] \times$ $\times [0, T])$ tali che $u_x \in C^0(]0, l[\times]0, T])$ ed esista una costante H t. c. $|u_x| \leq H|\psi|$, risulta che per ogni dato iniziale continuo $u_0 : [0, l] \to \mathbb{R}$, esiste $\delta > 0$ con $\delta < T$ ed esiste una funzione u in Σ_δ, con $u(x, 0) =$ $= u_0(x)$, che risolve (12.2) *in* $]0, l[\times]0, \delta[$.

([20]) M. Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles de type parabolique, *Journal de Math. Pures et Appliqquées.* Ser. IV, Tomo IX (1913).

TEOREMA: *Se F non dipende da p, è localmente hölderiana in* $]0,l[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ *e soddisfa la disuguaglianza*

$$|F(x,t,q)| \leq \varphi(q),$$

dove φ è continua e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\varphi(z)}\, dz = +\infty,$$

allora, per ogni u_0 continua, esiste una soluzione u di (12.2)*, con* $u(x,0) = u_0(x)$*, definita su tutto* $\mathbb{R}^+$.

Al termine del lavoro Prodi mostra con alcuni esempi sia che le ipotesi fatte non assicurano l'unicità, sia che se F non soddisfa la disuguaglianza che figura nelle ipotesi la tesi cade.

Nel lavoro [8] [1954] Prodi considera ancora il problema di Cauchy relativo a una equazione parabolica non lineare, ma questa volta le condizioni imposte alla soluzione sono del tipo di Neumann:

$$\text{(12.3)}\qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t,u,u_x), \ \textit{con le condizioni} \\ u_x(0,t) = -\varphi_1(t,u(0,t)), \quad u_x(l,t) = \varphi_2(t,u(l,t)), \ \textit{per } t \textit{ in }]0,T], \end{cases}$$

avendo fissato $T > 0$ e le funzioni $F:]0,l[\times]0,T]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi_i:]0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Le soluzioni vengono cercate nella classe $\mathcal{C}_T$ delle funzioni funzioni continue su $[0,l]\times[0,T]$ che per $t>0$ ammettono u_x continua e tale che $u_x(x,t)t^{\frac{1}{2}}$ sia limitata.

Anche in questo caso Prodi dapprima ottiene un teorema di esistenza in ipotesi molto generali, supponendo che esistano sopra-soluzioni e sotto-soluzioni che permettano di maggiorare le soluzioni mediante un fine lemma di confronto. Se ne deduce in particolare il teorema che segue

TEOREMA: *Supponiamo che, per $t > 0$, F sia hölderiana e per una opportuna funzione continua $G: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ed un opportuno numero a*

in $]0,1[$ *soddisfi la disuguaglianza:*

$$|F(x,t,q,p)| \leq G(|q|)\ (t^{-a}+|p|^{2a}).$$

Supponiamo inoltre che la funzioni φ_1 *e* φ_2 *siano continue in* $\mathbb{R}\times\,]0,T]$ *e risulti:*

$$|\varphi_i(q,t)| \leq \psi(|q|)\ t^{-\beta},$$

dove ψ *è una funzione continua e* $0<\beta<\frac{1}{2}$.

Allora per ogni u_0 *continua su* $[0,l]$ *esiste* $\delta>0$ *ed esiste* u *in* $\mathcal{C}_\delta$ *che risolve il problema* (12.3) *ed è tale che* $u(x,0)=u_0(x)$.

Nel caso in cui F non dipende da u_x dai vari enunciati si evince il seguente teorema di esistenza in grande.

TEOREMA: *Supponiamo che* $F:[0,l]\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sia continua e inoltre sia hölderiana nei punti interni al suo dominio. Supponiamo che le* $\varphi_i:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *siano continue e che, per* $t>0$ *esistano due funzioni positive e non decrescenti* $M(t)$ *e* $N(t)$ *tali che, se* $|q|>M(t)$ *allora*

$$\frac{\varphi_1(t,q)}{q}<N(T),\ \frac{\varphi_2(t,q)}{q}<N(T),\ \frac{F(x,t,q)}{q}<N(t).$$

Allora per ogni u_0 *continua su* $[0,l]$ *e per ogni* $T>0$ *esiste* $u:[0,l]\times[0,T]\to\mathbb{R}$ *che risolve il problema* (12.3) *in* $[0,T]$ *ed è tale che* $u(x,0)=u_0(x)$.

In questo stesso lavoro [8] [1954] Prodi studia le soluzioni periodiche del problema (12.3). Naturalmente in questo caso F è definita in $\mathcal{D}=[0,l]\times\mathbb{R}^3$. In particolare viene provato l'enunciato che segue.

TEOREMA: *Supponiamo che* F *sia continua in* $\mathcal{D}$, *sia hölderiana nei punti interni di* $\mathcal{D}$ *e soddisfi la disuguaglianza:*

$$|F(x,t,q,p)| \leq G(|q|)\ (1+|p|^{2a}),$$

dove G *è una funzione continua e* $0\leq a<1$.

Supponiamo inoltre che le funzioni φ_i *siano continue e che risulti*

$$q\ F(x,t,q,0) \leq 0,\ \ q\ \varphi_i(t,q) < 0,\ \ per\ i = 1,2\,.$$

Allora, se F, φ_1 *e* φ_2 *sono periodiche in* t *di periodo* T, *il problema* (12.3) *ammette almeno una soluzione periodica.*

13. – Problemi di tracce e problemi al contorno

Nel lavoro [9] [1955] Prodi studia un problema nato da alcune ricerche di L. Amerio e della sua scuola. In particolare Prodi completa alcuni interessanti studi compiuti da S. Albertoni ([21]) relativi alle formule di Green che esprimono le soluzioni dell'equazione

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

mediante i dati al bordo imposti alla u e alla sua derivata normale, tramite le soluzioni fondamentali dell'equazione relative a misure concentrate sulla frontiera.

Negli anni '40 e '50, e ancora negli anni '60, fu molto studiato il problema delle "tracce" e cioè del valore che una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definita su un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e regolare solo in senso debole e non in senso classico, si può dire che assuma su $\partial\Omega$. C. Miranda ([22]) aveva dato una importante condizione sufficiente: che la u fosse hölderiana di ordine maggiore di $\frac{1}{2}$. Nel 1955 Deny e Lions ([23]) avevano dimostrato che se Ω è lipschitziano, esiste una applicazione continua $Tr : W^{1.2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ (la traccia) che alle funzioni regolari su $\overline{\Omega}$ fa corrispondere la loro restrizione su $\partial\Omega$.

Nel 1956 Prodi pubblica un lavoro sull'argomento, il [10] [1956.a]. Fra i risultati che egli ottiene vediamone qui uno che in un certo senso è ottimale. Egli lo ottiene mediante l'uso, allora assolutamente al-

([21]) S. Albertoni, Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione $\Delta u - \lambda^2 u = f$, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat.*, (3) 17 (8t), (1954).

([22]) C. Miranda, Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana, *Rend. Acc. Sci. Fis. e Matem. di Napoli* s. IV, Vol. 18.

([23]) Deny et Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Annales de l'Institut Fourier,* Vol. V, (1955) 305-370.

l'avanguardia, delle derivate frazionarie (definite per mezzo della trasformata di Fourier).

TEOREMA: *Le funzioni f di $L^2(\partial\Omega)$ sono traccia di una funzione di $W^{1,2}(\Omega)$ se e solo se le loro derivate di ordine $\frac{1}{2}$ sono il $L^2_{loc}(\partial\Omega)$.*

Dello stesso anno è anche il lavoro [11] [1956.b] nel quale Prodi si occupa di problemi lineari ellittici o parabolici su un sottoinsieme aperto del piano nei quali il termine noto non sia integrabile e tenda all'infinito sulla frontiera.

Sul problema delle tracce Prodi ritorna con il lavoro [13] [1958] nel quale ottiene un risultato molto generale e molto importante che possiamo dire costituisca il moderno chiarimento della questione. La chiave della chiarezza dell'enunciato sta nell'uso delle derivate frazionarie e lo si può sintetizzare come segue.

TEOREMA: *Sia V una sottovarietà regolare di dimensione m di $\mathbb{R}^n$ e sia l un intero. Allora le funzioni definite su V che sono traccia di funzioni aventi derivate deboli fino all'ordine l a quadrato sommabili sono le funzioni che hanno su V tutte le derivate fino all'ordine $l - \frac{1}{2}(n-m)$ a quadrato sommabili.*

14. – Le equazioni di Navier-Stokes

Abbiamo già accennato al fatto che partire dai fondamentali studi di J. Leray la ricerca sulle equazioni di Navier-Stokes si concentrava sulle soluzioni che lui aveva chiamato "turbolente", cioè sulle soluzioni della versione debole del problema che lui stesso aveva introdotto. Per esplicitare ora il significato di tali soluzioni conviene richiamare anzitutto la forma classica di quelle equazioni.

Consideriamo un fluido contenuto in un recipiente Ω rappresentato da un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^2$, a seconda dei casi. Supponiamo che in ogni istante t e in ogni punto x di Ω il fluido sia soggetto alle forze di massa $f(x,t)$ di componenti $f_i(x,t)$. Se indichiamo con $v(x,t)$ la velocità del fluido, di componenti $v_i(x,t)$, e con $p(x,t)$ la pressione, il sistema di Navier-Stokes nelle incognite v e p può essere scritto nel

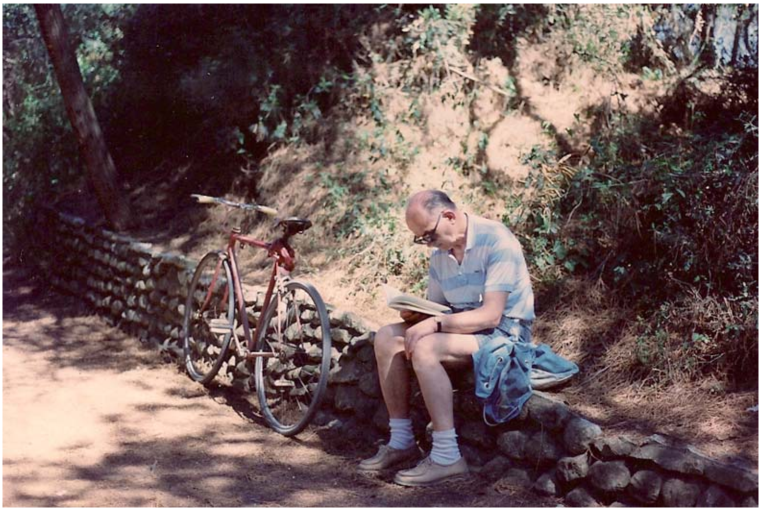

Fig. 7. – Nell'estate del 1993 a Marina di Bibbona.

seguente modo:

$$(\mathrm{NS}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \nu \Delta v_i + \displaystyle\sum_j v_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \quad i \in \{1,2,3\} \ (o\ i \in \{1,2\}), \\ div\ v = 0, \end{cases}$$

dove ν è un coefficiente che dipende dalla viscosità (div è la divergenza rispetto alla variabile x).

Nei casi considerati da Prodi e da molti altri studiosi vengono assunte le seguenti condizioni naturali per v.

Condizioni per NS:

$v(x,t) = 0\ \forall t$ se $x \in \partial\Omega$, $v(x,0) = a(x)$ dove $div\ a = 0$ e $a(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$.

Vogliamo ora introdurre la versione debole di queste equazioni nella forma studiata da Prodi, che è poi quella moderna. Per comprendere come mai questa definizione descriva le soluzioni di NS in un certo senso "debole", occorre tenere presente un risultato di H. Weyl del 1940 ([24]) che permette di eliminare la pressione dalle incognite. Weyl aveva mostrato che lo spazio

([24]) H. Weyl *The method of orthogonal projections in potential theory* Duke Math. J., 7, (1940) 411-444.

$L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ può essere decomposto nella somma dello spazio dei campi vettoriali aventi divergenza nulla su Ω e flusso nullo sulla frontiera e dello spazio, ortogonale al primo, dei campi che sono gradienti di un potenziale; naturalmente tutto ciò va ancora inteso in un opportuno senso debole.

Si tenga presente che nelle varie definizioni che si incontrano nei lavori di Prodi e in letteratura si trovano piccole varianti, ad esempio negli esponenti di sommabilità. Quando queste differenze saranno rilevanti le citeremo espressamente.

Posto $V = \{v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) | div\ v = 0\}$, denotiamo con N la chiusura di V in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e con N^1 la chiusura di V in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Poniamo poi

$$b(u, v, w) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right) dx.$$

Consideriamo inoltre i prodotti scalari:

$$(u, v) = \int_\Omega u \cdot v\ dx, \quad (u, v)_1 = \int_\Omega \left(u \cdot v + \sum_i \nabla u_i \cdot \nabla v_i \right) dx,$$

e indichiamo con $|\ |$ e con $|\ |_1$ le corrispondenti norme.

Soluzioni deboli (o turbolente) : il problema NS*

Diamo dunque qui la nozione di soluzione debole in una versione data da Prodi ad es. nel lavoro [19] [1962.a] di cui parleremo poco più avanti.

Supponiamo d'ora in poi che $f \in L^2_{loc}([0, \tau[; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ $(0 < \tau \leq +\infty)$ e che $a \in N$. Diciamo che una funzione $u : [0, \tau[\to N^1$ è soluzione debole di N.S. e delle condizioni per N.S. se:

$$u \in L^2_{loc}([0, \tau[; N^1) \cap L^\infty_{loc}([0, \tau[; N),$$

$$\int_0^\tau \{-(u(t), \Phi'(t)) + \nu(u(t), \Phi(t))_1 + b(u(t), u(t), \Phi(t))\}\ dt =$$

$$= \int_0^\tau (f(t), \Phi(t))\ dt + (a, \Phi(0)),$$

per ogni Φ in $C_0^0([0, \tau[, V)$ tale che $\Phi' \in L^2_{loc}(0, \tau; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$.

Nel seguito indicheremo con NS* il problema in questa forma. Diremo che f è il secondo membro di NS* e che a è il dato iniziale.

Per esporre, nelle linee essenziali, i risultati delle ricerche di Prodi su questo tema, proviamo a distinguere il caso del fluido nel piano da quello nello spazio tridimensionale.

Il caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Nel 1959 compaiono due lavori, con ogni evidenza indipendenti l'uno dall'altro, entrambi dedicati al problema della unicità in grande della soluzione turbolenta nel piano: uno della Ladyzenskaia (25) e uno, di appena due pagine, di Prodi in collaborazione con J. L. Lions (il [14] [1959.a]).

Con questi lavori la ricerca fa un importante quanto atteso passo in avanti perché entrambi dimostrano in sostanza quanto segue.

TEOREMA: *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ allora per ogni dato iniziale a in N esiste un'unica soluzione $u : [0, +\infty[\to N$ di NS*.*

Per valutare l'importanza del risultato basta osservare che tutt'oggi l'unicità della soluzione in grande (cioè per ogni $t > 0$) in $\mathbb{R}^3$ non è stata né provata né contraddetta.

L'anno dopo in [16] [1960.a] Prodi sviluppa l'argomento studiando le proprietà delle soluzioni considerate in [14] [1959.a] e mostrando sia che esse sono regolari sia che esse dipendono con continuità dal dato iniziale. In sostanza egli prova il seguente enunciato.

TEOREMA: *Le soluzioni $u : [0, \tau[\to N$ di NS* sono continue.*

Fissato $t > 0$, la soluzione $u(t)$ dipende con continuità nella metrica $L^2(\Omega)$ dai valori iniziali a in N, anche se in N si pone la topologia debole di $L^2(\Omega)$.

(25) O. A. Ladyzenskaya, *Solution "in the Large" of the Nonstationary Boundary Value Problem for the Navier-Stokes System with Two Space Variables, Comm. Pure Appl. Math.*, XII (1959) 427-433.

Nello stesso lavoro [16] [1960.a], mediante questi risultati ed una accorto uso del metodo di Leray – Schauder, Prodi può ottenere anche il seguente teorema di esistenza di soluzioni periodiche.

TEOREMA: *Nell'ipotesi che Ω sia limitato le equazioni di Navier-Stokes ammettono almeno una soluzione periodica turbolenta.*

Come vedremo fra poco Prodi già nel 1959 ha studiato il problema in tre dimensioni compiendo importanti progressi e a questo caso continua a dedicarsi prevelentemente anche negli anni seguenti.

Al problema bidimensionale torna nel 1967 con il lavoro [24] [1967.b], che segna l'inizio ufficiale della sua collaborazione con il giovane matematico rumeno Ciprian Fojas.

In questo lavoro [24] [1967.b] i due autori studiano il comportamento globale, e in particolare asintotico, delle soluzioni. Come essi stessi dicono, il risultato principale del loro studio è la dimostrazione che *il comportamento asintotico delle soluzioni non stazionarie dipende in un certo senso soltanto dalla proiezione di queste soluzioni su degli spazi di dimensione finita e dunque, in definitiva, dal comportamento di un numero finito di parametri numerici.*

Su questo argomento, Prodi si era già soffermato nel corso C.I.M.E. che aveva tenuto a Roma nel 1960 (vedi [17] [1960.b]) e che ora utilizza ampiamente.

Cerchiamo di orientarci fra i vari risultati di questo lavoro per chiarire il senso della precedente frase in corsivo.

Gli autori si pongono nell'ipotesi che Ω sia limitato e di classe C^2. Gli spazi di dimensione finita di cui essi parlano sono gli autospazi E_n dell'operatore D indotto su N dall'operatore di Laplace. D è autoaggiunto e $-D \geq 0$. Possiamo dunque considerare la successione crescente degli spazi E_n generati dagli autovettori corrispondenti ai primi n autovalori λ_n di $-D$ e le relative proiezioni $P_n : N \to E_n$. Una importante parte del lavoro dimostra quanto segue.

TEOREMA: *Supponiamo che il secondo membro f stia in $L^\infty([0, \infty[, N)$. Allora esiste una costante $K > 0$ che dipende solo da $|f|_\infty$ e dal coefficiente di viscosità ν tale che per ogni n tale che $\lambda_{n+1} > K$ valgono i fatti seguenti.*

I *Se f ed f_1 sono due secondi membri di NS*, se f_1 soddisfa le stesse condizioni di f, se u e u_1 sono due soluzioni definite su* $[0, +\infty[$ *che corrispondono rispettivamente a f e a f_1 (quali che siano i loro valori iniziali) e se*

$$\lim_{t \to +\infty} (f(t) - f_1(t)) = 0 \ \textit{in } N, \quad \lim_{t \to +\infty} (P_n(u(t) - u_1(t)) = 0 \ \textit{in } E_n,$$

$$\textit{allora} \quad \lim_{t \to +\infty} (u(t) - u_1(t)) = 0 \quad \textit{in } N.$$

II *Se u è una soluzione definita su* $[0, +\infty[$ *che corrisponde a f e se*

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = F \ \textit{in } N \quad \textit{ed esiste il} \quad \lim_{t \to +\infty} P_n(u(t))$$

$$\textit{allora esiste} \ \lim_{t \to +\infty} u(t) = U \ \textit{in } N,$$

dove U è dunque una soluzione stazionaria.

III *Se u è una soluzione definita su* $[0, +\infty[$ *che corrisponde a f e se f e $P_n \circ u$ sono asintoticamente quasi periodiche allora anche u è tale.*

D'altra parte gli autori mostrano che la costante K tende a 0 se $|f|_\infty$ tende a 0, e dunque se $|f|_\infty$ è piccola anche $\lambda_1 > K$. Se ne deduce il seguente enunciato.

TEOREMA: *Sia u una qualunque soluzione di NS* con un secondo membro f. Allora, purché $|f|_\infty$ sia abbastanza piccola,*

$$\textit{se in } N \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = F \quad \textit{allora in } N_1 \quad \lim_{t \to +\infty} u(t) = U,$$

se f è asintoticamente quasi periodica allora anche u è tale.

Il caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Come abbiamo ricordato, nel caso tridimensionale l'esistenza in un intervallo di grandezza arbitraria di soluzioni turbolente era stata dimostrata da E. Hopf già nel 1951, mentre il problema dell'unicità di tali soluzioni in dimensione 3 alla fine degli anni '50 restava completamente aperto. La difficoltà era dovuta in particolare alla natura molto debole di tali soluzioni. Sottolineiamo ancora il fatto che il problema a tuttoggi non è ancora risolto completamente.

È molto famoso il seguente risultato di unicità che Prodi ottiene nel lavoro [15] [1959.b].

TEOREMA: *La soluzione* $u : [0, \tau] \to N$ *di NS* è unica se soddisfa l'ipotesi: esiste* p *con* $3 < p \leq \infty$ *tale che* $u \in L^{\frac{2p}{p-3}}(0, \tau; L^p(\Omega))$.

Il problema generale resta in parte aperto perché il teorema di Hopf che abbiamo ricordato afferma l'esistenza di una soluzione debole u in $L^4(0, \tau; L^4(\Omega))$, mentre l'ipotesi di Prodi è un po' più restrittiva: ad esempio per $p = 4$ essa impone che u stia in $L^8(0, \tau; L^4(\Omega))$.

Naturalmente se si potesse dimostrare che ogni soluzione debole ha quel tanto di regolarità che occorre per soddisfare l'ipotesi di Prodi il gioco sarebbe fatto. Ma questo risultato manca. Notiamo invece che nel 1962 viene pubblicato un importante e, in questo senso non superato, teorema di regolarizzazione di J. Serrin ([26]), nelle ipotesi del quale si incontra proprio l'esponente $\dfrac{2p}{p-3}$ indicato da Prodi. Precisamente Serrin ha dimostrato che una soluzione debole $u(t)$ è di classe C^∞ in Ω per ogni fissato t, purché $f(t)$ sia altrettanto regolare e purché la stessa u soddisfi la condizione:

$$u \in L^q(0, \tau; L^p(\Omega)), \text{ con } p \text{ e } q \text{ tali che } p > 3, q > \frac{2p}{p-3}.$$

Dunque il problema dell'unicità delle soluzioni turbolente resta aperto e il risultato di Prodi sembra ancora oggi il risultato più avanzato. L'ipotesi che Prodi fa in quel teorema è diventata famosa come la "condizione Prodi-Serrin".

In realtà già in quegli anni c'erano vari risultati su NS* che riguardavano in varie ipotesi e in vario senso l'esistenza o l'unicità o la regolarità delle soluzioni, o l'esistenza di soluzioni periodiche o altro ancora. Ma, malgrado l'alto livello degli studiosi che vi si dedicavano,

([26]) J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations* Arch. Rational Mech. Anal. 9 (1962), 187-195.

non era affatto chiaro in quale relazione reciproca fossero molti degli enunciati che si riuscivano a dimostrare.

Il lavoro [19] [1962.a] è di estremo interesse, anche se dal titolo sembra avere il solo scopo di fare il punto della situazione. In effetti nella prima parte Prodi fa una ricognizione sulle ricerche fatte fino ad allora, e scrive [l'originale è in francese]: "*Possiamo dunque concludere questo esame un po' schematico dei problemi relativi alle soluzioni deboli dicendo che, malgrado dei risultati nuovi molto interessanti e anche inattesi ... noi ci troviamo di fronte ad una assai grande varietà di situazioni che non sappiamo ancora chiarire e collegare sufficientemente*".

Ma è nella seconda parte di questo lavoro che le riflessioni di Prodi rivestono una particolare importanza; in particolare nella parte finale che avrà una influenza decisiva per le ricerche successive.

Anzitutto, riguardo al problema della stabilità delle soluzioni stazionarie, egli osserva che il metodo seguito in molti lavori consiste nello studiare la stabilità della soluzione nulla del problema lineare che approssima NS in $u = 0$: questo è il procedimento che si segue nello studio dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie (per i quali però valgono ottimi risultati di esistenza e unicità locale e globale). Ma nel caso del sistema NS questo procedimento attende ancora una giustificazione ed egli ne delinea una che poi esporrà in modo completo nel lavoro [20] [1962.b] che illustriamo tra poco.

Ma proprio nell'ultimo paragrafo del lavoro [19] [1962.a] Prodi apre una prospettiva di importanza fondamentale riguardo al problema della unicità globale delle soluzioni turbolente. Egli infatti prospetta la possibilità che quella proprietà valga per *quasi tutte* le soluzioni: immagina cioè che possa esistere una misura di probabilità μ sull'insieme dei dati iniziali a – qui egli li considera nell'insieme N^1 – che sia in qualche senso significativa e d'altra parte renda trascurabile l'insieme degli a che non danno origine ad una ed una sola soluzione globale. È ragionevole richiedere che μ sia invariante rispetto al flusso delle soluzioni deboli.

A questo riguardo Prodi riferisce qui, procedendo in modo discorsivo, quanto è riuscito a ottenere nella "nota tecnica" [18] [1961], che proviamo ora a riassumere almeno per una parte.

Fig. 8. – Metà degli anni 2000. Un atteggiamento caratteristico di Prodi: le mani imponenti accompagnano l'esposizione.

TEOREMA: *Se D_t denota l'insieme dei punti iniziali a in N^1 dai quali si inizia una unica soluzione continua $u : [0, t] \to N$, su D_t resta definito l'operatore T_t tale che $u(t) = T_t(a)$, dove u è la soluzione che parte da a. Sia ora μ una misura di probabilità su N^1 "semi-invariante" rispetto al flusso T_t, nel senso che*

$$\mu(T_t^{-1}(B)) \leq \mu(B)$$

per ogni sottoinsieme misurabile B di N^1, e supponiamo che

$$\int_{N^1} |u|_1^4 \, d\mu < \infty.$$

Allora è trascurabile rispetto a μ l'insieme dei punti iniziali a per i quali non vale l'esistenza e unicità globale.

A conclusione di [19] [1962.a] Prodi osserva che restano importanti scogli che non è riuscito a superare. Per esempio, dato che esistono misure semi-invarianti banali, come quelle che hanno supporto sulle sole soluzioni costanti, egli si chiede se ne esistano di non banali. Ma aggiunge che non è in quel momento in grado di mostrane degli esempi.

Come aveva già preannunciato, nella nota [20] [1962.b] Prodi studia la stabilità delle soluzioni di NS* e dimostra che per questo è possibile usare il procedimento di linearizzazione che si segue per le equazioni differenziali ordinarie, purché lo si intenda in un modo opportuno.

Sia $P : L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \to N$ la proiezione ortogonale e sia $N^2 = N \cap W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Possiamo ora introdurre $A = P \circ \Delta : N^2 \to N$. Se poi u^* in $W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è una soluzione stazionaria di NS*, introduciamo anche $M_{u^*} : N^2 \to N$ definito da

$$M_{u^*}(v) = \sum_i (u_i^* \frac{\partial v}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial u^*}{\partial x_i}) \qquad \textit{per } v \textit{ in } N^2.$$

TEOREMA: *Supponiamo che* $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ *e sia* u^* *in* $W^{2,2}(\Omega)$ *una soluzione stazionaria di NS*.*

Allora, se lo spettro di $A + M_{u^*}$ *ha parte reale positiva,* u^* *è una soluzione stabile.*

In questa stesso lavoro [20] [1962.b] Prodi riespone i principali risultati di esistenza e unicità locale, con dimostrazioni più snelle e con molte precisazioni.

Le idee probabilistiche introdotte da Prodi nell'ultima parte del lavoro [19] [1962.a] hanno comunque destato vivo interesse. È il giovane matematico rumeno C. Fojas a raccogliere l'"assist" con una serie di lavori dei quali egli tiene Prodi continuamente al corrente. In quei lavori matura una impostazione un po' diversa da quella proposta da Prodi e anche un po' più sofisticata.

Quella impostazione viene poi ripresa nel lavoro [32] [1976] che Prodi e Fojas scrivono in collaborazione. Ora *la stessa velocità incognita del fluido viene rappresentata con una famiglia di misure* $(\mu_t)_{0<t<\infty}$ *che verifica il sistema NS con le condizioni per NS, nel senso delle distribuzioni sia rispetto alle variabili spaziali che rispetto al tempo. Naturalmente anche il dato iniziale è una misura su N.*

La famiglia $(\mu_t)_{0<t<\infty}$ è la famosa "soluzione statistica" che ha appunto segnato una nuova fase delle ricerche sull'idrodinamica. In questo lavoro [32] [1976] si dà una forma definitiva ad un risultato di Fojas, con un teorema alquanto raffinato che prova fra l'altro che:

TEOREMA: *Per ogni misura μ assegnata come dato iniziale su N e tale che:*

$$\int_N \|u\|_N^2 \, d\mu < +\infty$$

esiste almeno una soluzione statistica $(\mu_t)_{0<t<\infty}$ avente importanti proprietà supplementari, fra le quali una notevole forma di continuità.

Sempre in [32] [1976] le classiche soluzioni deboli vengono recuperate come "soluzioni individuali" e cioè come funzioni $u : [0, \infty[\to N$ aventi opportune proprietà e in particolare tali che $(\delta_{u(t)})_{0<t<\infty}$ sia una soluzione statistica, dove δ indica come al solito la misura di Dirac.

Tuttavia va osservato che anche per le soluzioni statistiche resta il problema della unicità, giacché al termine del lavoro l'unicità viene dimostrata ancora nel solo caso bidimensionale. Dunque anche il problema che Prodi ha posto in [19] [1962.a] resta ancora senza risposta.

È anche interessante notare che *non* si afferma che se una soluzione statistica $(\mu_t)_{0<t<\infty}$ ha come dato iniziale δ_{u_0}, dove $u_0 \in N$, allora, almeno per "molti" u_0 in N, necessariamente risulta che $(\mu_t)_{0<t<\infty} = (\delta_{u(t)})_{0<t<\infty}$ per una opportuna $u : [0, \infty[\to N$.

Per molti degli anni seguenti la pubblicazioni di Prodi sono dedicate quasi esclusivamente ai metodi topologici in Analisi non lineare – ne parliamo in una prossima sezione – e ai problemi della scuola e dell'insegnamento.

Sull'idrodinamica Prodi torna ancora con il lavoro [33] [1982], nel quale studia un fluido con densità variabile che si ammette possa essere discontinua, per poter rappresentare anche il caso in cui siano compresenti diversi fluidi che non si mescolano fra loro. La schematizzazione usata è quella di Boussinesq che è adatta a descrivere moti relativamente lenti dato che il termine quadratico nella velocità viene trascurato:

$$(\mathrm{NSB}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & = -\nabla p + \rho\ k \\ div\ u & = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho & = 0 \end{cases}$$

Le incognite sono la velocità u, la pressione p e anche la densità ρ; anche questa, come u e p, dipende da x in Ω e dal tempo t. Come si vede la forza di massa $f = \rho\ k$, dove k è un assegnato campo di vettori su Ω, anch'esso variabile nel tempo: f è del tipo di una "forza di galleggiamento".

Vengono anche qui assegnate le condizioni al bordo e le condizioni iniziali:

Condizioni per NSB

$$\forall t\ u(x,t) = 0\ se\ x \in \partial\Omega,\ \ e\ \forall x\ u(x,0) = u_0(x), \rho(x,0) = \rho_0.$$

Anche ora viene studiata anzitutto una forma debole per NSB con le condizioni per NSB, che si scrive in un modo a questo punto del tutto prevedibile e che indicheremo con NSB*. Lo scopo dichiarato è ottenere l'unicità anche in questo caso, nel quale si ammette la presenza di fluidi non miscibili, anche se in presenza di moti lenti.

Possiamo riassumere il risultato principale di questo lavoro [33] [1982] nel modo che segue.

TEOREMA: *Sia $T > 0$ un tempo assegnato. Supponiamo che Ω sia un sottoinsieme aperto, limitato e regolare di $\mathbb{R}^3$ e che k sia di classe C^1 su $\overline{\Omega} \times [0,T]$. Supponiamo che u_0 stia in N e che ρ_0 sia limitata.*

Allora, se u_0 e f sono abbastanza regolari, esiste una ed una sola soluzione (u,ρ) di NSB su $(0,T)$, con u in $L^2(0,T;N^1)$ e ρ in $L^\infty(\Omega \times [0,T])$ e tale che u soddisfi la condizione: per quasi ogni t, u è lipschitziana rispetto ad x con una costante di Lipschitz $L(t)$ che è sommabile su $[0,T]$.*

È questa l'ultima pubblicazione di Prodi sui temi di idrodinamica. Nel bellissimo testo "I miei problemi" (vedi [39] [1995]) che espose in un seminario al momento di andare in pensione, egli insiste molto sui problemi aperti di idrodinamica, compresi quelli già messi in evidenza dalle fondamentali questioni formulate da Leray nei primi anni '30. Allora come oggi, a quelle questioni la ricerca non ha dato ancora una risposta compiuta.

15. – Soluzioni periodiche di equazioni iperboliche non lineari

A questo argomento sono dedicati in modo specifico i tre lavori [12] [1956.c], [21] [1965] e [22] [1966].

In [12] [1956.c] si studia il problema nella forma che segue.

PROBLEMA: *Considerato un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ ed un fissato periodo $T > 0$, si cerca una funzione $u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica in t di periodo T e tale che*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + g(x,t,u_t) = f(x,t,u) \\ &u(x,t) = 0, \text{ per ogni } x \text{ in } \partial\Omega, \end{aligned}$$

dove $g,f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni periodiche in t di periodo T.

Come egli stesso osserva all'inizio del lavoro, le precedenti ricerche al riguardo erano scarsissime: l'unico risultato di esistenza noto nel caso non lineare, dovuto a Zabotinski, riguardava una questione molto particolare.

Vengono considerate soluzioni in senso generalizzato, del tipo di Friedrichs-Sobolev: possiamo dire che la u viene cercata nello spazio H_T ottenuto come chiusura dello spazio

$$\{u \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \mid u(x,t) \text{ è } T-\textit{period. in } t \text{ e } \{x \mid \exists t \; t.\,c.\; u(x,t) \neq 0\} \subset\subset \Omega\}$$

rispetto alla norma

$$\left(\int_{\Omega \times [0,T]} \left(\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right) dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si suppone che Ω sia limitato e che f e g soddisfino le classiche condizioni di Caratheodory e cioè che siano misurabili rispetto a (x, t) per ogni valore dell'ultima variabile e continue rispetto a questa per quasi ogni (x, t).

Dopo avere studiato le proprietà dell'operatore che risolve univocamente il problema nel caso lineare, nel quale $g(x, t, u_t) = Mu_t$, con $M > 0$, e f non dipende da u e sta in $L^2(\Omega \times [0, T])$, Prodi dimostra in particolare i due seguenti teoremi.

TEOREMA: *Se f non dipende da u, se f e $g(\cdot, \cdot, 0)$ stanno in $L^2(\Omega \times [0, T])$, e se g è tale che per opportuni $m > 0$ e $M > 0$ risulti*

$$m \leq \frac{g(x, t, p_2) - g(x, t, p_1)}{p_2 - p_1} \leq M, \quad \textit{per } p_1 \neq p_2,$$

allora esiste una ed una sola soluzione periodica in H_T.

Il secondo enunciato è molto interessante e un po' complesso. Per darne una idea espressiva in poche parole limitiamoci qui al caso in cui f non dipenda da t. Si pone

$$\lambda_1 = \inf_{v \in W_0^{1,2}} \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx}{\int\limits_{\Omega} |v|^2 \, dx} .$$

TEOREMA: *Se g è tale che $|g(x, t, p) - s(x)p| \leq \gamma |p|$, dove $s \in L^2(\Omega)$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, e se f soddisfa le condizioni che seguono, dove $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^2(\Omega)$ e $\psi \geq 0$,*

$$|f(x, q)| \leq \mu |q| + \psi(x), \quad f(x, q) q \leq \sigma q^2 + \psi(x)|q|,$$

allora, se $\sigma < \lambda_1$ esiste almeno una soluzione periodica.

In questo caso Prodi perviene alla dimostrazione attraverso un teorema di punto fisso che ottiene mediante la teoria del grado di Leray-Schauder.

È molto interessante al termine del lavoro un esempio nel quale l'autore mostra che anche nel caso del problema semplificato

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t = f(x, t), \quad u \text{ è } 1 - \text{periodica } \textit{in } t, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

può accadere che la soluzione u non sia regolare, anzi che non abbia derivata seconda rispetto a t in nessun punto (x,t).

In [21] [1965] e [22] [1966] Prodi raffina parecchio il risultato precedente, almeno nel caso del problema:

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f(x,t), \quad u(x,t) = 0 \text{ se } x \in \partial\Omega.$$

Dal suo studio si deduce fra l'altro l'enunciato che segue.

TEOREMA: *Supponiamo che Ω sia limitato, che g sia continua e strettamente monotona, e che esistano h, k, ρ in $\mathbb{R}$ con $h, k > 0$ e $\rho \geq 1$ tali che*

$$h \leq \frac{g(q)}{|q|^{\rho-1}q} \leq k \text{ per } |q| >> 0.$$

Se f è periodica in t di periodo $T > 0$ e se $f \in L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega \times [0,T])$, questo problema ammette una unica soluzione in un opportuno senso debole.

L'ipotesi che g sia "asintoticamente equivalente" a $|q|^{\rho-1}q$ gioca un ruolo fondamentale per provare le maggiorazioni a priori necessarie per usare il metodo di Leray – Schauder.

16. – La biforcazione

Il lavoro [23] [1967.a] contiene il testo di una conferenza che Prodi tenne a Trieste il 3 ottobre del 1967. In esso egli espone alcuni dei risultati e dei metodi più importanti sulla teoria della biforcazione allora conosciuta. Inoltre introduce un metodo nuovo, per il caso variazionale.

Siano X e Y spazi di Banach e sia $F : \mathbb{R} \times X \to Y$ tale che $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE: Un punto di biforcazione per F è un λ^* tale che esistono $\lambda_j \to \lambda^*$ e $u_j \to 0$, $u_j \neq 0$, per cui $F(\lambda_j, u_j) = 0$.

Vale il seguente enunciato:

TEOREMA: *Se $F \in C^1$ e λ^* è di biforcazione allora $D_u F(\lambda^*, 0)$ non è invertibile. Viceversa, supponiamo che $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ e che esista*

$\lambda^* \in \mathbb{R}$ *tale che:*

(i) $Ker[D_u F(\lambda^*, 0)] = \mathbb{R}\phi^*$ *per qualche* $\phi^* \in X$,

(ii) $Range[D_u F(\lambda^*, 0)]$ *è chiuso ed ha codimensione* 1,

(iii) *la derivata seconda mista* $M := D_{u,\lambda} F(\lambda^*, 0)$ *soddisfa la relazione*

$$M(\phi^*) \notin Range[D_u F(\lambda^*, 0)].$$

Allora λ^* *è di biforcazione.*

Nel caso in cui $X = Y$ *e* $F(\lambda, u) = \lambda u - G(u)$, *le ipotesi (i-ii-iii) sono verificate se* λ^* *è un autovalore semplice di* $dG(0)$.

Come Prodi era solito fare, il risultato astratto è motivato e quindi applicato a problemi di fisica matematica. Qui viene considerato un problema di fluidodinamica. Seguendo un lavoro di Velte, si studia il moto di un fluido viscoso posto tra due cilindri coassiali di raggi $r_1 < r_2$. Partendo dal sistema (stazionario) di Navier-Stokes, si arriva a cercare soluzioni $(u(r,z), v(r,z))$, T-periodiche in z, del sistema

$$\begin{cases} \nu L^2 u + a(r) v_z + M(u, u_r, u_z, u_{rr}, u_{zz}, v, v_r, v_z) & = 0 \\ \nu L^2 v + b u_z + N(u, u_r, u_z, u_{rr}, u_{zz}, v, v_r, v_z) & = 0 \end{cases} \tag{16.1}$$

dove $\nu > 0$ è il reciproco del numero di Reynolds, $a(r) \geq 0$, $b > 0$, M, N sono dei polinomi omogenei di secondo grado e

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}.$$

Le condizioni sui bordi dei cilindri sono

$$u(r_1, z) = u(r_2, z) = u_r(r_1, z) = u_r(r_2, z) = 0, \quad v(r_1, z) = v(r_2, z) = 0 \tag{16.2}$$

Il sistema (16.1), (16.2) ha la soluzione banale $u = 0, v = 0$, corrispondente alla soluzione di Couette. Si tratta di vedere se, per certi valori del parametro ν e del periodo T, vi sono altre soluzioni $(u, v) \neq (0, 0)$ che si biforcano da quella di Couette. Il sistema linearizzato in $(0,0)$ è dato da

$$\begin{cases} \nu L^2 u + a(r) v_z & = 0 \\ \nu L^2 v + b u_z & = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al contorno (16.2).

Si può dimostrare, usando le serie di Fourier, che per certe scelte di T, questo sistema linearizzato ha un autovalore semplice ν^*, che dunque è il valore di biforcazione cercato.

Prodi passa poi ad enunciare un teorema di Krasnoselski che riguarda il caso in cui $X = Y$, $F(\lambda, u) = \lambda u - K(u)$ con K compatto e la molteplicità dell'autovalore è dispari. La dimostrazione fa uso del grado topologico e si basa sul fatto che $ind(F(\lambda', .), 0) = - ind(F(\lambda'', .), 0)$ se $\lambda' < \lambda^* < \lambda''$ (dove ind denota l'indice di Leray-Schauder, cosa che sarebbe impossibile se λ^* non fosse di biforcazione.

L'ultimo caso considerato è quello in cui $X = Y = H$ è uno spazio di Hilbert, e l'operatore $F(\lambda, u) = \lambda u - K(u)$, con K compatto, è variazionale: e cioè esiste $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$ tale che $\nabla\varphi(u) = K(u)$. Prodi presenta una nuova dimostrazione della esistenza di un ramo di biforcazione, elaborata nel lavoro [25] [1968] (in preparazione alla data della conferenza), che si basa sulla teoria di Morse.

Per la dimostrazione si considera il funzionale $b_\lambda(u) = \dfrac{\lambda}{2} \|u\|^2 - \varphi(u)$, per il quale $u = 0$ è un punto stazionario. Poniamo $U_\lambda^- = \{u \in H : b_\lambda(u) < 0\}$. Con un'idea originale e molto elegante, Prodi associa al punto stazionario nondegenere $u = 0$ un *multi-indice* $\ell_\lambda = [m^0, m^1, \dots, m^q, \dots]$, dove m^j indica il numero di Betti del j-esimo gruppo di omologia $H_j(U_\lambda^- \cup B_\varepsilon, U_\lambda^- \cup B_\varepsilon \setminus 0)$ (B_ε indica una palla di centro 0 e raggio ε), in modo che $m^q = \delta_q^s$ dove δ_q^s indica il simbolo di Kronecker ed s è il numero degli autovalori di $dK(0)$ maggiori di λ, contati con la loro molteplicità. Si può dimostrare che il multi-indice ℓ_λ è più fine dell'indice di Leray-Scahuder, perché cambia quando λ attraversa un *qualunque* autovalore λ^* di dK(0) e questo implica che λ^* è di biforcazione. Questi risultati sono discussi e dimostrati completamente nel lavoro [25] [1968].

Il lavoro [23] [1967.a] termina con una applicazione al problema della piastra incastrata.

17. – Teoremi di inversione e applicazioni a equazioni con nonlinerità asimmetriche

Nel lavoro [1972] viene esteso il classico teroema di inversione globale di Hadamard – Caccioppoli al caso in cui vi siano delle singolarità “non trascurabili”.

Siano X e Y due spazi di Banach e sia F una applicazione in $C^2(X, Y)$ che abbia dei punti singolari $u^* \in X$ dove $dF(u^*)$ non è invertibile.

Viene introdotto il concetto di *punto singolare ordinario* come un punto u^* tale che

$$Ker[dF(u^*)] = \mathbb{R}\phi^* \text{ e } F''(u^*)[\phi^*, \phi^*] \notin Range[dF(u^*)].$$

TEOREMA: *Sia $F \in C^2(X, Y)$ un'applicazione propria* (27). *Supponiamo che i punti singolari di F siano tutti punti singolari ordinari e che l'equazione $F(u) = h$ abbia esattamente una soluzione $\forall\, h \in F(\Sigma)$ (Σ è l'insieme dei punti singolari). Allora Σ e $F(\Sigma)$ sono delle varietà di classe C^1 e $Y = Y_0 \cup Y_2 \cup F(\Sigma)$ con la proprietà che l'equazione $F(u) = h$ ha esattamente due soluzioni se $h \in Y_2$ e nessuna soluzione se $h \in Y_0$.*

In pratica, i punti singolari ordinari sono delle pieghe (nel senso della teoria delle singolarita' di Thom e Withney).

Questo risultato astratto si presta a studiare un problema al contorno del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) + h(x), \quad x \in \Omega, \\ \quad u &= 0, \qquad\qquad\quad\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{17.1}$$

(27) F si dice *propria* se $F^{-1}(C)$ è compatto in X per ogni compatto $C \subset Y$.

dove $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ verifica $f''(u) > 0$ e

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(u)}{u} = \alpha, \qquad \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u} = \beta, \qquad \text{con } 0<\alpha<\lambda_1<\beta<\lambda_2 \tag{17.2}$$

(λ_1, λ_2 indicano i primi due autovalori di $-\Delta$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$).

Seguendo [28] [1972] poniamo $X = C_0^{2,\nu}(\Omega)$, $Y = C_0^{0,\nu}(\Omega)$ ed $F(u) = \Delta u + f(u)$ e consideriamo l'insieme singolare Σ dei punti $u^* \in X$ tali che

$$F'(u^*)[v] = \Delta v + f'(u^*)v = 0$$

ha una soluzione non banale $v \in X$ (ciò accade non appena $\lambda = 1$ è un autovalore di $-\Delta v = \lambda f'(u^*)v$, $v \in X$.)

Dalle ipotesi fatte su f segue che $\Sigma \neq \emptyset$ e che $\lambda = 1$ è il primo autovalore. Se ϕ^* è un'autofunzione corrispondente, allora $\phi^*(x)$ non cambia segno in Ω. Questo e il fatto che $f'' > 0$ implica allora che

$$\int_\Omega F''(u^*)[\phi^*, \phi^*]\phi^* = \int_\Omega f''(u^*)(\phi^*)^3 \neq 0.$$

Dunque i punti di Σ sono tutti punti singolari ordinari e si può applicare il teorema astratto. Per esempio, se $h(x) = t\phi^*(x)$ allora esiste $T \in \mathbb{R}$ tale che (17.1) abbia una, due o nessuna soluzione a seconda che $t = T$, $t<T$ o $t > T$.

Problemi al contorno con f che verifica (17.2) (*jumping nonlinearities*) sono stati studiati molto intensamente da numerosi autori.

18. – Metodi topologici nel calcolo delle variazioni

Come abbiamo visto, Prodi aveva usato la teoria di Morse per studiare la biforcazione nel caso variazionale. Ora Prodi affronta due problemi importanti relativi a questa teoria.

Ricordiamo che la teoria di Morse ([28]), estesa da R. Palais ([29]) e S. Smale ([30]) alle varietà riemanniane di dimensione infinita, permette di valutare per difetto il numero dei punti critici di un funzionale f definito su una varietà riemanniana M, purchè i punti critici di f siano non degeneri. Prodi si occupa di due questioni importanti e, in un certo senso, collegate. La prima è di cercare di aggirare l'ipotesi di non-degenericità, che si presta male ad inquadrare i problemi collegati alle equazioni differenziali. La seconda questione riguarda i problemi di perturbazione, ai quali la teoria di Morse meglio si adatta rispetto alla teoria di Lusternik e Schnirelmann.

A questi problemi è dedicato il lavoro [31] [1975] che ora esponiamo.

Riportiamo anzitutto una definizione.

DEFINIZIONE: Se X e Y sono due spazi normati ed $F : \Omega \to Y$ è una applicazione di classe C^1 definita sul sottoinsieme aperto Ω di X, diciamo che F è di Fredholm di indice 0 – in breve: di tipo $\mathcal{F}_0$ – nel punto x_0 di Ω se la mappa $L = dF(x_0) : X \to Y$ è tale che:

$$\text{dim ker } L < +\infty, \text{codim Imm } L < +\infty, \text{ dim ker} L = \text{codim Imm } L.$$

(Come è noto se X e Y sono uguali ed hanno dimensione finita ogni applicazione lineare $L : X \to Y$ è di questo tipo.)

È facile vedere che la definizione si può estendere al caso in cui F sia il gradiente di una funzione f di classe C^2 definita su una varietà riemanniana M di classe C^2, purché x_0 sia un punto critico per f: infatti in questo caso se la definizione data vale su una carta di M allora vale su tutte.

Possiamo ora enunciare il teorema principale della prima parte del lavoro.

Consideriamo per questo una una varietà riemanniana M, completa, connessa e di classe C^2, ed una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ di classe C^2.

([28]) M. Morse, *The calculus of variations in large* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 18 (1934).

([29]) R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds, Topology* 2 1963, 299-340.

([30]) R. S. Palais, S. A. Smale, *A generalized Morse theory*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 1964 165-172.

TEOREMA: *Supponiamo che:*

- *valga la condizione (PS) su* $\{x \in M \mid f(x) \leq f(\bar{x})\}$, *per ogni* $\bar{x}$ *in* M,
- $\inf f > -\infty$,
- ∇F *sia di tipo* $\mathcal{F}_0$ *in tutti i punti critici di* f,
- M *abbia infiniti gruppi di omologia non banali.*

Allora f *ha infiniti punti critici.*

Una chiave di questo risultato sta nel seguente teorema di perturbazione.

TEOREMA: *Supponiamo che:*

- ∇F *sia di tipo* $\mathcal{F}_0$ *in tutti i punti critici di* f,
- *l'insieme dei punti critici di* f *sia compatto.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste una funzione* $g : M \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2 *tale che:*

$$g(x) = f(x) \text{ se } d(x, Z) \geq \varepsilon, \ |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ |dg(x) - df(x)| \leq \varepsilon,$$

e i punti critici di g *sono non degeneri e in numero finito.*

Nella parte finale dell'articolo si studia la persistenza dei livelli critici di f che siano isolati ma topologicamente rilevanti. L'enunciato centrale è il seguente.

TEOREMA: *Sia* c *l'unico livello critico per* f *in* $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ *e supponiamo che l'omologia* $H(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon})$ *non sia triviale. Valga inoltre la* (*PS*) *in* $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$.

Allora ogni funzione $g : M \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2 *e tale che* $\sup |f - g| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ *ha almeno un livello critico in* $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$.

L'articolo si conclude con qualche esempio in cui, mediante questo enunciato base, si può dimostrare la persistenza rispetto ad una perturbazione di infiniti punti critici.

19. – Un resistore che dipende dalla temperatura

Con Giovanni Cimatti, nel 1988, Prodi pubblica in [34] [1988] una ricerca su un modello matematico di un resistore elettrico che dipende dalla temperatura. Nella situazione considerata il resistore è rappresentato da un sottoinsieme aperto, regolare e limitato di $\mathbb{R}^3$, mentre u e φ indicano rispettivamente la temperatura e il potenziale elettrico nei diversi punti del resistore e devono soddisfare le equazioni che sono scritte qui di seguito. Le caratteristiche del resistore sono espresse dalla funzione σ e dalla conduttività termica che si suppone costante (la costante di Boltzmann) e si pone uguale a 1.

$$\begin{cases} \sum_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \sigma(u) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} & = 0 \\ \Delta u + \sigma(u) |\nabla \varphi|^2 & = 0 \end{cases}$$

con le condizioni $u = u_0$ e $\varphi = \varphi_0$ su $\partial\Omega$.

In molti casi di interesse pratico σ è la seguente:

$$\sigma(u) = A u^c \exp\Big(-\frac{B}{ku}\Big),$$

dove A e B sono costanti positive e c è una costante piccola.

Come gli autori mettono in evidenza, l'interesse sta nella non linearità di tipo quadratico nel $\nabla\varphi$ che compare nella seconda equazione e nel fatto che non si può assumere l'ipotesi $\inf \sigma > 0$. Dalla lettura del testo si evince un teorema di esistenza del tipo che segue.

TEOREMA: *Supponiamo che*

$$u_0 \in W_0^{2,2}(\Omega), \quad \inf_{\partial\omega} u_0 = m_{u_0} > 0, \quad \varphi_0 \in W_0^{2,2}(\Omega), \quad \nabla\varphi_0 \in L^\infty(\Omega),$$

$$\sigma \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(m_{u_0}, +\infty), \quad \sigma(t) > 0 \ \forall t \geq m_{u_0}, \quad \liminf_{t \to +\infty} \sigma(t) t > 0.$$

Allora il problema ammette almeno una soluzione in senso debole.

La presenza del termine $|\nabla\varphi|^2$ rende complicato trovare le maggiorazioni a priori necessarie per applicare il teorema di Schauder. Per aggirare l'ostacolo, si sostituisce la seconda equazione con

$$\varepsilon^2 \Delta^2 u - \Delta u = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2.$$

Per il nuovo sistema si trovano delle maggiorazioni a priori che permettono di applicare il teorema di punto fisso di Schauder trovando una soluzione $(\varphi_\varepsilon, u_\varepsilon)$. Infine, passando al limte per $\varepsilon \to 0$ si trova una soluzione del sistema originario.

20. – Gli autovalori di $-\Delta$ su un dominio variabile

Nel 1994 Prodi pubblica una ricerca (vedi [37] [1994.a]) sulla dipendenza degli autovalori dell'operatore di Laplace dal dominio Ω sul quale lo si considera. Il suo interesse per questo problema risale almeno agli anni '70 nei quali aveva proposto ad Anna Maria Micheletti una ricerca (31) sull'argomento. Malgrado il tempo trascorso gli studi erano rimasti concentrati su due sole direzioni: la semplicità degli autovalori nel caso "generico" e il problema della determinazione della forma di Ω a partire dallo spettro di Δ.

In [37] [1994.a] Prodi studia la dipendenza degli autovalori dalle variazioni di Ω, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sia nel caso delle condizioni di Dirichlet che in quelle di Neumann.

In una prima parte del lavoro vengono considerate variazioni di Ω che non ne alterano la topologia. In questo caso Ω viene variato mediante una famiglia regolare di diffeomorfismi $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\Phi_0 = Id$. Per dare un'idea dello studio consideriamo per esempio il risultato trovato nel caso delle condizioni di Neumann.

TEOREMA: *Sia Ω un sottoinsieme aperto, regolare e connesso di $\mathbb{R}^n$, e siano, al variare di t, $\Omega_t = \Phi_t(\Omega)$, $\lambda(t)$ un autovalore su Ω_t*

(31) A. M. Micheletti, *Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace in relazione ad una variazione del campo* Annali della S.N.S. di Pisa, 26 (1972).

del problema

$$\Delta u + \lambda(t)u = 0, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_t} = 0 \text{ se } x \in \partial\Omega_t, \quad \int_{\Omega_t} u(x)\, dx = 0,$$

dove ν_t *indica la normale esterna a* Ω_t.

Allora, se u *è una autofunzione su* Ω *di autovalore* $\lambda(0)$, *risulta*

$$\lambda'(0) \int_{\Omega} u(x)^2\, dx = - \int_{\partial\Omega} \left(|\nabla u(x)|^2 - \lambda(0)u(x)^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,0) \cdot \nu(x)\, d\sigma,$$

dove ν *indica la normale esterna a* Ω *e si è posto* $\Phi(x,t) = \Phi_t(x)$.

Da questa formula si possono dedurre opportune condizioni su Φ che fanno sì che λ cresca e altre che fanno sì che λ decresca.

TEOREMA: *Un autovalore* λ *dell'operatore di Laplace relativo alla condizione di Neumann, che sia semplice e non nullo, può essere diminuito con una opportuna perturbazione che accresce* Ω; *se la relativa autofunzione ha degli zeri su* $\partial\Omega$ *allora* λ *può anche essere accresciuto mediante una opportuna perturbazione che accresce* Ω.

Nella seconda parte del lavoro vengono considerate alcune perturbazioni non regolari di Ω, che possono anche cambiarne la struttura topologica. Anche in questo caso vengono ottenuti dei risultati assai interessanti senza l'uso di strumenti sofisticati. Prendiamo di nuovo il caso del problema di Neumann. Prodi parte dall'osservare che se un insieme aperto Ω è costituito da due componenti connesse Ω_1 e Ω_2, allora l'autovalore nullo dell'operatore di Laplace su Ω ha molteplicità 2; ma se connettiamo queste due componenti con una strisciolina Λ otteniamo un aperto Ω^* connesso, sul quale l'autovalore nullo è semplice. C'è quindi da attendersi che esista per Ω^* un autovalore piccolo che tende a 0 quando Λ tende a 0 in qualche senso. In effetti Prodi, dopo aver definito "campo ammissibile" un insieme aperto Ω tale che l'immersione $W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ sia compatta, dimostra il seguente enunciato.

TEOREMA: *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due campi ammissibili in* $\mathbb{R}^n$ *tali che* $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \emptyset$ *e sia* Λ *un altro campo ammissibile tale che* $\Omega^* := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Lambda$ *sia connesso.*

Allora esiste un autovalore λ^* *per l'operatore di Laplace su* Ω^* *con la condizione di Neumann che tende a* 0 *quando la misura* n*-dimensionale di Lebesque di* Λ *tende a* 0.

21. – Un problema di analisi funzionale

Nel 1994, riflettendo sul "teorema della applicazione aperta", Prodi si imbattè in una procedura matematica che si esprimeva in modo assai semplice ma che semplice non era, ed era alla base di diverse costruzioni matematiche. Ebbe inizio così uno studio, che presto proseguì con P. Majer e S. Mortola e condusse a questo lavoro in collaborazione.

In esso gli autori introducono la seguente definizione.

DEFINIZIONE: Siano X e Y due spazi di Banach, con le norme $|\ |_X$ e $|\ |_Y$. Supponiamo che $X \subset Y$ e che l'immersione $i : X \to Y$ sia continua. Inoltre indichiamo con $\hat{X}$ (per semplicità) lo spazio dei vettori di Y che sono limite in Y di una successione di elementi di X, limitata in X. Se $\hat{x} \in \hat{X}$ poniamo:

$$|\hat{x}|_{\hat{X}} = \liminf_{x \in X,\ |x-\hat{x}|_Y \to 0} |x|_X.$$

Si può dire che $\hat{X}$ sia il completamento di X relativo all'inclusione $i : X \to Y$.

Questo procedimento descrive molte costruzioni che si eseguono in analisi matematica. Ad esempio, se $X = W^{1,1}(\Omega)$ e $Y = L^1(\Omega)$ (Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$) allora $\hat{X}$ è lo spazio delle funzioni a variazione limitata su Ω; se invece X è lo spazio delle funzioni continue e limitate su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ dotato della norma del sup e $Y = L^1(E)$ allora $\hat{X} = L^\infty(E)$.

Possiamo qui osservare che il teorema dell'applicazione aperta equivale ad affermare che se l'inclusione $k : \hat{X} \to Y$ è suriettiva allora essa stessa e anche l'inclusione $i_1 : X \to \hat{X}$ sono isomorfismi bicontinui. Il fatto che k sia un isomorfismo bicontinuo è una conseguenza immediata del teorema di Baire (la palla chiusa di $\hat{X}$ è evidentemente chiusa in Y), mentre il fatto che lo sia i_1 costituisce il nocciolo di quanto il teorema della applicazione aperta ha in più rispetto al teorema di Baire. In questi termini possiamo dire che la domanda che Prodi si era posto all'inizio cercava un chiarimento, una interpretazione, proprio di questo secondo fatto. Ma una risposta, in una certa direzione, è stata data solo in seguito da P. Majer.

In [40] [1999] gli autori studiano a fondo questa nozione di completamento e a trovano molte interessanti proprietà. In particolare risolvono un problema posto in precedenza da N. Aronszajn ed E. Gagliardo ([32]). Questi autori si erano chiesti, senza trovare una risposta, se iterando il procedimento di completamento relativamente alla stessa inclusione i_1, poi alla i_2 che si è così ottenuta, e così via, si possa ottenere una successione infinita di inclusioni proprie oppure se il processo si debba in ogni caso stabilizzare. In [40] [1999] si mostra che il processo può non stabilizzarsi e viene data una caratterizzazione di questo fatto.

22. – I testi scientifici.

Tra i lavori scientifici di Prodi vanno ricordati i suoi testi di Analisi e di Analisi nonlineare.

Nel libro [1970] Prodi espone in modo moderno le basi dell'Analisi Matematica. È stato il primo testo univeritario con queste caratteristiche ed è stato usato in modo estremamente esteso.

In [1971] sono raccolte le lezioni di Prodi per il corso di laurea Fisica. È un testo ricchissimo e pieno di suggenstioni che può essere consi-

([32]) N. Aronszajn and E. Gagliardo, *Interpolation spaces and interpolation methods* Ann. Mat. Pura Appl. 68 (1965), 51-118.

derato uno dei libri più completi ed interessanti di Analisi 2.

Dopo tanti anni questi due testi universitari mantengono inalterata la loro originalità e testimoniano le straordinarie qualità didattiche di Prodi.

A partire dal 1970, Prodi tenne una serie di memorabili corsi alla Scuola Normale di Pisa, coprendo tutti i principali argomenti dell'Analisi nonlineare, dal calcolo negli spazi di Banach, ai teoremi di inversione, dalla teoria della biforcazione a quella dei punti critici, dal grado topologico alla teoria di Morse, dalla teoria ergodica ai sistemi dinamici.

In [29] [1973] sono raccolte le lezioni del primo di questi corsi. Gli argomenti sviluppati riguardano i teoremi di inversione globale, anche in presenza di singolarità, e la teoria della biforcazione. Una versione che contiene anche la biforcazione di Hopf delle soluzioni periodiche è pubblicata in [1993]. Dopo il celebre libro di C. Miranda ([33]) sul grado topologico, il volume di Prodi è stato il primo testo in cui i temi dell'Analisi nonlineare vengono trattati in modo sistematico. Esso è stato un riferimento fondamentale per tutti quelli che hanno fatto ricerca in questo campo.

Degli altri corsi di questo ciclo rimangono degli appunti manoscritti.

(La bibliografia delle pubblicazioni di Giovanni Prodi dedicate alla didattica è riportata nel citato articolo di Alessandra Mariotti, su questa stessa rivista.)

REFERENCES

[1] [1950] *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $u'' + A(x)u = 0$ nel caso $A(x) \to +\infty$ per $x \to \infty$*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. VIII, (1950), 462-464.

[2] [1951.a] *Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $u'' + A(x)u = 0$, Nota I*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. X, (1951), 447-451.

[3] [1951.b] *Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $u'' + A(x)u = 0$, Nota II*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. XI, (1951), 30-34.

([33]) C. Miranda, Problemi di esistenza in analisi funzionale Quaderni matematici della Scuola Normale Superiore Anno accademico 1948 - 49. Litografa Tacchi, Pisa.

[4] [1951.c] *Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. X, (1951), 365-370.

[5] [1952] *Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari*, Rivista Mat. Univ. Parma 3 (1952), 265-290.

[6] [1953.a] *Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3) 17 (86), (1953), 3-26, 27-47.

[7] [1953.b] *Intorno ad una formula asintotica di Hartman e Wintner*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa VII (1953), 277-286.

[8] [1954] *Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili.-Soluzioni periodiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **23** (1954), 25-85.

[9] [1955] *Sull'equivalenza tra la seconda formula di Green e la corrispondente equazione di Fredholm per l'equazione* $\Delta u + \lambda u = 0$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 103-122.

[10] [1956.a] *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **26** (1956), 36-60.

[11] [1956.b] *Sul primo problema al contorno per equazioni a derivate parziali ellittiche o paraboliche con secondo membro illimitato sulla frontiera*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. 90, (1956), 189-208.

[12] [1956.c] *Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 42 (1956), 25-49.

[13] [1958] *Tracce di funzioni con derivate di ordine l a quadrato integrabili su varietà di dimensione arbitraria*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 28 (1958), 402-432,

[14] [1959.a] *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*, C. R. A. S. Paris 248 (1959), 3519-3521 (con J. L. Lions).

[15] [1959.b] *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 48 (1959), 173-182.

[16] [1960.a] *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 30 (1960), 1-15.

[17] [1960.b] *Teoremi ergodici nelle equazioni dell'idrodinamica*, C.I.M.E. Roma 1960.

[18] [1961] *On probability measures related to the Navier-Stokes equations in the 3-dimensional case*, Air Force research Division-Contract 61 (052)-414, Technical note no. 2, (1961), 1-15.

[19] [1962.a] *Résultats récents et problèmes anciens dans la théorie des équtions de Navier-Stokes*, *Les équations aux dérivés partielles* 181-196, Èditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[20] [1962.b] *Teoremi di tipo locale per il sistema di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionarie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **32** (1962), 37-43.

[21] [1965] *Soluzioni periodiche de equazioni di tipo iperbolico non lineari*, Atti del Convegno "Equazioni alle derivate parziali" (Nervi) (1965), 106-107, Edizioni Cremonese, Roma.

[22] [1966] *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **36** (1966), 37-49.

[23] [1967.a] *Problemi di diramazione per equazioni funzionali*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 22 (1967), 413-433.

[24] [1967.b] *Sur le comportement globale des solutions nonstationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 39 (1967), 1-34 (con C. Fojas).

[25] [1968] *La teoria di Morse per gli spazi di Hilbert*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 41 1968, 43-68 (con A. Marino).

[26] [1970] *Analisi Matematica*, Boringhieri, Programma di Matematica, Fisica, Elettronica, Torino, I edizione del 1970.

[27] [1971] *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1971. Riedito nel 2011 dalla Bollati Boringhieri.
[28] [1972] *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 93 (1972), 231-246 (con A. Ambrosetti).
[29] [1973] *Analisi non lineare*, Quad. I, Pubbl. Classe di Scienze, Scuola Normale Sup. Pisa, 1973 (con A. Ambrosetti).
[30] [1974] *Metodi perturbativi nella teoria di Morse*, Univ. Genova Pubbl. Ist. Mat. (2) no. 99 (1974) (con A. Marino).
[31] [1975] *Metodi perturbativi nella teoria di Morse*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 11(1975), no. 3, suppl., 1-32 (con A. Marino).
[32] [1976] *Sur les solutions statistiques des équations de Navier- Stokes*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 111 (1976), 307-330 (con C. Fojas).
[33] [1982] *Un teorema di unicità per il moto di un fluido viscoso non omogeneo nel modello di Boussinesq*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 52 (1982), 609-618.
[34] [1988] *Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152 (1988), 227-236 (con G. Cimatti).
[35] [1992] *Metodi matematici e statistici*, McGraw-Hill, Milano (1992).
[36] [1993] *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1993 (con A. Ambrosetti).
[37] [1994.a] *Dipendenza dal dominio degli autovalori dell'operatore di Laplace*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Sci. Mat. Appl. A **128** (1994), Fasc. 1, 3-18.
[38] [1994.b] Istituzioni di matematiche, McGraw-Hill, (1994).
[39] [1995] *I miei problemi*. Dattiloscritto del 12 dicembre 1995, pubblicato in questo stesso fascicolo.
[40] [1999] *Inclusions of Banach spaces*, Ricerche di Matematica Volume XLVIII (1999), Suppl. 155-165 (con P. Majer e S. Mortola).

A. Ambrosetti: Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati
via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
e-mail: ambr@sissa.it

A. Marino: Dipartimento di Matematica *Leonida Tonelli*
Largo Bruno Pontecorvo, 5, 56127 Pisa, Italy
e-mail: marino@dm.unipi.it