La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Maria Alessandra Mariotti

Giovanni Prodi e la ricerca in didattica della matematica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.3, p. 411–432.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_3_411_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica
Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Dicembre 2011, 411-432

Giovanni Prodi e la ricerca in didattica della matematica

MARIA ALESSANDRA MARIOTTI

L'amore di Giovanni Prodi per la Matematica si è espresso in molti modi nella sua vita, certo nella passione per la ricerca, ma anche nella pratica di insegnante e nell'impegno per migliorare l'insegnamento della matematica ad ogni livello scolastico. Tale impegno si è realizzato attraverso un'attività costante volta alla formazione degli insegnanti, attraverso i suoi scritti di didattica, ma soprattutto nel lavoro di sintesi epistemologica e pedagogica che è il suo Progetto di insegnamento per la scuola secondaria superiore.

Nel quadro del suo impegno per promuovere e innovare l'insegnamento della Matematica, Prodi è a ragione considerato uno degli fondatori della ricerca italiana in Didattica della Matematica. In questo mio contributo cercherò dunque di delineare brevemente gli ambiti e i temi rispetto ai quali Prodi ha svolto un ruolo importante di iniziatore e di promotore.

1. – Innovazione dei curricoli

Una motivazione per avvicinare Prodi ai problemi dell'educazione matematica è stata la consapevolezza della necessità di rinnovare i curricoli di Matematica, ripensando in un'ottica più moderna i contenuti e con questi i metodi di insegnamento. Questa preoccupazione è riconoscibile come comune ad un certo numero di matematici, non solo italiani, che nella seconda metà degli anni sessanta e l'inizio degli anni settanta del secolo scorso hanno dato origine a comunità di ricerca in diverse nazioni europee. Un esempio tra tutti è costituito dal centro di ricerca IOWO (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs - Istituto per lo Sviluppo dell'Educazione Matemetica), fondato nel 1971 presso l'Università di Utrecht in Olanda da Hans Freudenthal e divenuto dopo la morte del suo fondatore il "Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education".

Il vento di riforma e le proposte generate della corrente della così detta "Mathématique Moderne" (1), divenuta in Italia la corrente della "Matematica Moderna", avevano portato anche in Italia il desiderio di innovazione, e con questo discussioni sulla necessità di riformulare contenuti ed obiettivi dei programmi nei diversi ordini di scuola. Un riferimento chiave per la scuola secondaria superiore restano i così detti Programmi di Camaiore, e i successivi Programmi di Frascati, formulati in occasione di un convegno internazionale svoltosi a Frascati nel 1964, e le polemiche che hanno accompagnato queste proposte. (2)

Prodi, come altri colleghi, partecipa attivamente alla discussione che si è aperta accettando la sfida che il vento di riforma proponeva. Cosi come lui stesso racconta, il frutto di riflessioni e discussioni sviluppatesi negli anni, di proposte "rimaste costantemente sulla carta" inizia a prendere forma nel 1975, quando inizia la sperimentazione in classe di quello che sarà il progetto "Matematica come scoperta" [GP3] [GP4] [GP6] [GP7] [GP8]. Ho avuto il privilegio di iniziare la mia esperienza di ricercatore proprio allora, partecipando attivamente alla sperimentazione e alla redazione del progetto, e come è facile immaginare questa è stata un'esperienza scientifica ed umana fondamentale per la mia formazione.

2. – Il progetto "matematica come scoperta"

Molti sono gli aspetti che hanno caratterizzato il progetto "Matematica come scoperta". Alcuni di questi, a distanza di tanti anni, mantengono un alto valore educativo. Il primo aspetto caratterizzante potrebbe essere considerato più di carattere metodologico, ma in realtà corrisponde ad un ben preciso approccio epistemologico alla Matematica. Si tratta di ciò che è solitamente indicato come "approccio

(1) L'appellativo richiama i testi di Georges Papy, dal titolo *Mathématique moderne* il cui primo volume fu pubblicato nel 1964.

(2) Vedi a questo proposito il libro di Paolo Linati [10].

per problemi", fortemente ispirato dai lavori di George Polya [15] [16] [17]. Le ragioni a sostegno di tale approccio e al contempo il suo carattere innovativo rispetto a certi aspetti della tradizione scolastica italiana, ancora oggi fortemente presenti nella pratica educativa della scuola, meritano un approfondimento della posizione di Prodi al riguardo.

In linea con lo spirito di Polya ed in accordo con altri matematici che in quegli anni si appassionavano al problema dell'insegnamento della matematica (egli stesso cita a questo proposito Bruno De Finetti) Prodi afferma un principio generale che vede nella risoluzione di un problema il momento fondamentale del "far matematica". Se si affianca a questo un altro principio che afferma che per imparare la Matematica, ma forse anche per amarla, bisogna "farla", si ottiene come conseguenza il principio che l'educazione matematica debba basarsi sulla soluzione di problemi. Questo principio, che Prodi considera tanto ovvio quanto spontaneo per chiunque si occupi di matematica, si articola in una proposta didattica basta su tre momenti: "l'introduzione di un campo di problemi, lo sviluppo di un minimo di teoria per inquadrarli e risolverli, la fissazione di alcuni risultati da acquisire per il successivo lavoro" ([GP2], p. 47-48).

In altre parole Prodi sostiene l'importanza di partire da specifici ed opportuni contesti problematici che diano senso ai concetti matematici che si intende introdurre e alla loro formalizzazione. È il problema che ci si propone di risolvere, con i modi di pensare che sollecita e mobilita per la sua soluzione, che deve fare da sfondo e da origine ai significati espressi da definizioni e proprietà che costituiranno la teoria che mano a mano sarà sviluppata.

"Oggi si usa il termine "matematizzazione" per indicare questa attività di collegamento matematica-realtà. A livello elementare, questa attività si innesca quando si assume un problema nella sua forma più grezza, così come le circostanze o la nostra curiosità ce lo presentano." ([GP5], p. 2)

Il rischio didattico, nel quale è facile incorrere, è costituito dalla possibile frammentarietà dovuta ad un approccio per problemi che passi da un ambito problematico ad un altro perdendo la necessaria continuità di un filo conduttore. Tale rischio è ben chiaro a Prodi che perciò insiste sulla necessità di trovare nello sviluppo coerente della teoria l'elemento unificante.

È proprio in questa ricerca di equilibrio tra situazione problematica, che dà senso e ragione a specifici modi di pensare, e sistemazione teorica del concetto matematico che da questi modi di pensare emerge, che troviamo il cuore del lavoro di ricerca di Prodi. Tale lavoro di ricerca porta alla stesura del Progetto “Matematica come scoperta”, prima sotto forma di quaderni del CNR, e poi nella forma dei volumi pubblicati dall'Editrice D'Anna. [GP3] [GP4] [GP6] [GP7] [GP8]. La pubblicazione dei volumi fu preceduta da una sperimentazione in classe. In tale sperimentazione Prodi ha partecipato attivamente non solo nella fase di progettazione degli interventi didattici, ma anche nella fase di osservazione e analisi dei risultati. Durante le lezioni, sedeva all'ultimo banco, spesso accompagnato da Vittorio Checcucci, come osservatore, mentre spettava a me, giovane ricercatrice, svolgere il ruolo di insegnante.

L'osservazione della classe e le discussioni che precedevano e seguivano tale osservazione, permisero di mettere a punto il testo da pubblicare, ma aprirono ad altre direzioni di ricerca, come vedremo nel seguito. Seguirono alcuni anni nei quali la sperimentazione del Progetto si allargò coinvolgendo più insegnanti e più classi, anche in altre sedi universitarie. Venivano così a costituirsi, insieme ad altri colleghi universitari, i Nuclei di Ricerca Didattica, di Pisa, Pavia e Trieste. È proprio nell'ambito di questa collaborazione che fu pubblicato il terzo volume del progetto, scritto da Prodi insieme ad Enrico Magenes [GP8]. Altri volumi, riguardanti la probabilità, la statistica e la geometria dello spazio resteranno nella forma di quaderni, editi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche. Nei Nuclei di Ricerca Didattica il lavoro consisteva appunto nella sperimentazione del Progetto “Matematica come scoperta”, al fine di validarne le scelte e raffinarne l'implementazione nelle classi. La caratteristica principale di tali Nuclei consisteva nel rapporto di collaborazione tra docenti universitari e docenti di scuola secondaria. I Nuclei di ricerca didattica hanno costituito l'origine della comunità dei ricercatori italiani, la cui caratteristica originaria si è mantenuta ed è espressa dalla figura dell'insegnante ricercatore. Ma su questo torneremo più avanti.

Al di là della scelta metodologica generale ispirata alla ricerca di un percorso didattico ricco di significato e nello stesso tempo organizzato in modo coerente e continuo, varie sono le scelte originali che emergono dalla ricerca di Prodi e che troviamo proposte nel Progetto. Alcune sono più evidenti nella loro novità, come l'introduzione alla probabilità ([3]) e della statistica o il riferimento all'uso delle tecnologie informatiche che proprio allora iniziavano a presentarsi sulla scena. Altre scelte risultano meno evidenti, ma non per questo sono meno significative, come la trattazione degli angoli ed in particolare la scelta di formulare l'assioma che postula l'esistenza di una misura per gli angoli che sia invariante rispetto alle isometrie.

2.1 – *Un'assiomatica per la Geometria*

Partirò dal presentare una scelta chiaramente innovativa, quella riguardante la trattazione assiomatica della Geometria, che nel progetto diventa "Geometria delle trasformazioni". Si tratta di una scelta innovativa e nello stesso tempo caratterizzante rispetto ad altre proposte provenienti da altri progetti che presero forma negli stessi anni, vedi ad esempio quelli di Lombardo Radice & Mancini Proia, Villani & Spotorno, Speranza & Dall'Acqua.

La discussione sui diversi approcci possibili alla Geometria era certamente al centro del dibattito sull'innovazione al quale abbiamo accennato. La tradizione scolastica proponeva un ben stabile assetto teorico riconducibile a quello degli Elementi di Euclide. Le riorganizzazioni più recenti non presentavano molte variazioni: i criteri di uguaglianza dei triangoli stavano alla base della teoria e ne costituivano lo strumento argomentativo fondamentale.

L'intenzione di rinnovamento e il desiderio di introdurre una prospettiva moderna portava a mettere in discussione l'approccio Euclideo e a porsi il problema della scelta di una assiomatica alternativa. Le posizioni più radicali propugnavano l'abbandono della

([3]) In particolare, la scelta del tema probabilità proprio come ambito problematico di apertura per il percorso didattico.

Geometria Euclidea classica per una trattazione moderna che, al grido di “Abbasso Euclide”, decretasse la morte del triangolo e presentasse lo spazio euclideo nel quadro più ampio dello studio degli spazi vettoriali. Il grido lanciato da Jean Dieudonné durante uno storico convegno tenutosi a Royaumont, in Francia, nel 1959 aveva provocato reazioni diverse, dallo scandalo all’entusiasmo; in ogni caso però, aveva il merito di costringere a riflettere da un lato sulla necessità di un cambiamento nell’approccio alla Geometria che tenesse conto del nuovo quadro nel quale la Matematica nel suo complesso si stava riorganizzando, sia della deriva presa da un certo insegnamento tradizionale rispetto al quale risultava ormai difficile difendere la Geometria di Euclide ridotta spesso ad una trattazione complessa di situazioni semplici e ben note agli allievi, e per questo per loro del tutto priva di senso.

Prodi si inserisce nella discussione sul tema della Geometria al biennio della scuola secondaria superiore, e la sua posizione, come giustamente nota e commenta Villani [18] è ben espressa in un articolo pubblicato su Archimede. Facendo un parallelo tra quanto accade in Fisica e quanto accade in Matematica, Prodi scriveva: “la matematica deve, ovviamente, conservare i suoi risultati fondamentali e finisce spesso per prolungare certe metodologie e certi abiti mentali al di là del loro limite naturale di sopravvivenza (...)”. ([GP9], p. 168).

In questo articolo, come in altre occasioni, Prodi mette a fuoco un tema davvero centrale per la didattica, quello dei rischi dell’obsolescenza dei contenuti matematici di un curriculo, non solo in termini di risultati ma di abiti mentali. Come ben descritto da Chevallard [3] il processo di Trasposizione didattica prevede passaggi complessi dal Savoir Savant, condiviso e vissuto dalla comunità dei Matematici, al Savoir Enseigné, oggetto di insegnamento in classe, passaggi che mettono in gioco scelte di natura assai diversa, dovendo tener conto di variabili diverse. Le scelte di Prodi riguardano innanzi tutto il metodo, che sarà quello assiomatico, e poi, di conseguenza quale assiomatica, che sarà quella delle trasformazioni, privilegiando un’assiomatica di assetto metrico piuttosto che affine. In questo modo Prodi si inserisce nel dibattito sulla scelta didattica tra diverse assiomatiche per la Geometria che aveva già visto come protagonisti E. Artin, G. Choquet e J. Dieudonné [14]: al di là di un generale accordo sull’importanza dell'algebra lineare e delle strutture vettoriali, i tre matematici proponevano approcci didattici assai diversi.

La scelta di Prodi, che si differenzia da quelle proposte da altri matematici italiani nello stesso periodo, segue abbastanza da vicino lo schema assiomatico proposto da Choquet [2].

Come spiega lo stesso Prodi su *L'Insegnamento della Matematica* in un breve resoconto della prima sperimentazione del progetto [GP3], la preferenza per una presentazione di carattere metrico è motivata dalla convinzione che sia quella con più "sapore geometrico". Tale motivazione è chiarita nella guida al progetto a partire da ben precisi obiettivi didattici tra cui quello di offrire "una descrizione matematica (e perciò assiomatica) di uno spazio, creando un primo schema che possa servire da supporto per lo studio dei fenomeni fisici. Da questo punto di vista, la geometria è il primo capitolo della fisica."([GP7] p. 178).

Negli argomenti proposti a sostegno della scelta di una assiomatica a base metrica troviamo il chiaro riferimento alla necessità di mantenere un legame con l'intuizione spaziale, e a questo proposito troviamo ben sintetizzata la posizione di Prodi in questo breve stralcio, sempre dalla guida al progetto.

"La funzione visiva ci offre già spontaneamente fatti che , dal punto di vista delle strutture matematiche, sono notevolmente complessi: cosicché spesso l'attività di apprendimento della matematica procede per semplificazioni di strutture (per 'cancellazione' di dati di struttura presenti in un modello concreto) piuttosto che per 'arricchimento' di strutture. Nel nostro caso occorre tenere presente che l'approccio metrico della Geometria non turba affatto l'utilizzazione spontanea delle strutture soggiacenti (struttura affine, struttura topologica, ...)." ([GP7], p. 179)

A partire dall'introduzione della distanza si definisce un'isometria e progressivamente le specifiche isometrie, iniziando dalle simmetrie assiali che hanno funzione di generatori per il gruppo; l'obiettivo è di arrivare al teorema che afferma che ogni isometria è al più il prodotto di tre simmetrie assiali. Tale teorema è trattato nel secondo volume del progetto, nel Capitolo 20, a conclusione del quale si presentano i classici criteri di uguaglianza dei triangoli, in vista di un raccordo con un sapere scolastico tradizionale.

Lo sviluppo della trattazione assiomatica seguito nel progetto presenta alcune caratteristiche che illustrano, a mio avviso chiaramente, l'originalità dell'approccio di Prodi. Due di queste sono relative all'assioma sull'unicità della parallela: la prima riguarda la sua introduzione che avviene solo dopo aver ottenuto, sia nel testo che nei problemi proposti agli allievi, un certo numero di risultati, sottolineando così la loro indipendenza da tale assioma e la loro appartenenza alla geometria assoluta. La seconda riguarda la formalizzazione scelta per introdurre l'unicità della parallela, ovvero la scelta di formulare l'assioma della costanza del rapporto di proiezione (§ 15.1) e da questo dedurre l'unicità della parallela.

Una terza caratteristica mi sembra interessante da citare perché illustra l'intenzione di Prodi di offrire un percorso didattico il più possibile unificante rispetto ai diversi contenuti matematici presentati. Intenzione tanto significativa quanto generalmente ancora oggi disattesa. All'introduzione dell'unicità della parallela fa immediatamente seguito l'introduzione della nozione di riferimento cartesiano, che in questo modo è chiaramente definito come elemento della teoria e come tale è messo esplicitamente in relazione con tutte le proprietà già note di tale teoria. Non si tratta allora di aprire un nuovo manuale, di imparare nuove definizioni e nuove tecniche di soluzione: l'uso di un riferimento cartesiano è presentato come un arricchimento della teoria geometrica appena introdotta, arricchimento che si realizza attraverso la possibilità di ricorrere a nuovi modi di pensare e di argomentare per arrivare ad un risultato.

2.2 – *L'approccio ipotetico deduttivo*

La scelta di seguire una presentazione assiomatica – ribadita anche nella citazione precedente – è, come dicevamo, una delle scelte chiave che caratterizzano il progetto, e forse quella che ha reso più difficile la diffusione del progetto nella realtà scolastica. Le difficoltà che in generale presenta un approccio ipotetico-deduttivo sono ben documentate nella letteratura in didattica della matematica, letteratura che da tempo si interessa alla dimostrazione come problema didattico [12] [13]. In questo senso il progetto chiedeva all'insegnante un impegno particolare per svolgere il ruolo delicato di introdurre gli allievi al dimostrare, non solo promuovendo un atteggiamento critico di ricerca di un perché delle affermazioni, ma anche sviluppando il senso di una teoria matematica come sistema di principi condivisi al quale ricondursi per articolare le ragioni di tale perché.

Nelle scelte attuate nel progetto, e che prendono forma in problemi e poi in assiomi e teoremi, è riconoscibile l'intenzione di rendere l'allievo partecipe del processo di risoluzione di un problema nella sua completezza. Non si tratta banalmente di riconoscere quale formula applicare, ma a partire da una situazione e da una specifica domanda si tratta di costruire il modello nel quale prenda forma una risposta possibile.

Nel caso della Geometria, si tratta di rendere l'allievo partecipe di un processo di formalizzazione che partendo da un'intuizione porta alla formulazione di un principio che la esprima in modo chiaro e al quale ci si possa ricondurre nel seguito per la costruzione dei propri argomenti. Ad esempio, una volta introdotta l'idea di distanza e le sue proprietà attraverso la soluzione intuitiva di problemi di minimo cammino, si passa alla sua formalizzazione in un assioma che ne definisce le proprietà caratteristiche. Il procedimento si ripete mano a mano che nuovi assiomi vengono introdotti. Si ha cura di chiarirlo e di renderlo esplicito nel testo, come nel caso citato prima dell'introduzione del riferimento cartesiano.

È importante osservare come la preoccupazione di rigore che ispira tutta l'esposizione sia accompagnata dalla preoccupazione di offrire un testo comprensibile per gli allievi e per questo veramente 'leggibile'. Di qui la cura di mantenere un linguaggio piano che rifugge l'uso di notazioni e terminologia non necessari, e per questo mantiene al minimo introduzione di termini e simboli. Il risultato ottenuto da Prodi nella stesura del testo del Progetto Matematica come Scoperta rischia, nella sua eleganza e semplicità, di far dimenticare il processo di scrittura e riscrittura, talvolta assai lungo e tormentato, del quale è frutto e che costituisce un esempio di ricerca didattica di grande valore.

Se consideriamo l'impianto generale del progetto, è possibile osservare come l'introduzione esplicita di un'assiomatica arrivi solo con la trattazione della Geometria, e come, un volta introdotto, il metodo ipotetico deduttivo diventi il “metodo” da seguire. Tale metodo è però anticipato nel suo spirito più profondo nella trattazione dell’Algebra che immediatamente precede l’inizio della Geometria.

L’Algebra delle espressioni letterali è introdotta da una prospettiva formale, anche se non si parla di assiomi. Infatti, le proprietà introdotte nel Capitolo 8 per le strutture additive e per quelle moltiplicative, forniscono la teoria dentro la quale prende senso il calcolo letterale inteso come trasformazione di un’espressione in un’altra equivalente, in base all’uso delle proprietà formali delle operazioni. Il calcolo letterale, così inteso, diventa allora un primo esempio di argomentazione all’interno di una teoria. In questo modo si offre un esempio, semplice e facilmente controllabile dall’allievo stesso, di quel metodo che sarà usato subito dopo ed in maniera più esplicita, per costruire una dimostrazione in Geometria; ovvero all’interno di una teoria esplicitamente riconosciuta come tale si dimostra la validità di una affermazione a partire dall’applicazione di proprietà stabilite. Mi piace ricordare qui come questa impostazione abbia recentemente avuto sviluppo in uno studio riguardante la progettazione e sperimentazione di un software didattico per l’Algebra [11].

Come osservazione finale credo sia importante sottolineare come, nella sua semplicità, la trattazione dell’Algebra rappresentasse un elemento del Progetto particolarmente innovativo, al punto di apparire una provocazione. Per molti insegnanti infatti, la distanza tra questo approccio e quello tradizionale ha rappresentato un ostacolo difficile da superare, per molti forse è stato un motivo per scartare la proposta. Difficoltà di questo tipo hanno impedito la diffusione del progetto, come del resto è stato anche per altri.

A distanza di quasi trent’anni Prodi ha nuovamente raccolto la sfida e ha organizzato un gruppo di lavoro per la riedizione del Progetto, cercando di adattarlo alla necessità della scuola pur mantenendo ferme alcune delle scelte di base. A questo proposito rimando il lettore all’intervista che Amerigo Di Libero fece a Prodi in occasione dell’uscita dei primi volumi della riedizione. L’intervista è stata pubblicata su Lettera Pristem ed è reperibile in rete in [6].

3. – Oltre l'esperienza del progetto "Matematica come Scoperta"

Fin dalle prime esperienze sul campo durante la sperimentazione del progetto, divenne chiaro che lo sviluppo di percorsi innovativi non era sufficiente per garantirne il successo nella scuola. La natura diversa delle difficoltà incontrate nella realizzazione del progetto nelle classi e nella sua diffusione tra gli insegnanti può essere ricollegata a filoni diversi dell'attività di Prodi nel campo della Didattica. Da un lato l'intensificarsi dell'impegno per la formazione degli insegnanti rispetto ai quali sentiva chiaramente la necessità di offrire un supporto sia disciplinare che metodologico. Dall'altro l'avvio dello studio dei processi cognitivi legati allo sviluppo di determinati concetti.

3.1 – *La riflessione sui contenuti*

L'impegno per la formazione si è espresso in molti scritti che hanno trattato contenuti disciplinari diversi proponendo riflessioni di carattere epistemologico e didattico che riguardano temi vari, spesso distanti tra loro. Sono 'occasionali', la loro origine è, ad esempio, un intervento ad un convegno, e si rivolgono per la maggior parte ad un uditorio di insegnanti. Questi contributi pur non avendo mai trovato una sistemazione unitaria testimoniano l'interesse di Prodi per una riflessione epistemologica sui contenuti, riflessione sicuramente originata dall'interesse didattico per la messa a punto di un curriculum, ma non solo. Non intendo qui sviluppare un'analisi approfondita di tali contributi, che il lettore può trovare raccolti in un numero speciale della rivista L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate dedicato a Prodi [GP19]. Mi limiterò dunque, ad un esempio e, tenendo conto di quanto detto sopra a proposito della Matematica Moderna, mi sembra interessante considerare l'articolo che Prodi dedica al tema degli Insiemi (o come afferma lui stesso: "[al tema che] io preferirei chiamare con il termine più confidenziale di "insiemistica") [GP1]. L'articolo è scritto pensando come potenziali lettori degli insegnanti di scuola primaria. L'occasione è data dalla moda della così detta matematica moderna e dall'intenzione di offrire una sintesi chiara e profonda di quei concetti dell'insiemistica che un insegnante di scuola primaria avrebbe dovuto conoscere come base per impostare il proprio insegnamento. Prima di iniziare l'esposizione volta a chiarire cosa è un insieme, Prodi si soffermava sulla prospettiva dalla quale guardare al contributo che la nuova visione della Matematica poteva dare, insistendo sul fatto che l'introduzione dell'insiemistica doveva avere soprattutto il fine di rallentare e approfondire l'approccio tradizionale al numero, dando ragione della necessità di soffermarsi, più di quanto si era soliti fare, su attività di classificazione basate sulla manipolazione di materiale concreto, attività che al di là dell'obiettivo di introduzione al numero avevano obiettivi educativi più generali, in particolare rispetto allo sviluppo del linguaggio naturale e delle operazioni logiche di base. Un'interpretazione decisamente in controtendenza rispetto alle proposte che venivano ad esempio dalla Francia e che erano ispirate a un'astrazione e a un formalismo precoce.

> L'"insiemistica" non ha la sua esclusiva utilità nell'introduzione all'idea di numero, ma ha almeno altrettanto importanza nella formazione pre-logica e pre-grammaticale del bambino. Manipolando gli insiemi, il bambino impara a ragionare in modo sempre più preciso e ad esprimersi in termini sempre più propri. A poco a poco, egli imparerà i termini da usarsi in modo sempre più preciso; in una fase successiva (non certo nel primo ciclo) egli conoscerà anche qualche simbolo della teoria degli insiemi. ([GP1], p. 4).

L'esposizione che segue è un bell'esempio di come esporre in modo piano e chiaro una materia complessa, stimolando ad una riflessione sul metodo e sugli abiti mentali di chi fa matematica: attraverso la discussione su che cosa significhi 'definire un insieme', Prodi mette in guardia rispetto al rischio di sottovalutare la complessità insita nella introduzione di nuovi termini e delle convenzioni sul loro uso, invita inoltre a riflettere sull'opportunità di un passaggio graduale ad un linguaggio preciso e rigoroso, senza dimenticare la raccomandazione, in questo caso più che in altri importante, che la conoscenza di un insegnante su questo tema debba essere assai più profonda di quella che richiederà ai propri allievi.

Altri temi sono stati oggetto di riflessione, ma soprattutto hanno visto in Prodi uno strenuo paladino della loro introduzione nel curriculum di Matematica. È stato questo il caso della probabilità e della statistica, temi che ignorati dai curriculi tradizionali trovavano invece spazio nel Progetto "Matematica come scoperta", ma anche di temi più discussi come quello dell'Informatica. Il tema dell'Informatica e dei legami tra Matematica ed Informatica, è stato un tema assai caro a Prodi, sia per gli aspetti epistemologici sia per i problemi più propriamente didattici che emergevano. Affermava Prodi in una conferenza tenuta a Genova nel dicembre del 1983:

> In ogni caso, non possiamo fare come se il calcolatore non esistesse: anche se optiamo per una "informatica povera" il fatto che esistano certi strumenti cambia il nostro quadro concettuale e la nostra valutazione di ciò che è matematicamente rilevante, e di ciò che non lo è. ([GP11] , p. 12).

L'attualità di questa affermazione ci sorprende. In realtà, la scuola non sembra essere stata all'altezza delle aspettative, contrariamente a quanto ottimisticamente si pensava quasi trent'anni fa, quando l'informatica iniziava a mostrare le proprie potenzialità rispetto all'educazione e il primo studio lanciato dalla International Commission on Mathematics Instruction veniva dedicato proprio all'influenza dei computer e dell'informatica sulla matematica e sul suo insegnamento. ([4])

La tecnologia ha visto un progresso assai veloce che ha spazzato via, prima ancora che la scuola, con i propri tempi, potesse assorbirli, strumenti, concetti e modi di pensare che pure avevano valenze didattiche profonde. Si pensi ad esempio alla potenza didattica offerta dalle attività di programmazione, magari con calcolatrici programmabili come potevano essere le Hp-25. Le riflessioni di Prodi sulle possibili sinergie tra matematica ed informatica toccavano aspetti profondi, forse oggi ancor più significativi di allora, proprio perché oggi ormai non più riconoscibili o inesorabilmente nascosti, dati i cambiamenti avvenuti in abito tecnologico.

Ciononostante, tenuto conto dell'uso dilagante delle nuove tecnologie e della familiarità che con queste hanno le giovani generazioni, il monito di Prodi resta sempre valido e con una valenza assai generale

([4]) Per un approfondimento su questi aspetti rimando sia al volume relativo al primo ICMI Study [4] che al recente volume relativo al 17^{th} ICMI Study [7].

per il futuro: non è possibile ignorare la presenza delle nuove tecnologie, sia in termini di ciò che di nuovo hanno portato alla Matematica che in termini delle potenzialità didattiche che offrono. Il problema didattico che ne emerge è chiaro, un approccio efficace all'uso delle tecnologie in classe deve essere tale da non restare penalizzato dall'obsolescenza degli strumenti, ovvero mirare a sfruttare le potenzialità offerte per lo sviluppo del pensiero matematico, piuttosto che alle potenzialità di carattere pratico strumentale, quelle che inevitabilmente e velocemente saranno travolte dall'obsolescenza.

L'interesse di Prodi per l'uso didattico delle nuove tecnologie ed in particolare per l'influenza del loro uso sullo sviluppo del pensiero matematico, appare chiaramente nei suoi interventi su questa tema, come il seguente, tratto dalla conferenza tenuta a Brescia nel 1989, in occasione di un convengo a dieci anni dalla riforma dei programmi della scuola Media. Riferendosi alle proposte didattiche avanzate da alcuni gruppi di ricerca, criticava la mancanza di una vera sperimentazione in classe che le mettesse alla prova.

> Molte delle ricerche pubblicate in Italia e all'estero sono itinerari didattici ben congegnati, ma ancora allo stadio di progetto. In realtà, mi pare che sulla didattica dell'informatica, i veri lavori di ricerca didattica siano pochissimi: voglio dire quelli che riguardano il comportamento dell'allievo nell'avvicinarsi al calcolatore, nel tentare di programmare: quali sono gli errori più comuni, le strategie spontanee, gli atteggiamenti, le correlazioni e le ripercussioni sul piano cognitivo e affettivo, l'influenza del lavoro di gruppo ecc. ([GP13], p. 357)

Come emerge chiaramente da questa breve citazione, Prodi aveva ben chiaro come la riflessione epistemologica sui contenuti, quella stessa che aveva ispirato e che continuava a nutrire la progettazione di un curriculum non era sufficiente a render conto dei processi di apprendimento che si realizzavano in classe. Non solo difficoltà ed errori persistevano, e mettevano in scacco l'ottimistica convinzione che una volta trovato il percorso 'giusto' il problema di insegnare la matematica fosse risolto, ma cominciava a farsi strada in modo sempre più insistente la necessità di una ricerca in didattica della matematica che completasse lo studio di nuovi curriculi con una riflessione di carattere cognitivo e didattico.

3.2 -- *Processi cognitivi e educazione matematica*

Anche a livello internazionale lo studio dei problemi riguardanti l'Educazione Matematica aveva visto un rapido sviluppo e nei primi anni ottanta erano presenti approcci diversi e scuole diverse. Prodi ebbe contatti con studiosi internazionali, fra questi Efraim Fishbein e Zofia Krygowska, il primo uno dei fondatori nel 1976 del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Da questi contatti ed altri contatti internazionali, nacquero convegni, inviti e collaborazioni. In particolare, come Presidente della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) Prodi organizzò -- con il supporto del CIRM - più di un convegno, a Trento, radunando studiosi stranieri e italiani per discutere le linee più recenti che si stavano sviluppando nella ricerca in didattica della Matematica. Da uno di questi convegni nacquero due pubblicazioni (*Processi cognitivi e apprendimento della Matematica nella scuola elementare*, editrice La Scuola e *Numeri e operazioni nella scuola di base*, edizioni Zanichelli) [1] [GP10].

Prodi curò l'edizione del volume dedicato all'insegnamento della matematica per la scuola elementare; scriveva nella prefazione:

> Ci si è finalmente resi conto della complessità e della profondità di certi processi, a torto ritenuti elementari. [...] Sembra ormai chiaro che l'insegnante debba essere un saggio coadiutore di processi naturali piuttosto che di un astruso linguaggio artificiale. ([GP10], pag. 5).

Tra tutti il legame scientifico tra Fischbein e Prodi, e il gruppo pisano, è stato senza dubbio il più duraturo e fruttuoso. Durante le sue visite scientifiche presso il Dipartimento di Matematica di Pisa, Fischbein ha collaborato attivamente allo sviluppo e al consolidamento del gruppo pisano di ricerca in Didattica della Matematica. C'era sicuramente un'affinità profonda tra Prodi e Fischbein che permetteva tra loro uno scambio scientifico assai proficuo. Tale affinità era basata anche sulla condivisione di un approccio Piagetiano al problema della conoscenza e del suo apprendimento. La psicologia dell'apprendimento, costituiva una prospettiva di studio cara a Prodi, che non mancava di citare le opere di Piaget, incoraggiandone la lettura. Tale interesse emerge spesso dai sui scritti, ad esempio all'inizio dell'articolo sul tema degli insiemi, ricordato sopra, troviamo osservazioni generali sul contributo che può venire da un approccio psicologico, ovvero da uno studio dei processi mentali relativi all'apprendimento di un certo contenuto. Così, descrivendo il cambiamento di prospettiva che un approccio insiemistico al concetto di numero poteva dare ad un insegnante, Prodi scriveva:

> Schematicamente, questo mutamento può essere descritto così: mentre prima si riteneva che il contenuto di questo insegnamento (il cosiddetto "far di conto") fosse del tutto ovvio, ci si è accorti che, in realtà, questo contenuto è una materia assai complessa ed è il termine di una lunga catena di processi mentali. Matematici e psicologi, gli uni e gli altri dal loro particolare punto di vista, hanno svolto indagini molto accurate, che hanno portato a risultati di estremo interesse. ([GP1], p. 294).

Come in questo caso, anche in altri contributi troviamo accenni ad un'analisi in prospettiva psicologica. In particolare, seguendo la scia di studi condotti da Fischbein con altri colleghi e utilizzando l'idea di acceptance (accettabilità) definita in [7] Prodi discuteva dell'accettabilità o meno di certi concetti, ed in generale del problema della relazione tra intuizione e formalizzazione come problema didattico. La citazione seguente mi pare un buon esempio del tipo di problema affrontato da Prodi, ma anche del suo pensiero sulla possibilità di rendere gli allievi partecipi della bellezza intellettuale della matematica al di là della complessità che questa possibilità poteva comportare. L'analisi dei problemi posti dall'accettabilità dell'idea di infinito ma soprattutto delle sue formalizzazioni matematiche, portava Prodi a considerare il caso dell'Analisi non standard. Fin dal suo primo apparire [18] l'Analisi non Standard si presentava come formalizzazione più vicina all' intuizione originale di infinitesimo e dunque come potenzialmente più vicina all'intuizione degli allievi, Prodi sottolinea la difficoltà ineludibile, e dunque lo sforzo intellettuale richiesto, quando si deve abbandonare il piano dell'evidenza sensibile per trattare problemi riguardanti l'infinito, ma nel contempo ne afferma la valenza culturale. Scriveva Prodi:

> In conclusione, sono personalmente convinto che anche per l'*Analisi Non Standard* si possa ripetere quanto ci è sembrato plausibile per l'idea di infinito, cioè che il fondamento intuitivo non vada cercato in un'evidenza sensibile, ma

> sia interno alla nostra mente e sia, nello stesso tempo, culturale: la nostra mente, sollecitata da adeguate proposte culturali, le fa proprie senza difficoltà e le assume come naturali. Comunque, sia che queste proposte risultino insite in qualche modo nella realtà, sia che si trovino solo nella nostra mente, siamo di fronte a cose che ci riempiono di meraviglia. ([GP15], p. 14).

4. – Prodi e la formazione

Per completare questo breve ritratto della figura di Prodi nel campo della ricerca in Didattica della Matematica non possiamo non parlare del suo impegno nella formazione, sia come docente che come formatore di docenti.

Come ben sa chi ha avuto la fortuna di averlo come professore, Prodi amava insegnare, aveva in particolare la gioia di condividere con i suoi allievi l'amore per la Matematica. Questo non solo con quegli allievi che erano destinati alla ricerca matematica, ma con tutti. Lo faceva per passione ma anche per quel senso di responsabilità che muoveva molte delle sue scelte. Così ad esempio, si impegnò nell'organizzazione dei corsi sperimentali per il primo biennio del Corso di Laurea in Matematica a Pisa; oppure, agli inizi degli anni '90, accettò l'incarico dell'insegnamento della matematica nel corso di laurea in Scienze Biologiche, incarico certo non lieve visto il numero consistente di studenti e di ore di insegnamento. A spingerlo a tale scelta era non solo la convinzione di quanto fosse importante una buona formazione matematica per un futuro biologo, ma anche la consapevolezza del fatto che molti dei laureati in Scienze Biologiche erano potenziali insegnanti di Matematica. Sentiva dunque profonda la responsabilità di offrire loro non solo la possibilità di una buona preparazione ma anche di un buon rapporto con la disciplina, come diceva, di una buona disposizione d'animo.

Il rapporto tra Prodi e la Biologia non aveva però solo una motivazione didattica, come ricorda Paola Cerrai [4], sua collaboratrice per molti anni ed in particolare in questo ambito di ricerca. L'interesse per le scienze della vita e la biologia in particolare era iniziato nell'ambito della direzione di alcune tesi di Laurea nelle quali si costruiva o perfezionava modelli matematici che descrivessero fenomeni biologici come la trasmissione degli impulsi nervosi, la risposta infiammatoria nell'organismo umano, la morfogenesi. L'interesse aveva poi assunto negli anni ottanta il carattere scientifico di una collaborazione all'interno di un gruppo del quale facevano parte colleghi biologi ed esperti nei diversi settori della scienza della vita, come Ludovico Galleni e Nicola Ricci. Come ci ricorda Paola Cerrai, Prodi considerava la biologia una scienza in evoluzione e per questo una fonte ricca di stimoli per la riflessione e per l'attività matematica.

La collaborazione in questo campo ha portato Prodi alla pubblicazione di contributi originali nell'ambito della ricerca [GP17] [GP18], ma ha anche fornito la base per una riflessione sui contenuti dei corsi di Istituzioni di Matematica per lo studio delle Scienze Biologiche, riflessione che Prodi ha messo in atto, come docente dei corsi di matematica a Scienze Biologiche, sia il corso di Istituzioni al primo anno che il corso di Metodi al secondo anno.

Tale esperienza ha avuto un impatto importante sulla innovazione dei contenuti per tali corsi e non solo nel corso di laurea dell'Università di Pisa. Nei manuali scritti da Prodi e pubblicati dalla Mc Graw Hill [GP14][GP16] ritroviamo alcuni degli elementi che avevano caratterizzato il Progetto Matematica come scoperta. Tradizionalmente l'insegnamento della probabilità era del tutto assente, mentre lo studio della statistica era confinato in corsi nei quali gli aspetti concettuali restavano fortemente mortificati, e si privilegiava l'apprendimento di qualche metodo da imparare come 'ricetta'.

Al contrario Prodi riteneva indispensabile lo studio approfondito sia della probabilità e che della statistica per la formazione matematica di un laureato in campo sperimentale, e per questo decise di dare rilievo a tali contenuti. Nello stesso tempo però, dette rilievo anche alla Geometria e alla Geometria dello spazio in particolare, così come ribadì anche per questi corsi la scelta di una presentazione ipotetico-deduttiva, scelta quest'ultima che gli richiese un paziente lavoro di ricerca didattica per elaborare dimostrazioni che fossero rigorose ma anche adeguate al livello teorico dei propri allievi, e questo anche per argomenti complessi come i processi di Poisson o le catene di Markov.

Ma l'impegno più consistente di Prodi sul versante della formazione ha riguardato ancora il mondo della istruzione pre-universitaria. Mosso dal desiderio di rinnovare l'insegnamento della matematica si incontra con gli insegnanti: è da questo incontro e dalle difficoltà che immediatamente percepisce che Prodi trae la convinzione della necessità di intervenire sul fronte dell'aggiornamento e più in generale della formazione.

Anche in questo caso Prodi non si è mai risparmiato, rispondendo sempre con entusiasmo e dedizione a chi chiedeva un suo intervento, indipendentemente dal prestigio che l'occasione di formazione potesse offrire. Questo atteggiamento rispecchiava una caratteristica molto bella del suo carattere, sempre improntato all'azione e soprattutto all'azione costruttiva.

In questo senso, molte sono state le iniziative, costruttive, che hanno visto Prodi come promotore e infaticabile sostenitore, ma quella che più interessa la Didattica della Matematica è certo l'azione volta a dare vita a forme di collaborazione tra insegnanti e universitari per lo studio dei processi di insegnamento e apprendimento.

Il gruppo di ricerca pisano che Prodi ha diretto e animato era formato fin dal suo inizio in modo paritetico da insegnanti della scuola primaria e secondaria e da docenti universitari.

I Nuclei di Ricerca Didattica, formatisi come ambienti per la sperimentazione del Progetto Matematica come Scoperta, e divenuti organismi riconosciuti e finanziati, sono il primo esempio e il più strutturato di gruppo di ricerca nel settore della Didattica della Matematica. Le occasioni di scambio e discussione scientifica, si sono negli anni allargate ad altre realtà e si sono infine articolate in Progetti Nazionali supportati da finanziamenti del Ministero, progetti di cui Prodi per molti anni è stato il Coordinatore Nazionale. È da quei progetti e dalle occasioni di incontro e discussione collettiva originate al loro interno che è nata la comunità dei ricercatori italiani in Didattica della Matematica, comunità unanimemente riconosciuta e apprezzata, come mostrano le collaborazioni e i molti incarichi elettivi ricoperti da ricercatori italiani a livello internazionale.

Grande è stato l'impegno scientifico, organizzativo e umano, profuso da Prodi in questa fase delicata di fondazione, ed è per questo che la comunità dei Ricercatori Italiani in Didattica della Matematica ha voluto intitolare a Prodi il proprio Seminario di Ricerca. Vogliamo ricordare il debito scientifico che ci lega a Prodi, ma vogliamo anche che il suo impegno costruttivo ed appassionato per migliorare l' educazione matematica resti un modello ispiratore per il nostro lavoro di ricerca.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] CHINI ARTUSI, L. (a cura di) *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna: Edizioni Zanichelli.

[2] CHOQUET, G. (1969) *L'insegnamento della geometria*, Milano: Feltrinelli. Traduzione italiana di Choquet G. (1964) *L'enseignement de la géométrie*, Paris: Hermann.

[3] CHEVALLARD, Y.: 1985, *La transposition didactique*, Editions La Pens′ee Sauvage, Grenoble.

[4] CHURCHHOUSE, R.F. (Ed.) (1986) *The influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, ICMI Study Series, Cambridge: Cambridge University Press.

[5] CERRAI, P. (2010) Ricordo di Giovanni Prodi a Viareggio, 10 settembre 2010, (on line il 4 dicembre 2011) *web.math.unifi.it/users/gfmt/convegno_10/materiali/cerrai.pdf*

[6] DI LIBERO, A. Intervista a Giovanni Prodi, http://matematica.unibocconi.it/articoli/intervista-giovanni-prodi (On line 4 dicembbre 2011).

[7] FISCHBEIN, E., TIROSH D. and MELAMED U. (1981) Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? In Educational Studies in Mathematics, vol 12, 4, 491-512.

[8] HOYLES, C. and LAGRANGE, J-B (eds.) (2010) *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*, Heidelberg, Berlin: Springer.

[9] KRJGOWSKA, Z. 1979, *Cenni di didattica della matematica, I*, Quaderni dell'UMI, Bologna: Pitagora Editrice.

[10] LINATI, P. (2011) *L'algoritmo delle occasioni perdute*, Trento: Edizioni Erickson

[11] MARIOTTI M.A. and CERULLI M. (2002) : L'algebrista : un micromonde pour l'enseignementet l'apprentissage de l'algèbre de calcul, *Sciences et Techniques Éducatives*, Numéro spécial Algèbre vol 9, 1-2, 149-170.

[12] MARIOTTI, M.A. (1998) Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore, su *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, vol 21B, 3, 209-52.

[13] MARIOTTI M.A. (2006) Proof and proving in mathematics education. A. Gutiérrez and P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 173-204) Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands.

[14] PESCARINI, A. (1969) Introduzione all'edizione italiana , in Choquet, G. (1969) *L'insegnamento della geometria*, Milano: Feltrinelli.

[15] POLYA G., 1967, *Come risolvere i problemi di matematica, Logica e euristica nel metodo matematico* (traduzione da: *How to solve it*, 1945), Milano: Feltrinelli.

[16] POLYA G. (1970) *La scoperta matematica, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Volume I (traduzione da: *Mathematical discovery*, vol. II, 1967), Milano: Feltrinelli.

[17] POLYA G. (1971) *La scoperta matematica, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Volume II (traduzione da: *Mathematical discovery*, 1962), Milano: Feltrinelli.

[18] ROBINSON, A. (1996). *Non-standard analysis,* Princeton University Press.

[19] VILLANI, V. (2011) I contributi di Giovanni Prodi all'elaborazione e all'attuazione delle riforme scolastiche italiane della seconda metà del novecento, in *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, vol 34 A, 4, 411-446.

Pubblicazioni di Giovanni Prodi

[GP1] PRODI, G. (1971/2011) La teoria degli insiemi nell'introduzione alla Matematica di base, Scuola Italiana Moderna, 1 ottobre 1971; ripreso ne *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 33, 3, 293-310.

[GP2] PRODI, G. (1975a) Un nuovo programma di Matematica per il biennio, *L'Insegnamento della Matematica*, vol 6, 2, 47- 52.

[GP3] PRODI, G. (1975b) *Matematica come scoperta*, vol. I Firenze, Messina: Casa Editrice D'Anna.

[GP4] PRODI, G. (1977) *Matematica come scoperta* - Guida per il vol. I - con il contributo dei Nuclei di Ricerca Didattica di Pisa, Pavia e Trieste, Firenze, Messina: Casa Editrice D'Anna.

[GP5] PRODI, G. (1977/2011) Finalità, contenuti e didattica della matematica, conferenza tenuta a Roma il 20 gennaio 1977 a un corso UCIIM per Presidi, pubblicata in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol, 33, 3 , 281-192.

[GP6] PRODI, G. (1977) *Matematica come Scoperta*, vol. 2, Messina – Firenze: Casa Editrice D'Anna.

[GP7] PRODI, G. (1977) *Matematica come scoperta*, Guida per vol. II - con il contributo dei Nuclei di Ricerca Didattica di Pisa, Pavia e Trieste, Firenze, Messina: Casa Editrice D'Anna.

[GP8] PRODI, G. and MAGENS E. (1982) *Elementi di analisi matematica*, Firenze, Messina: Casa Editrice D'Anna.

[GP9] PRODI, G. (1984) *Storiella estiva con morale*, Archimede 36, Ottobre-Dicembre, 168-171

[GP10] PRODI, G. (curatore) (1984) *Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare*, con contributi di A. Z. Krigowska, E. Fischbein, F. Papy. A. Abele, G. Walther, Z. Dienes, Brescia: La Scuola.

[GP11] PRODI, G. (1984) I problemi della Matematica di fronte all'informatica. Relazione tenuta alla Giornata di Lavoro organizzata dall'A.I.C.A. sul tema: AED Nell'insegnamento della matematica (Genova, 3 dicembre 1983), pubblicata in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 7, 1, 37-55.

[GP12] Prodi, G. (1989) Problemi didattici inerenti all'attuazione dei nuovi programmi di matematica per il biennio, in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 12, 2, 200-224 .

[GP13] Prodi, G. (1990) Quale informatica per la scuola Media, conferenza tenuta al Tredicesimo convegno sull'insegnamento della matematica. I programmi di matematica nella scuola media dieci anni dopo (Brescia 26-28 Ottobre 1989) Supplemento NUMI, marzo 1990, pp. 1-4. , e in *in L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate,* vol. 13, 4, 355-358.

[GP14] Prodi, G. (1992) *Metodi matematici e statistici per le scienze applicate*. McGraw-Hill

[GP15] Prodi, G. (1993) Riflessioni sull'insegnamento dell'analisi matematica, *su L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 16, 5-6, 447-458.

[GP16] Prodi, G. (1994) *Istituzioni di matematica*, McGraw-Hill.

[GP17] Prodi, G. (con Paola Cerrai), (1998) Modelli matematici per il moto dei batteri, in P. Freguglia (curatori) *Modelli matematici nelle scienze biologiche*, pp. 113-133, Urbino: Editrice Quattroventi.

[GP18] Prodi, G. (con Paola Cerrai), (1999) Il moto dei batteri, in P. Cerrai and P. Freguglia (curatori) *La matematizzazione della biologia. Storia e problematiche attuali,* pp. 61-74, Urbino: Editrice Quattroventi.

Maria Alessandra Mariotti
Dipartimento di Scienze Matematiche ed Informatiche "R. Magari"
Università di Siena
e-mail: mariotti21@unisi.it