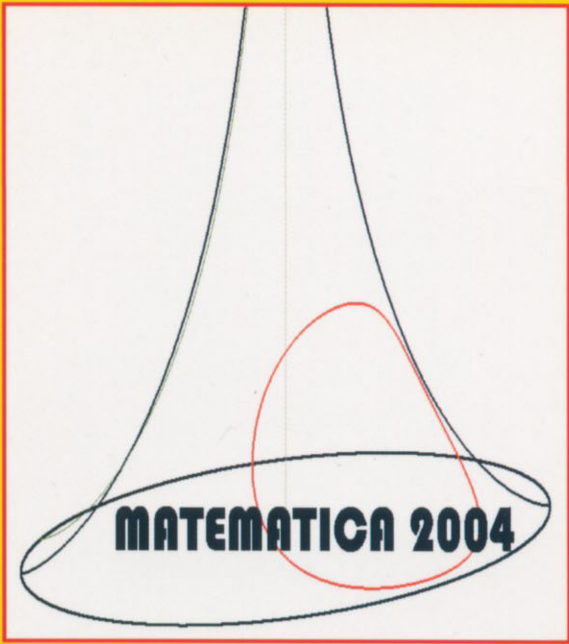
Ministero
dell'Istruzione,
dell'Università
e della Ricerca

Direzione
Generale
Ordinamenti
Scolastici

Unione
Matematica
Italiana

Società Italiana
di Statistica



La Matematica per il cittadino

Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica

Liceo Scientifico
Statale
"G. Ricci Curbastro"
Lugo di Romagna
(Ravenna)

Quinta classe del ciclo secondario di secondo grado

Ministero
dell'Istruzione,
dell'Università e
della Ricerca

MATEMATICA 2004

Unione
Matematica
Italiana

Società Italiana
di Statistica

Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica

Ciclo secondario: quinta classe

Comitato di redazione

Giuseppe Anichini
Ferdinando Arzarello
Claudia Bartolotti
Lucia Ciarrapico
Ornella Robutti

Liceo Scientifico Statale
"G. Ricci Curbastro"
Lugo di Romagna
Maggio 2004

PRESENTAZIONE

Ferdinando Arzarello, UMI-CIIM
Lucia Ciarrapico, MIUR

Questo volume, *Matematica 2004*, prosegue e completa il curricolo di matematica dei primi quattro anni del ciclo secondario, presentato nel volume *Matematica 2003*. Esso è rivolto agli studenti della quinta classe.

Per questa classe abbiamo previsto due itinerari, finalizzati entrambi a completare il ciclo di studi precedente:

- uno di *approfondimento* per gli studenti dei licei in cui la matematica è materia caratterizzante ed anche per gli studenti degli altri indirizzi che intendono proseguire in curricoli universitari o di formazione tecnico-superiore, nei quali la matematica riveste un ruolo fondamentale;
- uno di *consolidamento* delle conoscenze e delle abilità acquisite negli anni precedenti (*La matematica per il cittadino*) per tutti gli altri.

Nel primo caso gli studenti hanno bisogno di uno specifico bagaglio culturale che li metta in grado di completare gli studi coerentemente con le caratteristiche del curricolo seguito, ovvero di affrontare gli studi successivi con una sufficiente preparazione matematica. Nel secondo caso devono, invece, rafforzare la formazione di base già acquisita.

Il curricolo di *approfondimento* ha la stessa struttura di quello descritto in *Matematica 2003*, relativo alle classi precedenti. Le abilità e le conoscenze previste, di livello più elevato rispetto a quelle tradizionali, fanno tuttavia riferimento solo ai primi cinque nuclei *(Numeri e algoritmi; Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni; Argomentare, congetturare, dimostrare*) che sono dotati di specifici contenuti matematici.
La struttura del curricolo di *consolidamento* differisce da quella proposta per il curricolo di *approfondimento*. In esso non sono introdotte altre abilità e conoscenze poiché si ritiene che i concetti e le procedure apprese nei primi quattro anni siano sufficienti. E’ bene, invece, proprio perché questi studenti non faranno in seguito altri studi scientifici, che le conoscenze acquisite siano rafforzate e viste, ancora una volta, nella loro applicazione ai problemi del mondo reale. La scelta del *consolidamento* punta, pertanto, a non far perdere loro le conquiste formative ottenute, mettendoli in grado di utilizzare le conoscenze matematiche nei contesti concreti della vita reale. In questo curricolo sono quindi proposti alcuni <u>*percorsi*</u> che favoriscono il consolidamento di quanto precedentemente acquisito, determinando l’aggregarsi delle abilità in competenze trasversali. Sta all’insegnante individuare opportune attività che realizzino concretamente gli obiettivi propri del curricolo.
I due curricoli – *approfondimento* e *consolidamento* – sono completati da una sezione che presenta idonei e ampi suggerimenti per l’uso della storia delle matematiche nell’insegnamento: essa arricchisce le sintetiche note storiche del volume *Matematica 2003*.

Il volume, come già i precedenti *Matematica 2001* e *Matematica 2003*, è diviso in due parti: la prima contiene il curricolo vero e proprio; la seconda presenta trenta esempi di attività didattica ed alcuni elementi di prove di verifica. Essi sono organizzati in relazione ai nuclei previsti per quanto riguarda gli *approfondimenti*, mentre per i *consolidamenti*, tipiche attività trasversali, sono indicate le conoscenze interessate e le abilità consolidate. Nelle tabelle che precedono le varie attività si fa riferimento a Nuclei, Abilità e Conoscenze di tutti i cinque anni.
Per gli *approfondimenti*, prima della descrizione degli esempi proposti, è presente una tabella riassuntiva delle attività relative ai vari nuclei, con il numero della pagina in cui sono collocate.

Anche gli esempi di *consolidamento* sono preceduti da una tabella (unica) in cui è indicato il *percorso* cui si riferiscono. È inteso che l'esempio non può esaurire l'intero *percorso* proposto ma ne illustra soltanto qualche aspetto.

Gli esempi vanno intesi come semplici suggerimenti rispetto ai quali il docente potrà operare scelte e modifiche opportune, tenendo presenti il livello degli studenti, le proprie preferenze e, soprattutto, gli obiettivi specifici dell'indirizzo di studi in cui insegna. Essi sono di diverso livello di difficoltà; alcuni possono risultare particolarmente impegnativi e richiedono attenzione e cautela nel proporli. Sarà anche compito del docente operare una scelta rispetto alle metodologie di insegnamento. Potrà così usare il lavoro in piccoli gruppi, la discussione matematica, la ricerca in biblioteca o in Internet, l'uso idoneo delle nuove tecnologie…, in relazione ai contenuti trattati e agli obiettivi previsti.

Lugo di Romagna, 5 maggio 2004

Il curricolo di matematica
Ciclo Secondario
(quinta classe)

Approfondimenti:
abilità e conoscenze matematiche

Numeri e algoritmi

Abilità	Conoscenze
• Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. • Utilizzare strutture più complesse come vettori, liste, matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi.	• La struttura dei numeri complessi e il teorema fondamentale dell'algebra. • Matrici e sistemi di equazioni lineari. Matrici e trasformazioni lineari.

Osservazioni

- Nella trattazione dei sistemi lineari dovrà essere prestata particolare attenzione agli aspetti strutturali e a quelli algoritmici (in particolare all'analogia tra l'equazione lineare $ax = b$ e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$), piuttosto che all'acquisizione e alla verifica di abilità di calcolo manuale.
- L'uso di strutture dati come vettori, liste e matrici potrà avvalersi di software di manipolazione simbolica, sia per effettuare operazioni su di essi sia per consolidare, grazie a una riflessione sulla sintassi propria dei software, la conoscenza delle stesse strutture. Nel caso delle matrici sarà comunque opportuno limitarsi a ordini bassi.

Si sconsiglia di:

- Ridurre l'uso delle strutture come i vettori, le liste e le matrici a esercizio tecnico fine a se stesso.

Spazio e figure

Abilità	Conoscenze
• Calcolare e approssimare lunghezze, aree e volumi con diversi procedimenti. • Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi. • Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate. • Utilizzare i vettori e il prodotto scalare nello studio di problemi del piano e dello spazio. • Risolvere analiticamente problemi su sfera, piani, rette e interpretarne le soluzioni. • Utilizzare i primi elementi della geometria della sfera in altri ambiti (geografia, fisica, astronomia). • Analizzare le caratteristiche del V postulato di Euclide e conoscere la nascita delle geometrie non euclidee; conoscere nelle loro linee essenziali i modelli di geometria non euclidea (Beltrami-Klein, Poincaré, Riemann).	• Il problema delle aree; area del cerchio; area del segmento parabolico. Principio di Cavalieri e volumi. • Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano. • Vettori e loro operazioni; il prodotto scalare. Coordinate cartesiane nello spazio; distanza tra due punti; equazione del piano ed equazione della sfera. • Geometria del cilindro e del cono. Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine). • L'assioma delle parallele nel sistema assiomatico di Euclide; i primi elementi delle geometrie non euclidee attraverso modelli.

Si sconsiglia di:
- Trattare i temi di geometria separati da quelli degli altri nuclei e in particolare dall'analisi.

Relazioni e funzioni

Abilità	Conoscenze
• In casi semplici, determinare il limite di una funzione *f*(x) per x che tende a x_0 (valore finito o no) anche utilizzando i teoremi di confronto. • In casi semplici, stabilire se una funzione è continua oppure no, in un punto o in un intervallo. • Interpretare geometricamente la derivata; determinare la tangente in un punto al grafico di una funzione ed usarla per approssimare ("linearizzare") la funzione in un opportuno intervallo. • Utilizzare la derivata per calcolare la velocità istantanea di un moto. • Valutare l'andamento e il segno della funzione $f'(x)$ in relazione all'andamento di $f(x)$ e viceversa; individuare i punti in cui una funzione assume i valori massimi o minimi, relativi e assoluti. • Usare l'integrale come strumento per il calcolo di aree e di volumi di semplici solidi, anche non di rotazione. • Riconoscere la relazione tra l'operazione di ricerca della tangente al grafico di una funzione e l'operazione di calcolo dell'area ad esso sottesa.	• Approfondimento del concetto di limite (*vedi prima osservazione*). • Continuità di una funzione. • Derivata e differenziale di una funzione. • Integrale, primitiva di una funzione, funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo (*vedi seconda osservazione*).

Osservazioni

- Molti concetti dell'analisi matematica possono essere compresi e utilizzati come strumenti e modelli, almeno fino ad un certo stadio di approfondimento, anche appoggiandosi ad una nozione solamente intuitiva di limite. Una precoce definizione formalizzata di limite, che non sia abbastanza sentita dallo studente come necessaria, potrebbe essere controproducente in un primo approccio all'analisi matematica. D'altra parte la capacità di esprimere in termini formali il concetto intuitivo di limite (o di continuità) rappresenta una grossa conquista nell'apprendimento e si consiglia di cercare i modi e i tempi opportuni per arrivarci mettendone in rilievo la complessa struttura logica, e tuttavia senza eccessiva enfasi.
- L'ordine e il modo in cui si introducono i concetti di derivata, integrale, primitiva, funzione integrale dipendono dalle scelte didattiche dell'insegnante. La storia della matematica può essere di aiuto e di guida in queste scelte. Il teorema fondamentale del calcolo integrale può essere illustrato anche facendo ricorso a visualizzazioni.
- Gli strumenti tecnologici possono facilitare la costruzione del concetto di tangente, ad esempio con l'utilizzo appropriato della funzione di "zoom". La valutazione della pendenza delle rette secanti passanti per un punto varia a seconda della scelta della finestra di visualizzazione di un grafico: infatti, in un opportuno ingrandimento, la porzione del grafico intorno al punto si confonde con una retta.

Si sconsiglia di:

- Ridurre l'analisi matematica esclusivamente allo studio di funzioni e di rendere meccanico l'uso della derivata prima e seconda e lo studio del loro segno.

Dati e previsioni

Abilità	Conoscenze
• Spiegare il concetto e la funzione “variabile aleatoria” • Utilizzare il teorema centrale del limite, approssimando le probabilità dalla distribuzione binomiale a quella normale. Determinare i parametri di una distribuzione ed usarli, eventualmente, anche per costruire la distribuzione gaussiana approssimante. (1) • Distinguere il concetto di “media di una popolazione” da quello della (variabile aleatoria) “media campionaria”. • Costruire un campione casuale semplice, data una popolazione. • Stimare una proporzione (fra due parametri), o la media di una popolazione, attraverso una consapevole costruzione di stime puntuali e intervalli di confidenza.(3)	• La distribuzione binomiale: il suo uso e le sue proprietà. (2) • La distribuzione normale: il suo uso e le sue proprietà. (2) • Campionamento casuale semplice e distribuzione campionaria della proporzione e della media. • Stima puntuale e intervallo di confidenza per la proporzione e per la media. (3)

(1) Si tratterà, ad esempio, di calcolare la media e la deviazione standard di una distribuzione rispetto ad un carattere continuo (o anche discreto), per poter definire la distribuzione normale che approssima la distribuzione data.
(2) Queste conoscenze vogliono, rispettivamente, costituire un esempio di distribuzione discreta (distribuzione binomiale) e di distribuzione continua (distribuzione normale).
(3) Si tratta anche qui dell’uso della distribuzione normale, anche se in senso inferenziale.

Si sconsiglia di:

- Dare le formule per le diverse distribuzioni di probabilità senza motivarle e poi far risolvere una serie di esercizi di mera applicazione delle formule.
- Presentare le distribuzioni di probabilità senza (almeno) un concreto esempio di riferimento applicativo.

Argomentare, congetturare, dimostrare

Abilità	Conoscenze
• Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. • Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.	• Sistemi assiomatici in vari contesti. • Coerenza e indipendenza di un sistema assiomatico. • Modelli come interpretazione di un sistema assiomatico.

Osservazioni

- Per parlare di sistemi assiomatici è bene riprendere argomenti noti agli studenti e mostrare come i concetti in gioco possano essere sistemati in una teoria assiomatica. Si può fare, ad esempio, riferimento a:
  - l'aritmetica dei numeri naturali (*Numeri e algoritmi)*
  - la geometria euclidea (*Spazio e figure)*

  Un esempio, molto importante anche dal punto di vista storico, è offerto dalle geometrie non euclidee (*Spazio e figure*), che potranno essere introdotte sia per via sintattica (cioè modificando opportuni assiomi della geometria euclidea) sia per via semantica (cioè attraverso lo studio di modelli).

  Anche le proprietà delle operazioni elementari (associativa ecc., cfr. *Numeri e algoritmi*) possono essere opportunamente tradotte in assiomi: per questa via si arriva all'introduzione delle prime strutture algebriche (come i gruppi).
- In occasione di situazioni didattiche di revisione e approfondimento, si potrà mettere l'accento sul significato logico-matematico di dizioni quali "esiste", "è vero"; sarà utile un confronto con le scienze sperimentali e con la filosofia, se presente nel curricolo di studi.
- In particolare per questo nucleo, molte abilità e conoscenze citate per gli anni precedenti (come "Comprendere ed usare consapevolmente forme diverse di dimostrazione") vanno riprese e consolidate.

Si sconsiglia di:

- Presentare una trattazione puramente teorica dei modelli e delle proprietà dei sistemi assiomatici che risulterebbe eccessivamente astratta. Le problematiche citate vanno affrontate quando si incontrano occasioni adatte.

Consolidamenti: percorsi

1. La versatilità dell'oggetto polinomio

L'obiettivo di questo percorso è di rivisitare alcuni degli argomenti presenti nei quattro anni precedenti aggregandoli attorno al concetto di polinomio. L'argomento è di carattere trasversale e coinvolge temi presenti nei nuclei Numeri e algoritmi, Spazio e figure, Relazioni e funzioni e Argomentare, congetturare, dimostrare.
Il concetto di polinomio è, infatti, presente fin dal primo biennio [e in maniera implicita anche nei cicli scolastici precedenti], nell'ambito numerico per quanto riguarda la scrittura polinomiale dei numeri, nell'ambito algebrico per quanto riguarda sia l'aspetto strutturale sia l'aspetto operativo per la risoluzione di equazioni polinomiali, nell'ambito analitico perché legato alla rappresentazione di funzioni polinomiali [nel primo e nel secondo biennio] e all'approssimazione di funzioni non polinomiali. Questo concetto riveste una particolare importanza nella trattazione e nell'analisi dei dati. Si colloca, quindi, in modo trasversale anche rispetto ai nuclei Dati e previsioni e Misurare. L'argomento offre possibilità di collegamento interdisciplinare con le scienze sperimentali, l'economia, la medicina, ecc.
Per lo svolgimento del percorso sono necessarie sia abilità di calcolo sia l'uso di tecnologie, in particolare le calcolatrici grafico-simboliche, che consentono un uso integrato dei diversi ambienti.
E' importante che gli studenti abbiano presente anche la rappresentazione grafica dei problemi affrontati in modo da evidenziare, in particolare, il collegamento con la geometria analitica e la geometria sintetica.
L'obiettivo è far emergere le potenzialità e la pervasività dell'oggetto polinomio nei diversi ambiti della matematica.

2. I numeri: esattezza e approssimazione

Il percorso didattico di consolidamento proposto rivisita alcuni degli argomenti presenti nei quattro anni precedenti, aggregandoli attorno al tema dell'esattezza e dell'approssimazione. L'argomento è di carattere trasversale e coinvolge temi presenti nei nuclei Numeri e algoritmi, Misurare, Spazio e figure e Relazioni e funzioni.
La contrapposizione tra esatto ed approssimato accompagna lo studente in tutto il suo percorso scolastico a partire dalla scuola primaria. Nella scuola secondaria il problema si presenta quando si affronta la rappresentazione decimale dei numeri razionali e l'introduzione dei numeri irrazionali. Ma anche negli altri nuclei questa contrapposizione è presente nel problema della misura e della rappresentazione delle grandezze, geometriche o di altra natura. Sul versante algebrico questa contrapposizione diventa significativa nell'affrontare il problema della determinazione delle soluzioni esatte e approssimate di equazioni e sistemi. In generale, ma particolarmente in quest'ultimo caso, acquista rilevanza il problema dell'approssimazione e dell'esattezza legato a situazioni sia matematiche che della vita reale, anche in relazione all'uso di strumenti tecnologici di misura e di calcolo più o meno evoluti. A tal proposito è opportuno rilevare che molti problemi non sono affrontabili se non utilizzando algoritmi di approssimazione.

3. Modelli discreti e algoritmi di implementazione

Il percorso didattico di consolidamento proposto affronta argomenti esterni alla matematica, di particolare rilevanza sociale. Ha come obiettivo principale la consapevolezza dell'importanza di un modello matematico per studiare un fenomeno dinamico della vita reale. Si sceglie il modello discreto in quanto particolarmente adatto alla descrizione di situazioni in cui il legame tra le variabili avviene tramite tassi di variazione finiti.

Questo tipo di modello si presta particolarmente ad essere descritto e implementato tramite algoritmi iterativi e ricorsivi. Tali algoritmi possono essere tradotti in vari ambienti tecnologici, quali sono, ad esempio, il foglio elettronico, la calcolatrice grafico-simbolica, l'ambiente CAS (Computer Algebra System). Per tali motivi questo percorso si presenta come ponte tra la matematica e le altre discipline e, per l'uso delle tecnologie, rappresenta un tipico esempio di attività di Laboratorio di matematica.

4. Il problema della misura: lunghezze, aree, volumi

Il problema della misura di lunghezze, aree e volumi attraversa tutta la carriera scolastica a partire dalla scuola primaria. L'itinerario delineato ha lo scopo di far ripercorrere allo studente il suo personale cammino attraverso le successive generalizzazioni e gli affinamenti sia dei concetti che degli strumenti coinvolti nella soluzione dei problemi di misura. Esso è utile anche per rivisitare il cammino storico che dalla teoria dell'equivalenza in Euclide e dal metodo di esaustione porta al calcolo integrale.
L'argomento è trasversale e consolida conoscenze ed abilità fondamentali presenti nel curricolo proposto negli anni precedenti. Lo svolgimento necessita dell'uso di modelli e di tecnologie, da quelle tradizionali ai software di geometria e alle calcolatrici.
Particolare rilevanza assume in questo percorso il collegamento con il problema della misura in altri ambiti disciplinari quali quello della fisica e delle altre scienze sperimentali.

5. Geometria e arte

Il percorso didattico di consolidamento proposto riprende alcuni argomenti di geometria che sono stati affrontati nei quattro anni precedenti, sottolineando i loro legami con l'arte e, più in generale, con il mondo reale.
L'analisi di opere architettoniche può affinare la visione spaziale e consolidare la conoscenza delle proprietà di simmetria, aspetti che hanno sempre affascinato artisti, filosofi, matematici, …
L'argomento è trasversale e consolida conoscenze ed abilità fondamentali presenti nel curricolo proposto fin dalla scuola primaria.
Può essere opportuna la rappresentazione spaziale attraverso l'uso di modelli concreti o l'utilizzo di software di geometria o di disegno.
Un ruolo fondamentale gioca in questo percorso un approccio storico ai vari argomenti, all'interno della matematica (*Gli Elementi* di Euclide, libro XIII; Cartesio; Eulero; …) e all'esterno (filosofia, disegno e storia dell'arte, scienze naturali, …). Il tema proposto ha, infatti, aspetti fortemente interdisciplinari che vanno evidenziati e sottolineati.

6. Problemi di massimo e di minimo

Il percorso didattico di consolidamento che si propone rivisita alcuni degli argomenti presenti nel curricolo dei quattro anni precedenti, utilizzandone contenuti e metodi ai fini della risoluzione motivata di problemi di massimo e minimo.
L'argomento proposto – *Problemi di massimo e di minimo* - è trasversale e riguarda problematiche da ricercare in tutti gli ambiti matematici nonché attinenti alla storia della matematica e a situazioni fisiche reali.
Il percorso può essere utile per consolidare conoscenze e abilità dei nuclei Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Numeri e algoritmi; Argomentare, congetturare, dimostrare.

Per la sua realizzazione didattica è opportuno avvalersi dell'uso di modelli e di tecnologie. Queste ultime, in particolare i software di geometria, possono dare un contributo chiarificatore in quanto permettono di visualizzare dinamicamente la variazione di grandezze connesse ad una figura, mettendola in relazione con la funzione che la rappresenta.

7. Pendenza di una retta e variazione di una funzione

Il percorso tratta del problema dell'andamento di una funzione, che va iniziato fin dalla scuola primaria. Parte da considerazioni sulla crescita/decrescita di un fenomeno, e analizza in seguito l'andamento di funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa e quadratica. Affina progressivamente il concetto di 'variazione' con la definizione quantitativa della pendenza di una retta, legata agli incrementi finiti delle variabili in gioco. Giunge infine al concetto di approssimazione locale di una funzione ed alla determinazione della retta tangente ad una curva in un punto ponendo le premesse per la definizione di derivata e per il calcolo con infinitesimi. L'itinerario impegna ed affina in particolare le abilità del nucleo Relazioni e funzioni e Misurare, ma presuppone anche una buona conoscenza di strumenti relativi al nucleo Numeri e algoritmi e si collega con il nucleo Spazio e figure. I concetti che coinvolge assumono spessore se trattati secondo registri diversi (numerico, simbolico, grafico): diventa quindi indispensabile un uso costante del Laboratorio di Matematica mediante strumenti quali calcolatrici e calcolatori.

8. Potenze, successioni, funzioni esponenziali e logaritmiche

A partire dalla scuola dell'obbligo gli allievi hanno a che fare con l'operazione di elevamento a potenza e con le proprietà relative a tale operazione, la cui conoscenza è fondamentale per la manipolazione algebrica di formule. In seguito, l'indagine su 'regolarità numeriche' che possono sorgere da vari contesti conduce naturalmente al concetto di successione ed alla ricerca di una formula di tipo funzionale o ricorsivo ed introduce le prime questioni che hanno a che fare con l'infinito. Le successioni aritmetiche e geometriche appaiono quindi in grado di modellizzare situazioni a crescita regolare con incrementi costanti di tipo additivo o di tipo moltiplicativo ed inducono a costruire ed a formalizzare la successione delle somme parziali.
Lo studio delle progressioni aritmetiche e geometriche costituisce la base per la costruzione delle funzioni esponenziali (nelle quali ad incrementi additivi costanti sul dominio corrispondono incrementi moltiplicativi costanti dell'immagine) e delle loro inverse, le funzioni logaritmiche.
Il percorso si collega in primo luogo al nucleo Numeri e algoritmi, ma ha riferimenti anche con i nuclei di Dati e previsioni e Spazio e figure; va sviluppato prevalentemente nel Laboratorio di matematica, con l'uso di strumenti come calcolatrici e calcolatore che facilitino la manipolazione numerica e la visualizzazione di grafici.

9. Equazioni e disequazioni

La ricerca di un valore che soddisfa determinate condizioni prende il via già dalla scuola primaria.
Lo studio delle funzioni consente di aggiungere un punto di vista grafico a quello algebrico, facendo rientrare la soluzione di un'equazione o di una disequazione, rispettivamente, nella ricerca degli zeri e nello studio del segno di una funzione. Anche le disequazioni in due variabili hanno un'interpretazione grafica e quindi geometrica. Il teorema di esistenza degli zeri, sempre presente come "teorema in atto", unitamente allo studio della funzione $y = f(x)$, corrispondente all'equazione $f(x) = 0$, consente la ricerca di soluzioni approssimate, in particolare quando si tratta di funzioni trascendenti. Per questo tema è particolarmente significativo il percorso storico, che può fornire

nuovi spunti per la comprensione dell'argomento: dai metodi risolutivi di Egizi, Babilonesi, Cinesi e Indiani a quelli degli algebristi del '400. Può essere significativo anche un percorso che, dai classici problemi irrisolubili con riga e compasso dell'antichità, giunga fino ai metodi risolutivi delle equazioni di 3° grado di Dal Ferro, Tartaglia, Cardano, ecc.
L'itinerario impegna ed affina in particolare gli strumenti del nucleo Relazioni e Funzioni e Numeri, ma presuppone anche una buona conoscenza di strumenti relativi al nucleo Spazio e figure. I concetti che coinvolge assumono spessore se trattati secondo registri diversi (numerico, simbolico, grafico): diventa quindi indispensabile un uso costante del Laboratorio di Matematica mediante strumenti quali calcolatrici e calcolatore.

10. Vari tipi di probabilità

Il percorso rivisita alcuni degli argomenti presenti nel curricolo dei precedenti quattro anni del nucleo Dati e previsioni, aggregandoli attorno a diversi temi quali quello degli eventi e delle operazioni con gli eventi (in particolare gli eventi incompatibili e gli eventi esaustivi); quello del significato della probabilità e delle sue valutazioni; quello del concetto di probabilità condizionata, di probabilità composta, di probabilità totale. L'attenzione alle prime (e semplici) distribuzioni di probabilità è una naturale conseguenza. L'argomento coinvolge anche aspetti presenti nei nuclei Spazio e figure (lunghezze e aree relative ai poligoni; lunghezza della circonferenza e area del cerchio), Relazioni e funzioni (costruzione di modelli, sia discreti sia continui; sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica), Misurare (analizzando e rappresentando dati ottenuti da misure di grandezze), Numeri e algoritmi (il numero π; calcolo di aree), Argomentare, congetturare, dimostrare (probabilità geometrica, discussione sull'infinito in matematica). Tali problemi possono proficuamente essere trattati anche dal punto di vista storico (paradossi dell'infinito, Galileo e il paradosso del tutto e della parte, Cantor e la definizione di insieme infinito). Il percorso si presta anche a numerosi collegamenti interdisciplinari (filosofia e letteratura) e all'uso del laboratorio.

11. Lettura probabilistica di una distribuzione doppia

Dai primi elementi di statistica descrittiva il percorso arriva ai rudimenti essenziali della probabilità condizionata, passando attraverso le varie possibilità di valutazione della probabilità. Vanno evidenziate, in particolare, le rivisitazioni delle conoscenze relative alle distribuzioni di frequenza, secondo il tipo di carattere; alle frequenze assolute, alle frequenze relative, alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Il passaggio alla valutazione di probabilità, attraverso argomentazioni, congetture, rifiuti e convalide, appare pertanto un obiettivo che può essere raggiunto passo passo con naturalezza. Le considerazioni logico-argomentative, ovviamente, coinvolgono in modo rilevante, oltre al nucleo Dati e Previsioni, anche il nucleo Argomentare, congetturare, dimostrare. Anche i nuclei Spazio figure (attraverso la formalizzazione degli aspetti della geometria elementare), Relazioni e funzioni e Misurare sono saltuariamente intersecati. L'intersezione forse più rilevante è col nucleo Risolvere e porsi problemi, coinvolto praticamente in tutte le sue attività.

12. Leggere, analizzare e prevedere: uso di una serie storica

Il percorso rivisita alcuni argomenti degli anni precedenti, aggregandoli attorno al tema della raccolta ed analisi di dati come la temperatura, le precipitazioni, l'umidità, la pressione atmosferica, lo stato del cielo, il vento.
Vanno evidenziati in particolare, nell'ambito del nucleo Dati e previsioni, le rivisitazioni delle conoscenze riguardanti le distribuzioni delle frequenze secondo il tipo di carattere, nonché le frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Vanno ricordate le principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze e le serie storiche e le loro rappresentazioni. Si rivisitano anche le proprietà dei valori medi e delle principali misure di variabilità, nonché lo studio delle rette di regressione e del loro potere esplicativo.
L'argomento coinvolge anche temi presenti nei nuclei Spazio e figure (formalizzazione degli oggetti della geometria elementare e passaggio da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato), Relazioni e funzioni (costruzione di modelli, sia discreti sia continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici), Misurare (analizzando e rappresentando dati ottenuti da misure di grandezze). Ogni fenomeno è poi misurato con l'aiuto di strumenti opportuni e ciò può attivare l'interdisciplinarietà con la fisica. L'attività nasce ed è stimolata dalla curiosità degli studenti sul clima del proprio paese, città, regione. L'insegnante può condurre la classe ad usare Internet per trovare risultati e dati nonché ricerche già effettuate sulla meteorologia che possano servire da guida. Si suggerisce di seguire dapprima le sole precipitazioni: l'analisi può essere condotta o per una sola stazione di rilevamento lungo tutto il corso di un anno per cui sono disponibili i dati oppure rispetto a un mese particolare in tutte le stazioni rilevate.

13. L'importanza del linguaggio

Il linguaggio gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento anche in matematica. Lo scopo del percorso è di porre un'attenzione particolare ai linguaggi utilizzati, interpretare i diversi comportamenti linguistici che influenzano le prestazioni in matematica e progettare attività didattiche adeguate.
Il percorso impegna conoscenze e abilità di tutti i nuclei; infatti le "formule" che si adoperano in matematica hanno molti elementi in comune con le frasi della lingua italiana. Gli studenti alla fine della scuola superiore rischiano di non capire la definizione di limite se non hanno imparato per gradi e con metodo, a leggere e "tradurre" le formule nella lingua naturale e a comprendere il gioco complesso delle alternanze dei quantificatori (per ogni…esiste…per ogni…).
E' importante, quindi, far notare le analogie e le differenze nell'uso del linguaggio naturale e dei linguaggi simbolici. Ad esempio occorre capire perché un'equazione del tipo $(x-4)(x^2-9) = 0$ si risolve come si risolve o perché un sistema è cosa diversa da tale equazione, e così via. Un altro esempio è nel passaggio dall'algebra all'analisi, quando il linguaggio cresce di complessità logica e linguistica: dalle formule aperte dell'algebra, ad es. $ax^2 + bx +c = 0$, a quelle con le alternanze di quantificatori necessarie per maneggiare i limiti.

14. Congetture, refutazioni, dimostrazioni

L'attività del dimostrare, che caratterizza la matematica matura, deve far parte del curricolo di matematica. Quando si parla di *dimostrazione*, però, si devono avere presenti tre importanti fasi:

a) l'osservazione, la scoperta e la produzione di congetture;
b) la validazione delle congetture attraverso la ricerca di controesempi o di dimostrazioni;

c) la sistemazione e la comunicazione della dimostrazione trovata secondo regole e canoni condivisi.

Tentare di avviare al pensiero teorico senza dare la dovuta importanza alle prime due fasi rischia di recidere quella necessaria continuità cognitiva tra la produzione di congetture, la ricerca di una dimostrazione e la sua sistemazione e comunicazione.

L'obiettivo principale di questo percorso è di costruire un ambiente di insegnamento-apprendimento con attività di osservazione ed esplorazione di situazioni matematiche. Ciò favorirà la produzione di congetture e motiverà alla successiva fase di validazione delle stesse mediante refutazioni o dimostrazioni. Ingredienti importanti delle attività di questo percorso sono: l'uso degli strumenti informatici per aiutare e potenziare le attività di esplorazione e osservazione delle situazioni proposte; i problemi aperti, le cui caratteristiche sono di avere un enunciato corto, non contenere in forma esplicita tutte le ipotesi, non contenere l'esplicitazione di tutte le richieste. In altri termini, un problema aperto pone domande del tipo: "Quali configurazioni assume ... Quali relazioni si possono trovare tra ..." e non del tipo "Dimostra che ...", in modo da favorire l'attività di esplorazione e produzione di congetture.

15. Dimostrazioni e modi di dimostrare

L'obiettivo principale di questo percorso è far riflettere gli studenti sul concetto di dimostrazione attraverso un'analisi di alcune dimostrazioni che potrebbero essere già state affrontate negli anni precedenti, per esempio le dimostrazioni per casi, quella per induzione, quella per assurdo.

Si può anche proporre una sorta di *fenomenologia* delle dimostrazioni mediante una classificazione delle dimostrazioni in:

a) "dimostrazioni che sono attività euristiche" e che hanno la funzione di risolvere problemi (esempi si possono costruire in vari contesti, dall'aritmetica elementare all'ambiente logico dei cavalieri e dei furfanti creato da Raymond Smullyan);
b) "dimostrazioni di casi particolari" (per esempio, dimostrare che fra $4!$ e $(4+1)!$ c'è almeno un numero primo);
c) "dimostrazioni che sono calcoli o esecuzione di programmi" (per esempio, dimostrare che $a^2 - b^2 + 2cb - c^2 = (a - b + c)(a + b - c)$);
d) "dimostrazioni di impossibilità" (dimostrare che l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non è risolubile nell'insieme dei numeri razionali);
e) "dimostrazioni per assurdo";
f) "dimostrazioni per induzione".

Il percorso, per la sua trasversalità, può impegnare conoscenze e abilità di tutti i nuclei.

La storia delle matematiche come strumento didattico

Suggerimenti di storia delle matematiche

La storia delle matematiche può costituire un valido sussidio didattico a partire dai primi anni di scuola, ma è solo durante i cinque anni di liceo che può essere introdotta in modo più articolato. La maggior maturità degli allievi e le più ampie conoscenze acquisite consentono di farne un uso più esteso e più proficuo. Consentono cioè di non limitarsi esclusivamente ad una storia "raccontata", ma di presentare l'evoluzione delle idee matematiche attraverso temi opportunamente scelti (in base alla rilevanza, al tipo di liceo, all'argomento che si sta trattando e alle connessioni con altre discipline) o con letture mirate dei classici, adeguatamente contestualizzate.
La storia, in tal modo, permette all'allievo di rendersi conto che la matematica non è una disciplina statica, ma nasce e si sviluppa per risolvere problemi, siano essi pratici o teorici. D'altro canto, il carattere unificante che le è proprio evidenzia l'unità profonda dei vari settori della matematica stessa. Essa favorisce inoltre l'approccio interdisciplinare (auspicato soprattutto nell'ultimo anno di liceo), può suggerire prove di verifica e stimolare la creatività.
Si propongono qui alcuni fra i molti argomenti di storia delle matematiche collegati con i temi che lo studente affronta via via nei cinque anni di liceo suggerendo anche problemi più specifici che possono dar luogo ad attività didattiche coerenti e integrate con lo svolgimento del curricolo. La proposta è completata da una bibliografia di base, in lingua italiana, utile per un primo approccio alla storia nella scuola.
I temi suggeriti hanno un carattere puramente esemplificativo e il docente potrà attingere ad essi compatibilmente con le esigenze della propria programmazione didattica.

Numeri e equazioni nella storia
- Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo
- Le grandezze incommensurabili nel mondo greco, le proporzioni, …
- Il triangolo aritmetico
- L'equazione di secondo grado (Babilonesi, "algebra geometrica" in Euclide, Arabi, Medioevo)
- Soluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado

La geometria euclidea, le sue radici storiche
- Il teorema di Pitagora
- Le costruzioni con riga e compasso (sezione aurea,…)
- Letture dai dialoghi di Platone

I problemi classici
- Duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del cerchio

Il problema della risolubilità per radicali delle equazioni di grado superiore al quarto

L'algebra come ausilio per risolvere problemi geometrici
- R. Descartes e la nascita della geometria analitica
- (Lettura commentata di passi opportunamente scelti dalla *Géométrie,* 1637)

L'uso di "macchine matematiche" nella soluzione di problemi

Il problema dei fondamenti della geometria da Euclide a Hilbert
- Lettura commentata di testi opportunamente scelti (Euclide, O. Al-Khayyam, G. Saccheri, C. F. Gauss, …, N. Lobacĕvskij, …, D. Hilbert)
- Modelli delle geometrie non euclidee

- Collegamenti possibili con la filosofia e la fisica per quanto riguarda l'evoluzione del concetto di spazio e con la storia della letteratura e dell'arte

Origini e sviluppi del calcolo delle probabilità e del metodo statistico
- L'emergere del concetto di probabilità dai problemi posti dal gioco d'azzardo: problemi opportunamente scelti da testi di G. Galilei, B. Pascal, P. Fermat, …, A. De Moivre, P.S. Laplace,...
- La curva di Gauss
- Il paradosso di S. Pietroburgo per discutere il concetto di valore atteso
- Il fallimento del sondaggio per le elezioni statunitensi del 1936 al fine di illustrare i possibili metodi di campionamento statistico

Cenni sulla storia dei numeri complessi

Dai metodi infinitesimali alla creazione dell'analisi infinitesimale
- Archimede e il metodo dei teoremi meccanici (volume della sfera, …)
- La creazione dell'analisi infinitesimale: l'importanza della geometria di R. Descartes e dell'equazione della curva; il ruolo principale della "derivazione" nell'analisi di I. Newton e di G. W. Leibniz; l'uso intuitivo del concetto di limite
- Il metodo di Apollonio per determinare la tangente alla parabola (metodo legato alla curva) a confronto con quelli di Newton e Leibniz (metodi generali)
- Problemi fisici che hanno condotto allo sviluppo dell'analisi infinitesimale (la cicloide, …)

Il problema dei fondamenti dell'analisi
- I paradossi dell'infinito, le curve cosiddette patologiche, …
  (Lettura commentata di testi opportunamente scelti)

La nascita della logica
- Letture opportunamente scelte e commentate

Riferimenti bibliografici

Testi generali di storia delle matematiche

Loria, G., (1982), *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, (1950), Cisalpino-Goliardica, Milano.

Boyer, C., (1980), *Storia della matematica*, Oscar Studio Mondadori, Milano.

Kline, M., (1991), *Storia del pensiero matematico*, (1972), 2 voll., Einaudi, Torino.

Bottazzini, U., (1990), *Il flauto di Hilbert*, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet, Libreria, Torino.

Raccolte di Fonti

Manara, C. F.; Lucchini, G.. (1976), *Momenti del Pensiero Matematico*, Mursia, Milano.

Bottazzini, U.; Freguglia, P.; Toti Rigatelli, L., (1992) *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Opere di matematici

Classici della scienza, collana della UTET

Biografie

I grandi della scienza, Le Scienze

Enciclopedie

Berzolari, L.; Vivanti, G.; Gigli D.; (1930) *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi,* Hoepli: Milano (esistono varie riproduzioni anastatiche dell'opera, l'ultima delle quali a cura della Casa Editrice Pagine Srl - Via G. Serafino, 8 - 00136 Roma)

Enriques, F.; (1983), *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* Zanichelli, Bologna, 2 voll., (1912-14).

Siti (aggiornati al maggio 2005)

http://www.dm.unito.it/sism/index.html (sito della Società Italiana di Storia delle Matematiche)

http://www.dm.unito.it/mathesis/documenti.html

http://www.math.unifi.it/archimede (sito de Il Giardino di Archimede, un museo per la matematica)

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html (sito di storia della matematica della University of St. Andrews, Scotland)

Approfondimenti: attività didattiche e prove di verifica

NUMERI e ALGORITMI

Elenco delle attività

Matrici e loro applicazioni

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. Utilizzare strutture più complesse come vettori, liste, matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi. Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi.	Matrici e sistemi di equazioni lineari. Matrici e trasformazioni lineari. Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure Laboratorio di matematica	

Contesto
Matrici e loro proprietà.

Gli studenti conoscono già, in modo informale, il concetto di matrice per aver utilizzato la matrice dei dati rispetto a una rilevazione statistica [Matematica 2003, *Dati e previsioni*, Primo biennio]. Si tratta ora di approfondire la conoscenza delle matrici dal punto di vista della struttura (operazioni con le matrici e proprietà) e di utilizzare le matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone agli studenti di scrivere una matrice che rappresenti i risultati delle partite giocate in casa da tre squadre di serie A:

$$\begin{bmatrix} 14 & 7 & 3 & 4 \\ 15 & 8 & 7 & 0 \\ 15 & 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi sulle righe della matrice rappresentano ordinatamente il numero totale di partite giocate in casa, il numero di partite vinte, il numero di partite perse e, infine, il numero di partite pareggiate da ciascuna squadra. Si tratta allora di una matrice con 3 righe (le 3 squadre) e 4 colonne, cioè una matrice 3×4.
Si può poi proporre di costruire una matrice analoga che rappresenti i risultati delle partite giocate fuori casa dalle tre squadre.
Le due matrici possono essere utilizzate per visualizzare la situazione del totale delle partite giocate dalle tre squadre in casa e fuori casa, in modo da riassumere i risultati. L'insegnante condurrà in tal modo gli studenti a costruire la matrice somma. Tramite discussione coordinata dall'insegnante si può riflettere sull'operazione di somma di matrici e sulle proprietà di questa operazione.
Per ciò che riguarda l'operazione di prodotto matrice-vettore, è possibile proporre una situazione problematica di questo tipo:

Consideriamo un'azienda che immagazzina 3 tipi di merce in 2 magazzini. Le quantità immagazzinate sono descritte da una matrice 2X3:

	merce 1	*merce 2*	*merce 3*
magazzino 1	*100*	*500*	*600*
magazzino 2	*120*	*400*	*1000*

Il valore unitario delle merci è rispettivamente: 80 €, 50 € e 10 €. Qual è il valore complessivo delle merci in ciascun magazzino?

La risoluzione del problema porta ad ottenere:
nel magazzino 1: $100 \cdot 80+500 \cdot 50+600 \cdot 10 = 39000$ €
nel magazzino 2: $120 \cdot 80+400 \cdot 50+1000 \cdot 10 = 39600$ €

Le precedenti operazioni possono essere scritte in modo strutturato proprio con il prodotto della matrice data per il vettore dei costi unitari: $v = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 100 & 500 & 600 \\ 120 & 400 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Riprendendo l'esempio delle partite di calcio, si può utilizzare il prodotto tra una matrice e un vettore se si richiede agli studenti di determinare il punteggio totalizzato da ogni squadra, sapendo che si attribuiscono 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per il pareggio e 0 punti per ogni sconfitta.

Un altro esempio di attività può essere il seguente:
Data la matrice A= $\begin{bmatrix} -100 & 65 & 55 \\ -100 & 60 & 65 \end{bmatrix}$*, che rappresenta (per righe) due investimenti con scadenze 0, 1, 2 anni e il vettore x=* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/1,08 \\ 1/1,08^2 \end{bmatrix}$*, che rappresenta i corrispondenti fattori di sconto al tasso 8%, determinare il prodotto tra la matrice e il vettore.*

In questo caso, il prodotto Ax è il vettore le cui componenti sono uguali al VAN (valore attuale netto), al tasso 8%, delle due operazioni finanziarie. Il VAN è uno strumento di valutazione delle operazioni finanziarie: si tratta dell'utile (se positivo) o del costo (se negativo) di una operazione finanziaria, cioè di una sequenza di somme di denaro nel tempo. Ad esempio l'operazione -1000, 520, 550 (ai tempi 0, 1, 2) è un investimento e indica l'acquisto, al prezzo 1000, del diritto a riscuotere 520 tra 1 anno e 550 tra due anni. Qual è l'utile (o il costo) di questa operazione finanziaria? Conviene intraprenderla? La teoria del VAN dice: dipende da qual è il "costo opportunità" del soggetto, cioè il tasso al quale comunemente egli può impiegare il suo denaro. Detto i il tasso al quale può comunemente accedere per i suoi impieghi finanziari, si calcola il valore di oggi dell'intera operazione finanziaria:
$-1000 + 520/(1+i) + 550/(1+i)^2 = -1000 + 507,32 + 523,50 = 30,81$.
Intraprendere questa operazione finanziaria è equivalente a trovare oggi per terra un portafoglio pieno di 30,81 euro, cioè il VAN dell'operazione. Essendo il VAN riferito al valutatore, se cambia il valutatore cambia il VAN. La valutazione del VAN è fatta con la funzione della capitalizzazione composta. Si ritiene che il modello migliore di tale funzione sia quello esponenziale (che in effetti è

quello più spesso, ma non sempre, utilizzato): $f(t) = b^t$ con $b > 1$ (deve essere crescente); così un capitale iniziale C produce, dopo t anni, un montante $M(t) = C\cdot(1+i)^t$. La formula inversa ci dà $C = M(t)/(1+i)^t$.

Per parlare di prodotto matrice-matrice, possiamo introdurre un altro esempio che generalizza i precedenti.
La matrice A elenca, per righe, i flussi di un numero arbitrario di operazioni finanziarie (per esempio 3 operazioni finanziarie a 3 scadenze ciascuna)

$$A=\begin{bmatrix} -100 & 0 & 121 \\ -100 & 110 & 0 \\ -100 & 10 & 110 \end{bmatrix}$$

La matrice B elenca, per colonne, i fattori di sconto calcolati ad un numero arbitrario di tassi differenti (per esempio i due tassi 0,06 e 0,08)

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/1{,}06 & 1/1{,}08 \\ 1/1{,}06^2 & 1/1{,}08^2 \end{bmatrix}$$

Il prodotto delle due matrici dà il VAN delle tre operazioni finanziarie valutato al tasso 6% (nella prima colonna) e il VAN delle tre operazioni finanziarie valutato al tasso dell'8% (nella seconda colonna).

Seconda fase
Il calcolo matriciale è particolarmente utile per lo studio delle trasformazioni geometriche dal punto di vista analitico.
Le matrici si possono introdurre, una prima volta, quando si parla della traslazione dando le componenti del vettore traslazione sotto forma di matrice a una colonna. Poi si possono considerare, limitatamente alle affinità del piano con l'origine punto unito, matrici quadrate 2×2.
Anche le operazioni tra matrici possono essere interpretate alla luce delle trasformazioni. L'insegnante può illustrare agli studenti le corrispondenze riportate nello schema seguente.

Al prodotto di trasformazioni corrisponde il prodotto di matrici

Matrici	Trasformazioni
Prodotto non commutativo	Prodotto non commutativo
matrice identica	identità
matrice inversa	trasformazione inversa

L'insegnante può richiamare le conoscenze relative ai vettori e, in particolare, mostrare come ad ogni punto del piano si possa associare un vettore, detto *vettore posizione*. Inoltre può ricordare che il generico vettore posizione si esprime come combinazione lineare dei *vettori base*:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Questo permette di passare dalla notazione analitica, già nota agli studenti, a quella matriciale, facendo notare che tale scrittura evidenzia la matrice che opera la trasformazione. In particolare all'affinità con l'origine punto unito possiamo associare una matrice quadrata 2×2.
Ecco come tale matrice opera sui vettori base:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Risulta che le componenti dei trasformati dei vettori base sono le colonne della matrice della trasformazione. Quindi si può scrivere subito la matrice di una trasformazione se si sa come opera sui vettori base!
L'insegnante invita gli studenti a scrivere, come verifica di questa scoperta, le matrici delle trasformazioni di cui già conoscono le equazioni.
Si possono considerare, in particolare, i seguenti esempi.
Matrice associata alla simmetria S_b di asse la retta $y = x$.

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad S_b=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Matrice associata alla simmetria S_x di asse la retta $y = 0$.

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \qquad S_x=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

Matrice associata alla rotazione di 90° R_{90}

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \qquad R_{90}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Si verifica che $S_b \cdot S_x = R_{90}$.
L'attività può proseguire lungo due diverse direzioni: a) ritrovare le equazioni di trasformazioni già note (simmetrie assiali, simmetria centrale, rotazioni in casi particolari, omotetie di centro l'origine); b) trovare equazioni di trasformazioni non conosciute (isometrie nel caso generale, similitudini, affinità).
Il collegamento con le trasformazioni può servire anche per determinare la matrice inversa. Questo porta ad esaminare il significato geometrico del determinante di una matrice.
È quindi evidente l'utilità delle matrici nella risoluzione di problemi legati alle trasformazioni. Si può riconoscere facilmente di che trasformazione si tratta, vedere subito se e come cambia l'area, determinare i punti uniti. Inoltre, quando si applica una trasformazione geometrica a una curva, è necessario invertire il relativo sistema: a tal fine è molto utile applicare la matrice inversa.
Infine l'utilizzo in geometria analitica delle trasformazioni offre l'opportunità di svolgere esercizi non banali, in particolare sulle coniche. Infatti permette di trovare equazioni di coniche non in forma normale e di riflettere sulle loro proprietà affini.

Possibili sviluppi
A riprova della versatilità dello strumento "matrice" vogliamo citare un'applicazione relativa al calcolo delle probabilità, e all'uso delle matrici di transizione.
Consideriamo una comunità divisa in occupati (O) e disoccupati (D). Da un'analisi statistica conosciamo le probabilità che, di settimana in settimana, un individuo passi da una classe all'altra, oppure resti nella stessa classe. Queste probabilità (in tutto sono 4: O→O, O→D, D→O, D→D) sono descritte da un oggetto solo, una matrice 2×2, per esempio

$$A=\begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}15\\0{,}1 & 0{,}85\end{bmatrix}$$

i cui elementi hanno il seguente significato:
- a_{11}: il 90% degli occupati al tempo 0 resta occupato al tempo 1
- a_{21}: il 10% degli occupati al tempo 0 diventa disoccupato al tempo 1
- a_{12}: il 15% dei disoccupati al tempo 0 diventa occupato al tempo 1
- a_{22}: il 85% dei disoccupati al tempo 0 resta disoccupato al tempo 1

Una matrice come questa, in cui la somma degli elementi su ciascun vettore colonna è 1, si dice *matrice di probabilità*, o *matrice stocastica*. Descrive un insieme chiuso, in cui un individuo non può uscire né entrare.
Supponiamo ora che al tempo 0 la suddivisione nella comunità analizzata sia di 900 occupati e 100 disoccupati, cioè che il *vettore di stato* al tempo 1 sia

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 900 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Allora il prodotto tra la matrice di probabilità e il vettore di stato

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 900 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 825 \\ 175 \end{bmatrix}$$

fornisce la situazione al tempo 1: 825 occupati e 175 disoccupati. Se la matrice di probabilità resta costante nel tempo allora possiamo costruire una successione di vettori di stato, definita dalla relazione

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n.$$

Problemi associati:

1) Se al tempo n il vettore di stato è $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 800 \\ 200 \end{bmatrix}$, qual era il vettore di stato al tempo $n - 1$?

2) Data la matrice di transizione A, a quale vettore di stato evolve il sistema?

3) Se consideriamo ogni settimana nuove entrate nella popolazione, descritte dal vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 55 \\ 45 \end{bmatrix}$ allora il modello cambia nel seguente modo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}.$$

A quale vettore di stato evolve il sistema?

Numeri complessi, vettori e trasformazioni geometriche del piano

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. Utilizzare strutture più complesse come vettori, liste, matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi. Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate.	La struttura dei numeri complessi e il teorema fondamentale dell'algebra. Matrici e sistemi di equazioni lineari. Matrici e trasformazioni lineari. Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure Argomentare, congetturare e dimostrare	Fisica Elettrotecnica

Contesto
Trasformazioni geometriche.

Il contesto dell'attività è lo studio dei numeri complessi come ponte tra l'algebra e la geometria, in particolare per quanto riguarda il legame delle operazioni con i numeri complessi e le trasformazioni geometriche del piano.

Descrizione dell'attività
Questa attività di approfondimento può essere proposta come collegamento tra vari temi sviluppati negli anni precedenti. Ha come prerequisiti la conoscenza dell'algebra, della geometria analitica e della trigonometria, dei vettori e delle trasformazioni geometriche del piano. Il linguaggio dei numeri complessi è usato nelle applicazioni, ad esempio in elettrotecnica - indicando di solito l'unità immaginaria con j invece che con i, per non confonderla con l'intensità di corrente – e offre un esempio notevole di un tema particolarmente adatto a collegare l'algebra con la geometria.
Nella presentazione dei numeri complessi, oltre che della forma cartesiana, è particolarmente significativo avvalersi dell'uso delle coordinate polari. La presentazione sarà accompagnata da numerose e varie applicazioni; ad esempio le radici dell'unità possono essere collegate con il problema di inscrivere un poligono regolare di n lati in una circonferenza.
Inizialmente si forniranno alla classe alcune informazioni di carattere storico mostrando anche alcune applicazioni dei numeri complessi in matematica e in fisica. Indubbiamente per poter svolgere questo argomento occorre che gli studenti abbiano un'adeguata conoscenza delle funzioni goniometriche e delle funzioni esponenziali oltre che dell'algebra e della geometria analitica. Gli obiettivi specifici da perseguire con questa attività di approfondimento possono essere così schematizzati:
- Conoscere la relazione tra vettori e numeri complessi
- Sapere rappresentare un numero complesso in modo vettoriale
- Saper riconoscere i numeri complessi, e in particolare l'unità immaginaria, come particolari "operatori" nelle trasformazioni geometriche del piano
- Sapere usare le diverse rappresentazioni dei numeri complessi e le relative proprietà.

I contenuti possono essere presentati in classe utilizzando la rappresentazione grafica dei numeri complessi, con strumenti di calcolo - come le calcolatrici grafico-simbolico - oltre a software di geometria e di manipolazione simbolica. Mediante la visualizzazione dei concetti, l'uso delle tecnologie permette un apprendimento più motivante e rafforza negli allievi l'esperienza concreta su questi "oggetti matematici", permettendo in seguito di consolidare una conoscenza più approfondita del significato di questi nuovi numeri. L'utilizzo del software è motivato inoltre dalla necessità che gli allievi affrontino in modo personale e attivo le varie fasi di studio in attività di laboratorio.

Prima fase

La risoluzione di equazioni è una parte fondamentale della matematica anche dal punto di vista storico. Si possono presentare in classe, in modo sintetico, alcuni aspetti della nascita dell'algebra classica che si può collocare nel XVI secolo. All'inizio del Cinquecento in Italia il Rinascimento è in pieno sviluppo e anche la matematica occupa un posto di rilievo in questo emergere di nuove idee. È da ricordare a questo proposito la notevole concentrazione di eminenti matematici italiani e stranieri nell'Università di Bologna, dove, a breve distanza di tempo, insegnarono Luca Pacioli, Scipione Dal Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli e numerosi altri. La fama di tali maestri attirava centinaia di allievi da oltralpe.

La risoluzione delle equazioni di secondo grado con il metodo di "completamento del quadrato" era nota sin dai tempi dei Babilonesi. In Euclide questi problemi sono affrontati sotto forma geometrica (nel libro II degli *Elementi*). L'equazione cubica, se si eccettuano dei casi particolari, aveva fino ad allora sfidato i matematici. Nella soluzione delle equazioni di terzo grado si erano cimentati molti matematici greci e arabi fin dai tempi di Archimede, ma essi erano arrivati solo a risolvere dei casi particolari, senza riuscire a trovare un metodo generale.

Scipione Dal Ferro (1465-1526), professore di matematica a Bologna, riuscì a risolvere le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ intorno al 1500; egli però non pubblicò il suo metodo risolutivo in quanto in tale periodo le scoperte venivano spesso tenute nascoste per poi sfidare i rivali a risolvere lo stesso problema.

Tale metodo fu rivelato dallo stesso Scipione Dal Ferro, alla fine della sua vita, ad un suo allievo, Antonio Maria Fior. Anche Tartaglia (soprannome di Nicolò Fontana, 1500?-1559), sembra in modo indipendente, aveva trovato un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + px = q$ e $x^3 + px^2 = q$ con p e q positivi. Nel 1535 fu quindi organizzata una sfida matematica tra Fior e Tartaglia. Ognuno dei contendenti propose 30 problemi che l'avversario doveva risolvere. Tartaglia risolse tutti i trenta problemi proposti da Fior, mentre Fior non riuscì a risolvere nemmeno uno dei trenta posti da Tartaglia. La notizia della brillante vittoria di Tartaglia nella sfida raggiunse Girolamo Cardano (1501-1576). Tartaglia, date le insistenze di Cardano, finì per rivelargli il suo metodo, in cambio della solenne promessa di Cardano di mantenere tale metodo segreto. Nonostante questo impegno Cardano pubblicò la sua versione del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado nella sua opera *Ars Magna* (Norimberga 1545). Lo stile di Cardano è piuttosto oscuro e la sua algebra è ancora allo stato retorico: le equazioni vengono espresse quasi completamente a parole. Tuttavia, scrivendo con il linguaggio di oggi la soluzione che Cardano fornisce dell'equazione cubica del tipo $x^3 + px = q$, si ottiene la formula seguente:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

e quella dell'equazione cubica del tipo $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

Sulla contesa tra Cardano e Tartaglia per la priorità del procedimento si è scritto molto; tuttavia è stato stabilito che il primo a trovare il metodo risolutivo per le equazioni di terzo grado è stato Scipione Dal Ferro nel 1515. In effetti Dal Ferro fu indicato proprio da Cardano nella prima pagina dell'*Ars Magna* come uno degli autori della scoperta.
La formula risolutiva delle equazioni di quarto grado fu scoperta da Ludovico Ferrari (1522-1565). Anche queste formule furono pubblicate nell'*Ars Magna* e Cardano attribuisce a Ferrari il metodo.
Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri, fu Rafael Bombelli (1526-1573), matematico bolognese (nato a Borgo Panigale).
Bombelli, nella sua opera *L'Algebra*, il cui titolo completo è *L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (composta verso il 1560, ma stampata in parte solo nel 1572) raccolse e completò i risultati ottenuti in campo algebrico della prima metà del Cinquecento da diversi matematici; si propose cioè di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso *irriducibile*, cioè quando, nella formula di Cardano, si presenta la radice quadrata di un numero negativo

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Nell'*Algebra*, Bombelli si occupò del calcolo con potenze e con radici e di equazioni algebriche. A lui si deve inoltre l'introduzione degli esponenti per indicare le potenze dell'incognita. Nel libro I dell'*Algebra* Bombelli prese in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama "*quantità silvestri*", e giunse ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo "complessi". Bombelli introdusse i termini *più di meno* e *meno di meno*, per indicare + *i* e - *i*, che abbreviava nelle scritture *pdm* e *mdm*.
Bombelli stabilì le leggi formali di calcolo dei nuovi numeri, successivamente chiamati *immaginari* da Cartesio, per indicare delle soluzioni considerate fittizie e irreali, né vere né "surde" (negative).
Nell'*Algebra* di Bombelli troviamo la corretta trattazione di alcune equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, Dal Ferro e Tartaglia, portano a radicali doppi coinvolgenti quantità non reali. Ad esempio, viene data la soluzione dell'equazione $x^3 = 15x + 4$ tramite la formula "di Cardano":

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}.$$

Si ottiene la somma di due radicali doppi, con radicando negativo, mentre già si sapeva, per sostituzione diretta, che $x = 4$ era l'unica radice positiva dell'equazione.

Bombelli provò che si può scrivere: $(i \pm 2)^3 = 11i \pm 2$ e quindi si poteva concludere trovando la soluzione (già nota a priori):

$$x = \sqrt[3]{11i + 2} - \sqrt[3]{11i - 2} = i + 2 - (i - 2) = 4.$$

Bombelli ha quindi il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le regole di calcolo con essi, oltre a quello di aver svolto la teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo e risolvendo tutti i casi che si possono presentare, mentre Cardano e Ferrari non sviluppano una teoria completa.

Dopo Tartaglia e Cardano per quasi due secoli si studiarono le equazioni di 5° grado e di grado superiore, ma tutti i vari tentativi fatti per risolverle in modo analogo a quelle di 2°, 3° e 4° grado non portarono ad alcun risultato. Nel 1799, nella sua tesi di laurea, Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) dette una prima dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra*:

Ogni equazione algebrica di grado n ha almeno una radice nel campo complesso, sia che i coefficienti siano reali o complessi.

Partendo da questo risultato, utilizzando il teorema di Ruffini, si dimostra che ogni polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi si scompone in un prodotto di n fattori alcuni dei quali sono eventualmente ripetuti:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdot ....(z-\alpha_n).$$

Tuttavia, dopo i lavori di Gauss, rimaneva ancora aperta la questione se era possibile risolvere "per radicali" le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. La risposta venne data da Paolo Ruffini (1765-1822) e Niels H. Abel (1802-1829) in uno dei più celebri teoremi della matematica (detto di Ruffini-Abel): *per $n > 4$ non si può fornire, in generale, una formula risolutiva per radicali delle equazioni algebriche.*

Sebbene i numeri complessi siano stati originariamente introdotti per risolvere le equazioni algebriche di 3° grado, essi sono stati poi ampiamente utilizzati nelle applicazioni, in particolare in fisica e in ingegneria. Un ingegnere elettrotecnico americano di origine tedesca, Charles P. Steinmetz (1865-1923), alla fine dell'Ottocento sviluppò la teoria delle correnti alternate basandosi sui numeri complessi. Perciò è stato detto che Steinmetz "ha prodotto elettricità tramite i numeri complessi".

<u>Seconda fase</u>

Nella premessa storica si è accennato al motivo per cui Cartesio ha chiamato questi numeri "immaginari". Si comprende quindi perché, nell'Ottocento, gli altri numeri sono stati chiamati "reali". Storicamente, quindi, prima è nato il termine "numeri immaginari" e poi, più di due secoli dopo, quello di "numeri reali". Nell'insegnamento, tuttavia, lo studio almeno intuitivo dei numeri reali precede quello dei numeri complessi.

Chiediamoci quindi: perché ampliare i numeri reali?

Come sappiamo, l'insieme dei numeri reali R, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione possiede una serie di proprietà che lo rendono un campo, cioè un corpo commutativo; è inoltre dotato di una relazione d'ordine che è compatibile con tale struttura algebrica ed è continuo. Tutte queste proprietà permettono di affrontare e risolvere in R una vastissima classe di problemi affrontati nella scuola secondaria superiore e oltre. Eppure, nonostante questa grande ricchezza della struttura algebrica (oltre a quella d'ordine e topologica) l'insieme R può rivelarsi "insufficiente" in alcuni problemi particolari: per esempio, le equazioni:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$e^x + 1 = 0$$

non ammettono alcuna soluzione in R.

Appare quindi logico tentare un "ampliamento algebrico" di R, in modo da ottenere, se possibile, un insieme in cui alcuni di questi problemi possano essere risolti; questo insieme esiste e si indica con ***C***. Storicamente comunque la motivazione essenziale per l'introduzione dei numeri complessi è stata la risoluzione delle equazioni di 3° grado.

La più semplice rappresentazione di un numero complesso è quella algebrica: $z = x + iy$. I due numeri reali x e y sono rispettivamente detti *parte reale* e *coefficiente della parte immaginaria* del numero complesso considerato. Il prodotto iy è detto *parte immaginaria* di $x + iy$; talvolta si indica direttamente il numero reale y come *parte immaginaria* di $x + iy$. Più correttamente, ma in modo formale, un numero complesso deve essere definito come una coppia ordinata di numeri reali

(x, y). Con tale scrittura, più astratta, occorre dare la definizione di uguaglianza tra due numeri complessi e introdurre l'unità immaginaria *i*, identificandola con la coppia (0,1).
E' utile definire a questo punto anche il numero complesso coniugato di un numero $z = a + ib$ come quel numero complesso, indicato con $\overline{z}$, che ha la stessa parte reale di *z* e parte immaginaria opposta: $\overline{z} = a - ib$. Si definiscono poi le operazioni di addizione e moltiplicazione. Si rivedono sinteticamente le definizioni e le proprietà delle operazioni.
Addizione in ***C*** (legge di composizione interna a ***C***)**:**
$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro ($0+i0$) che si può indicare con il simbolo 0.
- Ogni elemento $z = a + ib$ ammette in ***C*** un "simmetrico" rispetto all'addizione ($-z = -a - ib$) che si chiama *opposto* di $a + ib$.

Moltiplicazione in ***C*** (legge di composizione interna a ***C***)**:**
$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$
Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro ($1+i0$) che si può indicare con il simbolo 1.
- Ogni elemento $z = a + ib$, con *a* e *b* non contemporaneamente nulli, ammette in ***C*** un "simmetrico" rispetto alla moltiplicazione, che si chiama reciproco di $a + ib$, dato da:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Tra addizione e moltiplicazione esiste una "regola di convivenza", ovvero la *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*: $(u+v)\cdot z = u\cdot z + v\cdot z$.

Con queste operazioni e proprietà l'insieme ***C*** si dice essere un *campo*. La sottrazione in ***C*** è introdotta grazie alla presenza dell'opposto di un numero complesso, ma si tratta di un'operazione poco interessante; la "vera" operazione è l'addizione. Analogo discorso per la divisione in C. La divisione in C è introdotta grazie alla presenza del reciproco di un numero complesso (non nullo). La scrittura $\frac{a+ib}{c+id}$ (con *c* e *d* non entrambi nulli) indica il seguente prodotto: $(a+ib)\cdot\frac{1}{c+id}$.

*Analogie e differenze tra **R** e **C**.* Con le operazioni di addizione e moltiplicazione ***R*** e ***C*** sono entrambi campi, con le stesse proprietà elencate in precedenza, ma *in **C** non è possibile definire alcuna relazione di ordine compatibile con la struttura algebrica di **C**.*
La rappresentazione algebrica dei numeri complessi permette anche di definire la potenza di un numero complesso, ma tale definizione si rivela scomoda per questa operazione e ancor di più se si vuole affrontare il problema di trovare le radici di un numero complesso.

Il piano di Gauss e la rappresentazione cartesiana dei numeri complessi. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi x e y, e un numero complesso $z = x + iy$, i numeri reali *x* e *y* si possono interpretare come coordinate cartesiane del punto P, detto "affissa" o "indice" di *z* rispetto alle rette OU e OV.

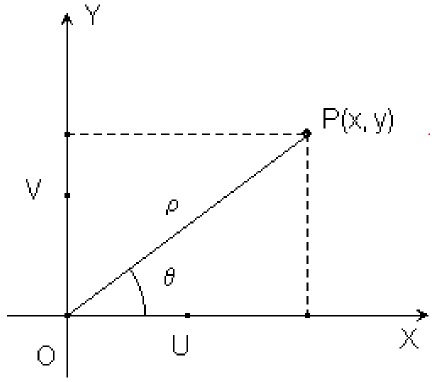


Figura 1

Si osserva che $z = x + iy$. Il piano ottenuto si chiama piano di (Argand-) Gauss. Viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi. L'asse delle ascisse viene anche chiamato asse reale e quello delle ordinate asse immaginario. Dal punto di vista geometrico il modulo $|z|$ di un numero complesso rappresenta la distanza del punto P dall'origine. Il valore assoluto della differenza tra due numeri complessi $|z_1 - z_2|$ rappresenta la distanza dei punti che rappresentano i numeri z_1 e z_2. Il numero $\overline{z} = x - iy$ è rappresentato geometricamente dal simmetrico di P rispetto all'asse delle *x*.
Con l'uso della rappresentazione geometrica dei numeri complessi è possibile proporre molti esercizi e problemi che collegano la geometria con i numeri complessi.

Rappresentazione trigonometrica (o polare) dei numeri complessi. Le osservazioni precedenti permettono di scrivere il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = \overrightarrow{OP} = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ si chiama *modulo* del numero complesso *z* e l'angolo θ si chiama anomalia o *argomento* del numero complesso. Quindi si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Il modulo ρ è la distanza tra il punto P e l'origine degli assi e l'anomalia θ è l'angolo formato tra il segmento OP e l'asse delle ascisse. Mentre il numero ρ è univocamente determinato, l'argomento θ è determinato a meno di un multiplo (intero) di 2π.
La moltiplicazione di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica diventa particolarmente significativa. Si ha: $z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
che fornisce: $z = \rho_1\rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$. Quindi i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.
Analogamente, il risultato della divisione tra due numeri complessi ($z_2 \neq 0$) espressi in forma trigonometrica, diviene:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Si deve fare dunque il quoziente tra i moduli e la sottrazione tra gli argomenti. Quindi i moduli hanno una struttura moltiplicativa e gli argomenti una struttura additiva.
Sfruttando la formula della moltiplicazione, si può dimostrare per induzione la formula per calcolare la potenza con esponente intero di un numero complesso, detta *formula di De Moivre* (Abraham De Moivre, 1667-1754). Se $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, la potenza è data da

$$w = z^n = \rho^n \cdot \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right].$$

Quest'ultima formula permette di determinare la potenza di un numero complesso in modo più facile rispetto al calcolo della potenza in forma algebrica.

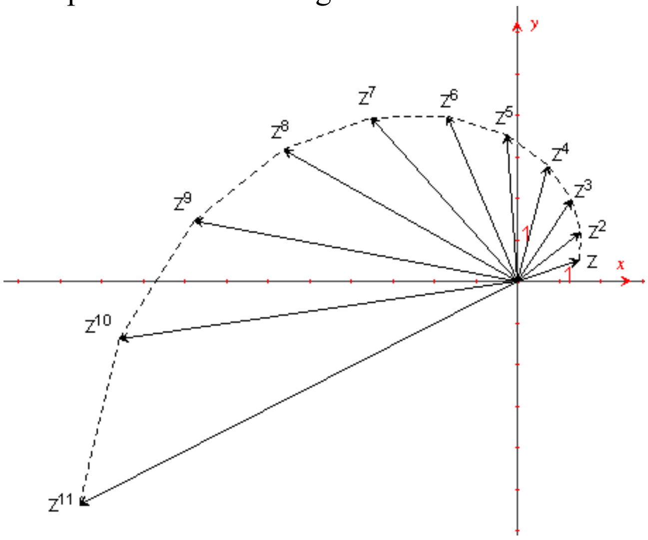


Figura 2

Utilizzando la formula di De Moivre si può dimostrare che ogni numero complesso non nullo z e per ogni numero naturale *n,* esistono *n* radici *n*-esime di *z,* ovvero esistono *n* numeri complessi *w* tali che $w^n = z$. Se $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, allora si dimostra che le radici *n*-esime di z sono date dalla formula seguente:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \text{ con } k= 0, 1, 2,\ldots,\ n-1.$$

Se rappresentiamo tali radici nel piano complesso si ottengono i vertici di un poligono regolare di *n* lati inscritto in una circonferenza di centro l'origine degli assi O e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Ad esempio le radici quinte del numero −32 sono rappresentate dai vertici del pentagono regolare della figura seguente.

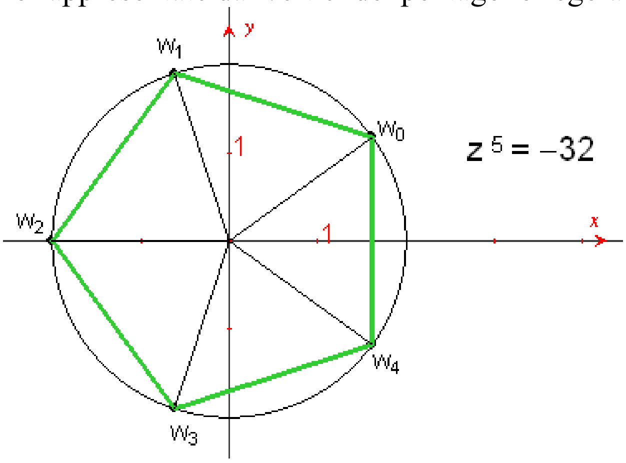


Figura 3

Quindi possiamo concludere che: *ogni numero complesso* $z \neq 0$ *ammette n radici n-esime distinte.* Nel caso particolare in cui z=1, si ottengono le radici *n*-esime dell'unità:

$$\varepsilon_{k,n} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ con } k= 0, 1, 2,\ldots,\ n-1.$$

Esse hanno tutte modulo 1 e argomento che è un multiplo di $2\pi / n$ e le loro immagini nel piano di Argand-Gauss sono date dai vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine degli assi e di raggio 1.

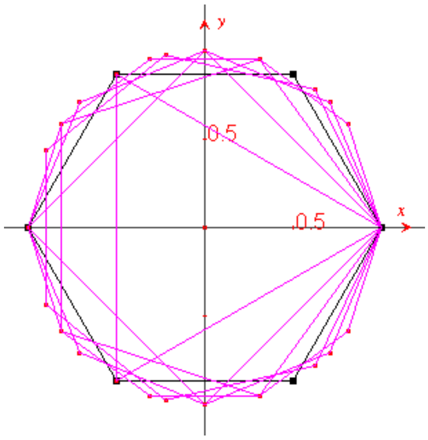


Figura 4

Una delle radici n-esime è 1 (per ogni n); tutte le altre si ottengono da una potenza della radice (ottenuta per $k = 1$):

$$\varepsilon_{1,n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Le usuali regole per il calcolo dei radicali devono essere riviste nel campo complesso. Ad esempio vale la seguente regola $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$, ma non vale nell'ordine inverso; si può soltanto scrivere, nel senso della teoria degli insiemi, $z \in \left\{\sqrt[n]{z^n}\right\}$.

<u>Terza fase</u>

Un altro modo di rappresentare i numeri complessi, che può essere proposto in questa attività di approfondimento, è quello vettoriale. In questa rappresentazione dei numeri complessi si considerano i vettori applicati nell'origine del piano. Si fissa nel piano l'usuale verso antiorario come verso positivo delle rotazioni. Si fissa anche un vettore unitario di riferimento. Possiamo chiamare *piano complesso* un piano in cui sono fissati:

1) un punto origine O;
2) un vettore non nullo $\overrightarrow{OU}$ (vettore unitario);
3) il verso positivo delle rotazioni attorno al punto O (origine).

Se si moltiplica un qualunque vettore $\overrightarrow{OA}$ per un numero reale non negativo ρ, e si ruota il vettore $\overrightarrow{OP}$ ottenuto attorno all'origine O di un angolo orientato θ (in radianti), si ottiene il vettore $\overrightarrow{OB}$.

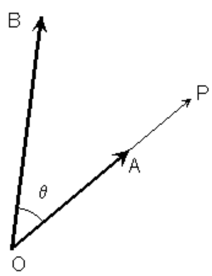


Figura 5

Possiamo quindi identificare un numero complesso, di modulo ρ e argomento θ, con un operatore che ad ogni vettore applicato nell'origine $\overrightarrow{OA}$ associa il vettore $\overrightarrow{OB}$ ottenuto nel modo detto. Un numero complesso *z* è dunque un operatore nel piano complesso che a ogni vettore $\overrightarrow{OA}$ fa corrispondere un vettore $\overrightarrow{OB}$:

$$z: \quad C \longrightarrow C$$
$$z: \quad \overrightarrow{OA} \longrightarrow \overrightarrow{OB}$$

Possiamo scrivere che $\overrightarrow{OB} = z \cdot \overrightarrow{OA}$.
Un numero complesso è quindi costituito da una coppia di elementi, così formata:

- il primo elemento è un numero reale non negativo ρ che indica la "dilatazione" (o "contrazione") del modulo del vettore a cui è applicato *z*; il numero ρ determina una omotetia di centro l'origine O;
- il secondo è un numero reale qualunque θ che indica il verso e la misura (in radianti) della rotazione che il vettore iniziale deve effettuare attorno all'origine degli assi O.

In sostanza, questa definizione identifica il prodotto per un numero complesso con una *roto-omotetia*, ovvero con la composizione di un'omotetia di rapporto ρ e centro *O* (origine degli assi) e di una rotazione attorno all'origine di un angolo θ. Tale definizione è del tutto equivalente a quella polare di un numero complesso.
In coerenza con quanto detto in precedenza, due numeri complessi si diranno uguali se hanno moduli uguali e argomenti che differiscono per un multiplo intero di 2π. In questa interpretazione, il modulo di un numero complesso è la lunghezza del vettore $\overrightarrow{OP}$ che rappresenta il numero complesso *z*.
Si può poi procedere ridefinendo la somma di due numeri complessi, il prodotto, la potenza e il quoziente. L'addizione, in particolare, coincide con la "regola del parallelogramma" per determinare la somma di due vettori.

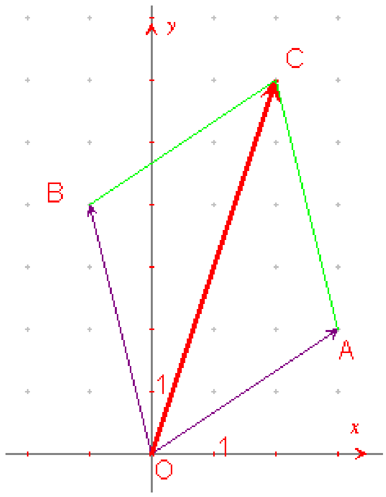


Figura 6

Fissato un numero complesso $z_0 = a + ib$, allora la somma di z_0 con un numero complesso $z = x + iy$ equivale a traslare il punto P(*x*, *y*) di un vettore $\overrightarrow{OP}$ di componenti (*a*, *b*). Sinteticamente possiamo dire che la trasformazione $T: z \longrightarrow z_0 + z$ è una traslazione del piano.
Per il prodotto si ottiene la regola già vista in precedenza: il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli e l'argomento è uguale alla somma degli argomenti. Si noti però che i vettori devono sempre essere applicati all'origine.
Se $\rho = 1$, un numero complesso u è rappresentato da un vettore unitario applicato nell'origine degli assi. In questo caso il numero complesso può essere scritto nel seguente modo:

$$u = \cos\theta + i \cdot \sin\theta\,.$$

Il prodotto di un generico numero complesso z per u determina una rotazione di angolo θ di centro l'origine O. Quindi la trasformazione $R:\ z \longrightarrow z \cdot u$ è una rotazione del piano di centro O.
Il numero complesso z_1, ridotto soltanto alla sua parte reale può essere scritto nel seguente modo:

$$z_1 = \rho\,.$$

Il prodotto di un generico numero complesso z per z_1 determina un'omotetia di centro l'origine O e di rapporto ρ. Quindi la trasformazione $H:\ z \longrightarrow \rho \cdot z$ è un'omotetia del piano di centro O.

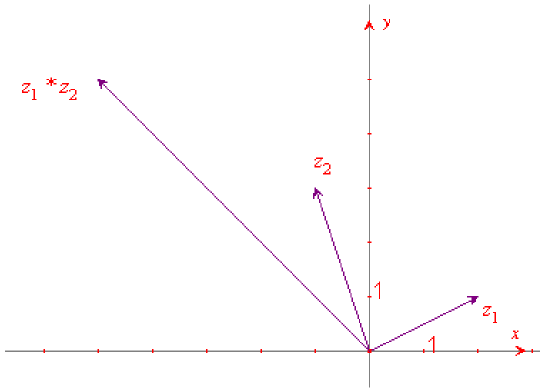


Figura 7

In questa rappresentazione è particolarmente interessante il ruolo dell'unità immaginaria *i*, che può essere interpretata come una rotazione in senso antiorario di un angolo retto attorno all'origine.
Questa interpretazione dei numeri complessi stabilisce un legame molto interessante tra numeri complessi e le trasformazioni geometriche del piano ed ha molte applicazioni in matematica oltre che in fisica e nell'elettrotecnica, in particolare nell'analisi dei circuiti elettrici in corrente alternata.

Trasformazione del piano	*Numero complesso che definisce la trasformazione*	*Applicazione di **C** in **C***
Traslazione	$z_0 = a + ib$	$T:\ z \longrightarrow z + z_0$
Rotazione di centro *O*	$u = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$	$R:\ z \longrightarrow z \cdot u$
Omotetia di centro *O*	$w = \rho,\ \rho \in R_0^+$	$H:\ z \longrightarrow \rho \cdot z$
Roto-omotetia di centro *O*	$w = \rho(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$	$W:\ z \longrightarrow z \cdot w$
Simmetria assiale di asse *x*		$S:\ z \longrightarrow \bar{z}$
Simmetria centrale rispetto a *O*	$w = -1$	$S:\ z \longrightarrow -z$
Rotazione di 90° di centro *O* con verso antiorario	$w = i$	$S:\ z \longrightarrow i \cdot z$

Sarà tuttavia importante far notare agli studenti che vi è un limite alla rappresentazione dei numeri complessi come vettori applicati nell'origine. Mentre l'addizione ha una perfetta analogia con la somma di vettori (applicati in *O*), la moltiplicazione non possiede analogie con il prodotto scalare e il prodotto vettoriale. La moltiplicazione di numeri complessi è un'operazione che restituisce un numero complesso; è quindi un'operazione che si chiama "interna" in quanto si ottiene un elemento che è ancora un numero complesso. Nell'insieme dei vettori è invece definito il prodotto scalare, che non è un'operazione interna: il prodotto scalare di due vettori è un numero e non un vettore. Nell'insieme dei vettori del piano è anche definito il prodotto vettoriale di due vettori, che è un vettore, ma tale vettore non appartiene al piano.

Quarta fase

I numeri complessi si possono rappresentare anche in forma esponenziale e questo tipo di rappresentazione è una delle più interessanti dal punto di vista applicativo, ma non semplice da introdurre nella scuola secondaria superiore. In questa rappresentazione si sfruttano le proprietà della funzione esponenziale per rendere più veloci i calcoli con i numeri complessi. La rappresentazione è basata sulla seguente definizione (ricavata dallo sviluppo in serie delle funzioni seno e coseno) valida per un numero complesso di modulo unitario:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

Generalizzando si definisce:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Queste idee e notazioni sono state introdotte da Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783). Si possono ricordare inoltre le formule di Eulero:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ e } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

che introducono un legame inaspettato tra le funzioni trigonometriche e quelle esponenziali nel campo complesso. In questo contesto è opportuno ricordare la "più bella equazione della matematica", trovata anch'essa da Eulero, che stabilisce una relazione tra le cinque più importanti costanti della matematica (0, 1, π, *e*, *i*):

$$e^{i\pi} + 1 = 0 .$$

Dato un numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$, possiamo dare una interpretazione geometrica al prodotto $ze^{i\alpha}$. Si ottiene: $ze^{i\alpha} = \rho e^{i\theta}e^{i\alpha} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$. La figura seguente suggerisce che tale moltiplicazione determina una rotazione del vettore $\overrightarrow{OA}$ che rappresenta il numero *z*, di un angolo α in senso antiorario (se α>0).

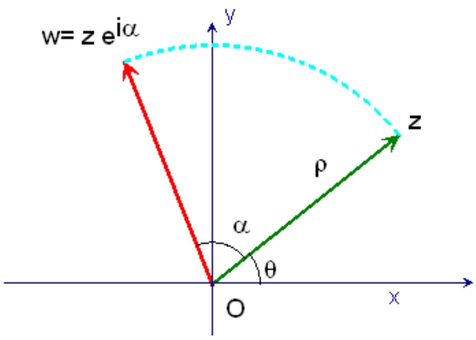


Figura 8

Si può dunque pensare al numero complesso $e^{i\theta}$ come un *operatore* che determina una rotazione attorno all'origine di un angolo α. Questo significato della moltiplicazione per un numero complesso di modulo unitario è particolarmente utile in tutte le applicazioni dei numeri complessi. Con questa interpretazione dei numeri complessi è facile allora spiegare l'equazione $e^{i\pi} + 1 = 0$. Il numero complesso $e^{i\pi} = -1$ perché rappresenta la rotazione del vettore 1 di un angolo π. Si ottiene dunque il numero complesso -1.

Elementi di prove di verifica

1. I vertici A, B e C di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$ e $z_3 = 1 + 6i$. Dimostrare che il triangolo ABC è isoscele e determinare il perimetro e l'area.
2. Descrivere e rappresentare i luoghi geometrici dei punti del piano rappresentati dalle seguenti equazioni e disequazioni:

   (a) $|z| = 2$ (b) $|z - i| = 1$ (c) $|z-2| + |z+2| = 6$ (d) $|z| \le 1$ (e) $|z-1| \ge 3$.
3. Disegnare le figure del piano rappresentate dalle seguenti equazioni:

   (a) $z \cdot \overline{z} = 9$ (b) $z + \overline{z} = 6$ (c) $\overline{z} = z + 6i$.
4. Risolvere l'equazione: $4z^2 - 2(1+i)z + i = 0$.
5. Risolvere l'equazione $z^3 + 27 = 0$ e rappresentare le soluzioni nel piano complesso.
6. Determinare tutte le radici complesse dell'equazione $z^4 + z^2 + 1 = 0$ e rappresentarle nel piano complesso.
7. Calcolare le radici nel campo complesso della seguente equazione: $z^6 + i = 0$. Rappresentare nel piano complesso le soluzioni. Trovare l'area e il perimetro del poligono ottenuto ed il raggio della circonferenza circoscritta.
8. Si consideri il numero complesso $z = 1 - i$. Calcolare z^5 e rappresentare nel piano le potenze z, z^2, z^3, z^4, z^5.

Affrontiamo l'infinito

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.		<u>Numeri e algoritmi</u>	Fisica Filosofia Arte
In casi semplici, determinare il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 (finito o infinito). Possedere il senso intuitivo di "limite di una successione". Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre.	Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Approfondimento del concetto di limite.	Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Laboratorio di matematica	

Contesto
Filosofia.

Questa attività si colloca nel contesto delle problematiche filosofiche, di particolare rilevanza storica, che costituiscono un punto di partenza per un approccio all'infinito.
L'attività, introdotta in una quinta classe, ha lo scopo di introdurre le problematiche relative all'infinito, richiamando vari concetti già affrontati negli anni precedenti.
Il punto di partenza è costituito dal classico paradosso di Achille e la tartaruga, presentato tramite la lettura di un testo di storia della filosofia che illustri il pensiero di Zenone, seguita da una proposta di lavoro che, attraverso l'analisi delle somme parziali, conduca a comprendere come la somma di infiniti termini possa essere finita.

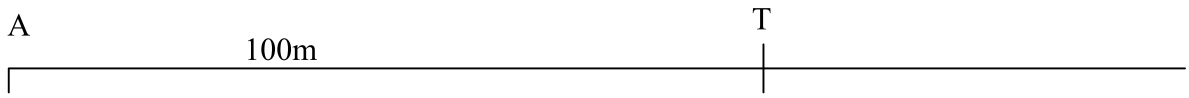
Descrizione dell'attività
L'attività consente di richiamare alcune conoscenze di filosofia e di matematica (successioni) apprese negli anni precedenti e di approfondirle con un approccio intuitivo al concetto di limite.

<u>Prima fase</u>
Si propone agli studenti la lettura del seguente brano:

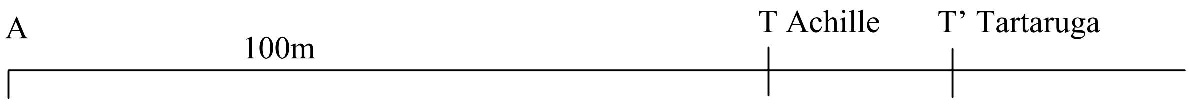
> *Zenone di Elea, allievo di Parmenide vissuto tra la fine del VI e l'inizio del V secolo, ci viene presentato dalla tradizione come un pugnace difensore delle idee del maestro. La teoria parmenidea dell'immutabilità, unità e indivisibilità dell'essere veniva attaccata in nome del "senso comune" che attesta invece la realtà del divenire, della molteplicità e della divisibilità. Zenone si propone di difendere la dottrina del maestro, dimostrando*

che se si assumono tesi contrarie a quelle eleatiche, da esse derivano conseguenze assurde.
Zenone avrebbe ideato quaranta paradossi - argomenti logicamente validi, le cui conclusioni vanno contro (parà) l'opinione comune (doxa) - a sostegno della teoria dell'unità e indivisibilità dell'essere, e quattro contro il movimento. Questi paradossi utilizzano una forma di dimostrazione, quella per assurdo, che consiste nell'assumere provvisoriamente un'ipotesi, nello svolgerla logicamente, fino a dedurne una contraddizione, un assurdo appunto. La conclusione, che è necessariamente falsa, prova che la stessa ipotesi iniziale deve essere tale, e permette così di stabilire la validità dell'opinione contraria. Per il ricorso a questo tipo di argomentazione, Zenone fu definito "inventore della dialettica", intesa come "arte della confutazione".

<u>Seconda fase</u>
Dopo la lettura del brano l'insegnante propone agli studenti il paradosso di Achille e la tartaruga.
Achille e la Tartaruga si sfidano ad una gara di corsa lungo un percorso rettilineo da A verso destra.



Achille è ben noto come Piè Veloce, mentre la Tartaruga ha come peculiarità la lentezza. Entrambi stabiliscono, perciò che la Tartaruga parta da T con un vantaggio di 100 m; al via entrambi i concorrenti partono; Achille vincerà la gara se riuscirà a raggiungere la Tartaruga.
Achille corre 10 volte più veloce della Tartaruga e quindi in breve tempo giungerà da A (punto di partenza di Achille) in T (punto di partenza della Tartaruga); ma in quel periodo di tempo, per quanto lentamente, la Tartaruga avrà compiuto un tratto di strada da T a T' pari a 10 m



Achille non si ferma e prosegue la corsa, "volando" oltre T verso T'; in un battibaleno giunge in T', ma in quel periodo di tempo che è servito ad Achille a compiere lo spostamento TT', la Tartaruga avrà compiuto il tragitto T'T", pari a 1 m.
La corsa prosegue; ad ogni percorso rapidamente effettuato da Achille, la Tartaruga compie un percorso che è sì la decima parte di quello di Achille, ma che tuttavia è pur sempre maggiore di zero.
Achille dunque raggiungerà la Tartaruga?
Per risolvere il paradosso l'insegnante invita gli studenti a svolgere la seguente attività, eventualmente utilizzando una calcolatrice grafico-simbolica:

1. Costruire un'espressione che permetta di esprimere la distanza percorsa da Achille.
2. Calcolare le prime quattro somme finite parziali S_1, S_2, S_3 e S_4 e la somma dei primi n termini S_n.
3. Tracciare il grafico della successione S_n. Che andamento presenta?
4. Calcolare la somma S_∞ degli infiniti termini.

L'insegnante sollecita una discussione tra gli studenti per cercare di capire quando una somma di infiniti termini possa dare un risultato finito.

Per raggiungere la tartaruga Achille deve percorrere infiniti tratti rettilinei, la cui lunghezza in metri è:

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...+\frac{1}{10^n}+...=100\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...+\frac{1}{10^n}+...\right)$$

Costruiamo la successione che rappresenta le somme parziali dell'espressione indicata in parentesi:

$S_1=1$ 1° termine

$S_2=1+\frac{1}{10}$ somma del 1° e 2° termine

$S_3=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ somma del 1°, 2° e 3° termine

$S_4=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ somma del 1°, 2°, 3° e 4° termine

.

.

$S_n=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+........+\frac{1}{10^{n-1}}$ somma del 1°, 2°, 3°, 4°, …..ed n-esimo termine.

Moltiplicando la S_n per $\frac{1}{10}$ si ottiene:

$$\frac{1}{10}S_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+........+\frac{1}{10^n}$$

e sottraendo il risultato a S_n si ha:

$$S_n-\frac{1}{10}S_n=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+........+\frac{1}{10^{n-1}}-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+........+\frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^n}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)S_n=1-\frac{1}{10^n}$$

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$$

Abbiamo ottenuto l'espressione che permette di calcolare il valore della somma dei primi *n* termini della successione (al variare di *n* appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi).

Come diventa S_n se *n* "*tende all'infinito*"? L'espressione $\frac{1}{10^n}$ diventa sempre più piccola, cioè "*tende a zero*" e quindi si può ritenere che S_n "*tenda a* $\frac{10}{9}$".

Possiamo concludere che Achille raggiungerà la tartaruga quando avrà percorso $100\cdot\frac{10}{9}$ metri, cioè $111,\overline{1}$ metri. La somma di infiniti termini può essere finita!

Terza fase

Le problematiche relative all'infinito possono essere ulteriormente approfondite con lo studio di una delle possibili approssimazioni di π scoperte da Eulero.
L'insegnante avrà l'opportunità di collocare storicamente Leonhard Euler (1707-1783), uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

Eulero scoprì la seguente formula:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

da cui si ottiene:

$$\pi = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots}$$

Anche in questo caso si tratta di una somma di infiniti termini che dà come risultato un numero finito.
L'insegnante propone agli studenti di calcolare i primi valori di tale approssimazione, evidenziando che la convergenza è comunque molto lenta.

Quarta fase
In collegamento con la storia dell'arte, dall'osservazione di alcuni quadri di M. C. Escher (1898-1972) [famoso grafico olandese del Novecento] si possono trarre ulteriori considerazioni relative all'infinito. In particolare l'insegnante propone agli studenti di osservare l'opera dal titolo "Limite del quadrato" dello stesso autore considerandone la struttura geometrica. Ogni lato del quadrato di partenza è sostituito con due quadrati di lato metà. Questa procedura viene successivamente iterata e permette all'artista di ripetere il motivo pittorico mantenendo le medesime proporzioni (si tratta infatti di una similitudine).

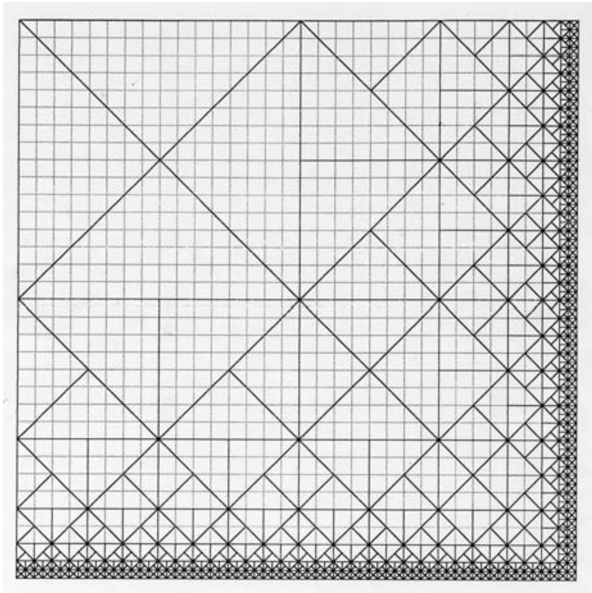


Figura 1

L'analisi della struttura darà l'opportunità di discutere sulle procedure utilizzate nell'opera e di illustrare, in collaborazione con il docente di storia dell'arte, la figura del pittore e la sua capacità di anticipare alcuni aspetti matematici che saranno scoperti solo in seguito. È il caso, per esempio, dei frattali, enti geometrici che possono essere definiti utilizzando procedure ricorsive.

Possibili sviluppi
La questione delle problematiche legate all'infinito si può approfondire presentando altri paradossi, che sono motivanti per gli studenti e ricchi di implicazioni epistemologiche e di opportunità di collegamenti interdisciplinari.
Un altro possibile sviluppo è quello della sistemazione degli insiemi numerici e dell'analisi della loro cardinalità. È opportuno affrontare tali questioni anche dal punto di vista storico mostrando le diverse tappe dell'evoluzione del concetto di infinito dai Greci a Cantor (cfr. *Probabilità nel continuo*, percorso di consolidamento Vari tipi di probabilità).

Elementi di prove di verifica

1. Cosa significa il termine paradosso?

2. In cosa consiste il paradosso di Zenone?

3. Spiega il significato della seguente scrittura:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=\frac{3}{2}$$

4. Calcola $\frac{1}{3}\cdot 3$ e $0,\overline{3}\cdot 3$. I risultati sono uguali? Giustifica la risposta.

Riferimenti bibliografici

Bussagli, M., (2004), *Escher*, Giunti, Firenze.

Cioffi, F.; Gallo, F.; Luppi, G.; Vigorelli, A.; Zanette, E., (1998), *Il testo filosofico. Storia della filosofia: autori, opere, problemi*, Bruno Mondadori, Milano.

Delahaye, J. P., (2003), *L'affascinante numero* π, Ghisetti e Corvi, Milano.

Lombardo-Radice, G.; Mancini-Proia, L. (1979), *Il metodo matematico*, vol.3, Principato, Milano.

Impedovo, M., (2005), *Matematica generale con il calcolatore*. Springer Verlag Italia, Milano.

SPAZIO e FIGURE

Elenco delle attività

Dalla geometria alle geometrie

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi. Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate. Analizzare le caratteristiche del V postulato di Euclide e conoscere la nascita delle geometrie non euclidee; conoscere nelle loro linee essenziali i modelli di geometria non euclidea (Beltrami-Klein, Poincaré, Riemann).	Geometria del cilindro e del cono. Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine). L'assioma della parallela nel sistema assiomatico di Euclide; i primi elementi delle geometrie non euclidee attraverso modelli.	Spazio e figure	Filosofia Fisica Storia dell'arte Disegno

Contesto
Modelli.

Il contesto è quello dei piani "non euclidei". L'attività, realizzata attraverso metodologie esplorative, propone un tema rilevante nello sviluppo della matematica e può anche essere utilizzato per approfondire la nozione di sistema ipotetico-deduttivo e di modello matematico.

Descrizione dell'attività
Gli strumenti di cui avvalersi come supporto all'attività didattica sono i software di geometria.
Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata della geometria euclidea, delle isometrie e delle similitudini.

Prima fase
Dopo aver presentato una sintesi degli *Elementi* di Euclide, sul suo contenuto e sulla struttura assiomatica, si rivisitano alcuni teoremi riguardanti la similitudine nel piano, in particolare quelli sulle tangenti e le secanti a una circonferenza, come introduzione allo studio dell'inversione circolare. Riportiamo l'enunciato di questi teoremi.
Teorema (della secante e della tangente). *Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante, il segmento di tangente è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi tra quel punto e le sue intersezioni con la circonferenza.*
Teorema (delle secanti). (a) *Se due corde in una circonferenza si intersecano, i loro segmenti sono in proporzione* (essendo estremi e medi della proporzione, rispettivamente, segmenti della stessa corda).
(b) *Se da un punto esterno si conducono due secanti ad una circonferenza, i segmenti di esse compresi fra codesto punto e le intersezioni con la circonferenza sono in proporzione* (essendo rispettivamente i medi e gli estremi della proporzione i segmenti appartenenti ad una stessa secante).

Si passa quindi allo studio elementare dell'inversione circolare con l'ausilio di un software di geometria, che mette a disposizione, accanto alle altre trasformazioni geometriche del piano, anche l'inversione circolare. Lo studio dell'inversione circolare è utile come introduzione al modello (del "disco") di piano iperbolico di Poincaré.
L'inversione circolare fornisce un interessante esempio di trasformazione geometrica che, almeno in generale, non trasforma rette in rette. Gli studenti conoscono già le isometrie, le similitudini e le affinità, sia dal punto di vista sintetico che analitico. L'inversione circolare del piano rispetto ad una circonferenza possiede alcune proprietà che hanno una qualche analogia con la simmetria assiale rispetto ad una retta nel piano. Le simmetrie assiali possono essere chiamate "inversioni" del piano rispetto ad una retta, così come le inversioni circolari si possono pensare, in prima approssimazione, come corrispondenze che a ogni punto esterno P a una circonferenza di centro O fanno corrispondere un punto P' ad essa interno - e viceversa - in modo che $OP \cdot OP' = R^2$, dove R è il raggio della circonferenza ω (Figura 1).

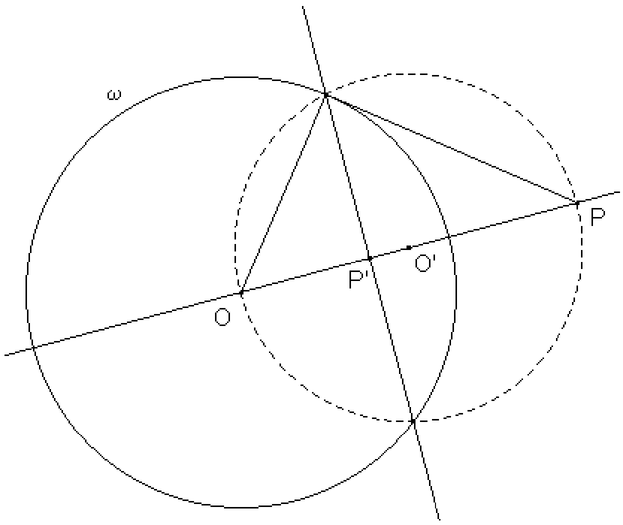


Figura 1

Con l'aiuto di un software di geometria si possono studiare in modo dinamico e interattivo le proprietà dell'inversione circolare. Tra le più importanti proprietà si possono ricordare le seguenti:
- i punti di ω si trasformano in se stessi
- le rette passanti per O si trasformano in se stesse
- le rette non passanti per O si trasformano in circonferenze per O e viceversa
- le circonferenze non passanti per O si trasformano in circonferenze.

Si può inoltre scoprire che l'inversione circolare, analogamente a quello che succede in una riflessione rispetto ad una retta nel piano, è una trasformazione che inverte l'ordinamento su una data curva chiusa. Usando un'animazione si vede ad esempio (Figura 2) che mentre P descrive una circonferenza con verso antiorario, il punto P' descrive la circonferenza immagine con verso orario.

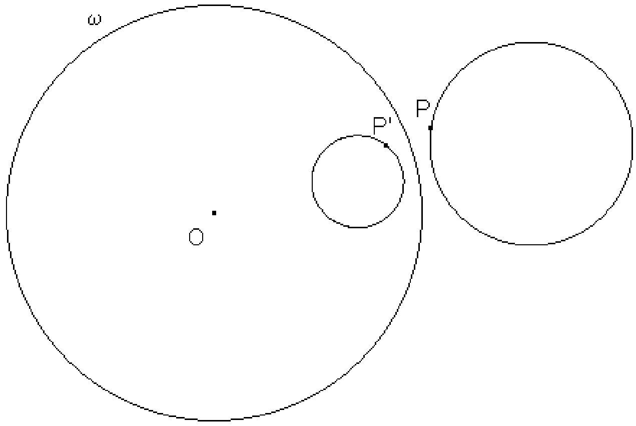


Figura 2

Si introduce ora la nozione di circonferenze ortogonali: *due circonferenze si dicono ortogonali se nei loro punti di intersezione le rette tangenti ad esse sono perpendicolari.*

Data una circonferenza *c* e due punti A, B interni ad essa, si presenta agli studenti la costruzione della circonferenza ortogonale a *c* passante per i due punti dati:

- inversione circolare del punto A rispetto alla circonferenza ω: si ottiene il punto A'
- asse del segmento AA' e asse del segmento AB; intersecando i due assi si ottiene il punto O';
- si traccia la circonferenza γ di centro O' e passante per A e B.

Dimostriamo che γ è ortogonale alla circonferenza ω (Figura 3). Chiamiamo *R* il raggio della circonferenza ω ed *r* il raggio della circonferenza γ. Poiché A e A' sono inversi rispetto a ω, si ottiene:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2 .$$

Analogamente si ha:

$$\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \left(\overline{OO'} + r\right) \cdot \left(\overline{OO'} - r\right) = R^2 .$$

Si ottiene pertanto:

$$\overline{OO'}^2 - r^2 = R^2 .$$

Osservando che $\overline{OT} = R$, si ottiene, $\overline{OO'}^2 - \overline{OT}^2 = R^2$, ovvero $\overline{OO'}^2 = \overline{OT}^2 + R^2$. Quindi il triangolo OO'T (per l'inverso del teorema di Pitagora) è un triangolo rettangolo e OT è perpendicolare O'T. La circonferenza ω è pertanto ortogonale alla circonferenza γ.

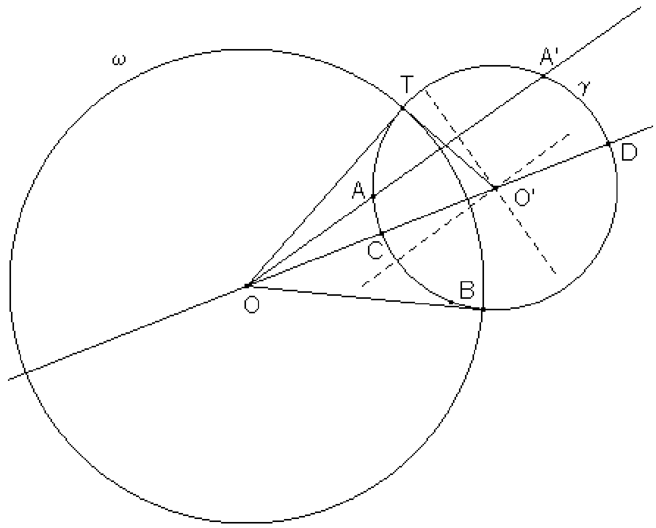


Figura 3

Successivamente si spiega come costruire l'arco di circonferenza ortogonale a *c* passante per i punti A e B. Quest'ultima costruzione viene trasformata in una macro usando questa caratteristica del software di geometria.

Seconda fase

Dopo lo studio elementare dell'inversione circolare si presenta il modello del "disco di Poincaré", utilizzando il software di geometria che permette di costruire un menu iperbolico ed effettuare esplorazioni nell'ambiente virtuale che si costruisce.

Supponiamo che il "piano" sia formato dalla regione Ω interna a un'assegnata circonferenza ω, che si dice *orizzonte* (Figura 4). Chiameremo tale regione il *piano di Poincaré* o "piano". Un punto di Ω è un *punto* del *piano di Poincaré* in questa nuova geometria. Le costruzioni, utilizzando il software, sono immediate. Si disegna una circonferenza ω, detta *orizzonte*, e si usa il menu iperbolico per disegnare la retta iperbolica per *A* e *B* e quella passante per *O* e *A*.

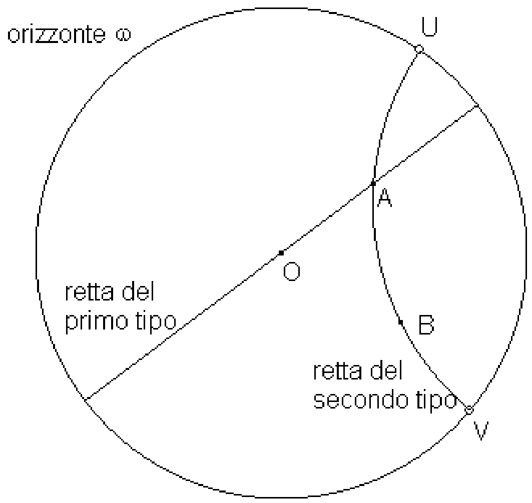


Figura 4

In questa geometria ci sono due tipi di *rette*:

a. i diametri del cerchio Ω che vengono dette *rette del primo tipo*;
b. gli archi di circonferenza ortogonali a ω, aventi gli estremi su ω, che vengono dette *rette del secondo tipo*.

L'incidenza tra *rette* in questa nuova geometria è definita in modo naturale, come intersezione tra archi ortogonali *all'orizzonte* o tra archi e diametri del cerchio.

I teoremi soliti della geometria euclidea del piano relativi all'incidenza tra rette valgono anche in questa nuova geometria. Poiché per due punti distinti *P* e *Q* passa sempre uno ed un solo diametro oppure una ed una sola circonferenza ortogonale all'*orizzonte* ω , possiamo affermare che:

per due "*punti*" distinti del *piano* passa una ed una sola "*retta*".

Dimostrare questa ultima proprietà può essere particolarmente interessante. Il caso in cui *P* e *Q* sono allineati con *O* è banale perché basta disegnare il diametro della circonferenza ω passante per *P* e *Q*.

Nel caso invece in cui *P* e *Q* siano due punti interni a ω non allineati con *O*, si può ricorrere alla costruzione dell'inverso circolare di uno dei due punti, ad esempio di *P*; il punto *P'* ottenuto è allineato con *O* e *P*; pertanto non è allineato con *O* e *Q*. Per quanto detto in precedenza a proposito della inversione circolare basta ora costruire la circonferenza γ passante per *P*, *Q* e *P'* (Figura 5). Tale circonferenza è unica e ortogonale a ω.

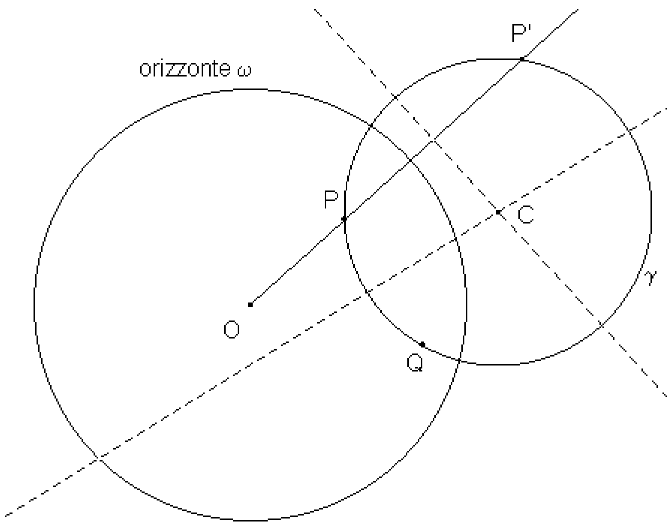


Figura 5

Definiamo l'*angolo* tra due *rette* come l'ordinario angolo della geometria euclidea, misurato nel solito modo, tra le rette tangenti alle due curve nel loro punto di intersezione.
Definiamo *segmento* l'insieme dei punti di una *retta* tra due *punti*. La relazione di "*compreso tra"* è la stessa della geometria euclidea.

Terza fase
Con il "menu iperbolico" messo a disposizione da un software di geometria è particolarmente facile fare esplorazioni sul comportamento delle rette. Si assegna una "retta" *AB* ed un punto *P* fuori di essa; si traccia una retta r per P; variando la posizione di *r* si osserva che per questo punto *P* passano infinite rette non incidenti la retta data (Figura 6).

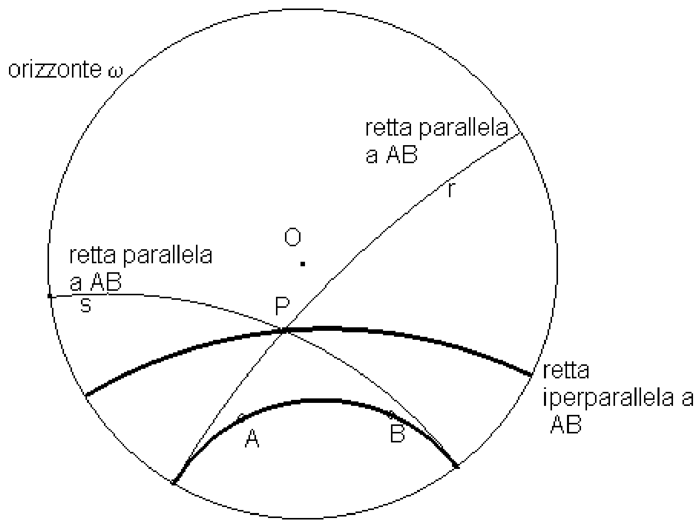


Figura 6

Nel fascio di rette passanti per il punto *P*, le rette *r* ed *s* che incontrano la retta AB sul bordo di Ω separano le rette incidenti alla retta *AB* da quelle che non intersecano la retta *AB*. Le rette *r* ed *s* sono definite *parallele* alla retta *AB*. Tra le rette *r* ed *s* sono comprese infinite rette che non intersecano la retta *AB*. Tali rette si dicono *iperparallele* alla retta *AB*. Quindi per *P* passano due *rette* parallele ed infinite rette iperparallele alla retta *AB*.

In questo modello di *piano* iperbolico sono quindi validi gli assiomi di Euclide tranne quello delle parallele.

Gli assiomi della geometria iperbolica divengono, in seguito all'interpretazione proposta, proposizioni euclidee dimostrabili perché le "rette" non sono altro, dal punto di vista euclideo, che archi di circonferenza. Per questo, possiamo, ad esempio, esaminare la seguente tabella che stabilisce una corrispondenza tra oggetti del modello di piano iperbolico e oggetti del piano euclideo.

Piano iperbolico (modello di Poincaré)	*Piano euclideo*
Punto	Punto interno alla circonferenza ω
Retta	Arco di circonferenza ortogonale a ω, oppure diametro di ω
Segmento AB	Arco di circonferenza (ortogonale a ω) compreso tra A e B, oppure parte di un diametro
Assioma. Per due punti passa una ed una sola retta	Teorema. Per due punti interni alla circonferenza ω passa una ed una sola circonferenza ortogonale a ω
…	…

Quarta fase

Con l'ausilio del software si propone un'attività di esplorazione: le altezze di un triangolo sono incidenti come nel caso euclideo? Dopo aver disegnato un triangolo e le altezze relative, si scopre che, modificando la forma del triangolo, sono possibili le seguenti configurazioni: le tre altezze sono incidenti, parallele o iperparallele (Figura 7).

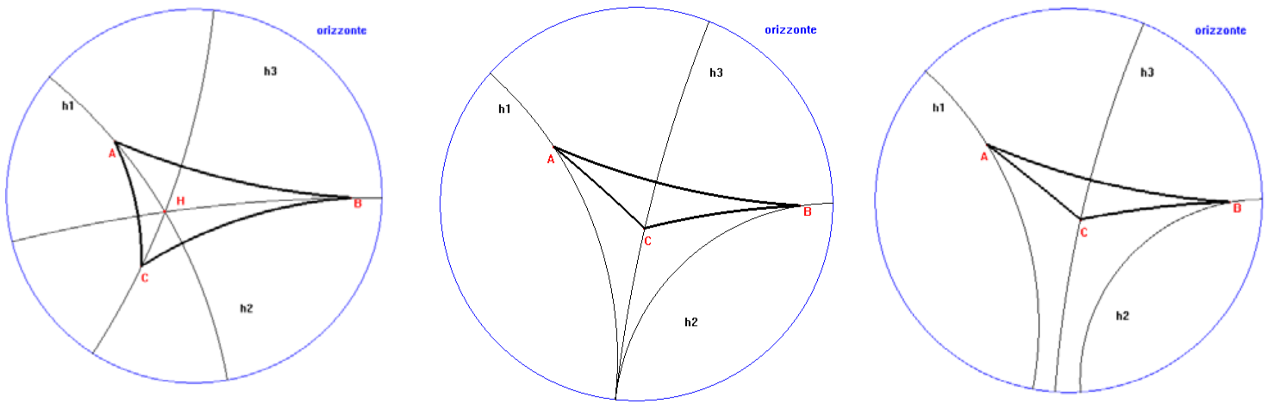


Figura 7

Quello che si osserva può essere validato formalmente? L'impossibilità dell'incidenza delle tre altezze è legata alla possibilità di costruire nel piano euclideo circonferenze non incidenti? Perché si possono avere solo i tre casi prima illustrati?

Quinta fase

Si analizza il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento. Con l'aiuto del menu iperbolico si disegna la seguente figura:

dati i punti P e Q si costruiscono le circonferenze rispettivamente di centri P e Q e di ugual raggio. Si determinano i punti intersezione R ed S.

Questi punti, per come sono costruiti, sono equidistanti da P e Q. Al variare del raggio delle due circonferenze si determina il luogo s (Figura 8).

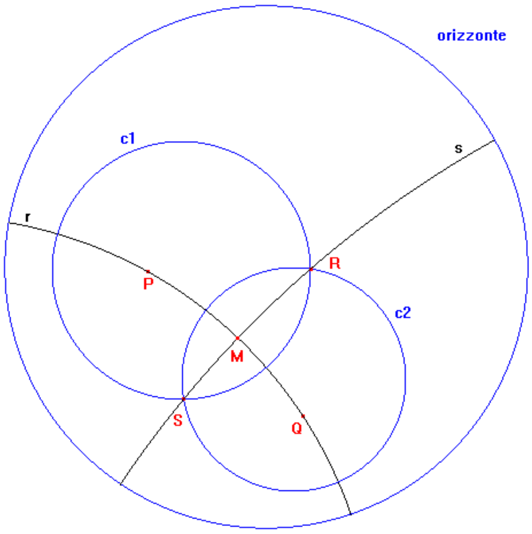


Figura 8

E' una retta del modello? Il punto M è il punto medio del segmento PQ? Le rette *r* ed *s* sono perpendicolari? Sul modello queste proprietà sembrano essere verificate; si propone la dimostrazione di quanto osservato e congetturato.
Supponiamo quindi che R sia un punto equidistante da M e Q e mostriamo che R$\in$*s*. Se R$\in$*r*, allora R = M e quindi R$\in$*s*. Se invece R$\notin$ *r*, consideriamo la retta *t* che biseca l'angolo PRQ e che è incidente rispetto a *r*: la simmetria di asse *t* fissa il punto R e scambia fra loro le due rette PR e QR; di conseguenza, dato che i segmenti RP e RQ hanno la stessa lunghezza, la simmetria di asse *t* scambia fra loro i due punti P e Q e, quindi, fissa la retta *r* e il punto medio M del segmento PQ; ne segue che *r* è ortogonale a *t* e che M$\in$*t*, quindi, *t* coincide con la perpendicolare a *r* in M e R$\in$*s*.
Analogamente può essere dimostrato che un punto R equidistante dai punti P e Q appartiene all'asse del segmento PQ.

Possibili sviluppi

Dopo il modello del "disco di Poincaré" è opportuno presentare alcuni elementi della geometria della sfera come ulteriore modello di geometria non euclidea.
Sulla superficie di una sfera si definiscono gli elementi fondamentali:

- i punti;
- le coppie di punti antipodali;
- le circonferenze massime.

A partire da questi elementi è possibile costruire un modello di piano non euclideo (geometria sferica o ellittica): i *punti* sono formati da coppie di punti della superficie sferica antipodali e le *rette* sono le circonferenze massime.
Assumiamo il raggio della sfera come unitario e misuriamo gli angoli in radianti. I percorsi di minima distanza tra due "punti" sono archi di circonferenza massima minori di π.
Le linee di minima distanza sono anche chiamate *geodetiche*. Le geodetiche del piano sono le rette. Le geodetiche della sfera sono archi di circonferenza massima. Se si riformulano gli assiomi e i teoremi della geometria classica in termini di geodetiche, si ottiene subito un modello tangibile di geometria non euclidea. Sulla sfera due geodetiche si intersecano sempre in due punti, e quindi sulla sfera non esistono geodetiche parallele. Questa semplice riflessione fa vedere sotto una luce nuova lo studio delle proprietà della sfera. È facile constatare che non esistono *rette* parallele, perché due circonferenze massime si incontrano sempre in un *punto*.
Anche in questo tipo di piano continua a valere la disuguaglianza triangolare. Introdotta la nozione di triangolo sferico ABC, avente per lati archi di circonferenza massima di ampiezza non superiore a π, risulta che la somma degli angoli interni del triangolo è maggiore di un angolo piatto.

Per presentare il modello di geometria non euclidea sferica è utile avvalersi di software di geometria che mettono a disposizione strumenti in grado di facilitarne la costruzione e la conseguente esplorazione (Figura 9).

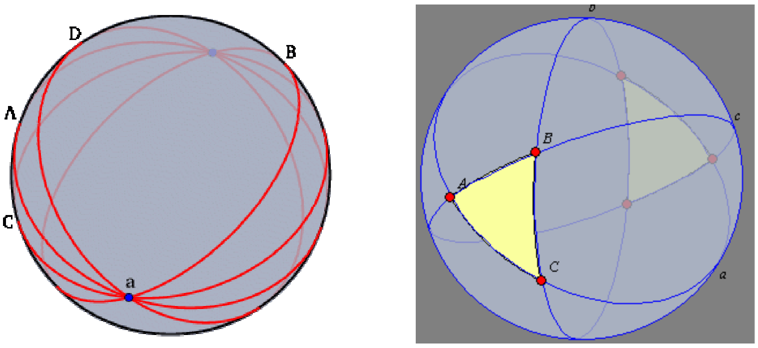


Figura 9

Cerchiamo dunque di evidenziare analogie e differenze fra la geometria del piano e quella della sfera. Nel piano euclideo sussiste il teorema: la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. Ecco una dimostrazione particolarmente intuitiva di tale teorema. Immaginiamo di percorrere il perimetro del triangolo in uno dei due versi possibili; in ciascuno dei tre vertici si deve fare una brusca "svoltata" di ampiezza pari all'angolo esterno del triangolo in quel vertice. Poiché alla fine del percorso si è fatto un giro completo, la somma degli angoli esterni del triangolo ammonta precisamente ad un angolo giro. D'altra parte, in ogni vertice l'ampiezza dell'angolo interno sommata a quella del corrispondente angolo esterno ammonta ad un angolo piatto. Per differenza fra la somma dei tre angoli piatti e l'angolo giro, ne segue che la somma dei soli angoli interni ammonta ad un angolo piatto. Il teorema è così dimostrato.

Questa stessa dimostrazione vale (o sembra valere) anche nel caso dei triangoli sferici (gli angoli formati da due archi di cerchio sono per definizione gli angoli formati dai corrispondenti vettori tangenti). Ciò è però contraddetto dal fatto ben noto (e direttamente verificabile su triangoli aventi per lati archi di meridiani e paralleli) che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di un angolo piatto (eccesso sferico). Dov'è nascosto l'errore nella dimostrazione or ora richiamata? La spiegazione sta nella nozione di "trasporto parallelo". Sia nel piano che sulla sfera, si immagini di percorrere un tratto di geodetica trasportando un'asta "orizzontale" col vincolo di mantenere costante l'ampiezza dell'angolo fra la geodetica e l'asta (Figura 10, Figura 11). Ad ogni vertice si riprenda il cammino lungo il successivo tratto di geodetica, senza modificare la direzione dell'asta.

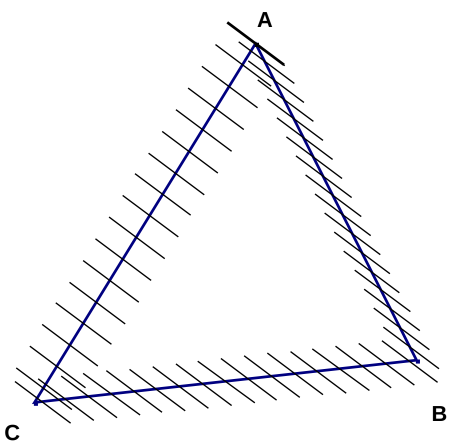


Figura 10

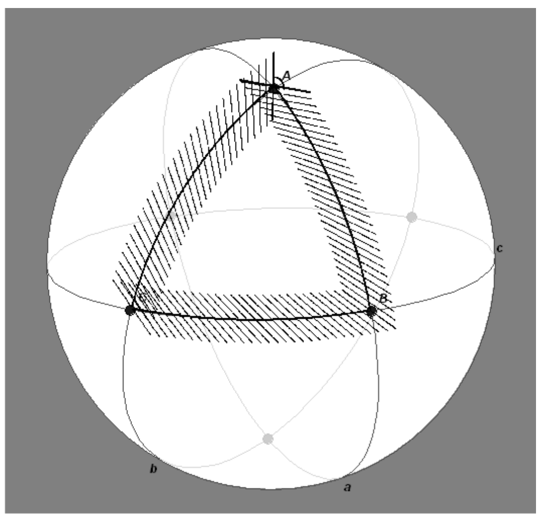


Figura 11

Si constata che nel caso del triangolo piano si ritorna al punto di partenza con l’asta nella posizione di partenza, mentre nel caso del triangolo sferico si ritorna con l’asta in una posizione diversa. Chi preferisce vedere questa anomalia con l’ausilio di un modello tridimensionale prenda un pallone e ci disegni sopra un triangolo sferico. Tornando al teorema sulla somma degli angoli interni, il passaggio errato nella dimostrazione sta nell’aver dato per scontato che un giro completo, frutto di un cammino con tre “svoltate” in tre punti diversi, equivalga ad un angolo giro intorno ad uno stesso punto. Ciò è vero nel piano, in quanto i tre angoli esterni, traslati in uno stesso vertice formano effettivamente un angolo giro. Non è più vero sulla sfera, dove il trasporto parallelo degli angoli esterni in uno stesso vertice dà luogo ad un angolo minore di un angolo giro!
Per completare il quadro dei modelli di geometrie non euclidee si può analizzare quello di Beltrami-Klein. (Figura 12

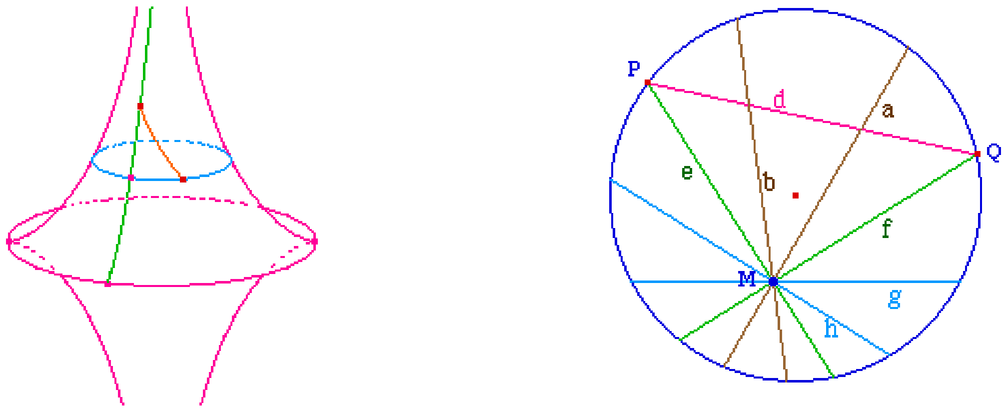


Figura 12

Qual è la distanza tra Roma e New York?

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare i vettori e il prodotto scalare nello studio di problemi del piano e dello spazio. Risolvere analiticamente problemi su sfera, piani e rette e interpretarne le soluzioni. Utilizzare i primi elementi della geometria della sfera in altri ambiti (geografia, fisica, astronomia).	Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine).	Spazio e figure	Geografia

Contesto
Geometria della sfera.

Il contesto dell'attività è lo studio delle rotte di navigazione aerea con l'utilizzo della geometria sulla sfera.

Descrizione dell'attività
Prima fase
L'insegnante pone agli studenti il problema di come sia possibile descrivere la rotta aerea tra due città molto lontane, come ad esempio Roma e New York. Per aiutarli a visualizzare il problema ci si può avvalere dell'ausilio di un mappamondo, di un planisfero, di fili e di righe graduate. Gli studenti in gruppo provano a individuare i percorsi sul mappamondo e sul planisfero e a confrontarli.
Attraverso una discussione guidata si fanno emergere le considerazioni dei vari gruppi.
Gli alunni probabilmente considereranno come percorso ottimale solo quello riconducibile ad un "segmento".
In effetti, una delle proprietà di un segmento è di essere la linea più breve tra due punti: volendo attraversare una piazza, risulta conveniente muoversi in linea retta piuttosto che seguire un qualsiasi altro cammino. Per andare da Roma a New York non si potrà seguire una linea retta, dal momento che la Terra è rotonda e sulla sua superficie non ci sono linee rette.

Seconda fase
Il docente evidenzia come il problema richieda nuove conoscenze relative al modello geometrico più idoneo per rappresentare il caso in questione. Tale modello è costituito, in prima approssimazione, dalla superficie di una sfera.
La geometria della sfera rappresenta un tema importante della matematica sin dall'antichità, strumento essenziale per l'astronomia, la navigazione, la geografia, la stesura dei calendari e l'indicazione dell'ora.
Al fine di individuare in modo univoco la posizione delle due città sulla superficie della sfera è necessario stabilire su di essa un sistema di riferimento. L'insegnante fa osservare come in un mappamondo siano già presenti alcune linee che consentono di individuare le diverse posizioni dei luoghi sulla Terra. Analizzando in dettaglio queste linee si noterà che quelle passanti per i Poli sono circonferenze tutte uguali tra loro, mentre quelle parallele all'equatore si presentano "parallele" e

diverse; in particolare le prime sono i meridiani e le seconde i paralleli. Ogni punto della superficie terrestre, tranne i poli, può pertanto essere univocamente associato a una coppia di queste linee (meridiano, parallelo).
L'insegnante può sottolineare come la particolare scelta dei meridiani e dei paralleli presenti un'analogia con quanto già studiato sul piano cartesiano. In particolare, è conservata la perpendicolarità; infatti, un cerchio avente come circonferenza un meridiano giace in un piano che è ortogonale al piano di un cerchio avente come circonferenza un parallelo.
Per stabilire un sistema di riferimento è necessario fissare due assi orientati. Sulla sfera terrestre si adottano come "assi" due opportune circonferenze massime tra loro ortogonali: il meridiano di Greenwich (scelto come fondamentale; Greenwich è una località nei pressi di Londra con un osservatorio astronomico) e l'equatore (circonferenza massima). Il loro punto di intersezione, utilizzato come origine O del sistema di riferimento sferico, è un punto al largo della costa occidentale dell'Africa, nel Golfo di Guinea. L'altro punto di intersezione tra la circonferenza che contiene il meridiano di Greenwich e l'equatore è in pieno Oceano Pacifico, e appartiene al meridiano del "cambiamento di data".
Un punto sulla superficie sferica terrestre è solitamente individuato da due angoli, dalla sua longitudine (distanza angolare dal meridiano di Greenwich, positiva ad Est e negativa ad Ovest, rappresentata dall'angolo $R\hat{O}P'$ nella Figura 1) e dalla sua latitudine (distanza angolare dall'equatore, positiva a Nord e negativa a Sud, rappresentata dall'angolo $P\hat{O}P'$ nella *Figura 2*). Nelle *Figure 1* e *2* G indica Greenwich ed R e P' dei meridiani per G e P con l'equatore.

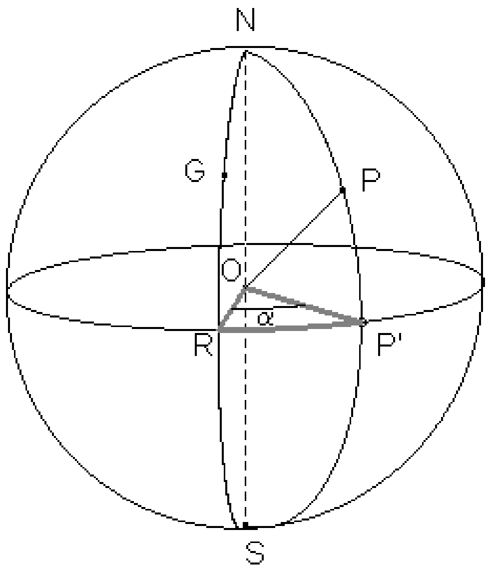


Figura 1

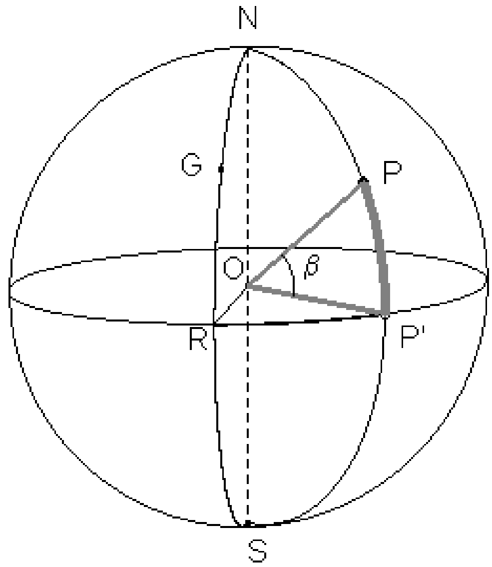


Figura 2

L'insegnante propone agli studenti la lettura della posizione di alcune città, prestando attenzione che nella scelta ricadano città presenti nei vari "quadranti" rispetto all'equatore e al meridiano di Greenwich. Le longitudini precedute dal segno + si leggono anche "Est", quelle precedute dal segno meno "Ovest". Le latitudini con il segno + si dicono "Nord" e quelle con il segno – "Sud".

	Longitudine	Latitudine
Roma	+12° 27'	+41° 55'
Milano	+09° 11'	+45° 29'
New York	–70° 15'	+40° 45'
Buenos Aires	–70° 40'	–33° 30'
Sydney	+151° 10'	–33° 55'

Un punto sull'equatore ha latitudine zero, un punto sul meridiano di Greenwich ha longitudine zero. In particolare si sceglie come unità di misura delle distanze il raggio terrestre equatoriale (circa 6378 km = 1 RT, che corrisponde all'angolo di 1 radiante).
Considerando la Terra una sfera liscia, senza rilievi (l'altezza di volo di un aereo di linea è circa 10 km, una distanza trascurabile rispetto al raggio terrestre). Con le convenzioni adottate possiamo ora stabilire un sistema di riferimento sulla superficie sferica.
Sia *P* un punto sulla superficie sferica (Figura 3); esso è univocamente individuato dalla coppia di misure angolari, in gradi sessagesimali, (α, β), dove α è la longitudine e β è la latitudine, con le seguenti limitazioni:

$$-180° < \alpha \le 180°$$
$$-90° \le \beta \le 90°.$$

Se escludiamo i due poli (che hanno latitudine rispettivamente + 90° e −90° e longitudine qualsiasi) tale sistema di riferimento stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie sferica e le coppie di angoli (α, β).

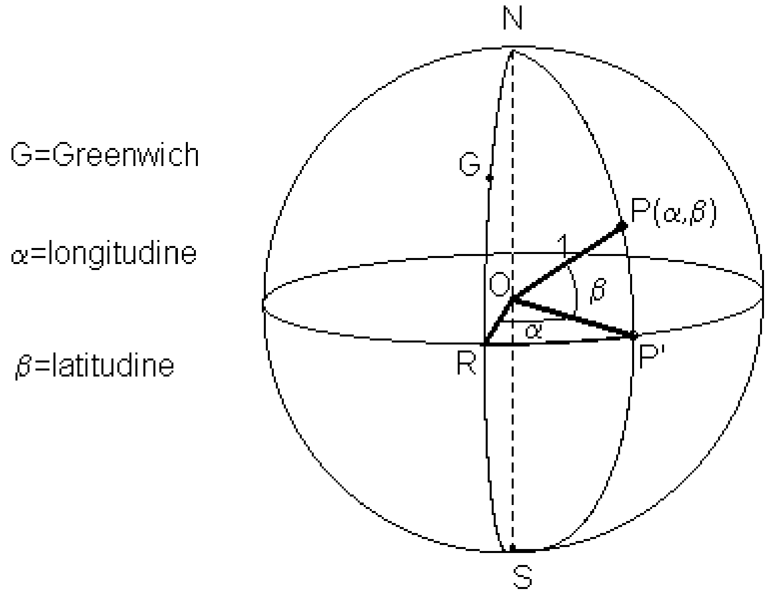


Figura 3

A differenza di quanto accade nel piano, sulla superficie sferica non esistono rette parallele: tutte le *rette* in questa geometria, cioè le circonferenze massime, si intersecano in due punti antipodali. Ne consegue una differenza sostanziale tra la geometria del piano e quella della sfera: sul piano le coordinate (x,y) di un punto *P* rappresentano le distanze, con segno, di *P* rispettivamente dall'asse y e dall'asse x. Sulla sfera, invece, solo la seconda coordinata (la latitudine) rappresenta la "distanza" dall'equatore; la prima coordinata (la longitudine) non è uguale alla distanza dal meridiano di Greenwich, tranne nel caso in cui *P* stia sull'equatore; la distanza di *P* dal meridiano di Greenwich diminuisce con l'aumentare della latitudine, fino ad annullarsi per i poli.
In altri termini: i *meridiani* (luoghi dei punti aventi una data longitudine) sono semicirconferenze massime (che possiamo quindi chiamare "*rette*" sulla sfera), i *paralleli* (luoghi dei punti aventi data latitudine) non sono circonferenze massime, tranne nel caso dell'equatore.
A differenza di quanto accade nel piano, la distanza tra due punti non è invariante per *traslazioni*: tali trasformazioni non sono, sulla sfera cartesiana, delle isometrie.

Terza fase

Il docente procede in analogia con quanto già svolto nell'introduzione al piano cartesiano ed evidenzia che la strategia risolutiva migliore consiste nel porre la sfera in un sistema di riferimento ortogonale *xyz* con l'origine nel centro *O* della sfera (Figura 4). L'origine del piano *xy*, che giace nel piano dell'equatore, corrisponde nel sistema di riferimento sferico al punto *R* di coordinate (0,0,1), l'asse *z* passa per i due poli ed è ortogonale al piano *xy*. In tal modo è possibile associare ad ogni punto $P(\alpha,\beta)$ della sfera il vettore $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ e utilizzare le operazioni in $\mathbf{R}^3$.

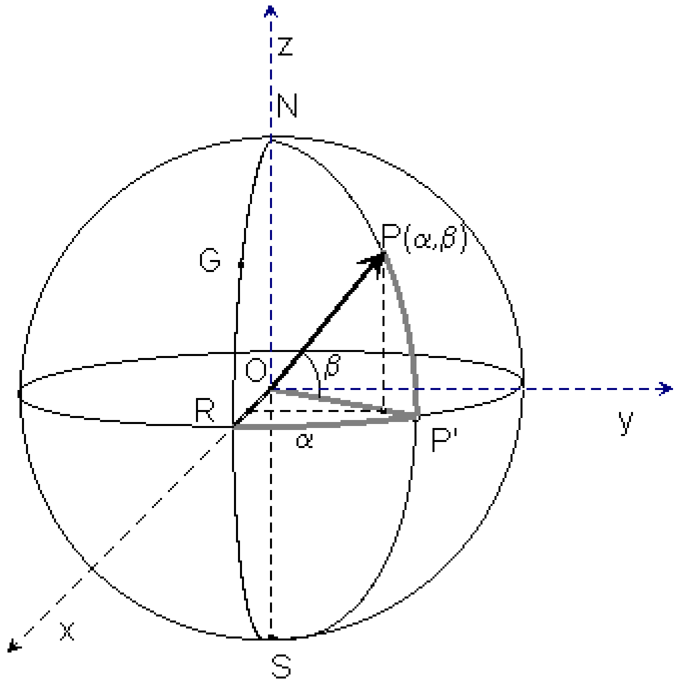


Figura 4

Sia dato un punto $P(\alpha, \beta)$ sulla superficie sferica. Ragionando sui triangoli rettangoli presenti in Figura 5 si possono ottenere per via trigonometrica le componenti in $\mathbf{R}^3$ del vettore $\overrightarrow{OP}$.

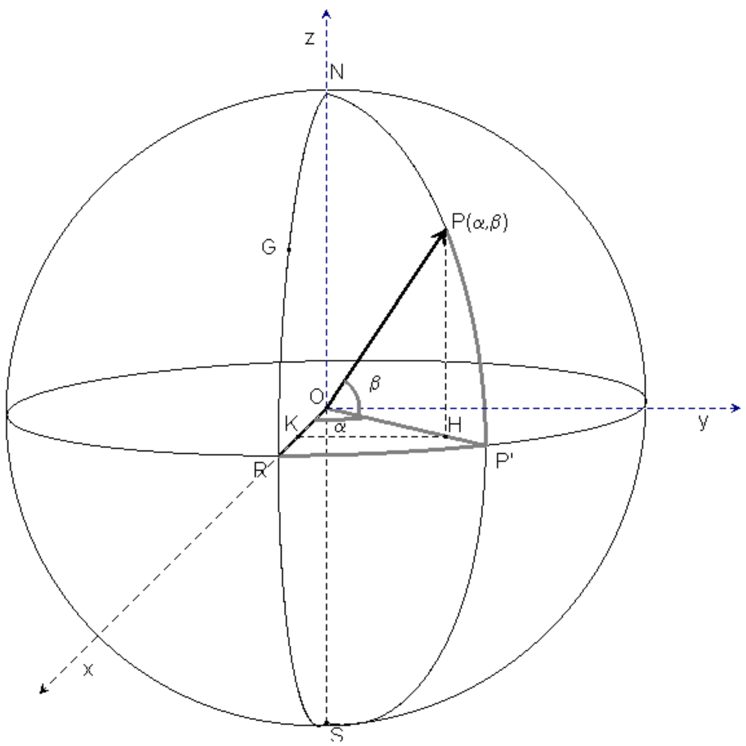


Figura 5

Si ottiene (considerato il raggio terrestre come unità di misura):

$$\begin{cases} x = OK = \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ y = KH = \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ z = HP = \sin\beta \end{cases}$$

Quindi si ha che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha per componenti cartesiane:

$$\overrightarrow{OP} = \left[\cos\alpha \cdot \cos\beta,\ \sin\alpha \cdot \cos\beta,\ \sin\beta\right].$$

Il docente propone agli studenti di verificare che in ogni caso $\overline{OP} = 1$.
Si procederà con l'introduzione del prodotto scalare tra due vettori in $\mathbf{R}^3$.
In uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è possibile quindi definire l'angolo compreso tra due vettori.
Siano $P(\alpha_1,\beta_1)$ e $Q(\alpha_2,\beta_2)$ due punti della superficie sferica. La loro distanza è la lunghezza dell'arco di circonferenza massima di estremi P, Q e coincide con la misura (in radianti) dell'angolo $P\hat{O}Q$.
Con il prodotto scalare si procede al calcolo della distanza *PQ*.
Poiché:

$$\overrightarrow{OP} = \left[\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta_1,\ \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta_1,\ \sin\beta_1\right]$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left[\cos\alpha_2 \cdot \cos\beta_2,\ \sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2,\ \sin\beta_2\right]$$

risulta:

$$\cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \frac{\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ}}{\|OP\| \cdot \|OQ\|}$$

Figura 6

Calcoliamo prima di tutto il prodotto scalare dei due vettori:

$$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ} = [\cos\beta_1 \cdot \cos\alpha_1, \cos\beta_1 \cdot \sin\alpha_1, \sin\beta_1][\cos\beta_2 \cdot \cos\alpha_2, \cos\beta_2 \cdot \sin\alpha_2, \sin\beta_2].$$

da cui:

$$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ} = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2$$

e quindi:

$$d(P,Q) = \arccos\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \sin\beta_1\cdot\sin\beta_2\right).$$

La misura, in radianti, di $d(P,Q)$ rappresenta, in raggi terrestri, la distanza tra i due punti.
Si giunge quindi alla risposta al problema iniziale: *d*(Roma, New York) = 1,041 RT.
Tale distanza di 1,041 radianti corrisponde a circa 6640 km (Figura 6).
Si conclude perciò che sulla superficie sferica, se si vuole risparmiare carburante, anziché lungo percorsi rettilinei occorre muoversi con delle traiettorie curve. Tali curve, contenute nelle circonferenze massime e dette *geodetiche*, consentono di utilizzare il percorso più breve che collega due località.

Possibili approfondimenti

- Triangoli sulla sfera e loro proprietà.
- Problemi di cartografia.
- Studio delle “geodetiche” su alcune superfici (cilindro, cono) e sulla sfera.

Elementi di prove di verifica

1. Sulla base di quanto visto in precedenza si calcoli la distanza tra Roma e Sidney.

2. In Italia il capoluogo di provincia di massima latitudine è Bolzano (11° 21', 46° 30') e quello di minima latitudine è Ragusa (14° 45', 36° 56'); la loro distanza è 0,173 radianti, pari a circa 1100 km: questo numero rappresenta la lunghezza *in linea d'aria*. Determinare la lunghezza della rotta aerea più breve e commentare il risultato ottenuto.

Ombre, stiramenti, equazioni

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi. Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate.	Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	Disegno Storia dell'arte Scienze

Contesto
Trasformazioni geometriche

Questa attività viene proposta nel quinto anno; amplia un tema fondamentale, di particolare valenza per il curricolo di matematica e coinvolge trasversalmente le abilità e le conoscenze acquisite nel corso degli studi.

Descrizione dell'attività
Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle isometrie e delle similitudini del piano oltre ad alcune nozioni sui vettori e sulle matrici 2x2. Gli strumenti di cui avvalersi sono un software di geometria e uno di manipolazione simbolica come supporto all'apprendimento.
Analogamente al percorso seguito per le similitudini del piano, in cui sono stato utilizzate le omotetie, composte con le isometrie per generare il gruppo delle similitudini, si introduce, a partire dalle proiezioni nello spazio, l'affinità omologica. Si possono anche presentare le proprietà di questa trasformazione "generalizzando" la definizione di simmetria assiale nel piano. L'affinità omologica ha molte applicazioni, per esempio nei cambiamenti di scala, nella rappresentazione dello spazio (cerchio trasformato in ellisse, quadrato in parallelogramma), nelle rappresentazioni del disegno in assonometria, ….
Le omologie, tra le affinità, svolgono lo stesso ruolo che hanno le omotetie tra le similitudini e permettono, composte con una generica isometria, di generare tutte le affinità del piano. A partire da questo approccio sintetico, sviluppato con l'ausilio di un software di geometria, è possibile giungere alla determinazione delle equazioni delle affinità in modo costruttivo e motivato, sottolineando in particolare gli invarianti delle affinità, sia dal punto di vista sintetico che analitico.

<u>Prima fase</u>
Si analizza una situazione reale che ha molta valenza didattica: le ombre di un quadrettato esposto al sole (raggi paralleli provenienti da una sorgente posta "all'infinito"). Si studia la situazione concreta alla ricerca delle proprietà geometriche invarianti, per formalizzare - in un secondo momento - da un punto di vista matematico le proprietà che caratterizzano questo tipo di trasformazione dello spazio.

Si può schematizzare ciò che si osserva nella realtà con la "proiezione parallela" generata dai "raggi" di luce di un piano α su un piano β (Figura 1). In questo caso rette parallele hanno come ombra rette parallele, segmenti divisi in parti uguali si trasformano in segmenti divisi in parti uguali.

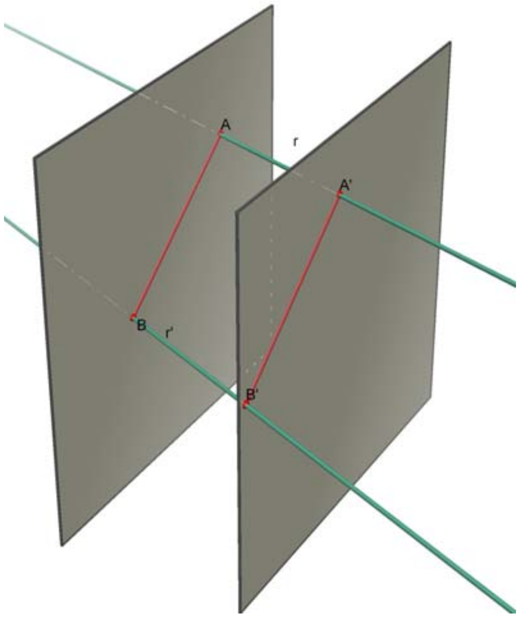


Figura 1

Dopo questa prima esperienza, usando un software di geometria, si può simulare la situazione osservata in precedenza; si può far variare la posizione dei due piani α e β ponendoli tra loro paralleli, in questo caso si osserva che la trasformazione conserva le distanze, ovvero è un'isometria; in particolare se facciamo coincidere i due piani paralleli otteniamo una traslazione. Nella Figura 2 è rappresentata una proiezione parallela del piano α sul piano β.

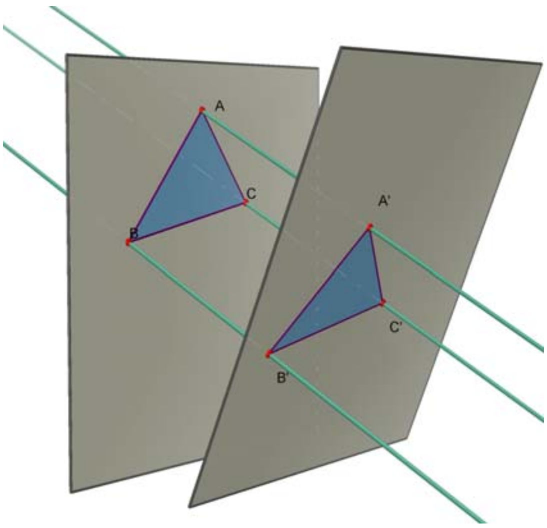


Figura 2

Il ruolo dei due piani può essere rovesciato. La trasformazione inversa di una proiezione parallela è ancora una proiezione parallela. L'unica condizione da rispettare è che la direzione dei "raggi" non sia parallela né ad α e né a β. Se i piani α e β sono paralleli, allora ogni proiezione parallela (di direzione non parallela ai piani stessi) stabilisce una isometria tra i due piani α e β.

Se i due piani non sono paralleli, allora saranno incidenti lungo una retta *r* (Figura 3). Si realizza in questo modo una nuova trasformazione dello spazio di particolare interesse.

Nei casi osservati in precedenza possiamo notare che rette si trasformano in rette, la retta di intersezione dei due piani si trasforma in se stessa. Si introduce la definizione di rapporto semplice di tre punti allineati *A*, *B* e *C*: $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.

Si scoprono le seguenti proprietà della proiezione parallela:
- conserva l'ordine;
- mantiene il rapporto semplice di tre punti allineati;
- trasforma un parallelogramma in un parallelogramma.

Si può arrivare alla seguente definizione: diremo affinità ogni trasformazione biunivoca tra due piani che muta rette in rette, rette parallele in rette parallele e conserva il rapporto semplice di tre punti allineati.

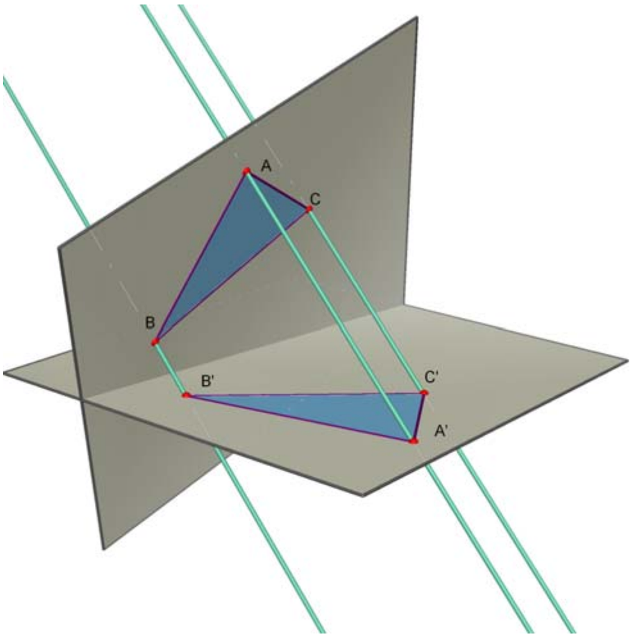


Figura 3

Immaginando di far ruotare il piano α in senso orario e in modo che si sovrapponga al piano β, si opera una identificazione dei due piani: Si ottiene una trasformazione del piano in sé, detta *omologia affine*, con una retta unita (*asse di omologia*).

<u>Seconda fase</u>

Successivamente si affronta un'altra situazione rilevante dal punto di vista didattico: lo "stiramento" di una figura disegnata su una tela elastica. Anche in questo caso l'interesse è rivolto alla ricerca delle proprietà invarianti di questa trasformazione.

Tali esperienze si possono simulare in modo particolarmente significativo utilizzando i software di geometria come mostrato in Figura 4. Il secondo reticolato si ottiene dal primo "stirandolo" lungo l'asse delle ordinate; analogamente si può fare lungo l'asse delle ascisse.

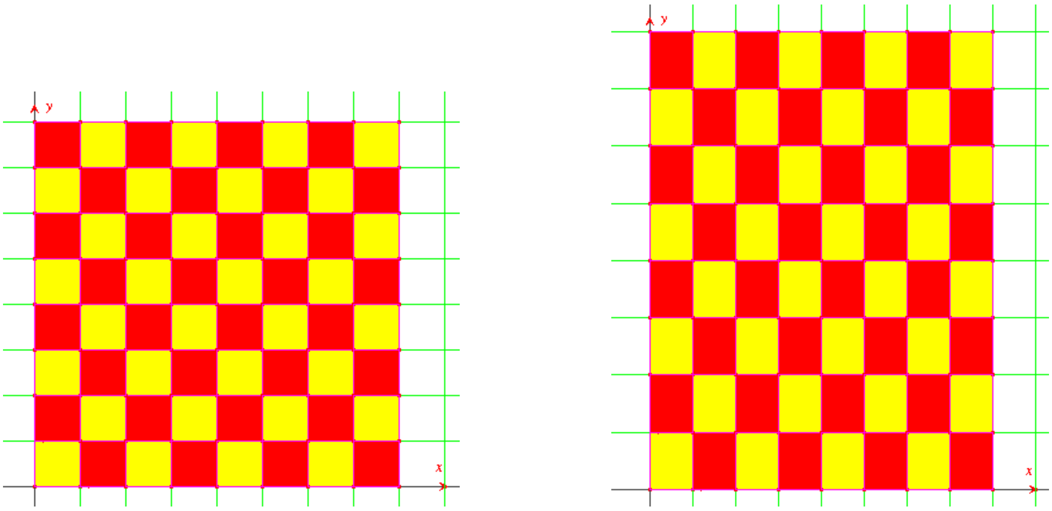


Figura 4

Anche in questo caso osserviamo che rette si trasformano in rette, rette parallele si trasformano in rette parallele, il punto medio di un segmento AB si trasforma nel punto medio del suo trasformato. Associando un sistema di assi cartesiani ortogonali, si può in questo caso arrivare a trovare le equazioni (h e k non nulli): $\begin{cases} x' = h\,x \\ y' = k\,y \end{cases}$, la cui matrice è $M = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, con determinante hk. Se indichiamo con $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le coordinate del punto P e con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le coordinate del punto P', possiamo scrivere le equazioni della trasformazione nel seguente modo: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Terza fase

In alternativa si può definire l'affinità omologica a partire dalla simmetria assiale, determinare le proprietà che la caratterizzano in modo costruttivo, realizzando attività di esplorazione con un software di geometria. Le proprietà della simmetria assiale vengono generalizzate, mantenendo però una retta di punti uniti.

Ad esempio nella Figura 5 si assume una retta unita u e si fissa una direzione m e un numero $k \neq 0$. Dato un punto P del piano, il suo corrispondente P' è costruito mandando la parallela al segmento dato per P. Sulla retta si costruisce un vettore $\overrightarrow{UP'}$ tale che $\overrightarrow{UP'} = k \cdot \overrightarrow{UP}$ (Figura 6). Questa costruzione può essere trasformata in una macro, che permette di studiare le proprietà di tale trasformazione, fino ad arrivare alle sue equazioni nel piano cartesiano. Questa definizione può essere vista come la generalizzazione della definizione di simmetria assiale rispetto alla retta u. Infatti una simmetria assiale rispetto alla retta u, si ottiene con la direzione perpendicolare a u e con $k = -1$.

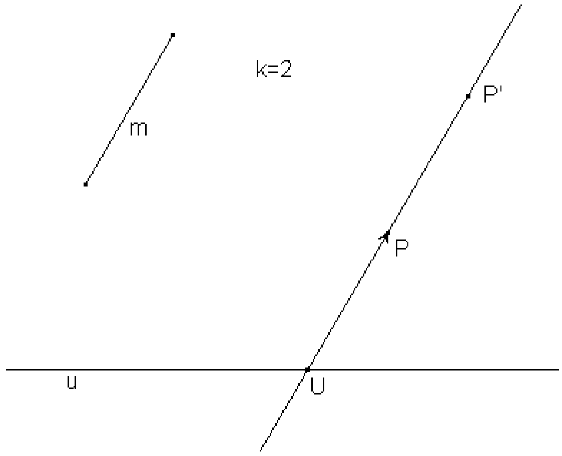


Figura 5

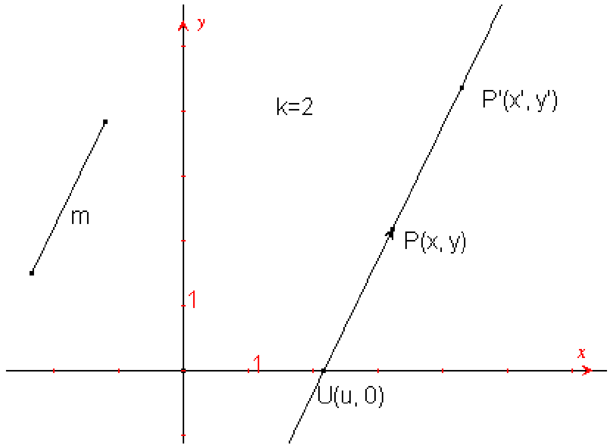


Figura 6

Nella Figura 7 è indicata un'applicazione dell'omologia affine per disegnare un quadrato in assonometria cavaliera. In questo caso l'asse di omologia è l'asse y.

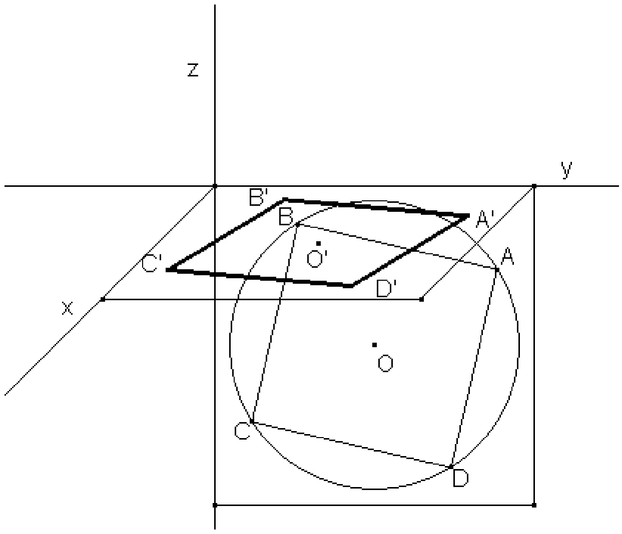


Figura 7

<u>Quarta fase</u>

Si traducono analiticamente alcune particolari trasformazioni, (dilatazione lungo una direzione parallela agli assi, trasformazione di quadrettati, ...) per determinare l'equazione delle affinità omologiche in cui l'asse delle ascisse è l'asse di omologia.

Con riferimento alle figure 5 e 6, poiché deve essere verificata la relazione vettoriale $\overrightarrow{UP'} = k\ \overrightarrow{UP}$, la retta *UP* deve avere pendenza *m*, ne segue che:

$$(*) \qquad \begin{cases} x' - u = k\,(x - u) \\ y' = k\,y \end{cases}$$

e anche: $m = \dfrac{y}{x-u} = \dfrac{y'}{x'-u}$. Da questa ultima relazione segue $\begin{cases} x' = x + \dfrac{k-1}{m}\,y \\ y' = k\,y \end{cases}$.

La matrice di una affinità omologica avente per asse *x* e rapporto *k* ha pertanto per matrice:

$M = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{k-1}{m} \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Per $k = 1$ si ottiene ovviamente l'identità. Il determinante della matrice è:

$$\det M = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{k-1}{m} \\ 0 & k \end{pmatrix} = k .$$

Il significato geometrico del valore assoluto di tale determinante è collegato alle aree di figure corrispondenti. Quindi si può congetturare (e poi dimostrare) che un'affinità omologica moltiplica l'area racchiusa da una figura F per il fattore $|k|$, ovvero:

$$\frac{Area(F')}{Area(F)} = |k| .$$

L'affinità omologica ha per punti uniti tutti i punti dell'asse *x*. Oltre all'asse *x*, l'affinità omologica possiede due direzioni di rette che rimangono invariate: sono le rette parallele all'asse *x* (non sono rette unite, tranne l'asse *x*, ma rimane invariata la loro direzione); rimane inoltre invariata la direzione delle rette aventi per pendenza *m*; tali rette sono rette unite, ma non formate da punti uniti. Un caso particolarmente importante di queste affinità si ottiene quando *m* tende all'infinito. In questo caso la matrice dell'affinità omologica si riduce a: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = k\,y \end{cases}$$

Si tratta di un caso particolarmente semplice di affinità: c'è uno "stiramento" di un fattore *k* nella direzione dell'asse *x* mentre le ordinate rimangono invariate. Si tratta di un caso particolare delle affinità:

$$\begin{cases} x' = h\,x \\ y' = k\,y \end{cases}$$

in cui si ha uno stiramento di un fattore $|h|$ lungo l'asse delle *x* e di un fattore $|k|$ lungo la direzione dell'asse *y*.

Affinità omologiche speciali (o "inclinazioni"). Se la direzione m coincide con la direzione della retta u, l'affinità omologica si dice speciale. Si può dare quindi la seguente definizione: data una retta u, un punto A e un punto A', che viene assunto come corrispondente del punto A sulla retta parallela ad u passante per A, il corrispondente del punto P è il punto P' trovato con la costruzione indicata in Figura 8.

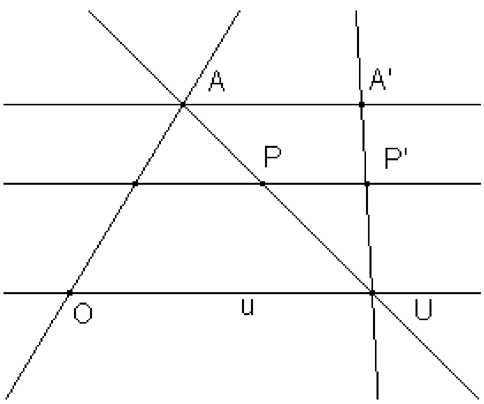


Figura 8

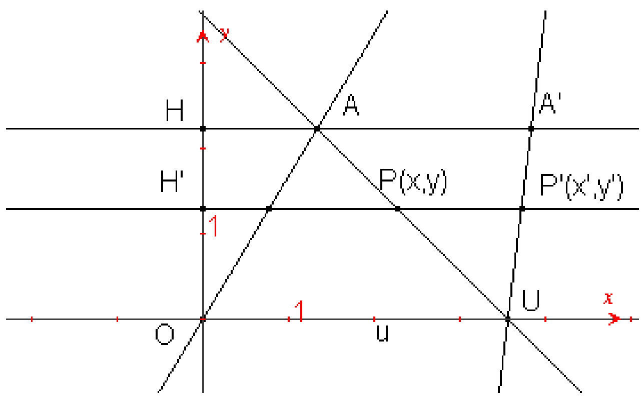


Figura 9

Se l'asse dell'affinità omologica speciale coincide con l'asse *x* (Figura 9), allora, dato un punto P(*x*, *y*), l'ordinata *y'* non cambia, perché P' si trova sulla parallela passante per P all'asse *x*. Quindi *y'*=*y*. Dalla similitudine dei triangoli AA'U e PP'U segue che: PP': OH' = AA' : OH. Detto *h* il rapporto AA' : OH, si ottiene dunque: $\frac{x'-x}{y} = h$, da cui si ricava $x' = x + hy$.

Quindi le equazioni di una affinità omologica speciale di asse x e rapporto h sono: $\begin{cases} x' = x + hy \\ y' = y \end{cases}$.

Questa omologia speciale viene anche chiamata una "inclinazione". La matrice di una affinità omologica speciale di asse x e rapporto h è: $M = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nella Figura 10 si vedono gli effetti di un'inclinazione su una circonferenza e su un triangolo.

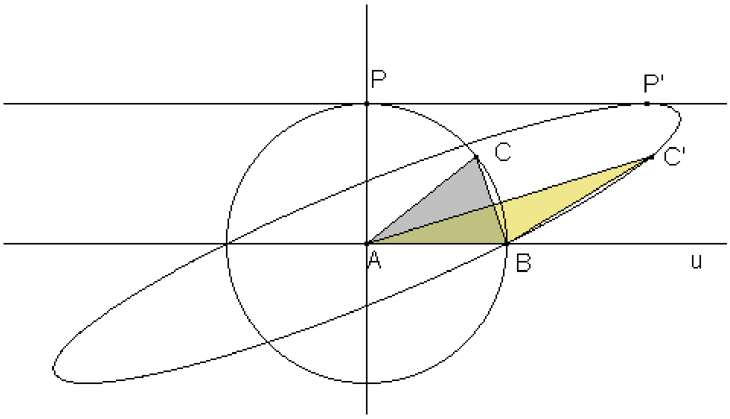


Figura 10

Ripetendo analoghe considerazioni per l'asse y, si possono ricavare le equazioni e la matrice di una affinità omologica speciale di asse y e rapporto k. Quindi le equazioni di una affinità omologica speciale di asse y e rapporto k sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = kx + y \end{cases}$$

La matrice di una affinità omologica speciale di asse y e rapporto k è: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. Le matrici trovate hanno il determinante uguale ad 1; si tratta quindi di affinità *equivalenti* ovvero mantengono le aree.

<u>Quinta fase</u>
Utilizzando il teorema che caratterizza le omologie affini si determinano le equazioni delle omologie affini e della più generale affinità del piano.

La più generale affinità del piano si può ottenere come composizione tra un'affinità omologica e una similitudine del piano.

Si descrivono analiticamente collegando la descrizione analitica ai vettori e alle matrici utilizzando software di manipolazione simbolica. Si esamina il comportamento di queste trasformazioni sui poligoni e sulle coniche e più in generale sul grafico di una funzione.

Possibili sviluppi
Analisi di problemi significativi da risolvere con le trasformazioni geometriche.
Rappresentazione di figure nello spazio e affinità omologica: l'assonometria cavaliera.

Riferimenti bibliografici

Euclide, (1970), *Gli Elementi,* Utet, Torino.

Trudeau, R. J.; (1991), *La rivoluzione non euclidea,* Bollati Boringhieri, Torino.

Agazzi, E.; Palladino, D., (1998), *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare,* La Scuola, Brescia.

Conti, F.; Giusti, E., (2000), *Oltre il Compasso - la geometria delle curve*, Firenze.

Freguglia, P., (1995), *La geometria sferica nella tradizione classica*, in Giornate di didattica, storia ed epistemologia della matematica, Università degli Studi di Trieste, Trieste, 29-30 agosto 1995.

Villani, V., (2003), *Geometria senza software geometrico*, in *CabrIrrsae* IRRE Emilia Romagna, aprile-luglio.

Impedovo, M., (1998), *Qual è la distanza tra Roma e New York?*, Bollettino degli insegnanti di Matematica del Canton Ticino, n. 36.

Dedò, M., (1996), *Le trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, Padova.

Lombardo Radice, L.; Mancini Proia, L., (1979) *Il metodo matematico, vol. 3°*, Principato, Milano.

Castelnuovo, E.; M. Barra, (2000), *Matematica nella realtà,* Bollati Boringhieri, Torino.

RELAZIONI e FUNZIONI

Elenco delle attività

Un ciclomotore in più

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
In casi semplici, determinare il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 (valore finito o no) anche utilizzando i teoremi di confronto. Interpretare geometricamente la derivata; determinare la tangente in un punto al grafico di una funzione ed usarla per approssimare ("linearizzare") la funzione in un opportuno intervallo. Valutare l'andamento e il segno della funzione $f'(x)$ in relazione all'andamento di $f(x)$ e viceversa; individuare i punti in cui una funzione assume i valori massimi o minimi, relativi e assoluti.	Approfondimento del concetto di limite. Derivata e differenziale di una funzione.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Misurare Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi	Economia

Contesto
Modelli economici.

Utilizzo della derivata di una funzione in campo economico.
Si intende proporre un utilizzo della derivata di una funzione, presentando il significato economico del "Costo marginale".
Si propone una situazione tipicamente discreta che ben presto viene modellizzata usando variabili continue, come spesso si fa nelle applicazioni. Ovviamente il lavoro e le dimostrazioni matematiche riguardano il modello continuo, che però può essere utilizzato per interpretare i fenomeni discreti corrispondenti.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
L'attività inizia con la presentazione di un problema, di tipo economico.
Si suppone che una fabbrica di motorini produca x ciclomotori al giorno, con x intero, compreso tra 0 e 100, estremi inclusi. Il costo, in euro, della produzione di x motorini, è dato dalla funzione

$$C(\mathrm{x}) = 2000+300x - x^2/2.$$

Supponendo che ne possano essere prodotti 50 al giorno, si chiede il costo di un eventuale 51-mo.
Come prima riflessione sul problema risulta significativo esaminare la struttura della funzione $C(x)$, osservando i termini che compaiono e riflettendo sul loro significato, relativamente alla situazione rappresentativa di un modello di realtà produttiva. In termini di costi di produzione, compaiono un costo fisso (in questo caso 2000 euro), una parte che aumenta, qui linearmente, con le unità prodotte

(300 euro per ogni unità prodotta x), una diminuzione, più sensibile con l'aumentare delle unità prodotte ($x^2/2$). Da queste conclusioni, che discendono facilmente dalla formalizzazione algebrica presentata, ma bastano a rendere realistico l'uso di una tale funzione per una situazione del tipo proposto, si passa alla risoluzione richiesta.
Il problema viene risolto calcolando il costo $C(51) - C(50)$:

$$C(50) = 2000 + 300 \cdot 50 - 50^2/2 = 15750$$

$$C(51) = 2000 + 300 \cdot 51 - 51^2/2 = 15999{,}50.$$

La differenza risulta

$$C(51) - C(50) = 249{,}50$$

e rappresenta il costo, in euro (il cui simbolo è sottinteso nei passaggi precedenti) di un ciclomotore aggiuntivo, nella situazione che la produzione giornaliera sia fissata alle 50 unità.
Facendo calcolare ai ragazzi i costi di un eventuale motorino in più in situazioni di produzione giornaliera diverse da quella di 50 unità assegnata in precedenza, si fa osservare che il risultato cambia, quindi il costo dipende dal valore x fissato.

Seconda fase
Si può ora affrontare il problema da un altro punto di vista.
In economia, si definisce 'Costo marginale' la derivata di C rispetto a x, e viene proprio usata per calcolare il costo aggiuntivo di un'ipotetica ulteriore unità in produzione.
Si propone, a questo punto di calcolare il costo marginale, per il valore $x = 50$, facendo uso della derivata; in tal caso, si assume che x possa essere un numero reale qualunque e che la funzione $C(x)$ sia differenziabile.
Poiché risulta

$$C'(x) = 300 - x,$$

allora

$$C'(50) = 250.$$

Il valore $C'(50)$ differisce di poco da $C(51) - C(50)$, ma non coincide con esso.
Vanno quindi approfonditi i due diversi approcci affrontati per giustificare i risultati.
Dapprima è necessario richiamare alcuni concetti di notevole importanza.
Si ricorda che il differenziale di una funzione $f(x)$ è dato da

$$dy = f'(x)dx.$$

Nel problema in esame, poniamo $dx = \Delta x = 1$, per cui

$$dy = f'(x),$$

ossia il Costo marginale, definito uguale alla derivata della funzione Costo, coincide col differenziale, e quindi fornisce il costo dell'ipotetica unità aggiuntiva in produzione.
Da un punto di vista geometrico, occorre evidenziare che da

$$dy = f'(x)dx,$$

si ottiene, dividendo per $dx \neq 0$,

$$f'(x) = \mathrm{d}y/dx.$$

Poiché dy/dx è la pendenza della tangente alla curva rappresentazione grafica della funzione $y = f(x)$ in (x,y) e poiché $dx = \Delta x$, si ha che dy è la distanza della tangente rispetto alla parallela all'asse x per il punto (x,y) (Figura 1).

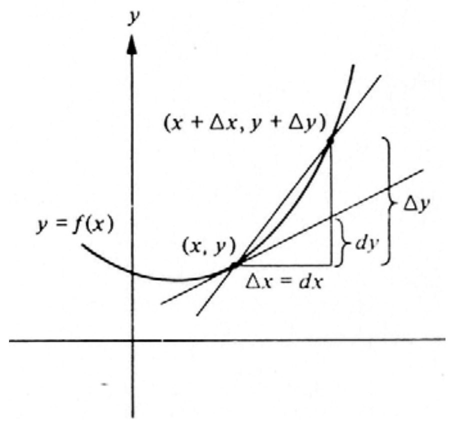


Figura 1

Nel problema assegnato, si applica quanto esposto al caso di $y = C(x)$, con x=50 e Δx=1:

$$\Delta y = C(x+\Delta x) - C(x) = C(51) - C(50),$$

mentre, secondo la definizione precedente,

$$dy = C'(x)\ \Delta x = C'(50) \cdot 1 = C'(50).$$

Siccome dy è una buona approssimazione di Δy, si ha che $C'(50)$ è una approssimazione di $C(51)$-$C(50)$. Si conclude che il costo marginale $C'(50)$ è una approssimazione del costo del successivo motorino, il 51-mo, e che in generale il costo marginale $C'(k)$ costituisce una buona approssimazione del costo del $(k+1)$-esimo prodotto.

Terza fase

Con un'opportuna scelta della scala, si può graficare la curva, una parabola, per ipotizzare per quali valori di x il costo di un motorino aggiuntivo è minimo e verificare che ciò avviene per valori prossimi, da sinistra, al massimo della funzione.

Nel testo assegnato, la variabilità di x era fissata nell'intervallo chiuso di estremi 0, 100; si studia ora l'andamento della funzione prescindendo da questi limiti, ma va precisato che non ha significato per il problema esaminare valori di x maggiori di quello per cui si raggiunge il massimo.

Si procede alla ricerca del massimo, determinando il valore di x che rende nulla la derivata della funzione costo:

$$C'(x) = 300 - x,$$

$$C'(x) = 0 \text{ , ossia } 300 - x = 0, \text{ per } x = 300.$$

Il massimo si raggiunge per $x = 300$, e risulta efficace far notare, anche graficamente, che, se l'intervallo di variabilità arrivasse a tale valore, il costo di un'ulteriore unità in produzione sarebbe minimo; si può comunque calcolarlo come in prima fase, da:

$$C(300) = 47000,\ C(299) = 46999{,}5$$

e risulta di soli 0,5 €:

$$C(300) - C(299) = 0{,}5.$$

Verso il teorema fondamentale del calcolo integrale

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare la derivata per calcolare la velocità istantanea di un moto. Usare l'integrale come strumento per il calcolo di aree. Riconoscere la relazione tra l'operazione di ricerca della tangente al grafico di una funzione e l'operazione di calcolo dell'area ad essa sottesa.	Integrale, primitiva di una funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo.	Relazioni e funzioni. Spazio e figure Numeri e algoritmi Misurare	Fisica

Contesto
Problemi di moto.

Scopo principale dell'attività è quello di far riconoscere agli allievi la relazione esistente fra le operazioni di derivazione e di integrazione di una funzione. Essa si colloca in un percorso che prevede, dopo la trattazione delle derivate, l'introduzione dell'integrale definito per il calcolo delle aree. Può essere svolta sia come introduzione al teorema fondamentale del calcolo integrale, sia come applicazione a posteriori. Le relazioni note fra spazio, tempo e velocità consentono, infatti, di anticipare o di rivedere il contenuto del teorema e la funzione integrale, prima di proseguire con l'introduzione dell'integrale indefinito. Non viene data in questa fase una dimostrazione del teorema; l'insegnante dovrà curare il collegamento tra le osservazioni qui esposte e la teoria svolta o da svolgere.
Il problema della ricerca dell'area di una figura nel piano cartesiano è affrontato prima con un approccio di tipo geometrico che conduce alla 'funzione area', poi con la ricerca di una primitiva della funzione di partenza. La riflessione sulla relazione esistente fra l'espressione algebrica della funzione di partenza e quella della funzione area induce alla formulazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. In tal modo il concetto di area assume un aspetto funzionale e prende corpo il concetto di *funzione integrale*.
Dal punto di vista della fisica, il problema mette in evidenza come la velocità di un moto possa essere ricavata attraverso la derivata della legge oraria, mentre la legge oraria si ottiene con una primitiva della velocità. Particolare attenzione va posta, in questo caso, alle unità di misura delle grandezze in gioco.

Descrizione dell'attività
L'attività modellizza una situazione concreta di moto che deve essere studiata nei tre registri: grafico, numerico e simbolico.
Può essere svolta dopo aver affrontato il concetto di integrale definito attraverso lo studio di aree di superfici piane a contorni curvilinei ed avere ricavato numericamente (ovviamente in alcuni casi opportuni) l'area sottesa al grafico di una funzione.

<u>Prima fase</u>
Si pone agli studenti il seguente problema.
Un treno merci si muove con velocità costante di 17 m/s; un secondo treno, su un binario parallelo, parte nell'istante in cui viene raggiunto e superato dal primo e viaggia ad una velocità espressa, in m/s, dalla formula $2t$, dove t è il tempo misurato in secondi. I due treni procedono nella stessa direzione: si può prevedere che il secondo treno superi il primo? Se sì, dopo quanti secondi dalla partenza?

I due moti del problema hanno leggi molto semplici; anche il dato numerico della velocità del treno merci è espresso inusualmente nelle unità di misura di *m/s* per facilitare la rappresentazione grafica. Esaminiamo quindi (Figura 1) i due grafici delle velocità v_1 e v_2 in funzione del tempo t:

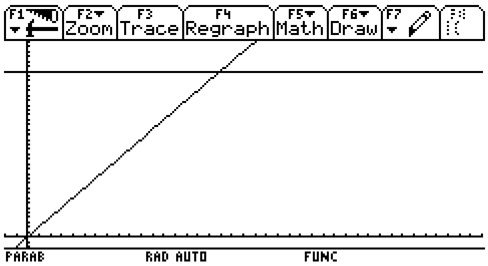


Figura 1

La figura non mette purtroppo bene in evidenza le unità di misura sui due assi: sull'asse delle ascisse è riportato il tempo t (in secondi) e sull'asse delle ordinate è riportata la velocità v (in m/s). Dunque il primo moto è rappresentato dalla funzione costante $v = v_1 = 17$, e il secondo dalla funzione $v = v_2 = 2t$.
I due grafici hanno un punto di intersezione per $t = 8{,}5$: significa forse che i due treni hanno percorso la stessa distanza dalla stazione dopo tale tempo? Se si riflette sul significato del grafico si ricava che dopo 8,5 secondi dal passaggio alla stazione i due treni hanno raggiunto la stessa velocità. Come ricavare le leggi orarie che permettano di rilevare il sorpasso?
Ricordando la relazione *spazio* = *velocità·tempo* (per un moto a velocità costante) possiamo ricavare lo spazio s_1 percorso dal primo treno nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e t come area di un rettangolo; riportando i valori dello spazio in funzione del tempo al variare di t otterremo la funzione $s_1(t)$ che indica la legge oraria del primo treno.

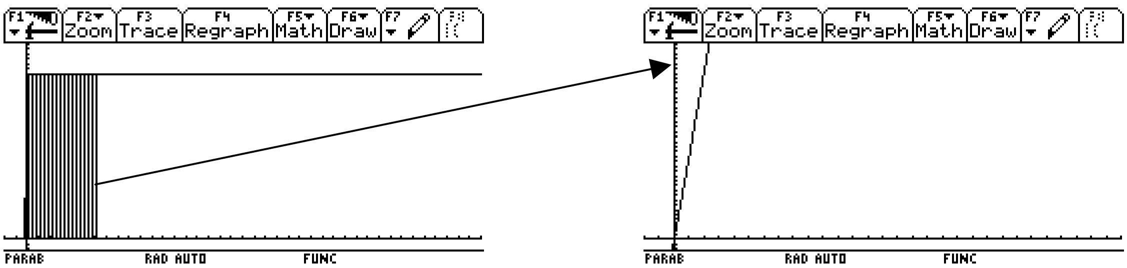


Figura 2 *Figura 3*

Nel grafico della Figura 2 è ombreggiata la parte di piano sottesa dalla retta v=17 nell'intervallo delle ascisse che va da 0 a 3: l'area vale 51; la freccia che collega la Figura 2 alla Figura 3 riporta i valori 3 e 51 come ascissa e ordinata di un punto che, si verifica facilmente, appartiene al grafico della retta s=17t). Analogo significato ha la freccia delle figure successive: nel caso di moto uniformemente accelerato sappiamo, dalla fisica, che lo spazio si calcola in base alla velocità media tra la velocità iniziale e quella finale (Figura 4), ed è quindi fornito dall'area del triangolo sotteso alla retta $v = 2t$; riportando i valori ottenuti, si ottiene il grafico $s = (v/2)t = t^2$ (figura 5).

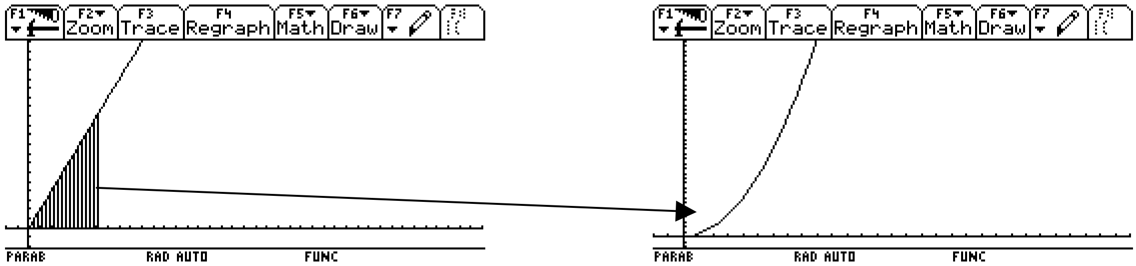


Figura 4 *Figura 5*

Occorre fare bene attenzione alla nuova unità di misura sull'asse delle ordinate: a prima vista si può porre il problema di associare grandezze di tipo diverso, come distanza percorsa e area. In sostanza sembrerebbe di collegare una grandezza che si misura in m^2 con una grandezza che si misura in m/s. Ma se si osserva bene il grafico di partenza si nota che le ordinate sono espresse in m/s, mentre le ascisse sono espresse in secondi s; l'area di una regione sottesa al grafico sarà quindi espressa in m/s per s, quindi in m.

E' facile ottenere geometricamente la formula della funzione s_1 come area di un rettangolo; facendo riferimento al simbolo di integrale definito come espressione dell'area sottesa ad un grafico si può scrivere che, dopo un tempo t di 3 secondi lo spazio percorso è:

$$s_1(3) = \int_0^3 17\,dt = 17 \cdot 3 = 51$$

In generale, facendo variare l'estremo superiore di integrazione, si trova la funzione

$$s_1(t) = \int_0^t 17\,dt = 17 \cdot t$$

Allo stesso modo, studiando il secondo grafico e applicando la formula dell'area di un triangolo si ottiene, al tempo $t = 3$

$$s_2(3) = \int_0^3 2t\,dt = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

ed in generale, al tempo t

$$s_2(t) = \int_0^t 2t\,dt = \frac{2t \cdot t}{2} = t^2$$

Al momento opportuno l'insegnante farà notare che gli esempi visti sono un caso particolare della relazione:

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

Nei due esempi svolti si sono ottenuti due integrali noti: una retta passante per l'origine ed una parabola con vertice nell'origine; gli studenti non dovrebbero avere difficoltà a trovare le coordinate del punto di intersezione, oltre al punto in cui è $t = 0$, con il semplice esame della tabella delle funzioni o con l'equazione $17t = t^2$, che fornisce la risposta al problema iniziale.

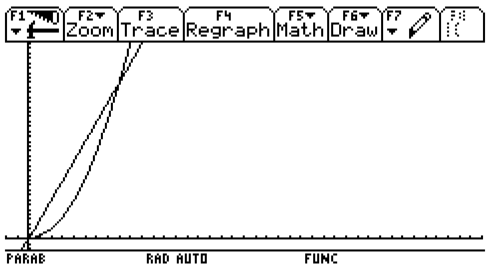


Figura 6

Seconda fase

L'insegnante domanda agli studenti se ritengono che ci sia una relazione fra le espressioni delle funzioni v_1 e s_1, v_2 e s_2. Propone, eventualmente, di riportale in una tabella per esaminarle in parallelo

v	**s**
17	$17t$
$2t$	t^2

Gli studenti dovrebbero rilevare facilmente che la funzione v è la derivata della funzione s, in entrambi i casi. Riprendendo qualche esempio precedente di calcolo di integrale definito con il metodo degli scaloidi inscritti e circoscritti, si potrà ipotizzare che:

v	**s**
1	t
$2t$	t^2
$3t^2$	t^3
$4t^3$	t^4
…	...
$f'(t)$	$f(t)$

Avendo già espresso lo spazio come integrale definito della velocità, si potrà anche ipotizzare, o ritrovare, che

$$f(t)=\int_0^t f'(t)\,dt$$

Terza fase

Avvalendosi delle proprietà di derivazione della somma di funzioni, e parallelamente, delle proprietà di additività delle aree, si possono costruire integrali di funzioni polinomiali, mantenendo sempre 0 come primo estremo.

$$\int_0^t (t^2+3t)dt=\int_0^t t^2dt+3\int_0^t tdt=\frac{t^3}{3}+3\cdot\frac{t^2}{2}$$

e quindi generalizzare con:

$$\int_0^t (f'(t)+g'(t))dt=\int_0^t f'(t)dt+\int_0^t g'(t)dt=f(t)+g(t)$$

Si ha così a disposizione uno strumento che permette di espandere il problema iniziale a partire da funzioni polinomiali qualsiasi.

Quarta fase

Nelle fasi precedenti si è lavorato su funzioni integrali con estremo inferiore sempre uguale a zero; si può proporre ora agli studenti un problema che conduca alla definizione di integrale indefinito, ritornando alle indicazioni consuete per le variabili. Le formule ottenute ci permettono inoltre di rinunciare a fare riferimento alle variabili spazio e velocità.

Problema

Calcolare l'area sottesa dal grafico di $y=2x$ nell'intervallo del dominio $2\leq x\leq 4$.
Ripetere il problema con il grafico di $y=x^2$.

I due grafici delle Figure 7 e 8 seguenti rappresentano le parti di piano di cui è richiesta l'area.

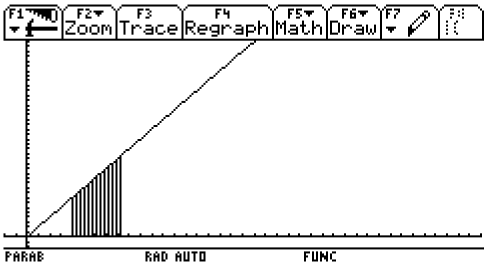


Figura 7

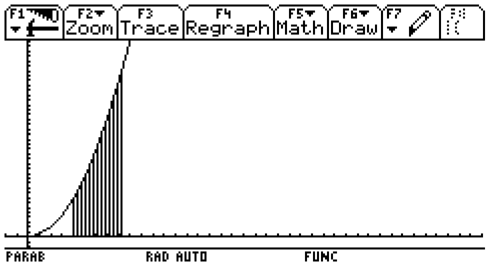


Figura 8

Se per la prima funzione gli alunni possono ancora ricorrere alla nota formula per l'area di un trapezio, nella seconda devono utilizzare quanto ricavato nelle fasi precedenti.
L'insegnante può suggerire loro di ricavare le aree indicate nelle Figure 9 e 10, che rientrano nella tipologia dei problemi svolti in precedenza; procedendo per sottrazione di aree, potranno trovare la soluzione richiesta.

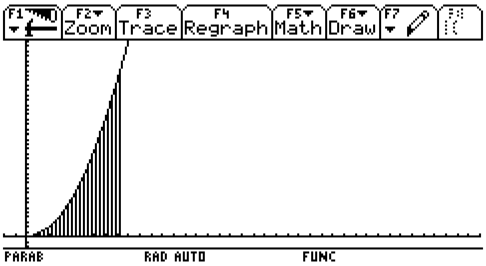


Figura 9

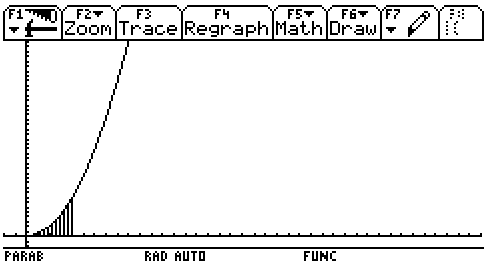


Figura 10

$$\int_2^4 x^2 dx = \int_0^4 x^2 dx - \int_0^2 x^2 dx$$

Problema

A partire dalla funzione $y=x^2$, individuare la funzione integrale H(t)= $\int_2^t x^2 dx$ che si ottiene mantenendo in 2 l'estremo inferiore e variando l'estremo superiore t.
Se si cambia ora l'estremo inferiore in 1, quale funzione integrale si ottiene? In che cosa differisce dalla precedente?
Cambiare ulteriormente l'estremo inferiore, assegnandogli successivamente i valori 0, -1 e 4. Disegnare i grafici delle funzioni ottenute: che cosa si può dire di tali grafici?

La Figura 11 evidenzia in modo significativo le relazioni fra le diverse funzioni primitive ottenute. Si noti che, a livello percettivo, la distanza tra le curve sembra diminuire: questo è vero se la distanza non viene misurata sulle rette parallele all'asse y.

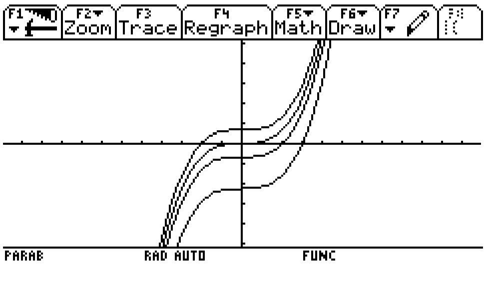


Figura 11

A questo punto dell'attività gli allievi dovrebbero possedere tutti i prerequisiti necessari all'introduzione dell'integrale indefinito, per ottenere così uno strumento più agile per il calcolo delle aree. L'insegnante può procedere dimostrando il teorema del calcolo integrale, o sfruttando operativamente i concetti che sono stati messi a fuoco nel corso dell'esperienza.

Elementi di prove di verifica

1. Area di un segmento parabolico
Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$ e la retta $y = 4$, determinare l'area del segmento parabolico racchiuso fra retta e parabola; verificare che tale area è equivalente ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo che ha per lato la corda individuata dal segmento parabolico, e per altezza la distanza tra la corda e la tangente alla parabola ad essa parallela.
Generalizzare la questione ricavando l'area del segmento parabolico racchiuso da una parabola di equazione $y = ax^2$ e dalla retta $y = 4$. Le aree del segmento parabolico e del rettangolo costruito come sopra sono ancora nel rapporto di $\frac{2}{3}$?

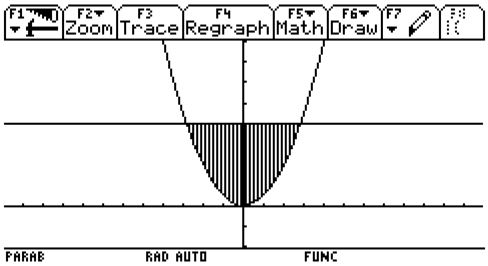


Figura 12

Il problema può essere esteso ad un segmento parabolico individuato sulla parabola da una retta non parallela all'asse x, ad esempio, per semplificare i calcoli, $y = x+6$ (Figura 13): si può verificare anche in questo caso l'invarianza del rapporto suddetto.

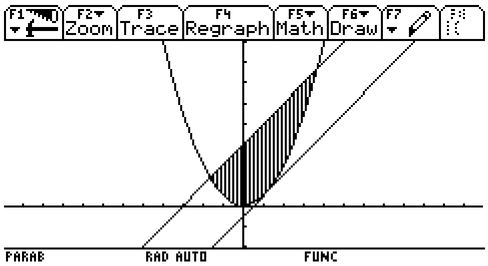


Figura 13

2. Data la parabola di equazione $y = x^2$ determinare quale deve essere la pendenza m di una retta di equazione $y = mx$ in modo che l'area della superficie racchiusa tra retta e parabola valga $\frac{4}{3}$.

3. La velocità di un treno, che sta facendo manovra su un binario, è data, in metri al minuto, dalla formula $v(t) = 7(t^2 - 4t + 3)$, dove t è il tempo (nota: la velocità può essere positiva o negativa).

a. Calcolare la posizione della locomotiva 5 minuti dopo la partenza.
b. Calcolare la distanza totale percorsa dalla locomotiva nei 5 minuti dopo la partenza.

(Nella domanda b, il segno dell'area va preso col segno positivo nel tratto $1 < t < 3$, cioè l'integrale va calcolato sul modulo della velocità).

Il lancio di un paracadutista

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative. Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale. Ricorrere a mezzi tecnologici disponibili per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte.	Funzioni polinomiali. Funzioni definite a tratti. La funzione esponenziale. Approfondimento del concetto di limite. Derivata e differenziale di una funzione.	Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Modellizzazione matematica di un problema fisico.

Questa proposta costituisce un valido esempio di attività interdisciplinare. Si tratta dello studio di un moto che può essere descritto in prima approssimazione mediante modelli matematici semplificati, diversi al variare delle condizioni iniziali. Tali modelli sono riconducibili al secondo principio della dinamica e mostrano che in ciascuno dei casi esaminati il moto di caduta di un paracadutista tende a diventare stazionario.
Per poter svolgere l'attività si deve supporre che gli studenti già conoscano il modello di crescita lineare, le leggi del moto uniformemente accelerato e le leggi della dinamica.

Descrizione dell'attività
Si propone agli studenti il seguente problema.
Un paracadutista si lancia da un aereo. Sappiamo che ad un certo punto, grazie all'effetto del paracadute, il suo moto di caduta tende a diventare uniforme, con una velocità (asintotica) che viene denominata velocità limite.
Vogliamo allora capire come spiegare questo fatto, studiando come varia la velocità di caduta del paracadutista in funzione del tempo, secondo che il paracadute si apra: 1) appena egli ha abbandonato l'aereo; 2) nell'istante in cui egli raggiunge una velocità di caduta esattamente pari alla velocità limite; 3) in un istante in cui la sua velocità ha superato il valore della velocità limite.
Ipotizziamo che la forza dovuta alla resistenza dell'aria sia proporzionale alla velocità del paracadutista e che la spinta di Archimede agente sul paracadutista sia trascurabile.

Quando il paracadute è aperto, il paracadutista è soggetto alla forza di gravità, che può essere ritenuta costante, ed alla forza di resistenza dell'aria (forza di attrito viscoso), la quale risulta (anti)proporzionale alla velocità. Il modello matematico per analizzare il problema può essere implementato mediante un foglio elettronico. In una prima colonna si tabulano i valori degli istanti di tempo, in una seconda colonna i corrispondenti valori della velocità di caduta, ottenuti mediante la legge lineare $v=v_0+a\Delta t$, utilizzando come velocità iniziale quella relativa all'istante precedente, come accelerazione ancora quella relativa all'istante precedente e come intervallo di tempo Δt il valore (arbitrariamente fissato) utilizzato per incrementare gli istanti di tempo; nella terza colonna del foglio elettronico si tabula invece l'accelerazione di caduta del paracadutista, ottenuta dalla formula $a=(mg-kv)/m$, dove m è la massa del paracadutista, k una costante fisica (nota di volta in volta), che tiene conto della forma del paracadute e della viscosità dell'aria, e v è il valore della velocità indicato nella corrispondente casella della seconda colonna.
Nel caso in cui il paracadute si apra fin dall'istante iniziale, il modello prevede una crescita esponenziale per la velocità di caduta ed una decrescita esponenziale per l'accelerazione. Si riconoscono così un minimo assoluto ed un estremo superiore nei valori della velocità ed un massimo assoluto ed un estremo inferiore nei valori dell'accelerazione.
Nel caso in cui, invece, il paracadute si apra quando il paracadutista raggiunge la velocità di caduta limite, nella descrizione del fenomeno si susseguono due diverse modellizzazioni: la prima prevede una crescita lineare per la velocità ed un valore costante dell'accelerazione, mentre la seconda prevede un valore costante sia per la velocità che per l'accelerazione.
Infine, nel caso in cui il paracadute si apra dopo che il paracadutista ha raggiunto una velocità di caduta superiore alla velocità limite, si susseguono nuovamente due modellizzazioni: la prima prevede una crescita lineare per la velocità ed un valore costante per l'accelerazione, mentre la seconda prevede una decrescita esponenziale sia per la velocità che per la accelerazione.
Nei tre i casi si riconoscono tutte le osservazioni che si sono in precedenza effettuate mediante un'attenta lettura dell'andamento dei grafici delle funzioni che esprimono la variazione nel tempo della velocità e dell'accelerazione del paracadutista (i grafici possono essere realizzati, ad esempio, mediante un foglio elettronico).

L'attività proposta agli studenti può eventualmente iniziare con un approccio al problema di tipo sperimentale, da portare avanti in collaborazione con l'insegnante di fisica in laboratorio. Durante tale attività si suggerisce di far eseguire agli studenti alcuni esperimenti che simulino la situazione descritta nel problema, come ad esempio la caduta di una sfera in un liquido viscoso (in questo caso, naturalmente, non si può seguire il moto istante per istante, a meno che non si possieda un'apparecchiatura di rilevazione on-line sufficientemente raffinata). Si può comunque osservare direttamente che il corpo si muove praticamente di moto uniforme e che quindi si realizza proprio la condizione asintotica prevista dal modello.

Un quesito teorico cui è opportuno che gli studenti provino comunque a rispondere nelle fasi iniziali dell'attività, consiste nella spiegazione del perché il valore della velocità di caduta limite del paracadutista sia esprimibile mediante la formula $v_{\lim} = \dfrac{mg}{k}$. A tal proposito, è significativo far ricercare agli studenti alcuni dati relativi al valore della costante fisica k perché essi possano cimentarsi nel prevedere con quale velocità (all'incirca) finisce con l'arrivare a terra il paracadutista.

Ad ogni modo l'attività di tipo sperimentale nel laboratorio di fisica deve essere affiancata da una simulazione numerica realizzata con un foglio elettronico, per concludersi con un confronto tra i risultati di tale analisi numerica e del modello matematico soggiacente, che richiede di risolvere l'equazione differenziale $mg+kv=ma=m\frac{dv}{dt}$, sotto diverse condizioni iniziali. Ovviamente non è necessario che questa operazione sia eseguita dagli studenti in prima persona, ai quali può essere nel caso comunicato soltanto il risultato esatto dell'integrazione dell'equazione differenziale, affinché al più eseguano una verifica della bontà della soluzione.

Per completezza si trascrivono qui di seguito le soluzioni esatte relative alla funzione $v = v(t)$ (in m/s) nelle tre situazioni, per $t \geq 0$:

1° caso: $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \end{cases}$;

2° caso: $\begin{cases} v(0) = \frac{mg}{k} \\ v(t) = \frac{mg}{k} \end{cases}$;

3° caso: $\begin{cases} v(0) = 2\frac{mg}{k} & \left(\text{valore rappresentativo dei casi in cui } v(0) > \frac{mg}{k}\right) \\ v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 + e^{-\frac{k}{m}t}\right) \end{cases}$.

A titolo di esempio si riportano alcune parti delle tabulazioni ottenute con un foglio elettronico in un caso particolare in cui si hanno i seguenti dati:
m = massa del paracadutista e del suo equipaggiamento = 70 kg;
g = accelerazione di gravità = 9,8 m/s^2;
k = costante di proporzionalità diretta tra la forza di attrito viscoso dell'aria e la velocità del paracadutista = 50 (N · s)/m.
In questa situazione la velocità limite del paracadutista è pari a circa 13,72 m/s, ovvero circa 49,4 km/h. Inoltre il tempo necessario al paracadutista in caduta libera per raggiungere tale valore della velocità di caduta ammonta a circa 1,4 s.

Nel primo caso, come già indicato, si ammette che il paracadute si apra immediatamente dopo il lancio, all'istante t = 0. I valori tabulati (il tempo è in secondi; i dati tabulati contengono un numero di cifre superiore a quello delle cifre significative) mostrano chiaramente l'avvicinamento asintotico della velocità verso il valore limite sopra calcolato ed il corrispondente avvicinamento dell'accelerazione a zero. Nella Tabella 1 si vedono gli andamenti della velocità e dell'accelerazione in alcuni istanti dei primi 3 secondi del moto e dell'intervallo compreso tra il diciassettesimo ed il diciannovesimo secondo, quando è ormai evidente il carattere asintotico verso i due valori previsti della velocità e dell'accelerazione del paracadutista, rispettivamente 13,72 m/s e 0 m/s^2.

t	*v*	*a*
0	0	9,8
0,1	0,98	9,8
0,2	1,96	9,1
0,5	4,485	7,15
0,7	5,859643	6,085714
1,6	9,914021	2,946699
2	10,96274	2,134747
2,7	12,15146	1,21441
3	12,4883	0,953615
17	13,71998	1,2E-05
17,3	13,71999	9,44E-06
17,6	13,71999	7,41E-06
18	13,71999	5,37E-06
18,4	13,71999	3,89E-06
18,9	13,72	2,6E-06
19	13,72	2,4E-06

Tabella 1

Nel secondo caso si ipotizza che il paracadute si apra esattamente dopo 1,4 s dalla partenza del paracadutista. In questa situazione, mentre la soluzione teorica prevede che la velocità rimanga costante durante tutto il moto di caduta successivo all'apertura del paracadute, il modello discreto mette in evidenza i suoi limiti: l'errore che si produce può comunque essere ridotto, rimpiccolendo l'incremento di tempo Δt, a costo però di accumulare una gran quantità di dati. In effetti accade che il modello discreto (i cui risultati sono in parte riportati qui di seguito, in corrispondenza ad incrementi di tempo pari a 0,005 s) preveda che si abbia una piccola variazione di velocità immediatamente dopo l'istante t=1,4 s, quando il modello teorico imporrebbe invece che la velocità rimanesse costante (Tabella 2). Estendendo la tabulazione dei dati, riapparirebbe comunque chiara la tendenza asintotica della velocità verso il valore limite previsto di 13,72 m/s.

t	*v*	*a*
0	0	9,8
0,005	0,049	9,8
0,01	0,098	9,8
0,025	0,245	9,8
0,03	0,294	9,8
0,045	0,441	9,8
0,05	0,49	9,8
1,39	13,622	9,8
1,4	13,72	9,8
1,405	13,769	2,44E-14
1,41	13,769	-0,035
1,425	13,76848	-0,03475
1,43	13,7683	-0,03463
1,45	13,76761	-0,03413
1,48	13,7666	-0,0334
1,485	13,76643	-0,03328
1,5	13,76593	-0,03293

Tabella 2

Nel terzo caso, infine, si ipotizza che il paracadute si apra dopo 2 secondi dall'inizio del lancio, ovvero 0,6 s dopo che è stata raggiunta, in caduta libera, la velocità limite. Si mostrano qui sotto alcuni dei dati che si ottengono mediante un foglio elettronico per i primi 6 secondi del moto, con incrementi di tempo pari a 0,2 s (Tabella 3).

t	*v*	*a*
0	0	9,8
0,2	1,96	9,8
0,4	3,92	9,8
0,6	5,88	9,8
1	9,8	9,8
1,6	15,68	9,8
2	19,6	9,8
2,2	21,56	-4,2
2,6	19,6	-5
3	17,76	-3,48571
3,8	15,61306	-1,6344
4	15,28618	-1,35219
4,8	14,45375	-0,6335
5	14,32705	-0,52411
5,8	14,0044	-0,24554
6	13,9553	-0,20315

Tabella 3

Dopo circa 14 secondi dalla partenza appare già del tutto evidente il carattere stazionario del moto (Tabella 4). È indubbiamente molto istruttivo discutere con gli studenti sul reale significato fisico attribuibile ai valori ottenuti per l'accelerazione di caduta, espressi da numeri negativi molto vicini a zero. È una riflessione da collegare con la problematica della misura in laboratorio delle grandezze fisiche e che ha senso anche in relazione alle tabulazioni dei valori relativi alle prime due situazioni esaminate.

t	*v*	*a*
14	13,72012	-0,0001
14,4	13,72008	-7,1E-05
15	13,72005	-4E-05
15,6	13,72003	-2,3E-05
16,2	13,72001	-1,3E-05
16,8	13,72001	-7,3E-06
17,4	13,72	-4,1E-06
18	13,72	-2,3E-06

Tabella 4

A conclusione dell'attività si riportano per completezza tre grafici che visualizzano l'andamento delle funzioni *v(t)* ed *a(t)* ottenuto in base ai dati dell'elaborazione numerica realizzata con un foglio elettronico.

Visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni v(t) e a(t) nel primo caso, relativamente ai primi 100 valori tabulati.

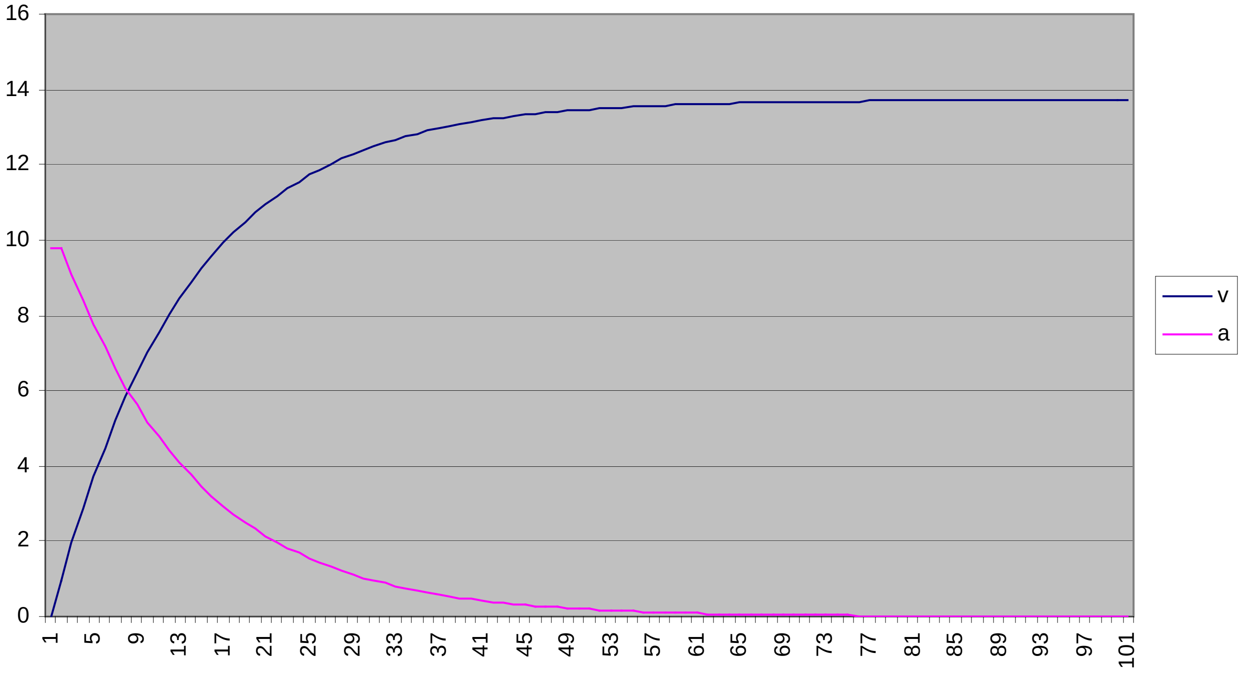


Figura 1

Visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni v(t) e a(t) nel secondo caso, relativamente ai primi 300 valori tabulati.

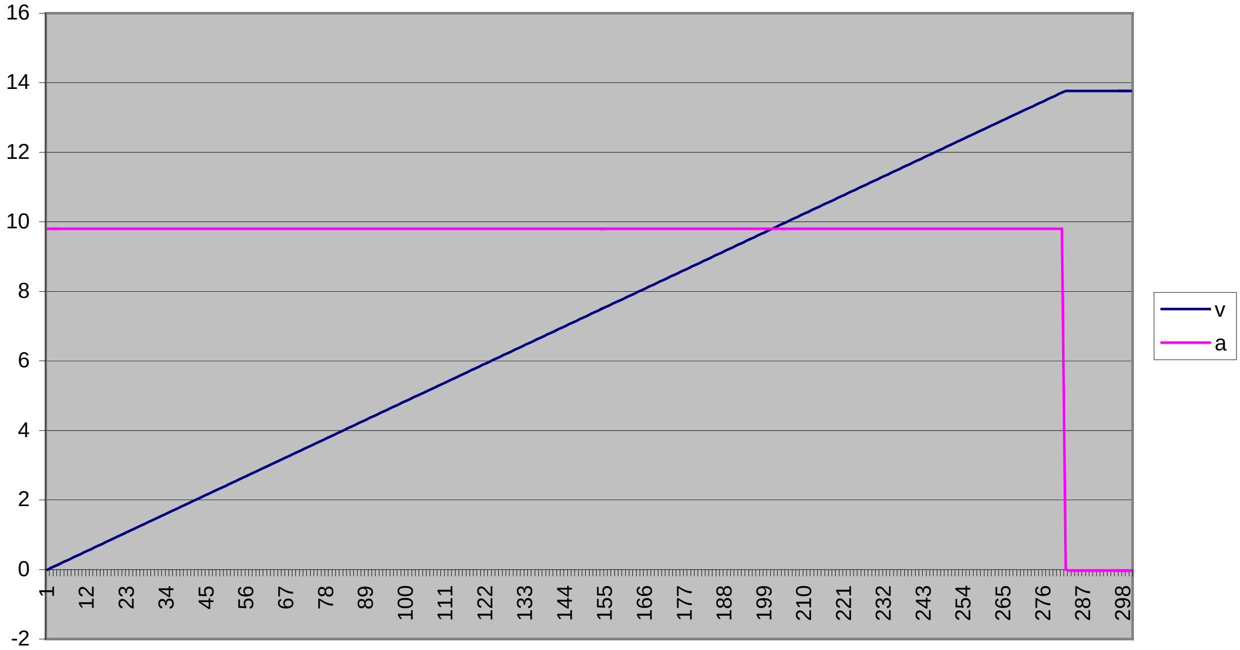


Figura 2

Visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni v(t) e a(t) nel terzo caso, relativamente ai primi 200 valori tabulati.

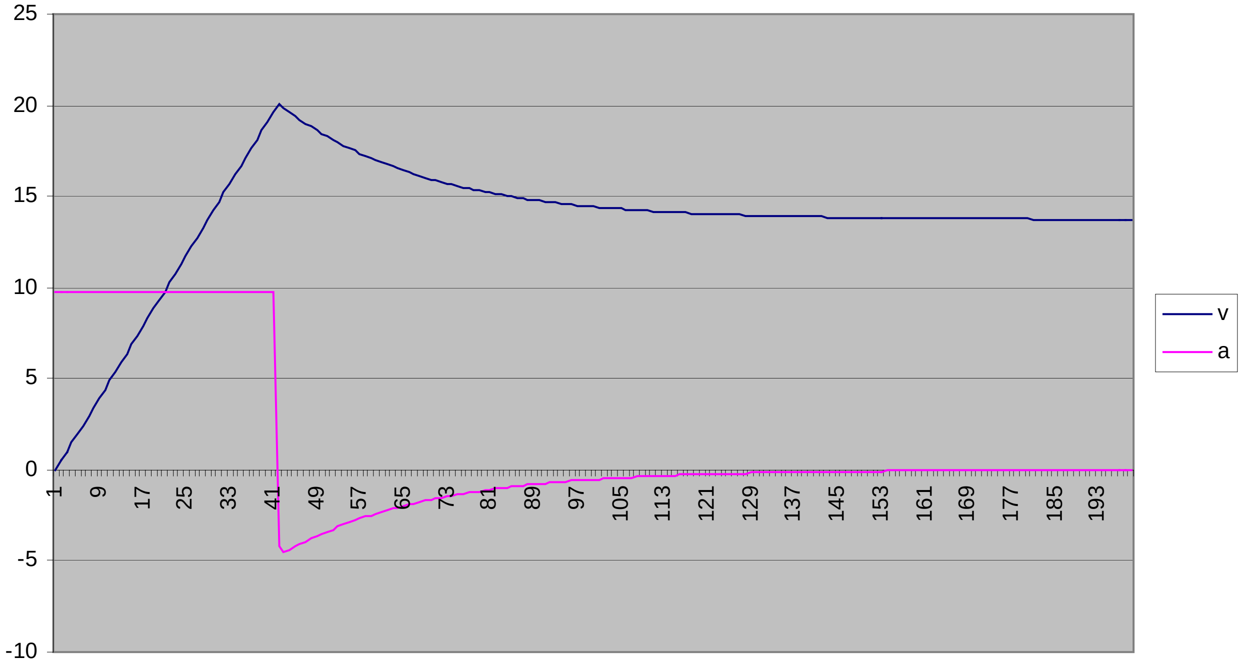


Figura 3

Elementi di prove di verifica

1. Dopo aver somministrato dosi diverse di una certa sostanza a 3 gruppi di cavie affette da una certa malattia, si è constatata la seguente relazione tra le dosi somministrate e le percentuali di mortalità:

dose 2 mortalità 16%
dose 4 mortalità 10%
dose 8 mortalità 22%

Supponendo che la percentuale di mortalità y sia esprimibile in termini della dose somministrata mediante una funzione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, calcolare la dose ottimale (ossia la dose che rende minima la percentuale di mortalità delle cavie).

2. In uno strano paese chi ha un reddito inferiore a € 10000 deve pagare, come tasse, il 10% del suo reddito; chi guadagna € 10000 o più deve invece pagare il 20%. Disegnare il grafico del reddito netto in funzione del reddito lordo, verificando che in un punto la funzione è discontinua.
Calcolare poi:

a) con quale stipendio inferiore a € 10000 un cittadino, pagate le tasse, si trova nelle stesse condizioni di chi guadagna € 10000;
b) quali degli stipendi superiori a € 10000 risultano preferibili a tutti quelli inferiori a € 10000.

3. In quali punti sono derivabili le seguenti funzioni?

$$f(x) = |x-1| + |x-3| \quad , \quad f(x) = |x^2 - 4| \ .$$

Calcolare le derivate dove esse esistono e dimostrare che negli altri punti esistono le derivate a destra e a sinistra e calcolarle.

4. Da una torre a pianta circolare, di raggio r, escono contemporaneamente due persone che camminano a velocità non necessariamente uguale: una esce dal lato nord e si dirige verso nord; l'altra esce dal lato sud e si dirige verso est. Dopo che la prima ha percorso x metri e la seconda y metri, esse possono vedersi. Studiare l'andamento di y in funzione di x.

5. Il rapporto tra un numero reale e la radice cubica di un altro numero reale è 1. Determinare come varia un numero in funzione dell'altro.

6. Studiare come varia la somma di un numero reale col suo inverso moltiplicativo.

7. Data una funzione f, definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, come segue:

$$f(x) = x^2 \text{ se } 0 \le x \le \pi/2 \ ; \ f(x) = \pi^2/4 \text{ se } \pi/2 < x < \pi,$$

e tale che $f(-x) = f(x)$, disegnarne il grafico, stabilire se nel dominio è continua e derivabile ed eventualmente disegnare il grafico della funzione derivata.

8. Dimostrare che la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x$ nel punto di ascissa x_0 interseca l'asse delle ascisse nel punto $(x_0 - 1)$, comunque si scelga x_0.

9. Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$(2^n - 1)/(2^n + 1) \ , \ n^2/(1 + 2 + 3 + ... + n) \ , \ (1 - 1/n)^{-n} \ .$$

10. Tenendo presente che il limite della successione $1/n$ è 0 (verificare tale affermazione), calcolare il limite delle successioni:

$$(n + 1)/n \; , \; (2n + 1)/n \; , \; n/(2n+3).$$

11. Tenendo presente che $n^k \geq n$, per ogni $n \geq 1$ e per ogni $k > 1$, calcolare il limite della successione $1/n^k$, per n che tende a $+\infty$. Dai risultati ottenuti, calcolare il limite delle successioni:

$$n^2/(n^2 + 1) \; , \; (2n^2 + 1)/n^2 \; , \; (n^2 + n + 1)/(n^2 +1).$$

12. Si indichi con $[\, x\,]$ l'approssimazione intera per difetto del numero reale x; studiare la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = x - [\, x\,] \, .$$

a) tracciare il grafico di $f(x)$;
b) verificare che f(x) è periodica di periodo 1;
c) verificare che f(x) è continua in ogni x non intero, mentre nei punti interi ha limite a sinistra uguale a 1 e a destra uguale a 0;
d) quale conclusione si può trarre?
e) determinare gli estremi di f su $\Re$ e stabilire se sono anche massimi e minimi.

13. Calcolare il limite, per x che tende a $+\infty$, della funzione

$$\sqrt{x^2 + 1} - x$$

Se al posto di $(x^2 + 1)$ si avesse $(x^2 + a)$, con a reale, cambierebbe il risultato precedente?

14 Date, in $\Re$, le funzioni

$$f(x) = x^2 - 2x \qquad f(x) = x^2 + 4 \qquad f(x) = (x - 1)^2,$$

rappresentarle graficamente, e studiare le funzioni $g(x) = 1/f(x)$, con particolare riferimento agli intorni dei valori non appartenenti al dominio.
Generalizzare i risultati precedenti, considerando una generica parabola.

15. Ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int 2xe^{x^2}dx \quad , \qquad \int 3x^2 \cos x^3 dx \, , \qquad \int \frac{2x}{1+x^2}dx \quad , \qquad \int \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx \, .$$

16. Data la funzione costante di equazione $f(x) = c > 0$, definita sull'intervallo $I = [0,b]$, disegnare il trapezoide T corrispondente, calcolarne l'area e scrivere l'equazione della funzione $A(x)$ al variare di x in I.
Generalizzare, considerando l'intervallo $I = [a,b]$.

17. Calcolare l'area α sottesa dal ramo di iperbole equilatera di equazione $y = 1/x$, nell'intervallo $[1,3]$.

18. Scrivere l'equazione della funzione integrale $F(x) = \int_1^x 1/t \; dt$.

19. Considerati i punti $x_1 = a$, $x_2 = k\, x_1$, $x_3 = k\, x_2$,…, $x_n = k\, x_{n-1}$,... in progressione geometrica di ragione k, verificare che le relative aree sottostanti all'iperbole variano in progressione aritmetica.

Riferimenti bibliografici

Andreini, M.; Manara, R.; Prestipino, F., (1998), *Matematica controluce*, McGraw-Hill, Milano.

Castelnuovo, E.; Gori Giorni, C.; Valenti, D., (1988), *La Scienza: elementi di analisi matematica*, La Nuova Italia, Firenze.

Barozzi, G.C.; (1996), *Corso di analisi matematica*, Zanichelli, Bologna.

Campbell, H.G.; Spencer, R. E.; (1977), *Finite Mathematics and Calculus*, Macmillan Publishing Co., New York.

Menghini, M.; Barsanti, M., (1988) *Strategie matematiche: problemi di analisi*, Pitagora, Bologna.

Villani, V., (1997), *Matematica per discipline biomediche*, McGraw-Hill, Milano.

Prodi, G., (1997), *Istituzioni di Matematica*, McGraw-Hill, Milano.

DATI e PREVISIONI

Elenco delle attività

Conviene rispondere a caso?

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Spiegare il concetto e la funzione "variabile aleatoria". Utilizzare il teorema centrale del limite, approssimando le probabilità dalla distribuzione binomiale a quella normale. Determinare i parametri di una distribuzione ed usarli, eventualmente, anche per costruire la distribuzione gaussiana approssimante.	La distribuzione binomiale: il suo uso e le sue proprietà. La distribuzione normale: il suo uso e le sue proprietà.	Dati e previsioni Argomentare, congetturare, dimostrare.	Italiano Società civile

Contesto
Sociale: istruzione.

L'attività nasce dalla curiosità degli studenti circa la possibilità di affrontare con più o meno chances, avendo studiato in modo superficiale, un compito scritto a scuola formulato con domande a risposta multipla (ricordiamo che anche l'esame per la patente automobilistica e l'esame per il certificato di conoscenza della lingua inglese sono prove di valutazione di questi tipo).
In effetti la tentazione dello studente di "indovinare" la risposta esatta è molto forte, stimolato anche da considerazioni del mondo esterno. Nei mass media sono poi presenti molti giochi a premi in cui appare lampante il fatto che la fortuna gioca un ruolo predominante: questo può portare a pensare che rispondere bene è più facile di quanto si possa credere.

Descrizione dell'attività:
Si cerca di far capire, attraverso precise considerazioni probabilistiche, che cercare di rispondere a caso, sia in un compito in classe costituito da domande a risposta multipla, sia nel caso di test attitudinali nei momenti di assunzione al lavoro, non è sempre "pagante" dal punto di vista del risultato.
Supponiamo di dare una serie di 10 domande a risposta multipla, ciascuna con 4 possibili risposte, una sola delle quali è corretta. Si suppone anche che ogni domanda sia *indipendente* dalle altre. Ci si può allora chiedere: *Segnando a caso le risposte, qual è la probabilità di rispondere esattamente a 3 domande? Qual è la probabilità di rispondere esattamente a meno di 3 domande? E a più di 8 ? Qual è il numero atteso di risposte esatte ?*
Per rispondere alle domande precedenti è opportuno *ricorrere* al modello binomiale che fornisce le probabilità di ottenere k successi su N prove indipendenti:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k (1-p)^{N-k}, \qquad \text{con } 0 \le k \le N,$$

dove p è la probabilità di avere un successo in ciascuna *prova* e X è il numero (incognito) di successi, cioè di volte in cui si realizza l'evento a cui siamo interessati, su N prove.

L'insegnante, anche con l'uso del foglio elettronico, può guidare gli studenti a rilevare le caratteristiche del modello binomiale, la cui corrispondente distribuzione è indicata con X ~ Bi(N, p), al variare di N e p. Fa notare che: 1) per p = 0,5 la distribuzione è simmetrica per ogni valore di N; 2) al crescere di N la distribuzione tende ad assumere una forma a campana; 3) il valor medio di X è uguale a N·p; 4) la varianza di X è uguale a N·p·(1-p).
Con riferimento alla serie delle 10 domande, se si sceglie a caso una delle quattro risposte, la probabilità di indovinare la risposta esatta è $\frac{1}{4}$. La probabilità di *rispondere* esattamente (a caso) a 3 domande su 10 è fornita da:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^7 \cong 0{,}25$$

La probabilità di rispondere esattamente a meno di 3 domande è:

$$P(X<3)=\sum_{k=0}^{2}\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{10-k} \cong 0{,}53$$

La probabilità di rispondere a più di 8 domande è:

$$P(X>8)=\sum_{k=9}^{10}\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{10-k} \cong 0{,}000030$$

Il numero atteso delle risposte esatte è: N·p = $\frac{10}{4}$ = 2,5
L'insegnante può far notare che, se il numero N delle domande diventa grande, la valutazione della probabilità, usando la distribuzione binomiale, diventa difficile dal punto di vista computazionale. In questo caso ci aiuta la teoria che dice che è possibile usare la distribuzione normale al posto della distribuzione binomiale, purché p sia non eccessivamente piccolo né troppo grande (ad es. compreso fra 0,2 e 0,8). Allora, per un fissato valore del numero dei successi, si ha:

$$P(X=k_1)=\binom{N}{k_1}\cdot p^{k_1}(1-p)^{N-k_1} \cong \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k_1-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dove μ= N·p; $\sigma=\sqrt{N\cdot p\cdot(1-p)}$.

Se il test è costituito da 300 domande ciascuna con 4 possibili risposte, ci possiamo chiedere:
Qual è la probabilità di rispondere a caso correttamente a 70 domande?
Qual è la probabilità di rispondere correttamente ad almeno 70 domande?
Qual è il numero minimo di risposte esatte affinché la probabilità di superare tale valore sia 0,23?

Per calcolare la probabilità di rispondere correttamente a 70 domande, usando l'approssimazione alla normale (e quanto detto nella Nota precedente), sarà sufficiente sostituire nella distribuzione di probabilità a X il valore 70, a μ il valore N·p = $\frac{300}{4}$ = 75 e a σ il valore $\sqrt{Np(1-p)}$ = 7,5. Sostituendo dunque in:

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ i valori assegnati, otteniamo P(X=70) = *f*(70) = 0.042

Per calcolare P(X $\geq$ 70) si usano le Tavole della distribuzione normale standardizzata in corrispondenza al valore $t = \frac{k - 0.5 - \mu}{\sigma}$, sostituendo a k il valore 70, a μ il valore 75 e a σ il valore 7,5. Si ottiene:

P(X $\geq$ 70) = $P\left(Z \geq \frac{69{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \geq -0.73) = 1 - P(Z \leq -0.73) = 0.7673$.

Per l'ultima domanda il procedimento è inverso: nota una probabilità si vuol ricercare il valore corrispondente di X, numero di risposte corrette.
Sulle Tavole della distribuzione normale si ricerca il valore t in corrispondenza a:

$$P(Z \geq t) = 0{,}23$$

e si ricava dalla relazione $t = \frac{k - 0{,}5 - \mu}{\sigma}$ il valore di k.
Nel nostro esempio t = 0,74 per cui k=0,74σ+μ + 0,5 = 81,05.
Quindi il numero minimo di domande a cui rispondere correttamente è 81.

A questo punto siamo anche pronti a rispondere a domande del tipo:
Come opera una industria che cerca un responsabile del personale del tipo "capace come ce ne sono solo 4 su 10000 al mondo"?
Occorre impostare l'equazione P(X $\geq$ n) = 0,0004 in cui n rappresenta l'incognita, ovvero il numero minimo di domande alle quali dovrà rispondere correttamente il candidato per essere uno dei "4 su 10000".
Supponiamo che l'esperienza del passato ci dica che al nostro test attitudinale i candidati sanno rispondere mediamente bene a solo 100 domande su 300, con uno scarto quadratico medio pari a 10. Dunque abbiamo ancora bisogno delle Tavole della distribuzione normale standardizzata.
L'equazione da risolvere è: P(Z $\geq$ t) = 0,0004 in corrispondenza al valore $t = \frac{n - 0{,}5 - 100}{10}$.
Si ricava, come nella domanda precedente, il valore t = 3,38 per cui n = 3,38·σ + μ + 0,5 = 134,3.
Il nostro candidato, per essere preso in considerazione, dovrà dunque essere capace di rispondere ad almeno 134 domande su 300.

Nota per il docente. Da considerazioni di analisi matematica (teorema del valor medio integrale) sappiamo che possiamo scrivere l'ultima approssimazione. Essa ci permetterà di approssimare il valore cercato "direttamente" come il valore che la funzione di densità prende nel punto "numero dei successi".

La funzione di densità di probabilità del modello normale risulta:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{con x reale,}$$

al variare di μ e σ, in particolare partendo da μ=0 e σ=1.
Se si vuole calcolare per una binomiale la probabilità di un numero di successi compreso fra k_1 e k_2 usando l'approssimazione con la distribuzione normale si ha:

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{N}{k} \cdot p^k (1-p)^{N-k} \cong \int_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_2+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2} dk$$

Se nell'integrale si effettua la sostituzione $t = \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, l'integrale diventa:

$$\int_{\frac{k_1-0,5-\mu}{\sigma}}^{\frac{k_2+0,5-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma \, dt$$

Questa è la valutazione numerica della probabilità, che la variabile normale *standardizzata* (cioè quella che ha media 0 e deviazione standard 1) assuma un valore nell'intervallo $\left(\dfrac{k_1-0,5-\mu}{\sigma}, \dfrac{k_2+0,5-\mu}{\sigma}\right)$.

Essa viene fornita da Tavole numeriche in quanto è noto, sempre dall'analisi matematica, che la funzione e^{-t^2} è una delle funzioni che non ammette primitiva esprimibile in termini elementari (questo è il motivo per cui su ogni libro di fisica, di statistica, di probabilità, ... sono riportate le Tavole della distribuzione normale).

Esempi di prove di verifica

1. Se si lancia 15 volte una moneta perfetta, qual è la probabilità di avere esattamente 11 Teste ?

2. Se si lancia 15 volte una moneta perfetta, qual è la probabilità di avere almeno 11 Teste ?

3. Quanti lanci di un dado si prevede di dover fare perché sia 0,95 la probabilità di avere almeno una volta il numero 6 ?

4.
a) In un test vi sono 150 domande. Per esperienza passata si sa che i candidati rispondono correttamente a 9 domande su 10. Mediamente quante risposte corrette darà un candidato?
b) In un test vi sono 150 domande. Per esperienza passata si sa che i candidati rispondono correttamente 2 volte su 3. In media, quante risposte corrette darà un candidato? E con quale scarto quadratico medio? In un test vi sono 150 domande con 5 risposte per ogni domanda. Se un candidato risponde a caso, a quante domande risponderà correttamente in media?

5. Un insegnante porta la sua classe in settimana bianca. Si sa che ogni studente ha la probabilità $\dfrac{1}{100}$ di farsi male sciando e che l'insegnante riesce a riportare incolumi tutti gli studenti a scuola 3 volte su 4. Si può dare una stima del numero di allievi che l'insegnante ha in quella classe ?

Campioni e “forchette”

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Spiegare il concetto e la funzione “variabile aleatoria”. Costruire un campione casuale semplice, data una popolazione. Stimare una proporzione, o la media di una popolazione, attraverso una consapevole costruzione di stime puntuali e intervalli di confidenza.	Campionamento casuale semplice e distribuzione campionaria della proporzione e della media. Stima puntuale e intervallo di confidenza per la proporzione e per la media.	Dati e previsioni Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	Italiano Società civile Storia

Contesto
Sociale

I mezzi di comunicazione di massa ci hanno abituati all’uso dei sondaggi i cui risultati dipendono da un campione. Il ricorso ad esempi tratti dalla vita quotidiana motiverà gli studenti al tema di questa attività che intende sviluppare semplici metodi di campionamento al fine di evidenziarne le caratteristiche principali e di comprenderne i limiti con particolare riferimento alla stima della proporzione.

Descrizione dell’attività
Un campione è un sottoinsieme dell’intera popolazione. Le informazioni estratte vengono utilizzate per trarre delle conclusioni più generali riferite a tutta la popolazione di cui il campione osservato è solo una parte.
La validità delle conclusioni tratte e il controllo sull’errore che si commette usando una parte anziché il tutto dipendono dal modo in cui l’estrazione è effettuata.
I motivi che giustificano l’uso di un campione piuttosto che l’intera popolazione possono essere diversi:
a) la popolazione può essere molto vasta: risulta troppo lungo analizzare tutte le unità statistiche (un sondaggio di opinioni viene fatto di solito su un insieme ristretto di individui poiché se ne vogliono conoscere gli esiti con rapidità);
b) le misure possono essere distruttive; può essere il caso di un controllo delle misure di affidabilità di un componente elettronico;
c) il costo della rilevazione totale della popolazione può essere esorbitante.

In tutti questi casi è necessario effettuare un campionamento, cioè l’estrazione di un campione. Se l’estrazione è casuale si parla di campione casuale. L’estrazione avviene in modo che ogni elemento della popolazione abbia la stessa probabilità di tutti gli altri di essere estratto. Ovviamente campione casuale non significa campione preso “a caso”, ma ottenuto rispettando delle leggi probabilistiche nella scelta. Ad esempio: campione formato da elementi scelti in modo equiprobabile dalla popolazione di partenza. In questo caso il calcolo delle probabilità è di aiuto nella costruzione della variabile campionaria e consente di quantificare l’errore che si commette estendendo le informazioni del campione all’intera popolazione.

Nel campionamento è facile commettere l'errore di ritenere casuale un campione che invece non lo è. Ad esempio, se si vuole effettuare un sondaggio di opinioni sulle abitudini sportive degli abitanti di una città e si decide di scegliere un campione di 200 abitanti, risulta errato scegliere le persone:

- da un elenco telefonico, in quanto verrebbero esclusi tutti coloro che non compaiono nell'elenco;
- tra coloro che transitano su una strada, in quanto verrebbero esclusi i frettolosi, mentre si tenderebbe a raccogliere dati da coloro che sembrano più educati o ben disposti a chiacchierare.

Per ottenere un campionamento realmente casuale si può invece procedere nel seguente modo:

- si assegna ad ogni abitante della città un numero progressivo;
- si pongono in un'urna tutti i numeri assegnati;
- si estraggono tanti numeri (in questo caso 200) quante sono le persone da intervistare;
- si intervistano le persone che corrispondono ai numeri estratti.

Procedendo in questo modo si può effettivamente parlare di campionamento casuale, in quanto tutti i numeri sono equiprobabili, e quindi tutte le persone hanno la stessa probabilità di essere intervistate. Gli schemi fondamentali di campionamento casuale sono due, in quanto il campionamento può essere effettuato con o senza ripetizione, ovvero con o senza reintroduzione (nella popolazione) dell'unità statistica estratta. Nel primo caso la stessa unità statistica può essere estratta più volte, mentre nel secondo caso ciascun elemento della popolazione può presentarsi una sola volta.
Nel caso di campionamento senza reintroduzione la composizione della popolazione varia da estrazione ad estrazione; tuttavia, quando la popolazione è infinita (molto vasta) e il campione è piccolo, il fatto che vi sia o meno reintroduzione perde importanza, in quanto la composizione della popolazione rimane pressoché costante nel corso delle estrazioni.
Un famoso episodio di campione distorto fa riferimento all'indagine condotta nel 1936 dalla rivista americana "Literary Digest" con l'obiettivo di prevedere l'esito delle elezioni presidenziali di quell'anno (si veda ad es. Brusati, 2003).
Gli autori del sondaggio inviarono per posta dei facsimili della scheda elettorale a oltre 10 milioni di persone, individuate attraverso gli elenchi telefonici e i registri automobilistici dell'epoca. Gli intervistati rimandarono indietro circa due milioni di risposte che, una volta elaborate, diedero come risultato il successo di A. London con circa il 60% delle preferenze. Le elezioni smentirono in modo clamoroso tali previsioni in quanto F.D. Rooswelt ottenne oltre il 61% delle preferenze degli elettori americani. L'esito reale dei risultati fu invece correttamente previsto dall'istituto di sondaggi "Gallup" che operò con un campione notevolmente inferiore.
Perché un campione di dimensioni notevolmente ridotte rispetto a quello della Literary Digest aveva centrato correttamente le previsioni mentre quello di dimensioni molto più ampie aveva fallito? Cosa era successo?
Il motivo di un tale insuccesso può essere ricondotto a due tipi di errore. Prima di tutto ci fu un *errore di copertura* (non rappresentatività) in quanto, avendo preso come riferimento gli elenchi telefonici e i registri automobilistici, si utilizzarono liste incomplete della popolazione e vennero trascurate le fasce più deboli e meno abbienti che votarono evidentemente in modo opposto a quella di chi disponeva di un telefono o era proprietario di una automobile. Il procedimento seguito, cioè, lasciò fuori dal campione una parte della popolazione con caratteristiche proprie e particolari: la popolazione meno abbiente. Un'altra distorsione del campione derivò da un *errore dovuto alle mancate risposte*: infatti dei 10 milioni di questionari inviati tornarono indietro solo due milioni (il 20%). Il campione delle risposte fu il risultato di una *autoselezione* notevole: cioè le manifestazioni di voto degli elettori che risposero al questionario non erano simili a quelle di coloro che non risposero.
Il campione costruito da Gallup, pur di numerosità nettamente inferiore ma *scelto casualmente* (seguendo criteri probabilistici) tra l'intera popolazione, risultò più simile a tutta la popolazione rispetto alla formulazione di voto.

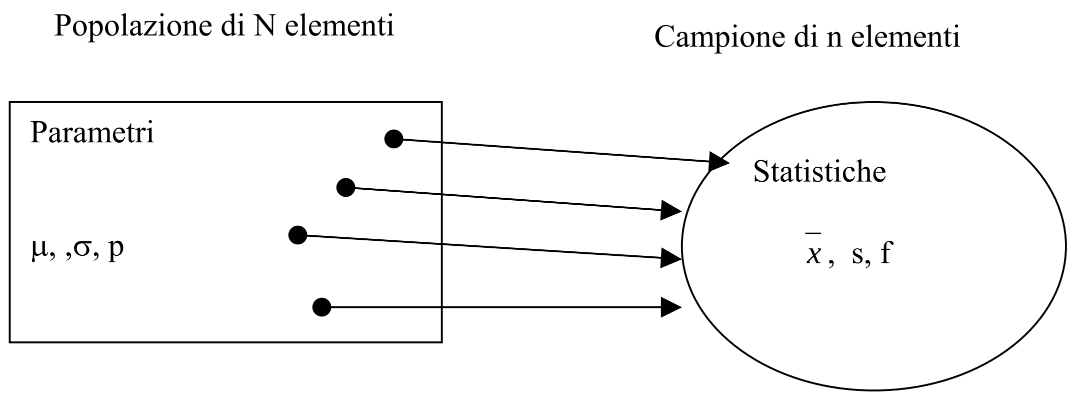
Può essere utile porre attenzione ai simboli e ai termini usati quando si parla di campionamento. In particolare può essere utile ricordare che:

- la misura di una caratteristica "della" popolazione sarà chiamata *parametro*;
- la misura di una caratteristica "di un" campione sarà chiamata *statistica*.

	Popolazione	Campione
Definizione	Insieme di tutte le unità statistiche	Sottoinsieme di unità selezionate in modo casuale dalla popolazione
Caratteristica	Parametro *	Statistica **
media	μ	$\bar{x}$
deviazione standard	σ	s
varianza	σ^2	s^2
frequenza relativa	p	f
ampiezza	N	n
caratteristica generica	θ	t

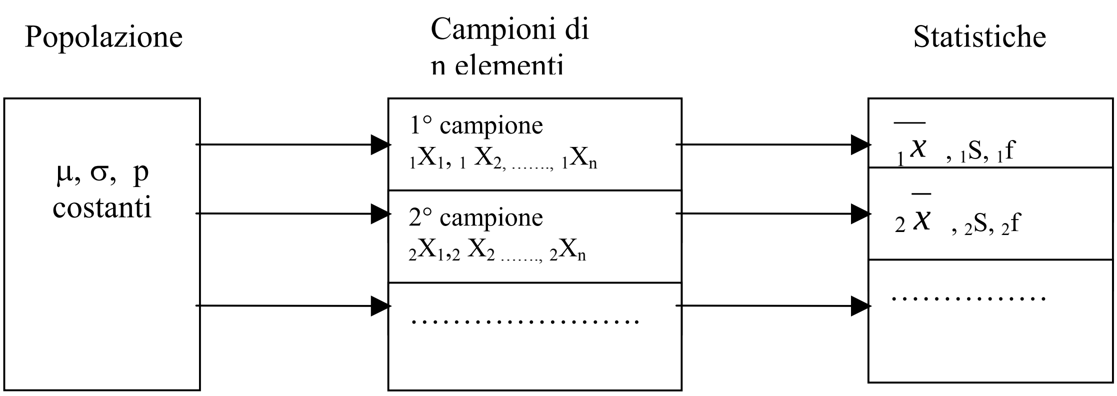
* è una caratteristica della popolazione ed è costante

** è una caratteristica del campione e può variare da campione a campione



Fissata la popolazione, quanti campioni si possono estrarre da essa? Se si indica con N il numero di unità statistiche che formano la popolazione e con n quelle del campione, quando le estrazioni avvengono con il metodo della reintroduzione, i possibili campioni sono *le disposizioni con ripetizione* di N elementi di classe *n* e sono N^n.

Si considerino i dati di un campione: su di esso è possibile calcolare delle statistiche che possono variare al variare del campione. Infatti, mentre i parametri di una popolazione sono *valori numerici costanti*, le statistiche campionarie sono *variabili aleatorie (casuali.)*



I risultati della indagine su un campione si possono utilizzare o per descrivere le caratteristiche del campione osservato (analisi descrittiva della situazione) oppure per trarre informazioni su alcuni aspetti della popolazione. Questo secondo utilizzo delle informazioni, che dal particolare passa al generale, prende il nome di inferenza statistica che è inferenza induttiva. In questa unità si analizzerà, sulla base di dati reali, la procedura di estrazione casuale semplice e alcune conseguenze ad essa connesse. Il database sul quale sono stati costruiti vari campioni è riportato nella tabella seguente e fa riferimento al sesso, al comune di residenza e al voto scritto di matematica ottenuto dagli studenti delle classi terze informatica dell'Itis "C. Zuccante" di Mestre-Ve.

ID	Sesso	Comune	Voto Mat.	ID	Sesso	Comune	Voto Mat.	ID	Sesso	Comune	Voto Mat.	ID	Sesso	Comune	Voto Mat.
1	M	Altro	5	44	M	Altro	5	87	M	Altro	4	130	M	Altro	7
2	M	Venezia	3	45	M	Altro	5	88	M	Altro	5	131	M	Venezia	6
3	F	Altro	6	46	F	Altro	4	89	M	Altro	8	132	M	Altro	7
4	M	Altro	5	47	M	Venezia	5	90	M	Altro	5	133	M	Altro	7
5	M	Altro	3	48	M	Venezia	5	91	M	Venezia	6	134	M	Venezia	7
6	F	Altro	7	49	F	Venezia	6	92	M	Venezia	5	135	M	Venezia	5
7	F	Altro	5	50	F	Venezia	6	93	M	Venezia	8	136	M	Venezia	7
8	F	Altro	6	51	M	Venezia	5	94	M	Venezia	6	137	F	Venezia	5
9	M	Venezia	6	52	M	Altro	4	95	M	Venezia	3	138	M	Venezia	5
10	M	Venezia	5	53	M	Altro	4	96	M	Venezia	5	139	M	Venezia	6
11	F	Venezia	6	54	M	Altro	4	97	M	Venezia	5	140	M	Venezia	6
12	M	Venezia	7	55	M	Altro	7	98	F	Venezia	6	141	M	Venezia	6
13	M	Altro	5	56	M	Venezia	4	99	M	Venezia	6	142	M	Venezia	5
14	M	Altro	5	57	M	Altro	5	100	M	Venezia	3	143	F	Venezia	7
15	M	Venezia	6	58	M	Venezia	5	101	F	Venezia	4	144	M	Altro	6
16	M	Venezia	9	59	M	Altro	5	102	M	Altro	4	145	M	Venezia	6
17	M	Altro	5	60	M	Altro	4	103	M	Venezia	4	146	M	Venezia	7
18	M	Altro	4	61	M	Altro	6	104	M	Venezia	6	147	M	Altro	9
19	M	Altro	5	62	M	Altro	6	105	M	Venezia	4	148	M	Altro	7
20	M	Venezia	7	63	M	Altro	4	106	M	Venezia	4	149	M	Altro	5
21	M	Altro	6	64	M	Altro	4	107	M	Venezia	8	150	M	Altro	6
22	M	Venezia	7	65	M	Venezia	2	108	M	Venezia	5	151	M	Venezia	7
23	M	Venezia	8	66	M	Venezia	3	109	M	Venezia	8	152	M	Venezia	5
24	M	Altro	7	67	M	Altro	7	110	M	Altro	7	153	M	Altro	5
25	M	Altro	5	68	M	Altro	7	111	F	Venezia	7	154	M	Venezia	6
26	M	Altro	9	69	M	Altro	5	112	F	Venezia	3	155	M	Altro	5
27	M	Altro	5	70	M	Venezia	5	113	M	Altro	7	156	M	Altro	6
28	M	Altro	4	71	M	Altro	4	114	M	Altro	7	157	M	Venezia	7
29	M	Venezia	6	72	M	Altro	5	115	M	Altro	9	158	M	Altro	6
30	M	Altro	6	73	M	Altro	3	116	M	Venezia	5	159	M	Venezia	6
31	M	Venezia	5	74	M	Venezia	6	117	M	Venezia	5	160	M	Altro	6
32	M	Altro	9	75	M	Venezia	4	118	M	Venezia	5	161	M	Altro	6
33	M	Altro	6	76	M	Altro	4	119	M	Venezia	5	162	M	Altro	7
34	M	Altro	4	77	M	Venezia	6	120	M	Venezia	5	163	M	Venezia	5
35	F	Altro	6	78	M	Altro	3	121	F	Venezia	5	164	M	Venezia	7
36	M	Altro	5	79	M	Altro	6	122	F	Venezia	8	165	M	Altro	5
37	F	Venezia	4	80	M	Altro	2	123	M	Altro	4	166	M	Altro	7
38	M	Venezia	6	81	M	Venezia	4	124	M	Altro	8	167	M	Altro	4
39	M	Altro	6	82	M	Venezia	3	125	M	Altro	5	168	M	Altro	8
40	F	Altro	4	83	M	Venezia	4	126	F	Altro	7	169	M	Altro	8
41	M	Altro	4	84	M	Altro	5	127	F	Altro	6	170	M	Altro	5
42	M	Altro	6	85	M	Venezia	5	128	M	Venezia	6	171	M	Altro	5
43	M	Altro	6	86	M	Venezia	7	129	F	Venezia	5	172	M	Altro	5

Tabella 1

Di questa popolazione di numerosità N=172 sono state rilevate le seguenti caratteristiche: Sesso, Comune di residenza e Voto scritto in matematica al primo quadrimestre, di cui vengono forniti alcuni indici sintetici:

Sesso		
		p_i
Maschi	150	0,87
Femmine	22	0,13

Comune di residenza		
		p_i
Venezia	81	0,47
Altro	91	0,53

Voto scritto in matematica

Voto matematica 1° quadrimestre	media	Dev. Stand.	Varianza	Min	q1	mediana	q3	max
	5,53	1,41	1,99	2	5	5	6	9

Il grafico di Figura 1 rappresenta la distribuzione dei voti di matematica.

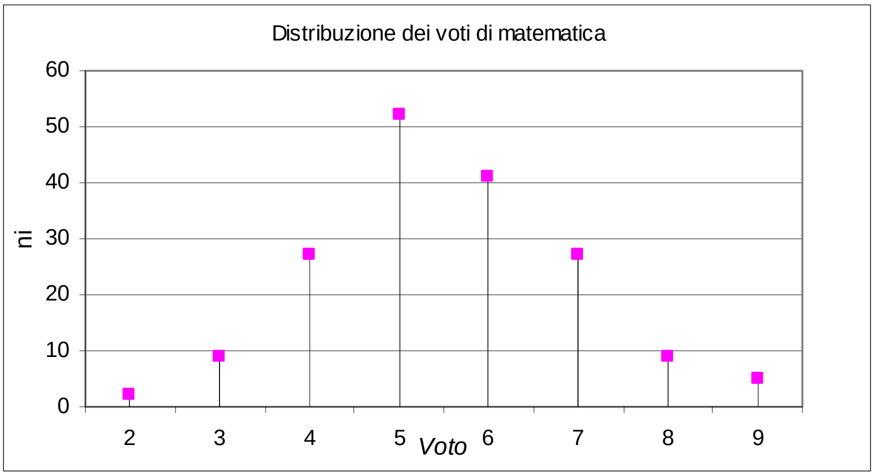


Figura 1

A questo punto l'insegnante invita gli studenti ad estrarre campioni casuali semplici usando il calcolatore. Di questi verranno calcolati gli indici sintetici già studiati per la popolazione.
La Tabella 2 indica il procedimento che consente di ricavare dal database di Tabella 1 un campione casuale di 10 elementi, per rilevare ad esempio il voto scritto in matematica (VotoMat). Il database deve essere disposto verticalmente e la prima colonna deve contenere il campo Id, la seconda colonna il campo Sesso, la terza il campo Comune e la quarta il campo Voto Mat. Nella colonna A è stata impostata la funzione del foglio elettronico che consente di generare un numero casuale compreso tra 1 e 172 e che individua, nella prima colonna del database degli studenti, il numero identificativo dello studente che entra a far parte del campione. Nella colonna B è stata impostata la funzione di ricerca "CERCA.VERT()", che ricerca nella prima colonna del database, indicato da "Foglio1!$A$1:$G$173", il valore numerico estratto dalla funzione in colonna A, individuando così una riga del database di Tabella 1; tale funzione restituisce il valore della colonna 4 nella corrispondente riga, ossia il voto scritto di matematica dell'alunno estratto.

	A	B
1	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A1;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
2	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A2;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
3	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A3;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
4	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A4;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
5	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A5;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
6	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A6;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
7	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A7;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
8	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A8;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
9	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A9;Foglio1!$A$1:$G$173;4)
10	=INT(CASUALE()*172)+1	=CERCA.VERT(Foglio3!A10;Foglio1!$A$1:$G$173;4)

Tabella 2

Con lo stesso procedimento sostituendo i numeri 2 e 3 nell'ultimo parametro della funzione CERCA.VERT(), è possibile ricavare rispettivamente il Sesso e il Comune dell'alunno selezionato.

Si ottiene la Tabella 3.

Campione di 10 elementi estratto casualmente dal database di Tabella 1

Id	Sesso	Comune	voto
14	M	Altro	5
126	F	Altro	7
131	M	Venezia	6
3	F	Altro	6
46	F	Altro	4
40	F	Altro	4
57	M	Altro	5
97	M	Venezia	5
28	M	Altro	4
119	M	Venezia	5

Tabella 3

Gli indici calcolati su questo campione sono i seguenti:

Sesso

		f_i
Maschi	6	0,60
Femmine	4	0,40

Comune di residenza

		f_i
Venezia	3	0,30
Altro	7	0,70

voto matematica 1° quadrimestre	media	Dev. Stand.	Varianza	Min	q1	mediana	q3	max
	5,10	0,99	0,98	4	4,25	5	5,75	7

L'insegnante chiede: la proporzione dei maschi nel campione è uguale a quella della popolazione? E la proporzione dei residenti nel comune di Venezia? La media dei voti nel campione è uguale a quella della popolazione?
L'insegnante chiede infine: in una successiva ripetizione dell'esperimento si otterranno gli stessi risultati o risultati diversi?

Se la risposta a tutte le domande è "no", perché si verifica ciò? Si è forse errato nel processo di estrazione? E' sempre possibile ripetere il percorso già effettuato. L'insegnante mostra il procedimento per produrre 10 campioni di numerosità 10.
Inizialmente si procede come indicato per la scelta di un unico campione. Poi mediante la funzione *Copia/Incolla* sono stati formati 10 campioni di numerosità 10 e i risultati dei caratteri osservati sono riportati in una tabella di sintesi. Per riprodurre tutti i campioni estratti conviene copiare i dati generati nel foglio precedente e incollarli nella nuova tabella attraverso l'opzione *Copia/Incolla speciale/Solo valori* in quanto il foglio elettronico modifica i numeri calcolati ogni volta che, in modo diretto o indiretto, viene investita la funzione Casuale().
Nella Tabella 4 sono riportati per ogni campione il valore della proporzione dei Maschi, della proporzione dei residenti nel comune di Venezia e la media del voto in matematica. Nelle ultime due colonne sono riportati media e varianza degli indici trovati.

Campione	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**media**	**Var.**
Prop. M	0,6	0,8	0,9	0,9	1	0,8	0,9	0,7	0,6	0,8	0,80	0,02
Prop. Ve	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,8	0,7	0,2	0,6	0,6	0,51	0,03
Media voto	5,1	6	5,9	5,7	4,7	5,7	5,9	5,2	5,3	5,4	5,49	0,18

Tabella 4

L'insegnante fa osservare che i valori trovati nei diversi campioni variano. In particolare per la proporzione dei residenti nel comune di Venezia fa riportare i dati come nel grafico di Figura 2 inserendo anche il valore della proporzione per l'intera popolazione. Fa inoltre notare che il valore medio delle proporzioni campionarie, che nei dieci campioni estratti vale 0,51, non si discosta di molto dal valore della proporzione nella popolazione che è 0,47.

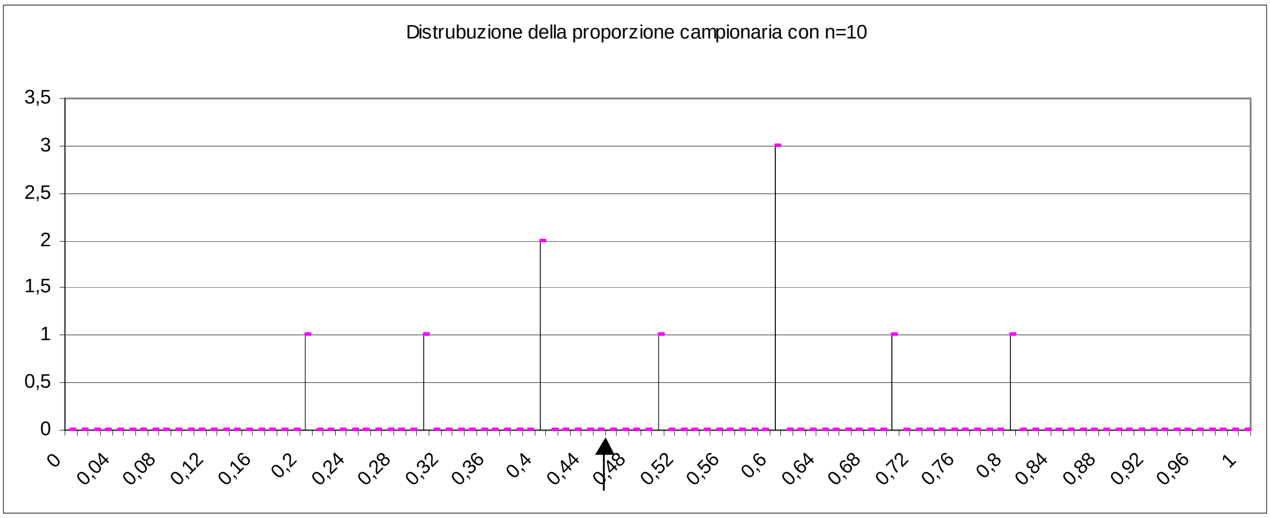


Figura 2

Analoghi ragionamenti potrebbero essere fatti per gli altri caratteri.

Cosa succede se la numerosità campionaria aumenta? Si porti ad esempio la numerosità a 40. Allora il procedimento già seguito dà luogo alla Tabella 5.

Campione	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	media	varianza
Prop. M	0,73	0,95	0,83	0,88	0,85	0,88	0,90	0,93	0,90	0,83	0,87	0,004
Prop. Ve	0,63	0,45	0,53	0,48	0,45	0,43	0,55	0,35	0,45	0,53	0,48	0,006
Media voto	5,55	5,18	5,13	5,58	5,48	5,35	5,58	5,68	5,53	5,48	5,45	0,033

Tabella 5

Nel grafico di Figura 3 è riportata la distribuzione della proporzione campionaria dei residenti nel comune di Venezia per i 10 campioni ottenuti con l'indicazione della proporzione per l'intera popolazione.

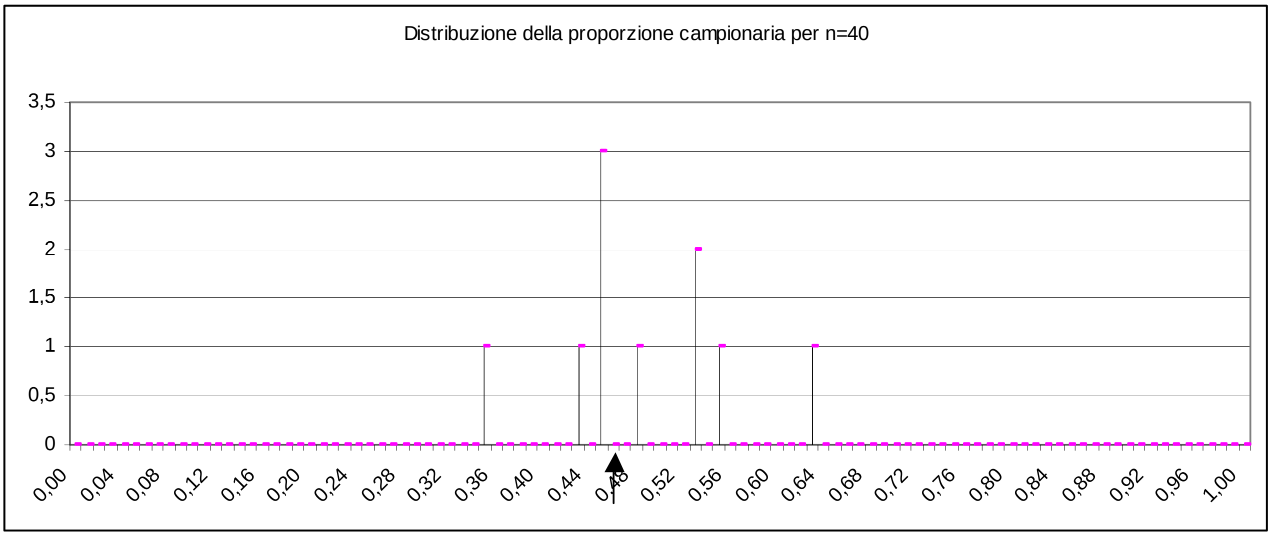


Figura 3

L'insegnante invita gli studenti a confrontare i due grafici e le tabelle corrispondenti e pone alcune domande: in quale caso si presenta maggior variabilità nei risultati ottenuti? In quale delle due situazioni la media delle proporzioni è più vicina alla proporzione della popolazione? Se si aumentasse il numero dei campioni estratti di numerosità 10, quale valore medio delle proporzioni campionarie ci si aspetterebbe di trovare?
Analoghi ragionamenti possono essere fatti per gli altri caratteri di tipo sia qualitativo sia quantitativo.
L'insegnante chiede se il risultato della proporzione campionaria può essere preso come valore della proporzione nella popolazione. Se la risposta è sì, con quale errore? E' diversa la risposta al variare di n?
L'insegnante ricorda ancora agli studenti il significato della deviazione standard. Chiede come interpreterebbero, con riferimento ai 10 campioni di numerosità 10 e alla proporzione dei residenti nel comune di Venezia, l'intervallo [0,51 –0,17; 0,51+ 0,17] e l'intervallo [0,60 –0,17; 0,60+ 0,17], con riferimento al decimo campione.
E' forse questo il significato della "forchetta" di cui parlano spesso i mass media?

Piccoli campioni crescono

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Spiegare il concetto e la funzione “variabile aleatoria”. Costruire un campione casuale semplice, data una popolazione. Stimare una proporzione, o la media di una popolazione, attraverso una consapevole costruzione di stime puntuali e intervalli di confidenza.	Campionamento casuale semplice e distribuzione campionaria della proporzione e della media. Stima puntuale e intervallo di confidenza per la proporzione e per la media.	<u>Dati e previsioni</u> Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	Italiano Società civile

Contesto
Sociale: istruzione

I mezzi di comunicazione di massa ci hanno abituati all’uso dei sondaggi i cui risultati dipendono da un campione. Il ricorso ad esempi tratti dalla vita quotidiana motiverà gli studenti al tema di questa attività che intende sviluppare semplici metodi di campionamento al fine di evidenziarne le caratteristiche principali e di comprenderne i limiti con particolare riferimento alla stima della media campionaria.

Descrizione dell’attività
L’insegnante ricorda agli studenti quanto appreso in precedenza riguardo ai concetti di statistica descrittiva e al loro uso nell’analisi di un fenomeno: distribuzioni di frequenza, rappresentazioni grafiche, indici di sintesi quali i valori medi e le misure di variabilità. Ricorda inoltre che l’osservazione di una caratteristica può essere fatta sull’intera popolazione o su una sua parte. Come si può scegliere un campione di elementi dalla popolazione affinché i risultati da esso ottenuti siano trasferibili all’intera popolazione? E’ possibile quantificare l’errore che si commette? Quando il campione è casuale, ossia scelto secondo i principi del calcolo delle probabilità, esiste la possibilità di quantificare e in qualche modo limitare l’errore e di mostrare come esso dipenda dalla numerosità campionaria (n). Si ribadisce l’importanza della scelta casuale del campione e come sia possibile fidarsi del campione per fornire informazioni sulla popolazione solo tenendo conto della probabilità.
Con i dati relativi alle valutazioni ottenute da N=6 studenti in un compito fatto in classe, si può avviare una attività sul campionamento, sulle caratteristiche dei dati che lo compongono e sulle statistiche campionarie da esso derivanti.

Studente	voti
A	8
B	6
C	4
D	5
E	6
F	7
media	6
varianza	1,667

A partire dai dati osservati l'insegnante invita gli studenti a creare tutti i possibili campioni casuali di n=2 elementi con la tecnica del campionamento semplice (con reinserimento). Quanti sono? Chiaramente sono N^n e quindi nel nostro caso sono $6^2=36$.
Sui campioni estratti si calcola la media dei voti. L'insegnante fa osservare come la media cambi al variare del campione. Una osservazione analoga era già stata fatta in precedenza? (si invita a vedere l'attività: Campioni e "forchette"). Si può costruire la distribuzione delle medie campionarie? L'insegnante invita gli studenti a riflettere su quale potrebbe essere la distribuzione di tale variabile. Quale sarà la media della distribuzione delle medie campionarie? E la varianza? L'insegnante conduce gli studenti a predisporre un prospetto analogo alla Tabella 1 che contiene lo spazio campionario relativo all'esperimento descritto sopra. In ogni casella vi è un possibile campione di numerosità 2 con i voti degli studenti estratti.

Campioni	A	B	C	D	E	F
A	(8; 8)	(8; 6)	(8; 4)	(8; 5)	(8; 6)	(8; 7)
B	(6; 8)	(6; 6)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)	(6; 7)
C	(4; 8)	(4; 6)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
D	(5; 8)	(5; 6)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)
E	(6; 8)	(6; 6)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)	(6; 7)
F	(7; 8)	(7; 6)	(7; 4)	(7; 5)	(7; 6)	(7; 7)

Tabella 1

Nella tabella seguente sono riportate le medie campionarie conseguenti ai dati della Tabella 1.

Medie	A	B	C	D	E	F
A	8	7	6	6,5	7	7,5
B	7	6	5	5,5	6	6,5
C	6	5	4	4,5	5	5,5
D	6,5	5,5	4,5	5	5,5	6
E	7	6	5	5,5	6	65
F	7,5	6,5	5,5	6	6,5	7

Tabella 2

L'insegnante invita a costruire la distribuzione della media campionaria, a calcolare gli indici sintetici e a farne la rappresentazione grafica

La Tabella 3 indica il procedimento da seguire.

Distribuzione della media campionaria dei voti per campioni di 2 elementi da una popolazione di 6

$\overline{x}_i$	n_i	$\overline{x}_i \cdot n_i$	$\overline{x}_i^2 \cdot n_i$
4	1	4	16
4,5	2	9	40,5
5	5	25	125
5,5	6	33	181,5
6	8	48	288
6,5	6	39	253,5
7	5	35	245
7,5	2	15	112,5
8	1	8	64
Tot	36	216	1326
$M(\overline{X})$	6		
$Var(\overline{X})$	0,833		

Tabella 3

Il grafico di Figura 1 riporta la rappresentazione grafica della distribuzione della media campionaria

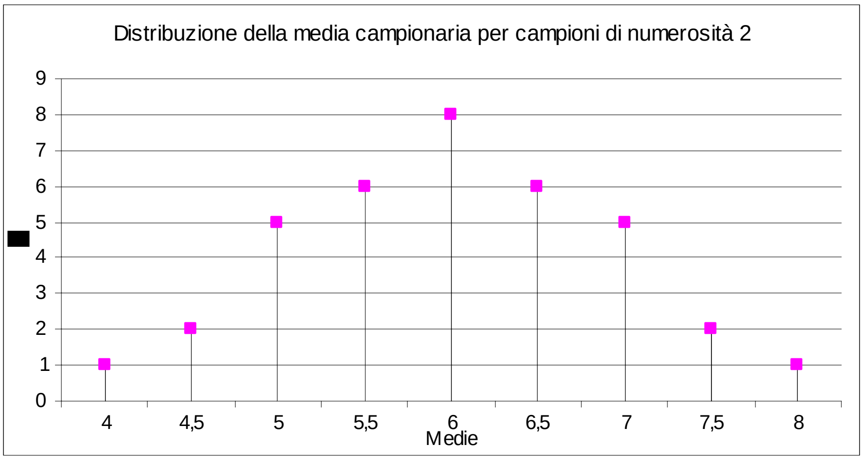


Figura 1

Quali informazioni è possibile ricavare dal grafico?

L'insegnante fa notare che:

a) la media della distribuzione della media campionaria è uguale alla media dei voti nella popolazione;
b) la varianza è minore;
c) la distribuzione della media campionaria è simmetrica rispetto al suo valore medio.

Perché le due medie sono uguali? Ciò si deve verificare sempre? Perché la varianza della media campionaria è minore di quella della popolazione? Ciò si deve verificare sempre? La forma del grafico assomiglia a qualche distribuzione nota?

L'insegnante fa notare che la distribuzione della media campionaria $\overline{X}$ possiede alcune proprietà valide qualsiasi sia il modello che descrive la caratteristica X nella popolazione di riferimento.

Tali proprietà affermano che: $M(\overline{X})=\mu$ e $Var(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$.

I simboli introdotti rappresentano rispettivamente:

M	Operatore valor medio
Var	Operatore varianza
$\overline{X}$	Variabile Media campionaria
μ	Media della popolazione
σ^2	Varianza della popolazione

L'insegnante invita gli studenti a verificare che le proprietà sono vere anche nello spazio campionario trattato.
L'insegnante propone di studiare sperimentalmente, col metodo della simulazione, la distribuzione della media campionaria su un certo numero di campioni di numerosità 2 estratti dagli studenti dai dati di origine relativi alle valutazioni ottenute da N = 6 studenti in un compito fatto in classe.
Ogni studente preleva un campione, con reinserimento di 2 elementi per 4 volte, e scrive le caratteristiche osservate: vi sono elementi ripetuti fra i 2 estratti? Osservando più sequenze cosa le diversifica?
Tale estrazione può essere fatta sperimentalmente inserendo sei dischi numerati da 1 a 6 (quelli della tombola) in un'urna, oppure ricorrendo al foglio elettronico e alla funzione Casuale() che restituisce un numero casuale distribuito in maniera uniforme maggiore o uguale a 0 e minore di 1.

** **Nota**
Per poter utilizzare il computer è necessario trasformare il codice identificativo dell'alunno da alfabetico a numerico.

Ad esempio, con un foglio elettronico la sintassi da utilizzare per l'estrazione del campione è la seguente:

```
=INT(CASUALE()*6)+1   = CERCA.VERT(A56;$B$1:$C$7;2)
```

La prima formula consente la generazione casuale degli elementi del campione, la seconda consente di estrarre dalla tabella dei voti il voto corrispondente all'alunno estratto.

Di ogni campione viene calcolata la media e delle medie trovate dagli studenti viene costruita e analizzata la distribuzione.

La Tabella 4 mostra la distribuzione delle medie campionarie ottenute per simulazione di un campionamento di numerosità 2 da parte dei 25 alunni di una classe.

Distribuzione della media campionaria dei voti per campioni di 2 elementi da una popolazione di 25

$\overline{x}_i$	n_i	$\overline{x}_i \cdot n_i$	$\overline{x}_i^2 \cdot n_i$
4	2	8	32
4,5	6	27	121,5
5	14	70	350
5,5	16	88	484
6	27	162	972
6,5	16	104	676
7	10	70	490
7,5	7	52,5	393,75
8	2	16	128
Tot	100	597,5	3647,25
$M(\overline{X})$	5,975		
$Var(\overline{X})$	0,771875		

Tabella 4

Il grafico di Figura 2 mostra la rappresentazione grafica della distribuzione ottenuta con la simulazione:

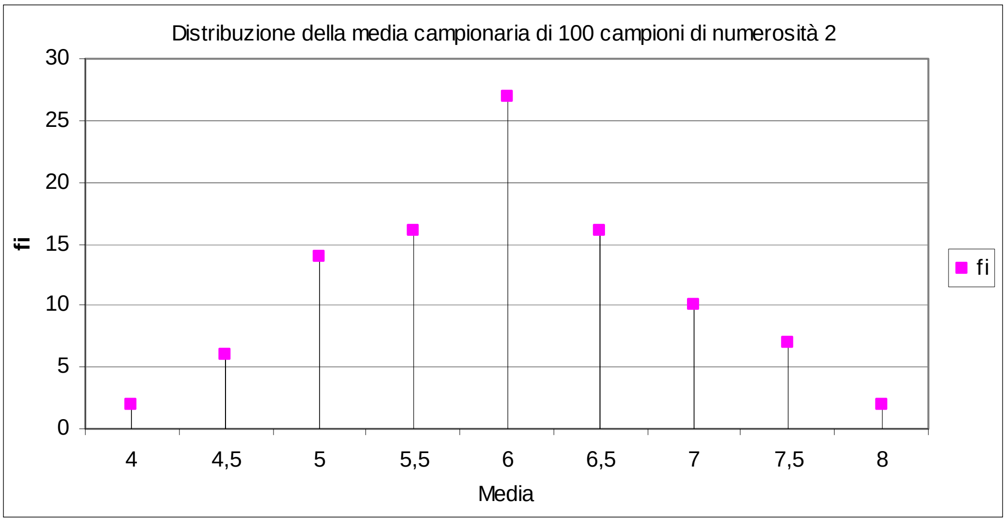


Figura 2

L'insegnante invita gli studenti a confrontare i valori ottenuti attraverso la loro esperienza di simulazione con i dati ricavati utilizzando tutti i possibili campioni appartenenti allo spazio campionario dell'esperimento casuale di numerosità 2 descritto precedentemente.

L'andamento del grafico in Figura 2 non è perfettamente simmetrico. La forma è simile al grafico di Figura 1? Il valore 6 rappresenta il valore più frequente (moda) in entrambe le distribuzioni?

Confrontando gli indici si nota che la media delle "medie campionarie" nella simulazione è vicina alla media della popolazione, mentre la sua varianza, pur rimanendo minore della varianza della popolazione, non conferma appieno la proprietà della varianza campionaria.
L'insegnante pone la domanda: perché non sono uguali? Dipende dalla quantità e dal tipo di campioni estratti? Siamo sicuri che tra i campioni estratti non ce ne siano di ripetuti? Siamo sicuri che tra i 100 campioni degli studenti ci siano tutti quelli dello spazio campionario?

Come ulteriore attività l'insegnante propone di aumentare la numerosità del campione passando da 2 elementi per campione a 3 elementi. Invita pertanto gli studenti a ripetere le operazioni già eseguite precedentemente su 106 campioni e ad analizzare la distribuzione delle medie campionarie ottenute, di cui si fornisce un esempio di distribuzione e il relativo grafico.

Distribuzione della media campionaria dei voti per campioni di 3 elementi da una popolazione di 6

$\overline{x}_i$	n_i	$\overline{x}_i \cdot n_i$	$\overline{x}_i^2 \cdot n_i$
4,33	1	4,333	18,778
4,67	6	28,004	130,704
5,00	9	45,012	225,120
5,34	10	53,353	284,658
5,67	12	68,032	385,696
6,00	18	108,060	648,720
6,34	16	101,397	642,589
6,67	14	93,399	623,094
7,01	9	63,048	441,672
7,34	8	58,715	430,927
7,67	3	23,020	176,640
	106	646,373	4008,597
$M(\overline{X})$	6,098		
$Var(\overline{X})$	0,633		

Tabella 5

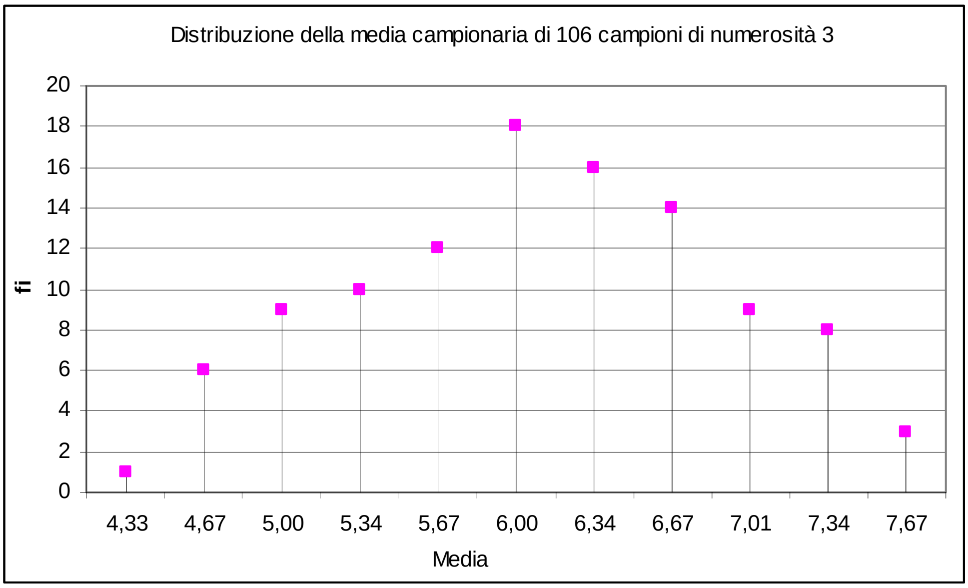


Figura 3

L'insegnante invita gli studenti ad analizzare i risultati ottenuti e a confrontarli con quelli ottenuti da campioni di numerosità 2. La distribuzione si mantiene simmetrica e a campana? Il valore della varianza è cambiato? E' aumentato o diminuito? Che valore assume il rapporto tra la varianza della popolazione e la varianza campionaria?
L'insegnante chiede poi se è possibile aumentare ancora la numerosità del campione. Ad esempio: 6, 10, 30? Cosa succederà alla varianza della media campionaria?

Riferimenti bibliografici

Cicchitelli, G., (2001), *Probabilità e statistica*, Maggioli ed., Rimini.

Brusati, E., (2003), *Come si fanno i sondaggi*, *Induzioni*, n. 26, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa, p. 5 – 37.

Parpinel, F.; Provasi, C., (2004), *Elementi di probabilità e statistica per le scienze economiche,* Giapichelli ed., Torino.

ARGOMENTARE, CONGETTURARE, DIMOSTRARE

Elenco delle attività

Dove andresti: dalla mamma o dalla fidanzata?

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in contesti problematici diversi. Distinguere tra eventi indipendenti e non.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.	Argomentare, congetturare, dimostrare. Dati e previsioni.	

Contesto
Vita reale.

Generalmente agli studenti sono prospettati problemi sulla probabilità in cui è proposta una situazione ben definita da riconoscere e dalla quale dedurre e calcolare la probabilità dell'evento. Gli studenti, quindi hanno già affrontato diversi casi semplici di calcolo della probabilità.
In questo caso, allo scopo di stimolarli al procedimento inverso cioè a una indagine sulle possibili situazioni che provocano quel risultato, è proposta la soluzione e si deve ricostruire il contesto partendo dalla probabilità dell'evento e da quella contraria.

Descrizione dell'attività
Prima fase
È proposto alla classe, divisa in piccoli gruppi, il seguente problema.

Problema: *Francesco ogni sera va a trovare la mamma, che vive in centro, oppure la fidanzata, che vive in periferia. Per essere più precisi, egli ogni sera va alla fermata dell'autobus in un momento qualsiasi e prende il primo autobus che passa (per il centro o per la periferia). Ciascuno dei due autobus arriva alla fermata ogni 15 minuti con perfetta regolarità (in base a un orario fissato). Ciò nonostante Francesco si reca dalla madre soltanto due volte al mese. Perché?*

L'insegnante, dopo aver lasciato ai gruppi 30 minuti per discutere, li invita a porsi domande che scaturiscono dall'analisi fatta del problema.
Gli studenti osservano che la frequenza delle visite alla mamma dipende, per la legge empirica del caso, dalla probabilità che ha Francesco di prendere l'autobus che va in centro.

La frequenza con la quale Francesco va dalla mamma è $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; ovviamente quella della visita alla fidanzata è $\frac{14}{15}$.

Quindi, si può attribuire alla probabilità di prendere l'autobus per il centro il valore $\frac{1}{15}$ e analogamente alla probabilità di prendere l'autobus per la periferia $\frac{14}{15}$.

A questo punto l'insegnante pone la domanda:
Come è possibile che ci siano 14 casi favorevoli di andare dalla fidanzata e solo uno dalla mamma?
Ovvero:
Qual è la situazione che può provocare questa disparità di casi, nell'ipotesi che Francesco arrivi sempre alla fermata in modo assolutamente casuale?

Allora gli studenti si concentrano sul comportamento dei due autobus.

<u>Seconda fase</u>
In questa fase, l'insegnante invita gli studenti ad osservare e analizzare le differenze tra le due diverse situazioni: centro e periferia.
Si avvia la discussione e si riportano di seguito gli interventi più significativi di un gruppo di studenti che hanno partecipato all'attività proposta.

Giovanni – *Entrambi gli autobus passano ogni quindici minuti*
Ester - *Quindi non c'è alcuna differenza!*
Marco - *Non solo, ma presumibilmente fanno lo stesso percorso*
Anna Chiara - *Però in senso opposto!*
Valerio – *Per fissare meglio le idee facciamo un esempio?*
A questo punto l'insegnante invita uno studente alla lavagna per concretizzare l'idea di Valerio.
Si offre Giulia, che scrive:

ORARIO	
Autobus per la periferia	Autobus per il centro
0.00	0.05
0.15	0.20
0.30	0.35
0.45	0.50

Tabella 1

L'insegnante invita gli studenti ad osservare, in questo caso particolare, quali sono i minuti favorevoli a prendere uno o l'altro dei due autobus.

Giulia risponde descrivendo la situazione mediante un grafico che simula l'orologio:

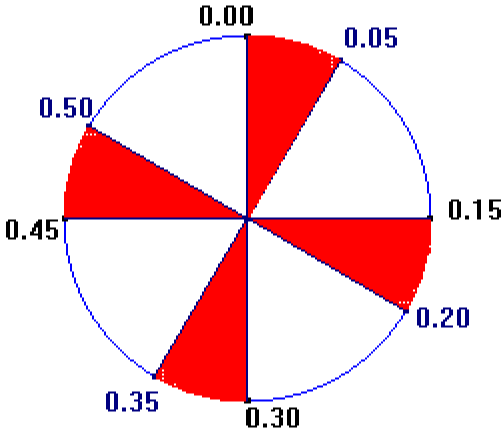


Figura 1

Dal grafico si osserva che, se Francesco arriva tra l'inizio dei primi quindici minuti e il quarto minuto, prende l'autobus per il centro perché è quello che passa per primo, mentre se arriva tra il quinto e il quattordicesimo minuto, prende l'autobus per la periferia; naturalmente questa situazione si ripete per l'ora intera.
Si può concludere che, in questo caso particolare, ci sono 5 casi favorevoli all'andare in centro e 10 casi favorevoli all'andare in periferia sui 15 casi possibili.

Caterina - *Allora, in questo caso, la probabilità che vada in centro è* $\frac{1}{3}$ *e quella che vada in periferia è* $\frac{2}{3}$.
Lorenzo - *E se invece l'orario delle partenze dell'autobus non iniziano alle 0.00 ?*
Giovanni - *Non cambia niente!*
Lorenzo - *E perché?*
Giulia - *Perché il disegno sarebbe solo ruotato, ma identico nelle proporzioni.*
Chiara - *Allora la probabilità dipende dallo sfasamento tra l'orario dell'autobus che va in centro rispetto a quello che va in periferia che in questo caso è di 5 minuti.*

A questo punto l'insegnante chiede:
Qual è la differenza tra i due orari per avere 14 possibilità di arrivare a prendere l'autobus che va dalla fidanzata?

Ester - *Francesco ha 14 possibilità di arrivare in modo da prendere l'autobus che va in periferia e solo una possibilità di prendere l'autobus che va in centro (ovvero appena è passato quello che va in periferia); se l'autobus per il centro passa un minuto dopo di quello della periferia.*

Come spesso accade, si evince che gli studenti (e non solo!), hanno la necessità di visualizzare la situazione attraverso casi particolari; difficilmente sarebbero arrivati alla soluzione cercando una "formula" tra quelle conosciute. Dal dialogo riportato si osserva che gli studenti non solo sono stati in grado di produrre congetture, sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti e di confrontarle con quelle prodotte dai compagni, ma anche di saper utilizzare opportunamente il linguaggio naturale e quello simbolico.

Possibili sviluppi
Ci si potrebbe chiedere se ha senso, in un percorso ciclico, dire chi passa prima.

Elementi di prove di verifica

1. Risolvere il seguente problema giustificando correttamente le risposte.

Un contrabbandiere spera di evitare l'arresto da parte della Finanza mescolando, in un contenitore, scatole contenenti merce illegale con scatole contenenti merce legale. Le scatole sono tutte uguali come dimensione ma di diverso colore. Soltanto il 5% delle scatole contiene merce illegale su un totale di 400 scatole. La Finanza controlla 5 delle scatole che sono nel contenitore:

- qual è la probabilità di acciuffare il contrabbandiere?
- qual è la probabilità che almeno 3 scatole contengano merce illegale?
- qual è la probabilità che esattamente 3 scatole contengano merce illegale?

Sapendo che 100 scatole sono verdi, che 8 delle verdi contengono merce illegale mentre le rimanenti sono rosse, calcolare:

- la probabilità che un finanziere scegliendo a caso una sola scatola ne trovi una verde contenente merce illegale;
- la probabilità che il finanziere trovi una scatola contenente merce illegale sapendo che quella scelta è rossa.

2. Su 7 canali televisivi, in una determinata ora, 3 trasmettono un film, 2 un reality show, 2 una fiction.

- Accendendo un televisore, qual è la probabilità che il canale scelto trasmetta un film o una fiction?
- Supposto che quel canale trasmetta un film o una fiction, qual è la probabilità che nessuno dei due successivi canali trasmetta un film?

3. In un armadio ci sono 10 cassetti (5 sovrapposti ad altri 5). Di questi 3 contengono solo calzini, 2 calzini e biancheria, 5 solo biancheria.

- Aprendo contemporaneamente i primi 3 cassetti, qual è la probabilità che almeno uno contenga sia calzini sia biancheria?
- Supposto che almeno uno dei tre cassetti aperti contenga calzini e biancheria, qual è la probabilità che i successivi due cassetti aperti contemporaneamente contengano entrambi solo calzini?

0; n, n +1, … ∞

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Applicare in semplici casi il principio d'induzione. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria.	Schemi di ragionamento. Sistemi assiomatici in vari contesti. La potenza di numeri positivi con esponente razionale. Algoritmi di approssimazione. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	Argomentare, congetturare, dimostrare. Numeri e algoritmi. Relazioni e funzioni. Laboratorio di matematica.	

Contesto
Dimostrazioni.

L'approfondimento si situa nel contesto delle dimostrazioni, che è tipico per riflessioni al termine della scuola secondaria.
In continuità con l'attività presentata su Matematica 2003 (Matematica 2003, Argomentare, congetturare, dimostrare, Tasselli del domino e induzione) si intende illustrare, in maniera più rigorosa, a partire dalla risoluzione di problemi, il procedimento che utilizza la dimostrazione per induzione.

Descrizione dell'attività
Se si introduce il sistema assiomatico di Giuseppe Peano per i numeri naturali è opportuno partire dal 5° assioma per analizzare il principio di induzione matematica espresso in forma colloquiale (vedi Nota finale), discutere della sua formulazione e anche delle sue applicazioni. Infatti la lettura del principio d'induzione è linguisticamente complessa e pertanto difficile da memorizzare e da applicare. Una difficoltà è dovuta per esempio all'uso di due implicazioni "se…allora" una delle quali è annidata nell'altra.

Prima fase
È proposto alla classe, suddivisa in piccoli gruppi, il seguente problema, la cui tipologia non rientra in quelle dei problemi usualmente dati a scuola. Questo può favorire la varietà di proposte nell'approccio risolutivo.

Problema n 1: *In una città si vuole mettere un semaforo ad ogni incrocio. Vi sono n strade; ogni strada si interseca sempre con ogni altra strada ed inoltre non vi sono piazze, per cui in ogni incrocio si intersecano sempre due e soltanto due strade (ogni incrocio è un quadrivio).*
Attraverso un ragionamento di tipo induttivo, formulate una congettura per stabilire quanti semafori sono necessari e dimostrate quindi la formula.

Dopo una mezz'ora di discussione, l'insegnante ascolta gli interventi, per chiarimenti o altro, degli alunni e propone di valutare se il problema proposto può essere equivalente ad un altro con il seguente enunciato in forma geometrica:

Quanti sono i punti di intersezione di n rette tali che non vi siano rette parallele e in nessun punto si intersechino più di due rette?

Si invitano gli studenti a valutare l'enunciato proposto utilizzando le seguenti figure:

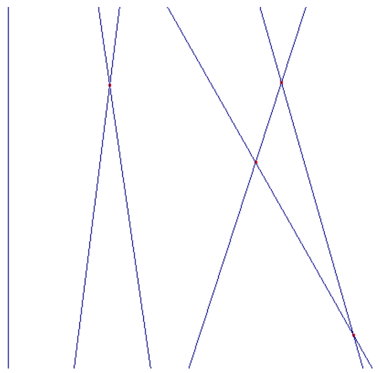


Figura 1

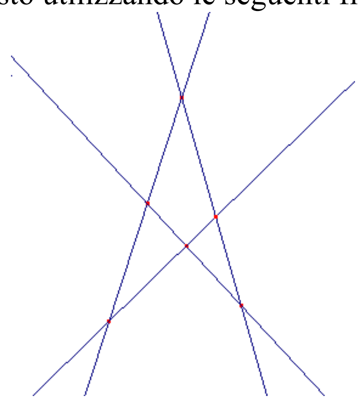


Figura 2

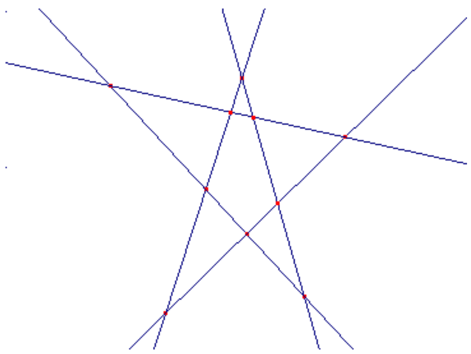


Figura 3

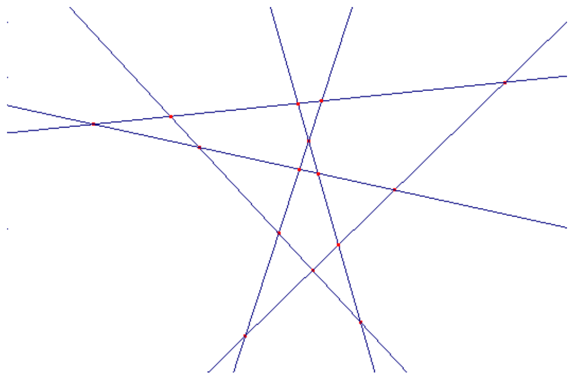


Figura 4

N° rette	1	2	3	4	5	6
N° Punti d'intersezione	0	1	3	6	10	15

Tabella 1

Gli studenti devono giungere, analizzando i casi, alla formulazione di una regola (ricorsiva) da dimostrare con il procedimento per induzione. Probabilmente gli studenti formuleranno regole anche errate.

L'intervento dell'insegnante diviene pertanto fondamentale nel momento della comprensione del seguente fatto geometrico: date (n-1) rette esiste una retta che le interseca in (n-1) punti distinti. Il fatto geometrico va poi formalizzato con la regola ricorsiva:

$s_n = (n-1) + s_{n-1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ...1 = \frac{n(n-1)}{2}$ (somma dei primi (n-1) numeri naturali).

L'attività prosegue con la proposta di un altro problema definito in un contesto diverso.
Viene affrontato dagli studenti singolarmente; la risoluzione proposta utilizza un software di calcolo simbolico (ovviamente anche altri software possono essere utilizzati).

Problema n. 2: *E' data la funzione* $f(x) = 2^x - 2x - 1$.

a) *Studiatela e disegnatene il grafico in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.*
b) *Descrivete una procedura che consenta di trovare gli zeri della funzione e applicatela per calcolare gli zeri con una precisione di 0,01.*
c) *Individuate il minimo valore di* $n \in N_0$ *per il quale vale* $2^n > 2n + 1$.
d) *Dimostrate per induzione la disuguaglianza precedente.*

Lo studio della funzione comporta una risoluzione approssimata dell'equazione $2^x - 2x - 1 = 0$ per trovare gli zeri della funzione e per determinarne il segno. Per via grafica, utilizzando i grafici delle funzioni $y = 2^x$ e $y = 2x + 1$, si trova uno zero in x=0 e si localizza l'altro nell'intervallo [2,3]

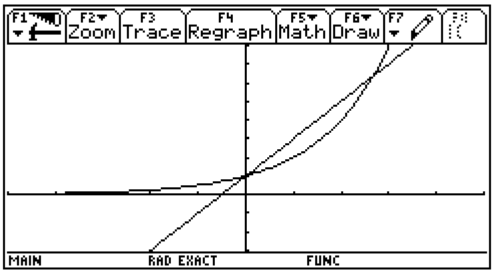


Figura 5

Si può introdurre intuitivamente il metodo di bisezione e far determinare così ai ragazzi lo zero presente nell'intervallo [2,3]. Si crea una funzione che realizza l'algoritmo di bisezione e la si implementa su una calcolatrice programmabile, ad esempio nella codifica seguente:

```
bisez(x1,x2,p)
Func
Local xm,n
0→n
x1→xm
While abs(x1-x2)≥p and f(xm)≠0
     (x1+x2)/2→xm
  If f(xm)*f(x2)<0 Then
                   xm→x1
                   Else
                   xm→x2
  EndIf
n+1→n
EndWhile
If f(xm)≠0 Then
        (x1+x2)/2→xm
EndIf
approx(xm)
EndFunc
```

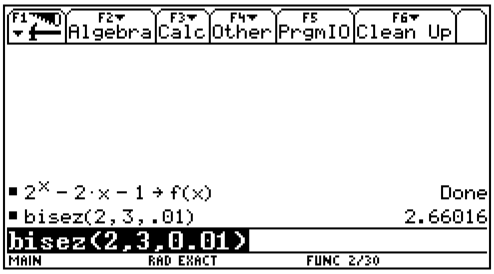


Figura 6

Per rispondere alla domanda c) si disegna il grafico delle due successioni $u1(n) = 2^n$ e $u2(n) = 2n + 1$:

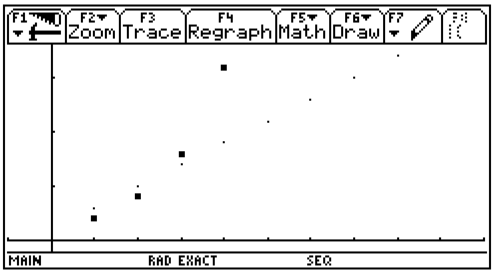


Figura 7

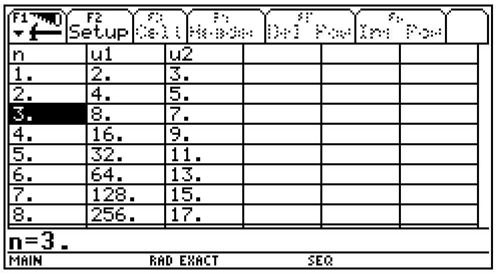


Figura 8

Dal grafico, ma soprattutto dalla tabella si trova che il minimo valore di *n* che soddisfa la disuguaglianza $2^n > 2n + 1$ *è n*=3.
Nel contesto della dimostrazione per induzione il valore n=3 rappresenta il valore iniziale; bisogna quindi dimostrare la disuguaglianza per ogni valore maggiore o uguale a tre.

<u>Seconda fase</u>
Analizzando le difficoltà emerse nell'affrontare i precedenti problemi, l'attenzione va sicuramente posta su alcune questioni abbastanza importanti. Gli studenti sono abituati ad effettuare dimostrazioni (soprattutto dirette) nelle quali è severamente vietato usare una parte della tesi tra le ipotesi. In questo caso sembra invece (con una lettura superficiale!) che si faccia proprio questo tipo di errore. Vale la pena sottolineare che nell'enunciato del principio d'induzione non si afferma affatto che la proprietà in oggetto deve essere vera per un generico n, ma solo che "ammessa la verità della proprietà per il termine ennesimo segue la verità della proprietà per il termine successivo".
In questa fase di riflessione si ritorna anche sulla validità del principio d'induzione matematica come metodo dimostrativo assicurata dal 5° assioma di Peano, dove la validità di una proposizione riferita ad un insieme infinito è assicurata da due soli fatti: una verifica e una dimostrazione! La potenza di questo schema di ragionamento sta nel fatto che, pur avendo a che fare globalmente con un'infinità di proposizioni corrispondenti agli infiniti valori di n, la deduzione della verità di ogni singola proposizione comporta solo un numero finito di passi.
Si conclude questa fase prettamente teorica con una ricerca su Internet di formulazioni del principio di induzione matematica per scegliere una versione condivisa che risulti soprattutto utile operativamente. Il seguente schema è stato elaborato da un gruppo di studenti di una classe quinta, basandosi su un articolo trovato in Internet.

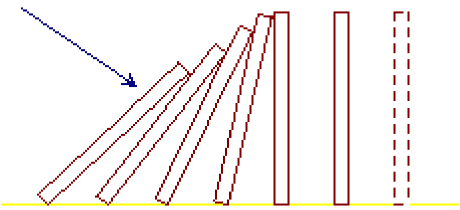
Principio di induzione matematica

La proposizione *P(n)* si dimostra tramite i due passi:

(a) base dell'induzione: la proposizione è vera per n = 0;

(b) passo induttivo: supponi che la proposizione sia vera per n; dimostra che la proposizione è vera per n +1.

Allora la proposizione *P(n)* è vera per tutti i numeri naturali.



Quello che accade con la dimostrazione per induzione può essere visualizzato con l'immagine di una successione di pezzi di domino, posti verticalmente in equilibrio ad una distanza minore della loro altezza. Facendo cadere il primo della fila, tutti gli altri cadranno.

Se invece si sa che la proposizione *P(n)* è vera a partire da un naturale qualunque m (come nel secondo problema proposto) si ha:

Principio di induzione matematica (seconda formulazione)

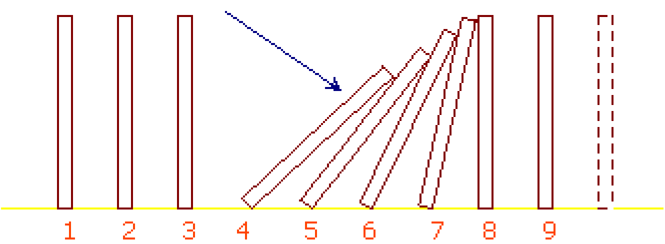
La proposizione si dimostra tramite i seguenti due passi:

(a) base dell'induzione: la proposizione è vera per un numero naturale m;

(b) passo induttivo: supponi che la proposizione sia vera per un generico numero naturale dell'insieme degli n>m; dimostra che la proposizione è vera per n +1.

Allora la proposizione è vera per tutti i numeri naturali non inferiori a m.

Nella dimostrazione per induzione abbiamo, dunque, un *passo base* e un *passo induttivo*.



In termini dei pezzi di domino, questa variante equivale a far cadere non il primo pezzo, ma uno successivo.

Terza fase

Si ritorna ad una fase operativa proponendo agli studenti alcune dimostrazioni di proposizioni già formalizzate e da dimostrare applicando il principio d'induzione. Infatti l'uso comune del principio è proprio quello per dimostrare formule già note!
Si consiglia di proporre in classe i seguenti esercizi.

1) *Provare che se a è un reale maggiore di -1, allora* $(1+a)^n \geq 1 + na$, $n \in \mathbf{N}$ *(Disuguaglianza di Bernoulli).*

Se $n = 1$, si ha $1 + a \geq 1 + a$, che è vera.

Successivamente usare le seguenti uguaglianze e disuguaglianze:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

2) *Sia P(n) l'affermazione:*

$$1+2+...+n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

- *Provare che se P(k) è vera per un fissato valore k, anche P(k+1) è vera*
- *P(n) è falsa per ogni n; ciò risulta provando che per ogni n vale l'affermazione Q(n):*

$$1+2+...+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2.$$

L'insegnante consiglia di fissare un $k > 1$ e supporre vera P(k).
Considerando ora la situazione che si presenta per k+1 si ottiene:

$$(1+2+...+k)+(k+1) = \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}(2k+3)^2 = \frac{1}{8}(2(k+1)+1)^2$$

Dunque vale P(k+1).

L'insegnante ora propone di controllare la proprietà per alcuni valori di n tra i quali n=1. Si vede così facilmente che la proprietà è falsa per ciascuno degli n provati.
Che cosa è venuto a mancare nella dimostrazione? La verifica del fatto che per n=1 la proprietà è vera (infatti è falso che 1 = 9/8).
La disuguaglianza 1 < 9/8 prova che vale Q(1). Si può dimostrare allora che, se è vera Q(k), è vera anche Q(k+1). Si ha pertanto:

$$(1+2+...+k)+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}(2k+3)^2 = \frac{1}{8}(2(k+1)+1)^2$$

Si può così concludere che Q(n) è vera per ogni n: questo basta per provare che P(n) è falsa per ogni n.

3) *Sia P(n) l'affermazione: in qualunque insieme di n persone tutte hanno la stessa età.*
Provare per induzione che la proprietà P(n) è vera per ogni n.
Dunque tutte le persone hanno la stessa età.

La proprietà è vera per n=1, perché ognuno ha la stessa età di se stesso. Supposta vera la proprietà per un insieme di n persone, si consideri un insieme di n+1 persone, aggiungendone 1 alle prime n persone. Immaginiamo di rappresentarle in fila:

```
*   *   *   *    *     *
1,  2,  3,  …,  n-1,  n,  n+1
    *   *   *    *     *   *
```

Considerando le prime n persone (con * in alto) esse hanno tutte la stessa età, ma anche prendendo le ultime n (con * in basso) esse hanno la stessa età. Poiché le persone dalla seconda all'ennesima sono le stesse nei due raggruppamenti, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza anche la (n + 1)-esima persona ha le stesse età delle altre e della prima.
Qui l'errore nasce dal fatto che il passo induttivo da n a n+1 non vale per n=1 in quanto non si può usare la proprietà transitiva in un insieme di due persone.

Si fanno adesso due riflessioni conclusive:
1. nella dimostrazione per induzione tutti i passi indicati sono essenziali!
2. quale significato ha il termine "affermazione"?: si è portati a pensare che un'affermazione sia necessariamente vera mentre in realtà …

Elementi di prove di verifica

1. Si considera un problema analogo al secondo proposto nella prima fase, con la funzione $f(x) = 2^x - x^2$ e quindi si dimostra che la disuguaglianza $2^n > n^2$ è vera da un determinato valore di n in poi.

2. Sia P(n) l'affermazione: ogni numero naturale n è uguale al suo successivo n +1

   - Provare che se P(k) è vera per un fissato valore k, anche P(k+1) è vera
   - Possiamo affermare che P(n) è vera per ogni n?
   - È stato utilizzato in maniera corretta il principio d'induzione?
   - Per provare che la proposizione è falsa per ogni n è sufficiente verificare ciò per alcuni valori di n?
   - Facendo riferimento ad uno degli esercizi svolti in classe, dimostrare che la proprietà è falsa per ogni n, cercando di enunciare e dimostrare una nuova proprietà.

3. Provare che, per n>0:
$$n! \geq 2^{n-1}$$

4. Provare che, per $n > 1$:
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

5. Provare che, per $n > 1$:
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

6. Dimostrare che il numero delle diagonali di un poligono convesso di n lati è $\frac{n(n-3)}{2}$.

Nota per il docente. *Assiomi di Peano per l'Aritmetica*
Si formulano in un linguaggio che contiene i seguenti simboli:
0 (costante zero)
S (successivo di: funzione ad un argomento)
N (insieme dei naturali)
ε (appartiene a)
x, y, z,...(variabili numeriche)
P, Q, R, ... (variabili di insiemi di numeri)

Assioma 1. **0** ε **N** (zero è un numero)
Assioma 2. x ε **N** → **S**x ε **N** (**N** è chiuso rispetto alla funzione **S**)
Assioma 3. **0** ≠ **S**x (zero non è successivo di alcun numero)
Assioma 4. **S**x = **S**y → $x = y$ (**S** è iniettiva)
Assioma 5. Per ogni insieme P: [(**0** ε P) & $\forall x(x$ ε $P \rightarrow$ **S**x ε P)] → $\forall x(x$ ε **N** → x ε P)
(se P è un insieme induttivo, cioè contiene lo zero ed è chiuso rispetto alla funzione S, allora è un sottoinsieme di **N**; in altri termini: **N** è il minimo insieme induttivo)

L'assioma 5 è il principio di induzione matematica: se una proprietà (insieme) *P* è soddisfatta (contiene) dallo zero e, supposto che sia soddisfatta da un qualunque numero x allora è soddisfatta anche da **S**x, ne segue che è soddisfatta da tutti i numeri.

Maiuscole e minuscole

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi. I predicati. Schemi di ragionamento. Sistemi assiomatici in vari contesti.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u> Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Sistemi assiomatici.

Un sistema assiomatico è formale in quanto è formulato in un linguaggio rigorosamente definito dal punto di vista sintattico (le formule ammesse, le regole formali di derivazione). Il senso del sistema formale sta anche nelle possibili interpretazioni (semantica). È opportuno distinguere i due aspetti, anche se è solo dal loro intreccio che si può generare una sua completa comprensione. Da un lato il versante sintattico evita di utilizzare ipotesi implicite date per scontate, tuttavia mai dimostrate, ed evita anche le ambiguità del linguaggio naturale. Ciò comporta una maggiore attenzione alle procedure di deduzione. Dall'altro lato, gli aspetti semantici offrono i contesti da cui tali procedure estraggono il loro significato. Si tratta di un rapporto dialettico tra i due poli, che complessivamente deve essere colto dagli allievi con le opportune gradualità.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Si tratta di lavorare con un sistema formalizzato per la produzione di parole (stringa di simboli dell'alfabeto). È dato un elenco di parole scritte con lettere minuscole e maiuscole
es: *GatTo* *eleNCo* *Se* *sE* *aLLa*
È consentito modificare l'insieme iniziale di parole date solamente applicando le seguenti regole:
REGOLA 1 Si cancellano (una o più) occorrenze multiple della stessa lettera in una stessa parola.
Es: da eleNCo si ottiene *elNCo* per cancellazione della seconda "e" (è indifferente quale delle due si cancella);
da *GatTo* non si può ottenere nulla, perché "*t*" e " *T* "sono considerate diverse;
da *aLLa* si ottiene *aLL* oppure *aLa* e successivamente *aL*.

REGOLA 2 Prese due parole una con la maiuscola e una con la minuscola della stessa lettera, si eliminano queste due lettere e si uniscono i restanti spezzoni. Se abbiamo *Q* , *q* diciamo che abbiamo la "parola vuota".
Es: *eleNCo, aL* danno *eeNCoa* da cui ancora *eNCoa* per la regola1
Se , *sE* danno *eE*

Che ruolo ha la parola vuota? Sarà più facile attribuirle un significato alla luce della interpretazione del sistema data in seguito.
Si pone il seguente problema fondamentale: *dato l'elenco di parole è ottenibile la parola vuota*?

Esempio 1

sia dato l'insieme { AB,ab,Ab,aB }
per ottenere la parola vuota:

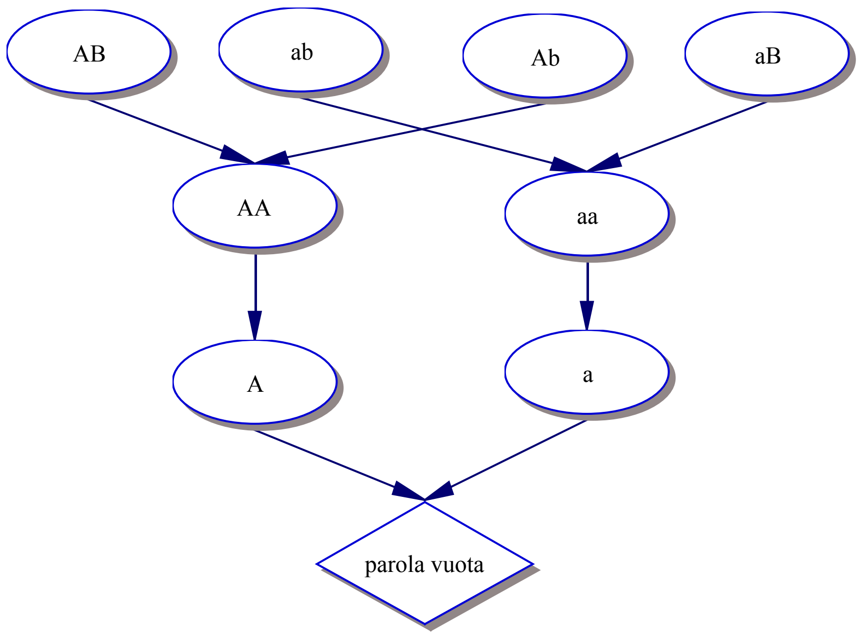


Figura 1

Esempio 2

sia dato l'insieme { Ca,Ad,DB,bb,dc,DD }
per ottenere la parola vuota:

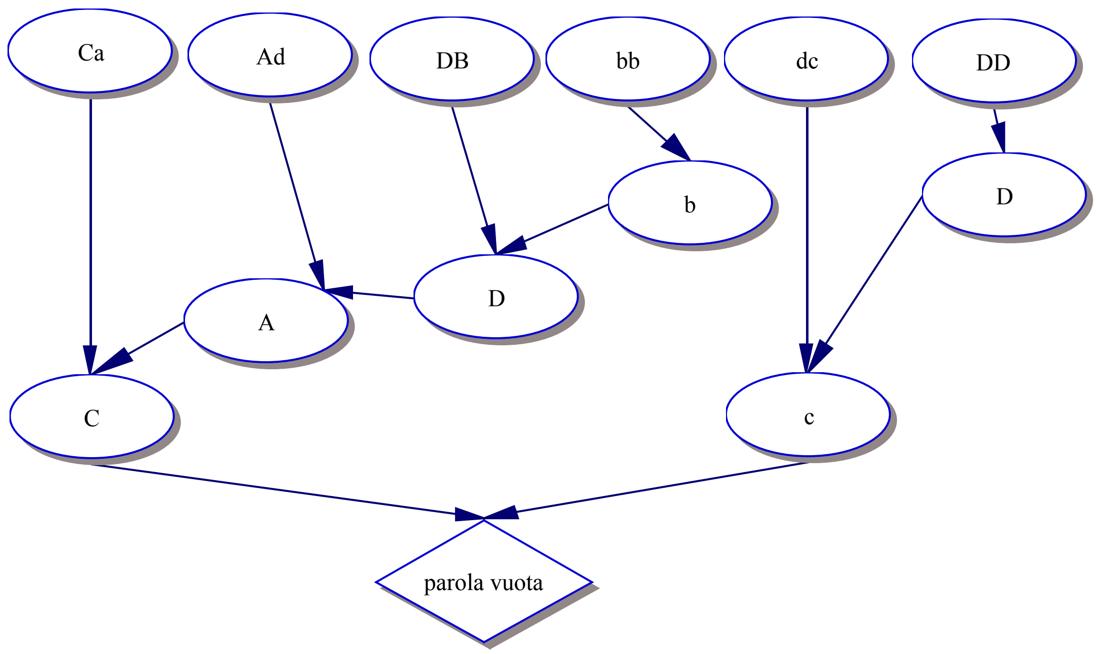


Figura 2

Esempio 3

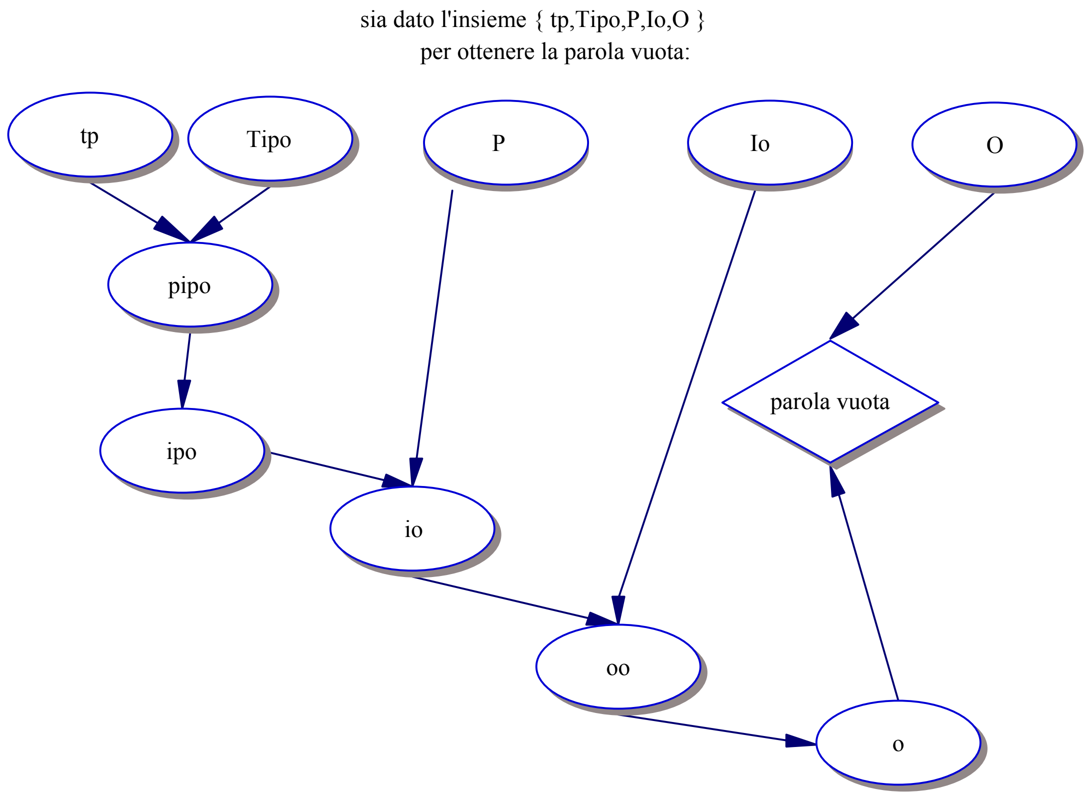


Figura 3

Si propone agli alunni, dopo aver presentato le regole del gioco, di esercitarsi nella produzione di insiemi di parole che producono la parola vuota. Nei primi esempi sono stati utilizzati insiemi di parole con meno di tre lettere perché con questi insiemi è più facile decidere se la parola vuota è ottenibile o no. Risulta banale il problema nel caso in cui l'insieme è formato da parole ciascuna di una sola lettera.

Es: { A, C, b,e } non dà la parola vuota
mentre {A, C, b, c } dà la parola vuota.

<u>Seconda fase</u>
L'insegnante propone la seguente interpretazione del sistema formale in questione:
A = proposizione A
a = proposizione ¬ A (non A)
XY = X v Y
X,Y = X ∧ Y

La clausola dell'esempio 1
AB, Ab, aB, ab
equivale, nella interpretazione data, all'espressione seguente

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

È facile verificare con le tavole di verità che questa proposizione è sempre falsa, cioè è una contraddizione. A questo punto possiamo ripensare alla produzione della parola vuota come alla presenza di una contraddizione nel sistema delle proposizioni prese in considerazione. Infatti la clausola dell'esempio 1 {*AB, Ab, aB, ab*} produce la parola vuota e il suo equivalente è una contraddizione.
Si può provare che la nota proposizione $A \vee \neg A$ è una tautologia provando che la sua negazione è una contraddizione in quanto applicando le regole del gioco produce la parola vuota.
Infatti la negazione di $A \vee \neg A$ è $\neg(A \vee \neg A) = \neg A \wedge \neg\neg A = \neg A \wedge A$;
$\neg A \wedge A$ equivale ad *a,A* che dà per la regola 2 la parola vuota. Si dice in tal caso che la clausola è insoddisfacibile.

Facendo qualche richiamo sulla logica degli enunciati si ricorda agli alunni che la proposizione $H \rightarrow T$ è logicamente equivalente alla proposizione $\neg H \vee T$. Ad es., dire "se manca la benzina il motore si ferma" equivale a "non manca la benzina oppure il motore si ferma".

Il metodo di refutazione consiste nel porsi come obiettivo la dimostrazione di un enunciato del tipo $H \rightarrow T$, cioè se H allora T. Per fare questo si segue la seguente strategia :

a) Si cerca di refutare l'enunciato $H \rightarrow T$, cioè di trovare una interpretazione che lo falsifichi (cioè in cui tale enunciato risulti falso).
b) Ciò equivale a trovare una interpretazione che soddisfi $H \wedge \neg T$ (equivale a dire che l'implicazione $H \rightarrow T$ risulta falsa).
c) Per fare ciò si segue il metodo della ricerca della parola vuota nel gioco delle maiuscole e minuscole, cioè si prova se le regole applicate alla clausola { H, t } producono la parola vuota (clausola insoddisfacibile). Ciò equivale a dire che non si può refutare $H \rightarrow T$ cioè che $H \rightarrow T$ è vera in qualunque interpretazione. Dunque $H \rightarrow T$ è un teorema. Nel caso invece in cui non si produca la parola vuota la clausola non è refutabile quindi $H \rightarrow T$ non è un teorema.

E' necessario fare due osservazioni: 1- si definisce soddisfacibile una clausola quando esiste una interpretazione (nel caso del calcolo preposizionale una assegnazione di valori di verità) tale che la clausola stessa risulta vera in base a quella interpretazione; e quindi risulta insoddisfacibile se nessuna interpretazione la rende vera. 2- nella situazione precedente spesso H non è una sola parola ma un insieme di parole (cioè ci sono più ipotesi), ad esempio $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. In tal caso H diventa $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n$.

Segue un esempio sul metodo di refutazione:

$$[\, A \rightarrow (B \rightarrow C) \,] \quad \rightarrow \quad [\, A \wedge B \rightarrow C \,]$$

$$[\neg A \vee (B \rightarrow C) \,] \quad \wedge \quad \neg\, [\, A \wedge B \rightarrow C \,]$$

$$[\neg A \vee \neg B \vee C \,] \quad \wedge \quad [A \wedge B \wedge \neg C]$$

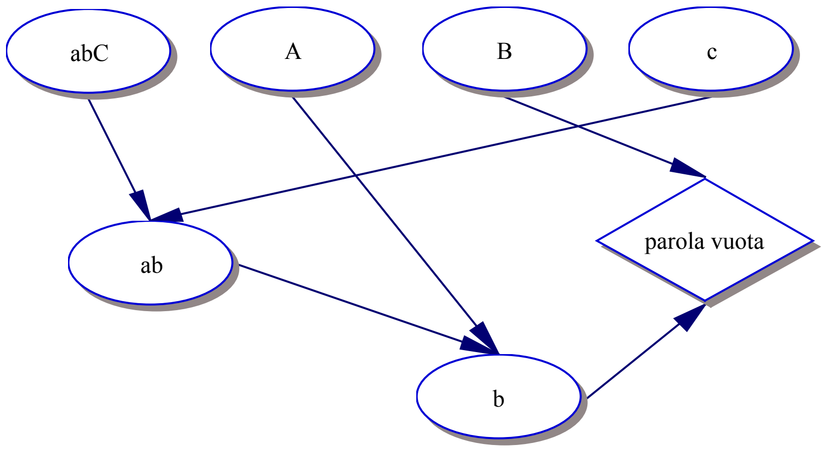


Figura 4

Il metodo di refutazione proposto è alla base dell'algoritmo usato nel Prolog per la dimostrazione automatica. In particolare tali linguaggi sono usati per fare diagnosi mediche a partire dai data base relativi ai sintomi e ai risultati degli esami dei pazienti.
Può essere interessante per gli studenti una ricerca su Internet sulle dimostrazioni automatiche.

Terza fase
Si ha l'opportunità adesso di fare una riflessione su alcuni termini "noti" alla luce dell'attività fin qui svolta : per esempio

- stringa
- teorema
- assioma
- regola di inferenza
- derivazione

Elementi di prove di verifica

1. Dato l'insieme { se, Sul, il, I,uu, EE } completa il seguente schema per ottenere la parola vuota

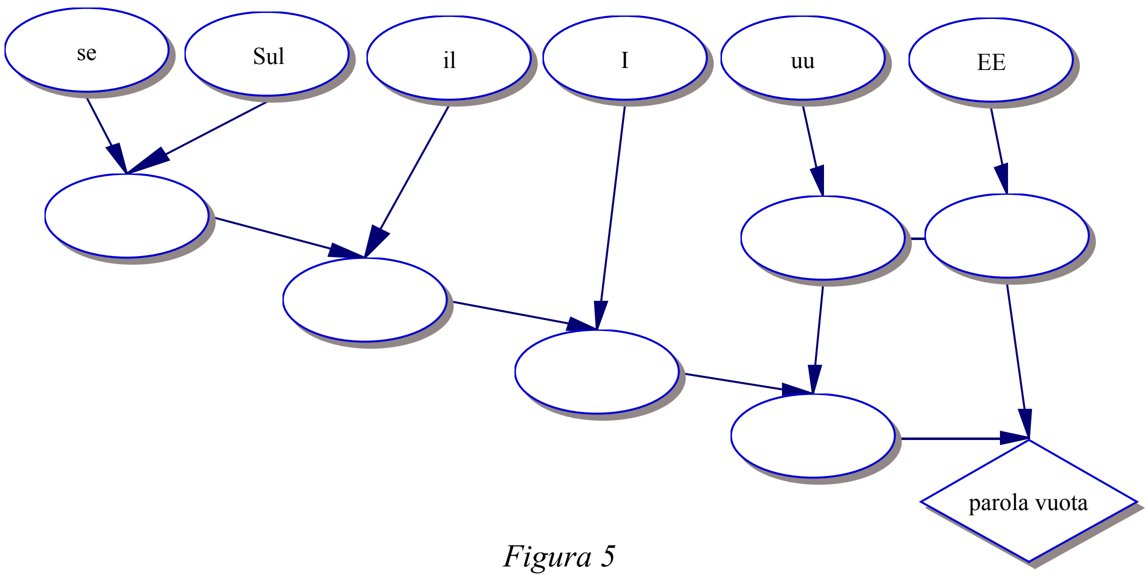


Figura 5

2. Si propone un gioco, analogo al precedente, per la produzione di stringhe in cui le uniche lettere consentite sono M, I e U.

L'unica stringa di cui si è in possesso all'inizio del gioco è MI.

Si possono produrre altre stringhe solo rispettando le seguenti regole:

I. Se si possiede una stringa che termina con una I, si può aggiungere una U alla fine.
II. Si abbia Mx. Allora si può includere nella collezione Mxx (x indica una stringa)
III. Se in una stringa c'è III si può costruire una nuova stringa mettendo U al posto di III.
IV. Se all'interno di una delle stringhe c'è UU si può eliminarlo

Scopo del gioco: ottenere le stringhe MIUIU MIIUIIU MIU.

Si possono fare delle osservazioni sulle stringhe che si sono prodotte (iniziano tutte per M,…), cercando anche di capire quali stringhe non si potranno ottenere; saranno utili anche delle osservazioni sulle regole per vedere cosa si può fare e cosa non si può fare.

Riferimenti bibliografici

Graham, R.L.; Knuth, D.E.; Patashnik, O, (1992), *Matematica discreta*, Hoepli: Milano.

Lolli, G., (1978), *Lezioni di logica matematica*, Boringhieri: Torino.

MPI, (1996), *L'insegnamento della Logica*, Maglie, L.G. "Capece".

MPI, (1997), *I temi nuovi nei programmi di Matematica (Probabilità, Statistica, Logica, ...) e il loro inserimento nel curriculum*, Collana "Quaderni", n. 26/2, Lucca, L.S. "A.Vallisneri".

MPI, (1999), *Probabilità e Statistica nella Scuola liceale,* Collana "Quaderni", n. 28, Lugo di Romagna, L.S. "G. Ricci Curbastro".

Consolidamento: attività didattiche e prove di verifica

Elenco delle attività

Interpolazione polinomiale

Percorso: **La versatilità dell'oggetto polinomio**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Polinomi in una indeterminata. I polinomi e le loro operazioni. Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione.	Numeri e algoritmi	
Risolvere semplici problemi riguardanti le parabole.	Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate.	Spazio e figure	
Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni di primo grado.	Sistemi lineari. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzioni polinomiali.	Relazioni e funzioni	
Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze e utilizzarli per effettuare previsioni.		Misurare	
In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare teoremi.		Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di Matematica	

Contesto
Matematica. Polinomi e interpolazione.

Quest'attività si inserisce nel percorso di consolidamento "La versatilità dell'oggetto polinomio" e vuole condurre gli studenti ad affrontare il seguente problema:
Dati $n + 1$ punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) con ascisse tutte distinte, determinare il polinomio $p(x)$ di grado (al più) n tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ soddisfi gli $n + 1$ punti, cioè tale che

$$p(x_0) = y_0,\ \ p(x_1) = y_1,\ \ \dots\ ,\ \ p(x_n) = y_n.$$

Gli studenti devono rendersi conto che la determinazione dei coefficienti del polinomio comporta la risoluzione di un sistema di equazioni lineari e che il polinomio ottenuto è unico. Inoltre per $n = 1$ e $n = 2$ devono ritrovare risultati già noti dagli anni precedenti. Infine è bene che gli studenti affrontino il problema della complessità del calcolo (con gli strumenti che hanno a disposizione) quando il numero dei punti considerati aumenta, in modo da far loro intravedere la necessità di tecniche più potenti, anche attraverso l'utilizzo della tecnologia.

Descrizione dell'attività
L'insegnante invita gli studenti a completare, eventualmente servendosi di una calcolatrice, la seguente tabella con riferimento alla funzione polinomiale $p(x) = 5 - x + 2x^2 + 3x^3$

x	$p(x)$
−1	
0	
1	
1,5	

L'insegnante invita gli studenti a rappresentare graficamente i punti ottenuti e a confrontarli con il grafico della funzione polinomiale ottenuto implementando l'equazione del polinomio dato con un software di manipolazione simbolica (Computer Algebra System).

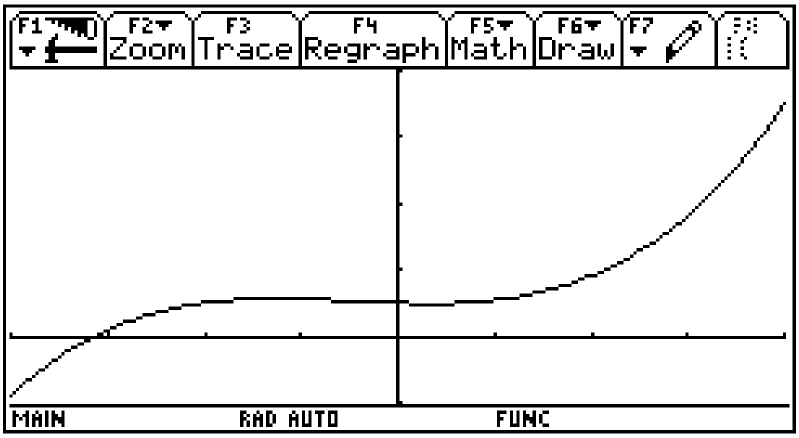


Figura 1

L'insegnante pone la seguente domanda: "Ci si poteva attendere, conoscendo solo quei quattro punti, che la funzione polinomiale avesse questo andamento?"
A questo punto occorre affrontare il seguente problema: data una tabella che rappresenta un certo numero di punti, è univocamente determinata la funzione polinomiale che passa per quei punti? Per rispondere si procede per gradi. Quanti punti sono necessari per determinare un polinomio di primo grado? La domanda non presenta difficoltà in quanto è ben noto agli studenti che sono necessari due punti per individuare una retta. Ma sono anche sufficienti.
L'insegnante avrà l'opportunità di consolidare l'abilità relativa a determinare l'equazione della retta passante per due punti assegnati. Scrivendo l'equazione della retta nella forma $y = a_1 x + a_0$, farà notare che i parametri in gioco sono due e che imporre il passaggio per due punti significa risolvere un sistema di due equazioni nelle due incognite a_0 e a_1.
Si propone il seguente esempio.
Determinare l'equazione della retta passante per i punti di coordinate (−1; 2) e (1; 3/2); cioè il polinomio di primo grado tale che $p(-1) = 2$ e $p(1) = 3/2$.
Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + a_0 = 2 \\ a_1 + a_0 = 3/2 \end{cases},$$

gli studenti ottengono facilmente il polinomio:

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

In quali casi il sistema risulta indeterminato? E in quali casi impossibile?
La discussione su questi temi offre l'opportunità di consolidare conoscenze relative ai sistemi lineari di due equazioni in due incognite, note fin dal primo biennio della scuola secondaria.
Seguendo un approccio graduale, l'insegnante pone la domanda: "Quanti punti sono necessari per determinare un polinomio di secondo grado?"

In altre parole, quanti punti sono necessari per individuare una parabola di equazione:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \ ?$$

Anche a questo proposito l'insegnante proporrà diversi esempi del tipo seguente.
Determinare il polinomio di secondo grado $p(x)$ tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ passi per i punti di coordinate (1; 2), (2; 5), (3; 4).
Gli studenti potranno risolvere il sistema corrispondente anche con l'uso del software precedentemente utilizzato in modo da ottenere l'equazione $y = -2x^2 + 9x - 5$. Inoltre otterranno il grafico seguente:

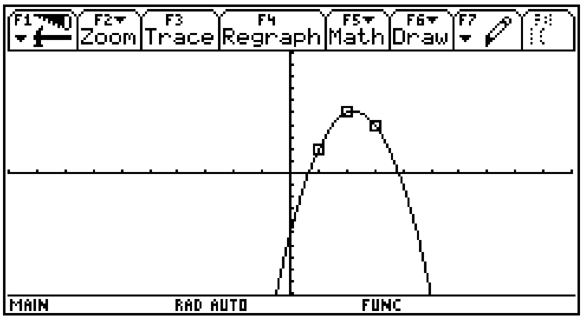


Figura 2

Dati tre punti, è sempre possibile determinare il polinomio di secondo grado tale che il grafico della funzione polinomiale corrispondente passi per quei punti?
Gli studenti saranno portati ad osservare, con semplici considerazioni geometriche, che se i tre punti sono allineati non esiste una parabola che passi per essi.
L'insegnante inviterà gli studenti a risolvere il sistema nel caso che i tre punti siano ad esempio (–2; –2), (0; 0), (2; 2) e si troverà che, in tal caso, il coefficiente del termine di secondo grado è uguale a zero.
Si propone a questo punto il seguente problema.
Determinare la funzione polinomiale di grado 3 che passa per i 4 punti (1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 8).
Il generico polinomio di grado 3 è

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

La condizione affinché il grafico della funzione polinomiale passi per i punti indicati si traduce nella risoluzione del sistema seguente

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 4 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 8 \end{cases}.$$

A tale scopo è consigliabile utilizzare un software di manipolazione simbolica (per esempio una calcolatrice grafico – simbolica), per evitare che le difficoltà di calcolo facciano perdere di vista l'obiettivo dell'attività.
Si ottiene:

$$p(x) = -10 + \frac{127}{6}x - \frac{19}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

Graficamente risulta:

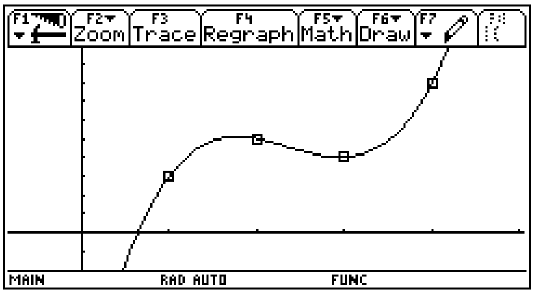


Figura 3

L'unicità della soluzione del sistema garantisce l'unicità del polinomio?
Questi esempi conducono gli studenti a congetturare che n +1 punti di ascisse distinte determinano un polinomio $p(x)$ di grado (al più) n .
In effetti si può dimostrare il seguente:
Teorema. Dati $n + 1$ punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), se le ascisse sono tutte distinte allora esiste uno ed un solo polinomio $p(x)$ di grado (al più) n tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ soddisfa gli $n + 1$ punti, cioè tale che:

$$p(x_0) = y_0\, ;\; p(x_1) = y_1\, ;\, \ldots\ldots\ldots\ldots\, ;\; p(x_n) = y_n$$

Il polinomio $p(x)$, se è di grado n, ha $n + 1$ coefficienti:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Il sistema lineare si ottiene imponendo il passaggio per gli $n + 1$ punti ($n + 1$ equazioni nelle $n + 1$ incognite a_0, a_1, …, a_n).

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Il sistema ammette una e una sola soluzione. La n-pla che rappresenta la soluzione fornisce i coefficienti del polinomio cercato. Se $a_n \neq 0$, il polinomio sarà esattamente di grado n.

Possibili sviluppi
Si può approfondire la questione considerando il caso in cui i punti dati siano n e il polinomio cercato di grado n (si tratta di un sistema di n equazioni in $n + 1$ incognite) e il caso in cui i punti dati siano $n + 2$ e il polinomio cercato di grado n (si tratta di un sistema di n+2 equazioni in $n + 1$ incognite).

Elementi di prove di verifica

1. Determinare il polinomio di terzo grado $p(x)$ tale che la funzione $y = p(x)$ passi per i punti di coordinate $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 5)$.

2. Considerare i seguenti punti $(-1; -7)$, $(0; -5)$, $(3; 1)$. Sono allineati? Qual è il relativo polinomio di primo grado? Esiste un polinomio di secondo grado tale che la funzione polinomiale corrispondente soddisfi i tre punti?

3. Considerare i seguenti punti $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$. Trovare un polinomio di terzo grado $p(x)$ tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ soddisfi i tre punti. La soluzione è unica?

4. Quante sono le parabole di equazione $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ che passano per i punti $(-2; 0)$ e $(3{,}5; 0)$? Scriverne l'equazione.

5. Quante sono le funzioni polinomiali di terzo grado che passano per i punti $(-2; 0)$, $(0; 0)$, $(3{,}5; 0)$? Scriverne l'equazione.

Approssimazione polinomiale

Percorso: **I numeri: esattezza e approssimazione**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Approssimare a meno di una fissata incertezza. Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo e viceversa Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione. Determinare approssimazioni ed effettuare una stima dell'incertezza.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. I polinomi e le loro operazioni. Il grafo di calcolo di un'espressione. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzioni polinomiali. La funzione esponenziale e il suo grafico.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Misurare	

Contesto

Matematica. Problema delle approssimazioni.

Questa attività si pone nell'ambito generale del problema delle approssimazioni e affronta il problema di approssimare funzioni trascendenti tramite polinomi. Precisamente si vuole evidenziare come è possibile migliorare il grado di approssimazione aumentando il grado del polinomio impiegato.

Descrizione dell'attività

A livello didattico si può partire dalla seguente domanda: "Sapendo che una calcolatrice scientifica effettua, in ultima analisi, due operazioni (addizione e moltiplicazione), qual è la tipica funzione algebrica che può essere "costruita" con tali operazioni?" La tipica struttura algebrica che si può costruire mediante le sole operazioni di addizione e moltiplicazione è il polinomio. Poiché tutte le calcolatrici scientifiche contengono, di default, anche funzioni trascendenti, si pone allora il problema di comprendere come tali funzioni possono essere calcolate. Ciò può essere evidenziato tramite il confronto dei valori ottenuti con le funzioni di default con quelli calcolati tramite uno sviluppo polinomiale.

<u>Prima fase</u>

L'insegnante propone il seguente problema: Data la funzione $f(x) = 2^x$, supponiamo di voler calcolare i valori assunti da tale funzione nei punti dell'intervallo [0, 2]. A questo punto si presentano due possibilità: *a*) utilizzare la funzione y^x presente nella calcolatrice; *b*) utilizzare un opportuno polinomio [che sfrutta solo le operazioni di addizione e moltiplicazione]. Considerato che si può conoscere facilmente il valore della funzioni in alcuni punti dell'intervallo in questione, è possibile determinare i coefficienti del polinomio di secondo grado $a_0 + a_1x + a_2x^2$ che passa per una terna di punti le cui ascisse appartengono all'intervallo [0, 2]. Ad esempio si potranno utilizzare i punti di coordinate (0; 1), (1; 2), (2; 4). Applicando il procedimento sviluppato nell'attività relativa all'interpolazione polinomiale si arriva a determinare:

$$p(x) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2.$$

Le due funzioni $f(x)$ e $p(x)$ assumono evidentemente valori uguali per $x = 0, 1, 2$. Cosa succede per altri valori dell'intervallo [0, 2]? Calcoliamo i valori delle due funzioni dando a x valori crescenti partendo da 0 con un incremento pari a 0,5 e confrontiamo i risultati ottenuti. Si ottiene una tabella del tipo seguente:

x	y1	y2
0.	1.	1.
.5	1.4142	1.375
1.	2.	2.
1.5	2.8284	2.875
2.	4.	4.
2.5	5.6569	5.375
3.	8.	7.
3.5	11.314	8.875

x=0.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 1

in cui si nota che per alcuni punti [$x = 0,5$ e $x = 1,5$] la concordanza non è perfetta. Per determinare la stima dell'incertezza è necessario rispondere alla seguente domanda: "Qual è l'errore che si commette in tali punti?" Si tratta di valutare la differenza $f(x) - p(x)$. Si ottiene la nuova tabella in cui l'ultima colonna riporta il valore dell'errore assoluto.

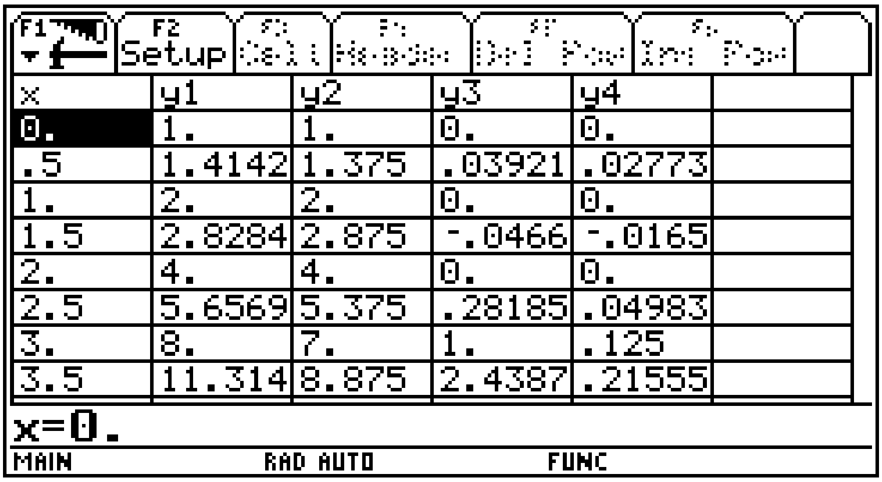
x	y1	y2	y3
0.	1.	1.	0.
.5	1.4142	1.375	.03921
1.	2.	2.	0.
1.5	2.8284	2.875	-.0466
2.	4.	4.	0.
2.5	5.6569	5.375	.28185
3.	8.	7.	1.
3.5	11.314	8.875	2.4387

x=0.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 2

Ma, per valutare la bontà dell'approssimazione, è più utile l'errore relativo rispetto all'errore assoluto. Pertanto si può costruire una nuova tabella che accanto all'errore assoluto riporti anche l'errore relativo $[f(x) - p(x)]/f(x)$.



x	y1	y2	y3	y4
0.	1.	1.	0.	0.
.5	1.4142	1.375	.03921	.02773
1.	2.	2.	0.	0.
1.5	2.8284	2.875	-.0466	-.0165
2.	4.	4.	0.	0.
2.5	5.6569	5.375	.28185	.04983
3.	8.	7.	1.	.125
3.5	11.314	8.875	2.4387	.21555

Figura 3

Diminuendo l’incremento della *x* a 0,2 si ottiene la seguente tabella

x	2^x	1+0,5*x+0,5*x^2	f(x)-p(x)	(f(x)-p(x))/f(x)
0	1	1	0	0
0,2	1,148698	1,12	0,028698	0,024983369
0,4	1,319508	1,28	0,039508	0,029941397
0,6	1,515717	1,48	0,035717	0,023564146
0,8	1,741101	1,72	0,021101	0,012119415
1	2	2	0	0
1,2	2,297397	2,32	-0,0226	-0,00983865
1,4	2,639016	2,68	-0,04098	-0,0155301
1,6	3,031433	3,08	-0,04857	-0,01602109
1,8	3,482202	3,52	-0,0378	-0,01085455
2	4	4	0	-1,1102E-16
2,2	4,594793	4,52	0,074793	0,016277863

Tabella 1

da cui si nota che l’errore dell’approssimazione dipende dal punto considerato.

<u>Seconda fase</u>

Un altro modo per valutare la “bontà” dell’approssimazione è quello di rappresentare i grafici sovrapposti di *f*(*x*) e *p*(*x*) nell’intervallo considerato. Si ottiene il seguente andamento:

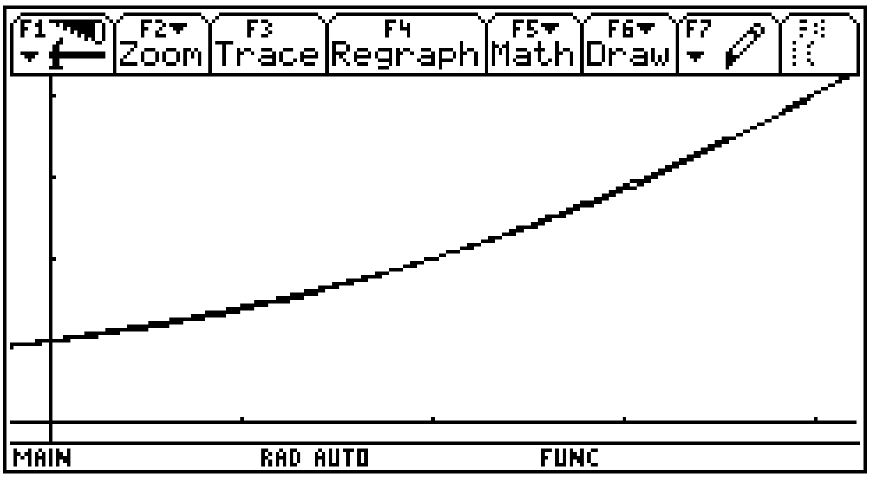


Figura 4

da cui appare evidente come le due curve sono molto vicine su tutto l'intervallo considerato.
Sfruttando le potenzialità della tecnologia è possibile ottenere un grafico più significativo del precedente in cui si rappresenta sia l'errore assoluto che quello relativo.

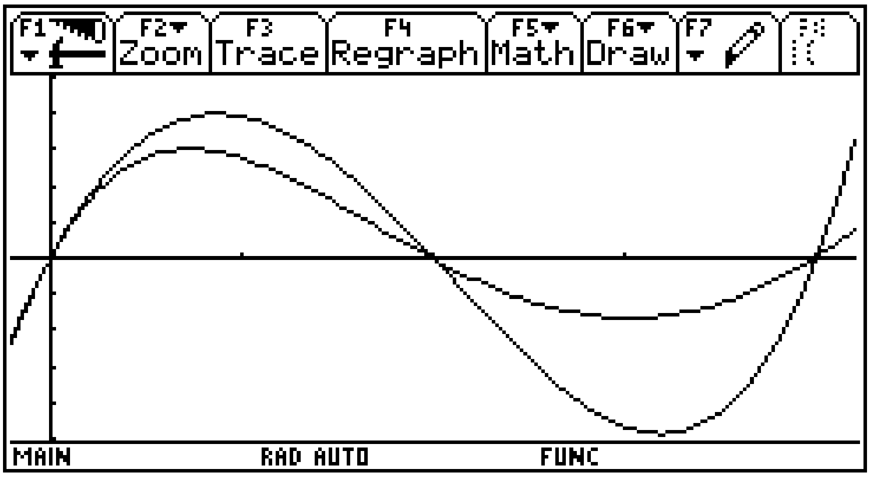


Figura 5

Si può vedere che solo utilizzando una scala opportuna sull'asse delle ordinate [nel caso in esame si considerano valori compresi tra –0,05 e 0,05] è possibile evidenziare l'errore. In particolare si osserva come per i valori dell'intervallo [0, 1] l'errore relativo è più grande (in valore assoluto) che per i valori dell'intervallo [1, 2].
Come successivo approfondimento per una ulteriore valutazione si può determinare l'area sottesa dalle curve $f(x) - p(x)$ e $[f(x) - p(x)]/f(x)$ sull'intervallo considerato.

Possibili sviluppi

Questa attività può proseguire secondo due diverse direzioni: *a*) valutare l'andamento dell'errore al crescere dell'ampiezza dell'intervallo; *b*) valutare il miglioramento dell'approssimazione al crescere del grado del polinomio.

Elementi di prove di verifica

1. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo [1, 2] e nell'intervallo [5, 6]. Polinomi dello stesso grado producono la stessa approssimazione in questi intervalli?

2. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ nell'intervallo [0, 1].

3. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione $f(x) = log_2 x$ nell'intervallo [1, 4].

4. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ nell'intervallo [–1, 1].

La concentrazione del tasso alcolemico nel sangue

Percorso: **Modelli discreti e algoritmi di implementazione**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.		Numeri e algoritmi	Scienze
Costruire modelli, sia discreti che continui. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni. Possedere il senso intuitivo di limite di una successione.	Zeri di funzioni. La funzione esponenziale. Semplici esempi di successioni. Incrementi a passo costante, pendenza media.	Relazioni e funzioni	
Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezza e utilizzarli per effettuare previsioni.		Misurare Laboratorio di matematica	

Contesto
Educazione alla salute.

Questa attività si colloca nel contesto dei problemi reali, di particolare rilevanza sociale e attualità, legati alle problematiche di vita degli studenti.
L'attività, introdotta in una quinta classe, può avere lo scopo di richiamare vari concetti già affrontati negli anni precedenti, proponendo un problema molto simile alla "concentrazione di un farmaco nel sangue" che è stato suggerito per il secondo biennio [Matematica 2003, *Relazioni e funzioni*, La concentrazione di un farmaco nel sangue]. L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. Naturalmente l'attività dovrebbe essere molto meno guidata dall'insegnante rispetto alla "concentrazione di un farmaco nel sangue": gli studenti dovrebbero essere in condizione di affrontare autonomamente il problema.

Descrizione dell'attività
L'attività consente di richiamare e approfondire:
- nozioni come quelle di funzione, in particolare di successione, di crescenza di una funzione, di modello;
- tecniche come quelle delle differenze finite per ottenere informazioni sulla variazione e in particolare su come cresce una funzione;
- tecniche di programmazione per calcolare i valori di una successione definita per ricorsione.

Consente anche un'ulteriore occasione per riflettere sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Attività di questo tipo rendono possibile la ripresa e l'approfondimento di tecniche di risoluzione di equazioni, sia grafiche sia numeriche sia formali. La compresenza di questi tre approcci rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, soprattutto dei manipolatori grafico-simbolici.

Prima fase

L'insegnante propone la *situazione–problema* sotto riportata:

Il tasso alcolemico si misura in grammi di alcool per litro di sangue; un tasso alcolemico di 1g/l indica che in ogni litro di sangue del soggetto è presente 1 grammo di alcool puro. Per una persona di 70 kg, che ingerisce 70–80 cl di birra a elevata gradazione alcolica, il tasso alcolemico aumenta di circa 0,8 g/l. Supponiamo ora che:

- una persona abbia assunto una quantità di alcool tale che, dopo la prima mezz'ora, il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo di 1,5 g/l;
- il fegato di questa persona riesca a smaltire ogni ora una quantità di alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduca del 30% ogni ora;
- la persona per un'intera settimana non assuma più alcool.

Determinare, se possibile, dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a una quantità pressoché trascurabile (diciamo 0,1 g/l), giustificando la risposta.

Nelle seguenti ipotesi:

- il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo nel sangue in un tempo trascurabile;
- una persona assuma sistematicamente una quantità di alcool tale da provocare, a ogni assunzione, un aumento del tasso alcolemico di 0,8 g/l;
- il tempo che intercorre tra un'assunzione e la successiva è tale che il fegato riesce a smaltire l'alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduce, prima della nuova assunzione, dell'80%.

che cosa si può dire dell'evoluzione a lungo termine del tasso alcolemico nel sangue di questa persona? Si giustifichi la risposta.

Assumendo l'ipotesi più realistica che l'assunzione di alcool avvenga due volte al giorno e che il fegato di questa persona riesca a smaltire ogni ora una quantità di alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduca del 30% ogni ora, come cambierebbe la risposta al precedente quesito?

Ci si attende che gli studenti riconoscano che, nel caso in cui la persona non assuma più alcool, il tasso alcolemico decada esponenzialmente nel tempo (si tratta, ovviamente, di un'osservazione più precisa del "decresce, ma decresce sempre meno" che, comunque, indicherebbe una comprensione qualitativa del fenomeno). Alcuni studenti potrebbero produrre tabelle del tipo:

Numero ore	$T(n)$ tasso alcolemico che rimane nel sangue (in g/l)
0	1,5
1	$0{,}7 \cdot 1{,}5 = 1{,}05$
2	$0{,}7 \cdot 1{,}05 = 0{,}735$
3	$0{,}7 \cdot 0{,}735 = 0{,}5145$
…	…
n	…

Tabella 1

Ci si attende, però, che tutti gli studenti, dopo una prima esplorazione siano in grado di ricavare una legge del tipo: $T(n) = 1{,}5 \cdot (0{,}7)^n$ [g/l], eventualmente dopo essere passati, magari aiutati dall'uso di un foglio elettronico, attraverso la definizione della successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} T(0) = 1,5 \\ T(n) = 0,7 \cdot T(n-1) \end{cases}$$ [si intende sempre in g/l]

In questo caso è facile trovare dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a 0,1 g/l; basta risolvere l'equazione $0,1 = 1,5\cdot(0,7)^n$, ossia $0,7^n = 0,0667$, da cui si ottiene $n = 8$ ore. La risoluzione può essere effettuata per tentativi, oppure formalmente, utilizzando i logaritmi o, ancora, utilizzando un manipolatore simbolico e impostando in esso l'equazione che deve essere risolta. In quest'ultimo caso gli studenti dovrebbero prima prevedere un'approssimazione della soluzione a meno di una o due unità.

Per quel che riguarda la seconda domanda, gli studenti dovrebbero rendersi conto che l'assunzione periodica di alcool determina sì una crescita del tasso alcolemico nel sangue, ma anche che il tasso alcolemico aumenta sempre meno, se si suppone costante la capacità di smaltimento del fegato. Queste considerazioni potrebbero essere inizialmente suggerite da problemi simili affrontati in passato (per esempio la concentrazione di un farmaco nel sangue), oppure da considerazioni del tipo "il fegato smaltisce una quantità di alcool sempre maggiore, perché smaltisce, prima della nuova assunzione, l'80% di una quantità che cresce. Quindi smaltisce sempre più, il che suggerisce che la quantità di alcool possa sì aumentare, ma sempre meno". Queste considerazioni possono essere verificate, una volta definita la legge ricorsiva che descrive l'evoluzione del tasso alcolemico *t* nel sangue

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

La verifica può essere effettuata prima con strumenti di calcolo automatico (per esempio fogli elettronici o strumenti di calcolo grafico–simbolico), fino a congetturare il valore di equilibrio del tasso alcolemico nel sangue.

Anche in questo caso gli studenti potrebbero aiutarsi con tabelle del tipo

Numero di assunzioni di alcool	$T(n)$ tasso alcolemico che rimane nel corpo (in g/l)
1	0,8
2	0,2·0,8+0,8 = 0,96
3	0,2·0,96+0,8 = 0,992
4	0,2·0,992+0,8 = 0,9984
5	0,2·0,9984+0,8 = 0,9997
6	0,2·0,9997+0,8 = 0,9999

Tabella 2

La Tabella 2 suggerisce almeno due congetture:

1. la successione è crescente, ma cresce sempre meno (cosa che si può controllare anche eseguendo la tabella delle differenze prime e magari delle differenze seconde: Tabella 3)
2. dato un determinato valore del tasso alcolemico rimasto nel corpo, il successivo può essere determinato moltiplicando tale valore per 0,2 e addizionando 0,8, ossia l'aumento del tasso alcolemico in seguito all'assunzione costante.

L'osservazione 1 può essere corroborata e giustificata sia con argomentazioni di tipo logico–intuitivo, sia con l'aiuto di tecniche come, per esempio, le già citate differenze finite.

Numero di assunzioni di alcool	$T(n)$ tasso alcolemico che rimane nel corpo (in g/l)	Differenze prime
1	0,8	
2	0,96	0,16
3	0,992	0,032
4	0,9984	0,0064
5	0,9997	0,0013
6	0,9999	0,0002

Tabella 3

Il metodo delle differenze finite è particolarmente indicato quando la variabile indipendente varia con passo costante. In tal caso, le differenze prime sono proporzionali alla pendenza della retta congiungente due punti successivi della successione (la costante di proporzionalità è il passo con cui variano i valori della variabile indipendente). In altri termini, se la variabile indipendente varia con passo costante, la si può anche dimenticare, concentrandosi sulla variazione dei valori della variabile dipendente. In questo caso la tabella si può leggere in colonna, e non riga per riga. Questo modo di guardare i dati è caratterizzato da una certa dinamicità e consente di valutare velocemente crescenza e concavità di una curva che rappresenta l'andamento del fenomeno oggetto di studio, senza scomodare conoscenze matematiche che vadano al di là di differenze e, eventualmente, ma non necessariamente, di rapporti.
Questo primo tipo di osservazioni dovrebbe portare gli studenti ad avere un'idea anche grafica dei punti che formano la successione e che può essere verificata con un foglio elettronico.
La congettura 2 necessita di maggiore attenzione nella lettura dei dati e di una certa abilità nel riconoscere regolarità in una successione. Se gli studenti sono stati abituati a non effettuare subito i calcoli, ma ad osservare prima come variano i dati su cui vengono effettuate le operazioni, si accorgeranno che tutti i calcoli effettuati possono essere rappresentati con lo schema:

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

Questa scrittura dovrebbe suggerire la possibilità di determinare il valore limite della successione, senza fare uso degli strumenti dell'analisi matematica. Infatti, se tale valore limite esiste, esso deve poter essere determinato ponendo $T(n) = T(n+1) = x$ e quindi risolvendo l'equazione $x = 0,2\ x + 0,8$ che dà il valore $x = 1$.

Seconda fase
L'attività può proseguire invitando gli studenti a costruire programmi che consentono di calcolare automaticamente i valori della successione, partendo dalla definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

Di seguito si riporta il programma "alcool" e la funzione "alcool(n)"[1], costruiti per alcune calcolatrici programmabili e grafiche che presentano un manipolatore simbolico simile a quello utilizzato da software ormai di diffusione relativamente vasta nelle scuole.

[1] In genere le calcolatrici grafico–simboliche hanno già funzioni predefinite che consentono il calcolo dei valori di una successione per iterazione, ma si ritiene non inutile far costruire dagli studenti un programma e una funzione che consentano di effettuare automaticamente tale calcolo. Ovviamente è possibile anche ricordare loro come utilizzare eventuali funzioni predefinite del software utilizzato.

```
:alcool( )                    (intestazione: nome programma)
:Prgm                         (indica che si tratta di un programma)
:Request "dammi n", n         (il sistema attende un input che inserisce nella cella di nome n)
:expr(n) → n                  (l'input n, preso come stringa, viene trasformato in dato numerico)
:0.8 → alc                    (si inizializza la variabile alc)
:For i, 2, n, 1               (inizio ciclo for, con i che va da 2 a n, passo 1)
:0.2 * alc + 0.8 → alc        (aggiornamento dei valori della successione inseriti in alc)
:EndFor                       (fine ciclo for)
:Disp alc                     (viene visualizzato il contenuto di alc)
:EndPrgm                      (fine programma)

:alcool(n)                    (intestazione: nome funzione)
:Func                         (indica che si tratta di una funzione)
:if n = 1                     (se n = 1
:Return 0.8                   (restituisce il valore 440)
:if n > 1                     (se n > 1
:Return 0.2*alcool(n-1)+0.8   (restituisce il valore indicato)
:EndFunc                      (fine funzione)
```

L'insegnante può discutere con gli studenti sulla convenienza o meno di utilizzare un programma o una funzione per calcolare i valori della successione. Soprattutto, però, dovrebbe cercare di dare una risposta a una domanda che emerge in modo naturale quando si paragonano i tempi di calcolo impiegati per computare i valori della successione utilizzando la funzione e il programma. Perché con la funzione sopra definita si riesce a computare un numero sensibilmente inferiore di valori rispetto a quanto consente il programma?
La risposta a questa domanda è un'occasione per ritornare a riflettere sulle sensibili differenze che, dal punto di vista computazionale, esistono tra la ricorsione e l'iterazione.

<u>Terza fase</u>
L'insegnante potrebbe chiedere agli studenti di cercare di determinare una dipendenza esplicita da n a partire dalla definizione per ricorrenza

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

È possibile giustificare questa richiesta discutendo i vantaggi di una formula che dà $T(n)$ esplicitamente in funzione di n, rispetto a una funzione definita per ricorrenza.
Organizzando i dati nel seguente modo:

$T(1) = 0,8$
$T(2) = 0,2 \cdot T(1) + T(1)$
$T(3) = 0,2 \cdot T(2) + T(1) = 0,2 \cdot (0,2 \cdot T(1) + T(1)) + T(1) = 0,2^2 \cdot T(1) + 0,2 \cdot T(1) + T(1)$
$T(4) = 0,2 \cdot T(3) + T(1) = 0,2 \cdot (0,2^2 \cdot T(1) + 0,2 \cdot T(1) + T(1)) + T(1) = 0,2^3 \cdot T(1) + 0,2^2 \cdot T(1) + 0,2 \cdot T(1) + T(1)$

è possibile congetturare che si abbia:

$$T(n+1) = T(1) \cdot (0,2^n + 0,2^{n-1} + 0,2^{n-2} + \ldots\ldots + 0,2 + 1)$$

Il problema diventa quindi quello di determinare la somma $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{10}\right)^i$.

Si può notare che, detta s la somma $0{,}2^n + 0{,}2^{n-1} + 0{,}2^{n-2} + \ldots\ldots + 0{,}2 + 1$, si ha che:

$0{,}2 \cdot s = 0{,}2^{n+1} + s - 1$. Ciò equivale a dire che $s = \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{10}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{10}} = \dfrac{10}{8}\left(1-\left(\dfrac{2}{10}\right)^{n+1}\right)$

La legge che lega esplicitamente $T(n+1)$ a n è quindi:

$$T(n+1) = 0{,}8 \cdot \frac{10}{8}\left(1-\left(\frac{2}{10}\right)^{n+1}\right)$$

<u>Quarta fase</u>

Si può far notare che il fenomeno preso in considerazione dipende da alcuni parametri:

- il tasso alcolemico presente nel sangue all'istante 0, diciamo a;
- la percentuale di tasso alcolemico filtrata dal fegato tra un'assunzione e l'altra, diciamo b;
- il tasso alcolemico che viene aggiunto a ogni assunzione di alcool, diciamo c.

Ciò vuol dire che il problema precedente può essere generalizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases} T(1) = a \\ T(n+1) = b \cdot T(n) + c \end{cases}$$

Si può quindi assegnare ai gruppi di studenti il seguente problema:
Studiare come varia l'evoluzione della quantità tasso alcolemico presente nel sangue quando si modificano i parametri significativi (si suggerisce di provare a modificare un parametro alla volta, tenendo costanti gli altri due).
È interessante osservare se il lavoro degli studenti avviene a livello puramente sperimentale o se, invece, vengono tenute presenti tutte le conoscenze già acquisite. Per esempio, studenti che riuscissero a capire che la legge generale che esprime la dipendenza esplicita di $T(n)$ è del tipo:

$$T(n) = b^n a + c \cdot \frac{1-b^n}{1-b} \;,$$

probabilmente risolverebbero il problema proposto in breve tempo, dimostrando, inoltre, buone abilità di produrre e utilizzare forme di pensiero analogico che, in matematica, sono assolutamente importanti. Un modo per aiutare gli studenti a generalizzare il problema consiste nell'utilizzare il foglio elettronico per creare una tabella di dati con il modello definito ricorsivamente. Occorre sfruttare la potenzialità del foglio elettronico, che permette non solo di differenziare tra i riferimenti assoluti e quelli relativi, ma anche di stabilire delle relazioni matematiche tra essi, che possono essere copiate nelle colonne della tabella.

Infatti, scrivendo le relazioni $\begin{cases} T(1) = a \\ T(n+1) = b \cdot T(n) + c \end{cases}$ che definiscono il modello, è sufficiente copiare la seconda tenendo b e c come riferimenti assoluti e $T(n)$ come riferimento relativo, in quanto variabile nel tempo. In tabella 4 è riportata tale situazione, con i valori numerici usati precedentemente. Per modificare il modello è sufficiente sostituire ai parametri a, b e c altri valori, ottenendo una nuova situazione.

TASSO ALCOLEMICO NEL SANGUE			
t	a	c	b
1	0,80	0,80	0,20
2	0,960000		
3	0,992000		
4	0,998400		
5	0,999680		
6	0,999936		
7	0,999987		
8	0,999997		
9	0,999999		
10	1,000000		
11	1,000000		
12	1,000000		

Tabella 4

Un rappresentazione grafica della situazione aiuta a vedere l'andamento del tasso nel tempo:

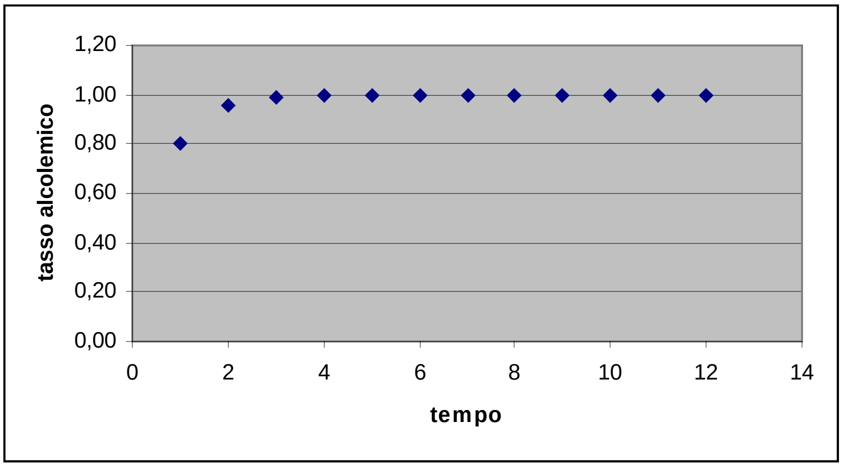


Figura 1

Il passaggio alla generalizzazione simbolica è facilitato dalla sostituzione progressiva della definizione ricorsiva per i primi 2-3 passaggi.

$T(2) = b \cdot T(1) + c = b \cdot a + c$

$T(3) = b \cdot T(2) + c = b \cdot (ba + c) + c = b^2a + bc + c = b^2a + c(b+1)$

….

Questi passaggi preparano alla formula iterativa generale, tramite l'applicazione della ricorsiva.

La forte somiglianza con l'attività "la concentrazione di un farmaco nel sangue" dovrebbe consentire all'insegnante di verificare quali fra le importanti tecniche e problematiche affrontate in attività di questo tipo sono state … "metabolizzate".

Per quel che riguarda la terza domanda, si potrebbe far notare che è possibile fare congetture sul tempo che separa le due assunzioni successive. Inizialmente, per esemplificare il modello, si potrebbe considerare l'ipotesi che le due assunzioni giornaliere avvengano a intervalli di tempo regolari, quindi ogni 12 ore. In tal caso, ricordando che si è chiesto di considerare le tre ipotesi:

- il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo nel sangue in un tempo trascurabile;
- una persona assuma sistematicamente una quantità di alcool tale da provocare a ogni assunzione, un aumento del tasso alcolemico di 0,8 g/l;
- il tempo che intercorre tra un'assunzione e la successiva è tale che il fegato riesce a smaltire l'alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduce, prima della nuova assunzione, dell'80%.

Si ha che l'evoluzione del tasso alcolemico può essere descritta dalla successione ricorsiva (ricordando che la riduzione oraria del tasso è del 30%):

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,7^{12} \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

Si può discutere con gli studenti della possibilità, in tal caso, di trovare una formula che dia $T(n+1)$ in funzione di n, lavorando per analogia con quanto visto in precedenza.
Si può quindi prendere in considerazione l'ipotesi più realistica che le due assunzioni avvengano alle ore dei pasti, per esempio alle 13 e alle 20, e vedere come cambia il modello e quali difficoltà ulteriori sorgono nel calcolo dei valori della successione.

Possibili sviluppi

- Dimostrazioni, per induzione, di alcune congetture avanzate dagli studenti o suggerite dall'insegnante.
- Approfondimenti sul problema delle approssimazioni e del controllo del risultato di calcoli in cui si fa un uso sistematico di approssimazioni.
- Le differenze finite per trovare la legge con cui è stata generata una successione di numeri (nel caso di leggi polinomiali o nel caso di leggi esponenziali).
- Critica sulle potenzialità e sui limiti del modello, anche con considerazioni di carattere fisico-chimico–medico–biologico.
- Effetti delle droghe e dell'alcool sull'organismo (in collaborazione, almeno, con l'insegnante di scienze e chimica).

Elementi di prove di verifica

Lungo una strada di campagna ci sono alcune case di abitazione a varie distanze dall'inizio della strada.

Abitazione	Distanza dall'inizio della strada (× 100 m)
A	2
B	4
C	5
D	8
E	14
F	18

A seguito delle richieste degli abitanti, l'amministrazione comunale dichiara di essere disponibile a porre un bidone per l'immondizia (e uno solo) lungo la strada e chiede agli abitanti in quale posizione lo desiderano.

Gli abitanti fanno una riunione per prendere questa importante decisione: alcuni propongono di disporre il bidone all'inizio della strada, altri alla fine, altri ancora in una posizione equidistante dalla prima e dall'ultima delle case della strada.
Finalmente prevale la proposta del Sig. Rossi, ingegnere in pensione, di ottimizzare la posizione del bidone posizionandolo in modo che la somma delle distanze tra esso e ciascuna delle case sia la minore possibile.
Si deve ora decidere dove va posizionato il bidone.

1 - Ha importanza la "forma" della strada (rettilinea, in salita, con curve, a tornanti…)? .

2 - Creare un modello geometrico della situazione (si indichi con x la distanza del bidone dal punto di riferimento, inizio della strada).

3 - Scrivere la funzione che permette di calcolare la somma delle distanze.

4 - Generalizzare la funzione al caso di n case, indicando con x_n la distanza di ciascuna di esse dal punto di riferimento.

5 - Cercare un modello analitico del problema nel caso della sola casa A:

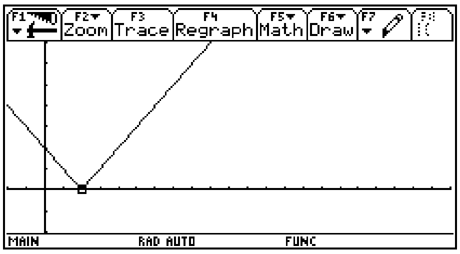


Figura 2

Interpretare il grafico. Qual è la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze in questo caso?

6 - Interpretare il grafico considerando le case A e B:

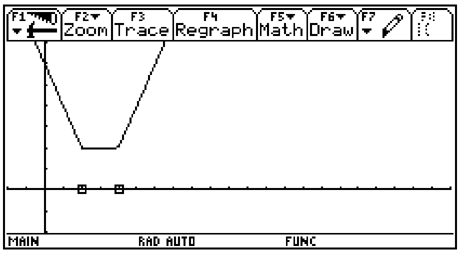


Figura 3

Qual è in questo caso la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze?

7 - Considerare ora il caso delle tre case, A, B, C:

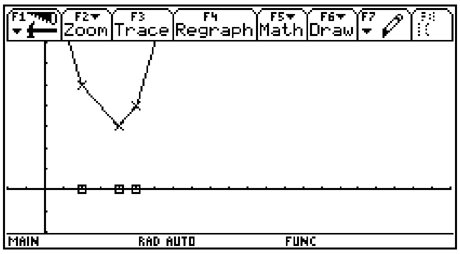


Figura 4

Qual è in questo caso la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze?

8 - Ecco la situazione nel caso di quattro case: A, B, C, D:

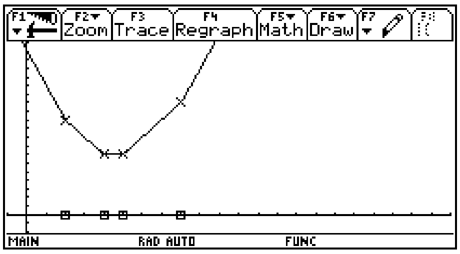


Figura 5

Qual è la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze?

9 - Dare la risposta al problema proposto nel caso delle sei case A, B, C, D, E, F.

10 - Hanno importanza i valori delle distanze tra le case? La soluzione del problema cambierebbe se i valori fossero diversi?

11 - Dare la risposta al problema proposto nel caso di *n* case.

Osservazioni per l'insegnante

La verifica che segue può essere di qualche utilità per esemplificare la modellizzazione di un problema su due registri: quello algebrico e quello grafico-analitico.
Il problema, pur essendo molto semplice, non è di risoluzione immediata. La rappresentazione grafica, molto facile nel caso di una o due case, diventa più complicata da realizzare manualmente in casi più complessi: per questo motivo le capacità di modellizzazione offerte da uno strumento software risultano decisive per permettere l'esplorazione della situazione e arrivare alla soluzione del problema nel caso generale. Nelle immagini presentate prima è stata utilizzata una calcolatrice grafica.
Una volta realizzato e analizzato il modello, diventa poi facile arrivare alla dimostrazione rigorosa.
Potrebbe essere utile inoltre far notare agli studenti che il modello "geometrico" proposto nel quesito 2 è sostanzialmente di tipo "topologico" e mette in evidenza il fatto che l'unica informazione della quale è necessario tenere conto è l'ordine in cui sono disposte le case.

Solidi e volumi

Percorso: **Il problema della misura**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Calcolare perimetri e aree di poligoni. Calcolare valori approssimati di π Calcolare aree e volumi di solidi	Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. Lunghezze e aree dei poligoni. Esempi di grandezze incommensurabili. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero π. Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi. Approssimazione dell'area sottesa da un grafico.	Spazio e figure Relazioni e funzioni	Fisica Disegno Storia dell'arte

Contesto
Volumi

Questa attività viene proposta all'inizio del quinto anno e consolida alcune conoscenze e abilità già introdotte relativamente alla misura di superfici e volumi di solidi notevoli come la piramide e la sfera. Si confrontano diversi metodi visti negli anni precedenti, applicando il metodo di esaustione di Archimede già utilizzato per il calcolo dell'area del cerchio e di quella sottesa da un segmento parabolico.

Descrizione dell'attività
Gli strumenti di cui avvalersi come supporto all'attività didattica sono modelli fisici dei solidi, un software di geometria e un software di manipolazione simbolica.
Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata dei metodi per il calcolo di aree e volumi e della nozione di successione.

Prima fase
Consideriamo una sfera di raggio unitario e la sezioniamo in due parti con un piano α passante per il suo centro e consideriamo una delle due semisfere. Sezioniamo ora la semisfera con dei piani paralleli al piano α (Figura 1), e inscriviamo in essa dei cilindri di altezza costante.

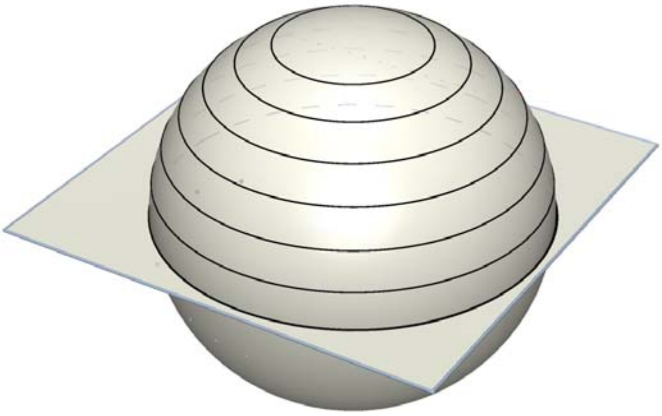


Figura 1

Per esempio possiamo dividere il raggio in dieci parti uguali (vedi Figura 2, nella quale si rappresenta la sezione mediana della semisfera di raggio unitario).

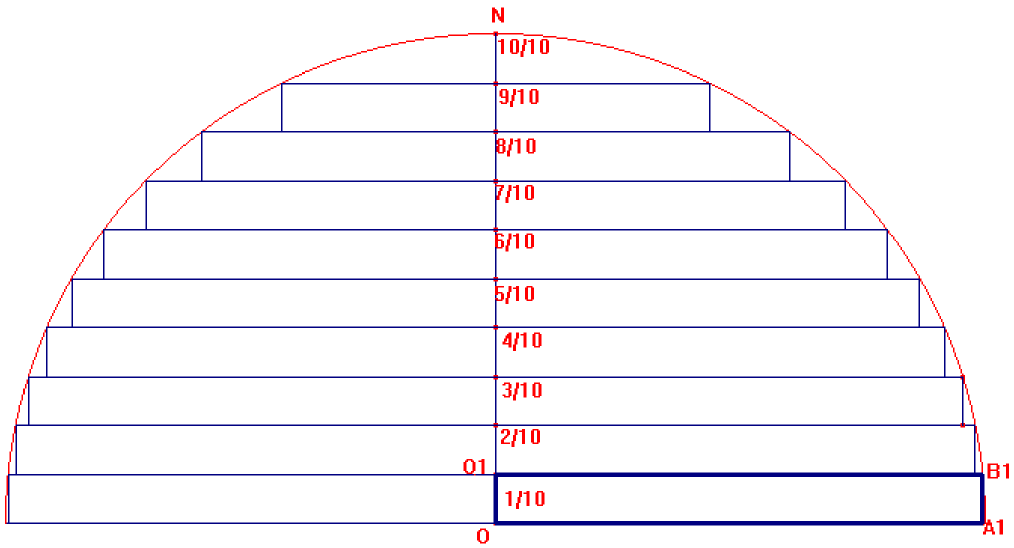


Figura 2

Per calcolare il volume dei cilindri inscritti dobbiamo preliminarmente determinare i raggi di base dei cilindri inscritti nella semisfera. Per risolvere questo problema ci aiutiamo con la costruzione della sezione mediana dei cilindri inscritti nella sfera. Ogni cilindro è generato dalla rotazione di un rettangolo attorno all'asse ON (Figura 2). Consideriamo ora un ingrandimento del rettangolo $OA_1B_1O_1$ (Figura 2; Figura 3) che, con la sua rotazione attorno all'asse ON, genera il primo cilindro.

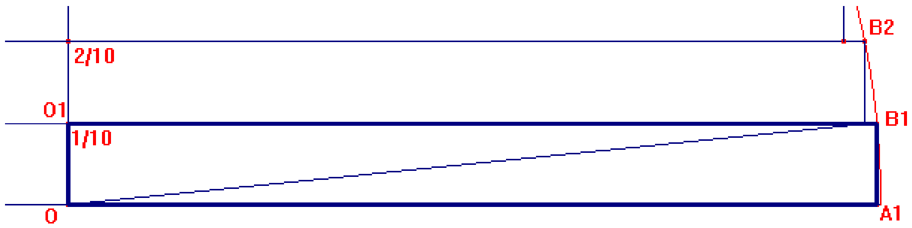


Figura 3

Il raggio r_1 è uguale al segmento OA_1 e per determinarlo applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OA_1B_1; si ha quindi:

$$r_1^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1.$$

Per determinare il raggio di base r_2 del secondo cilindro (Figura 4) si applica lo stesso procedimento al triangolo OA_2B_2; si ottiene

$$r_2^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 1$$

e così via.

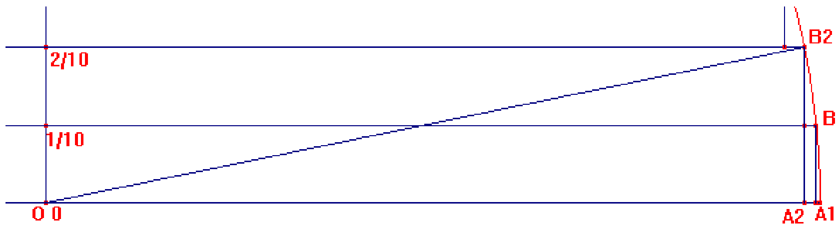


Figura 4

Chiamiamo V_n la somma dei volumi dei cilindri. Otteniamo, dopo aver espresso il raggio in funzione degli altri termini e calcolato la somma dei volumi dei cilindri, la seguente relazione:

$$V_n = \pi\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)\frac{1}{10} + \pi\left(1-\left(\frac{2}{10}\right)^2\right)\frac{1}{10} + ... + \pi\left(1-\left(\frac{10}{10}\right)^2\right)\frac{1}{10}$$

Generalizzando, supposto di dividere il raggio unitario in n parti uguali, otteniamo:

$$V_n = \pi\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} + \pi\left(1-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} + ... + \pi\left(1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}$$

da cui:

$$V_n = \frac{\pi}{n}\left[\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \left(1-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right) + ... + \left(1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right].$$

Per valutare quest'ultima somma, si riordinano opportunamente i termini; otteniamo la seguente relazione:

$$V_n = \pi - \pi\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\right].$$

Per valutare il valore dell'espressione (indicata tra parentesi quadre):

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

all'aumentare di n, possiamo interpretarla geometricamente:

- il primo termine $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ è uguale al volume di un cubo di spigolo $1/n$;
- il secondo termine $\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ è uguale al volume un parallelepipedo rettangolo che ha per base un quadrato di lato $2/n$ e altezza $1/n$;
- …
- il termine $(n-1)$-esimo è uguale al volume di un parallelepipedo di base un quadrato di lato $(n-1)/n$ e altezza $1/n$;

- l'ultimo termine $\left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ è uguale al volume di un parallelepipedo che ha per base il quadrato unitario e per altezza $1/n$.

Possiamo ora rappresentare graficamente questi parallelepipedi e "sistemarli" uno sopra l'altro come indicato in Figura 5: otteniamo uno"scaloide".

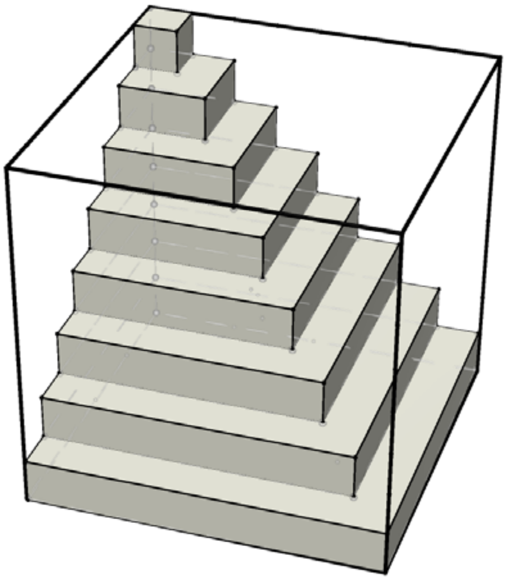


Figura 5

Una sezione è data dal seguente disegno (Figura 6).

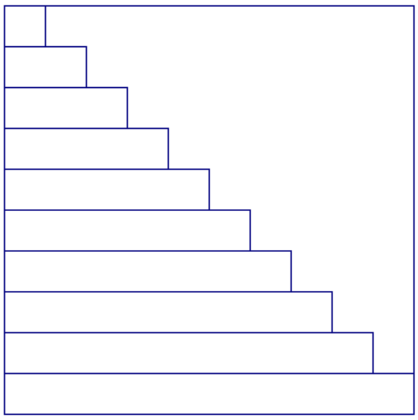


Figura 6

Al crescere di n la figura precedente si avvicina alla Figura 7, cioè alla metà di un quadrato che, ovviamente, ha area $\frac{1}{2}$ essendo il quadrato di lato unitario.

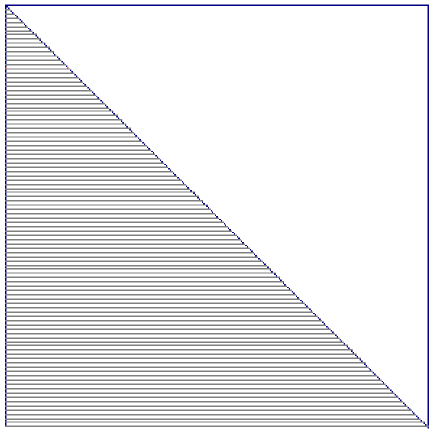


Figura 7

In modo analogo, la figura tridimensionale detta “scaloide”, di cui la Figura 6 rappresenta una sezione, si avvicina a una piramide con base un quadrato di lato 1 e altezza pari a 1.

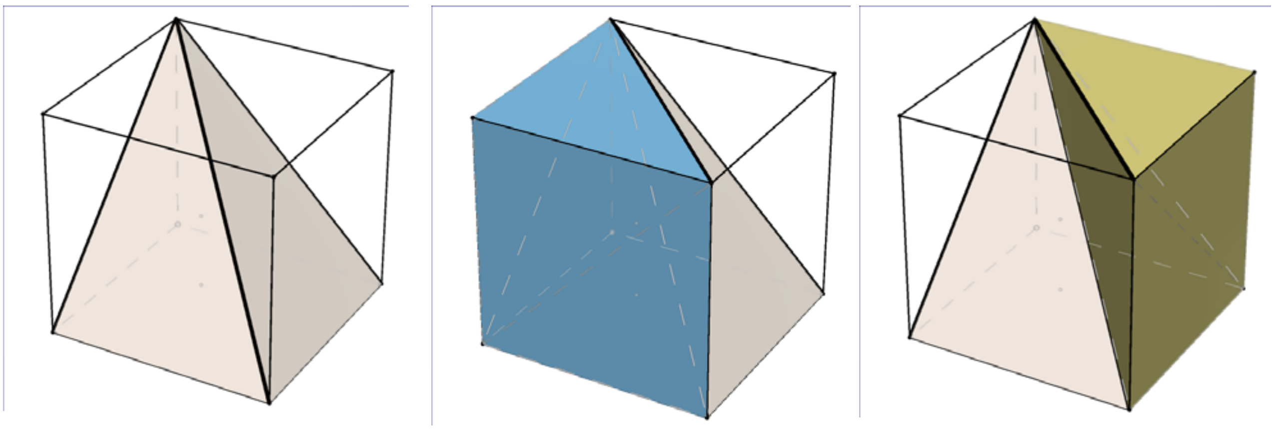


Figura 8

Poiché un cubo si può scomporre in tre piramidi tra loro equivalenti (Figura 8), il volume dello scaloide si avvicina, al crescere di n, a $\frac{1}{3}$ e quindi V_n, che rappresenta un valore approssimato del volume della semisfera, tende a

$$V_{semisfera} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi .$$

Quindi il volume della sfera di raggio unitario è $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi$.

Il metodo proposto è sostanzialmente una riformulazione, “per via algebrica”, di quello di esaustione usato da Archimede.
E cosa possiamo dire se la sfera non ha raggio unitario?
Si può pensare alla sfera di raggio r come l’ingrandimento tramite un’omotetia rispetto al centro della sfera unitaria e di rapporto r. Poiché il rapporto tra i volumi di figure nello spazio che si corrispondono tramite un’omotetia di rapporto r è uguale a r^3, si ottiene che il volume della sfera di raggio r è:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 .$$

Possibili sviluppi
1. Dal volume della sfera all'area della superficie sferica.
Per misurare la superficie S della sfera sfruttiamo l'idea di "trasformare la superficie S in un solido" (citato da Giovanni Prodi), dotandola di un piccolo spessore *h*. Precisamente, si considera il "guscio" sferico formato dai punti che hanno distanza non superiore a *h* dalla superficie sferica di raggio *r*.
In questo ragionamento, in qualche modo si considera più semplice e intuitiva l'idea di volume rispetto a quella di area e si procede in senso inverso rispetto a quello che normalmente si fa per altre figure solide.

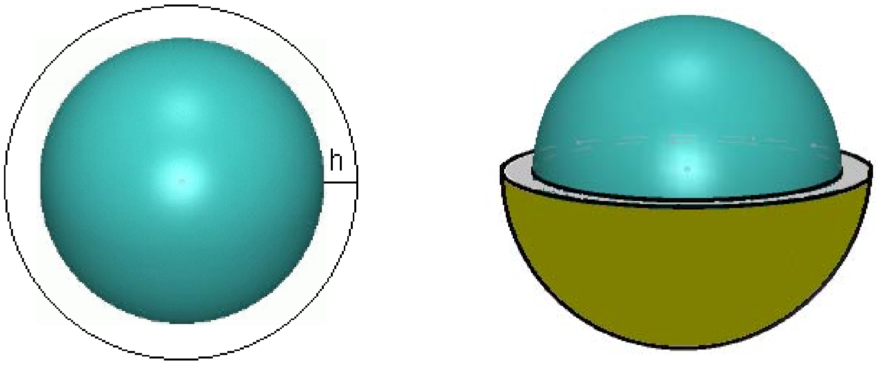


Figura 9

Indicando con $W(h)$ il volume del "guscio" sferico (Figura 9), si ha che

$$W(h)=\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Quest'ultima espressione può essere interpretata come l'incremento del volume della sfera di raggio r quando il raggio diventa $r+h$. Quindi, indicato con $V(r)$ il volume della sfera di raggio r, possiamo anche scrivere:

$$W(h)=V(r+h)-V(r)=\Delta V.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo il volume del guscio sferico:

$$W(h)=4\pi\left(r^2h+rh^2+\frac{1}{3}h^3\right).$$

Possiamo quindi interpretare l'ultima formula trovata come l'espressione del volume di un solido equivalente a un cilindro di altezza *h* e superficie di base pari a

$$S_{base}=\frac{W(h)}{h}=\frac{4\pi\left(r^2h+rh^2+\frac{1}{3}h^3\right)}{h}=4\pi\left(r^2+rh+\frac{1}{3}h^2\right).$$

Diminuendo *h* lo spessore del "guscio" diventa sempre più piccolo. Di conseguenza la misura della superficie S_{base}, data dall'espressione $\frac{W(h)}{h}$, si avvicina al valore della superficie sferica. Ragionando sulla formula trovata precedentemente, si osserva che, al divenire di *h* sempre più piccolo, $\frac{W(h)}{h}$ si avvicina a $4\pi r^2$. Quindi la superficie della sfera è $S=4\pi r^2$.

2. Revisione del procedimento per determinare il volume della sfera usando il principio di Cavalieri e la cosiddetta *scodella di Galileo*.

3. Il procedimento di Archimede per determinare l'area della superficie sferica.
Si usa in questo caso il cilindro circoscritto alla sfera, con altezza uguale al diametro della sfera stessa (detto, con espressione imprecisa, cilindro "equilatero").

Da Platone a Escher: simmetrie e regolarità nello spazio

Percorso: **Geometria e arte**

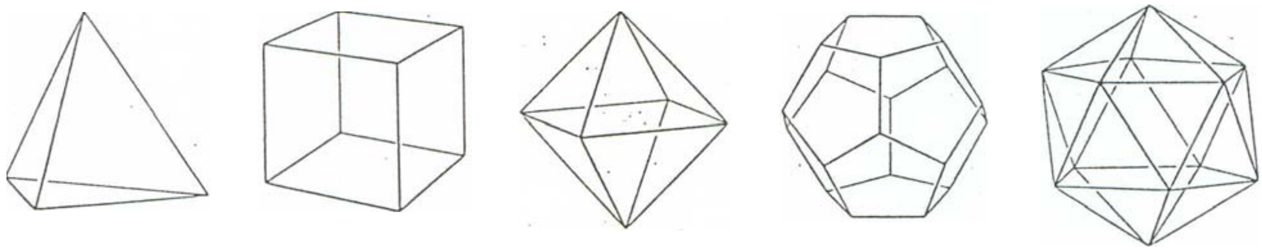
Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. Utilizzare le conoscenze della geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza.	Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli. Simmetrie nei poliedri regolari. Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio. Proprietà dei principali solidi geometrici.	Spazio e figure	Storia dell'arte Disegno Architettura Scienze naturali Filosofia
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni	Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizioni; teoremi e dimostrazioni.	Argomentare, congetturare, dimostrare	

Contesto
Solidi platonici.

Il contesto dell'attività in cui si svolge l'analisi dei solidi platonici e dei poliedri è rappresentato dal mondo naturale, dalla produzione artistica e da quella architettonica.

Descrizione dell'attività
Il lavoro prevede l'osservazione di fotografie di opere d'arte, di monumenti e di immagini tratte dal mondo naturale in cui siano presenti poliedri. La selezione delle immagini che verranno utilizzate seguirà un criterio significativo sia dal punto di vista storico che geometrico. Prima di affrontare il lavoro è opportuno riprendere in esame le caratteristiche fondamentali dei poliedri e le loro simmetrie (Matematica 2003, Spazio e Figure, Simmetrie nei poliedri) al fine di riorganizzare le conoscenze e giustificarne le proprietà. Per affrontare questa attività lo studente può avvalersi di software di geometria e di strumenti per il disegno.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante illustra l'attività prevista e riesamina con gli studenti, avvalendosi di modelli tridimensionali o di immagini o con l'ausilio di opportuni software, i poliedri e, in particolare quelli regolari (Figura 1).



Tetraedro regolare | Cubo | Ottaedro regolare | Dodecaedro regolare | Icosaedro regolare

Figura 1

Il docente fa osservare alcune loro proprietà:

- le facce sono poligoni regolari tra loro isometrici;
- ogni spigolo è comune a due facce; i diedri formati da due facce con uno spigolo in comune sono isometrici;
- ogni vertice è comune a tre o più facce concorrenti; gli angoloidi sono isometrici;
- il piano passante per una qualsiasi faccia del poliedro lascia tutto il poliedro dalla stessa parte;
- dato un poliedro regolare, i vertici stanno su una sfera.

L'insegnante deve far notare, se non emerge dalla discussione, che non è sufficiente per un poliedro avere tutte le facce costituite da poligoni regolari e uguali, per avere anche gli angoloidi uguali. Considerando, infatti, due tetraedri regolari con facce uguali, di cui due coincidenti, si ottiene un esaedro (Figura 2), le cui facce sono triangoli equilateri uguali, ma i cui angoloidi non sono tutti uguali: l'angoloide di vertice *A* (Figura 2) è, ad esempio, uguale al doppio degli angoloidi di un tetraedro regolare.

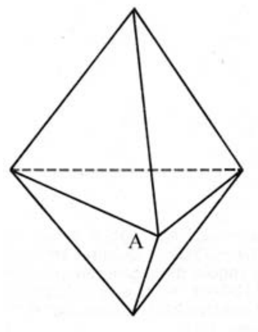


Figura 2

Seconda fase

L'insegnante inquadra storicamente i solidi platonici.

Il primo documento che contiene riferimenti ai poliedri regolari risale a Platone. Sebbene Platone non abbia dato alcun contributo specifico alla matematica dal punto di vista strettamente tecnico, fu, tuttavia, al centro dell'attività matematica di quel tempo e guidò ed ispirò il suo sviluppo. Probabilmente il filosofo di Atene venne a conoscenza dei cinque solidi regolari in occasione di un incontro in Sicilia con Archita, un matematico della scuola pitagorica. A tale scuola si attribuisce la scoperta del cubo, del tetraedro e del dodecaedro regolari, mentre la scoperta dell'ottaedro e dell'icosaedro regolari viene fatta risalire al matematico e filosofo ateniese Teeteto (V - IV sec. a.C.).

I poliedri regolari sono passati alla storia sotto il nome di solidi platonici o poliedri regolari o corpi platonici. In Euclide è presente una loro trattazione approfondita; ad essi il matematico greco dedica il XIII libro degli *Elementi*, quello conclusivo, che costituisce il coronamento dell'opera.

Può essere anche interessante proporre agli studenti la lettura di alcuni passi del *Timeo*, nel quale Platone associa il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro regolari rispettivamente a quelli che erano allora ritenuti i quattro elementi fondamentali: fuoco, aria, terra ed acqua. Il dodecaedro, non realizzabile unendo opportunamente triangoli - come invece avviene per gli altri poliedri regolari citati nella descrizione di Platone - veniva invece associato all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta "quintessenza" (Figura 3).

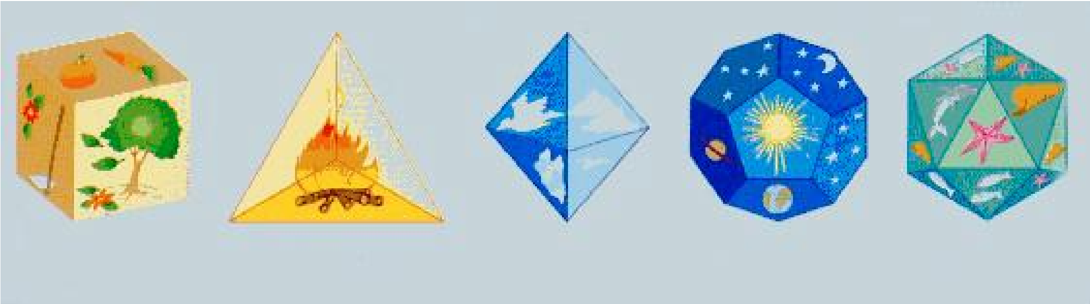


Figura 3

Terza fase

L'insegnante sottolinea come spesso nel mondo naturale, nell'arte e nell'architettura si trovino spunti per lo studio dei solidi platonici.
Si propongono alcuni esempi significativi utili per stimolare riflessioni.

- *I poliedri in natura*

I solidi platonici sono presenti in natura sotto diverse forme. La struttura dei cristalli presenta infatti simmetrie e forme spesso riconducibili ai solidi platonici. Il docente può proporre le strutture di alcuni cristalli - quali ad esempio il salgemma, l'ossido di ferro e la pirite - invitando gli studenti a riconoscere in essi eventuali solidi platonici (cubo, ottaedro, dodecaedro regolari).
E' significativo presentare agli alunni la forma spaziale della molecola di carbonio C_{60}, scoperta nel 1985 da Harold Kroto, Robert F. Curl e Richard E. Smalley (detto *fullerene*), che presenta una struttura poliedrica e consente una riflessione su alcune proprietà (Figure 4.1 e 4.2).

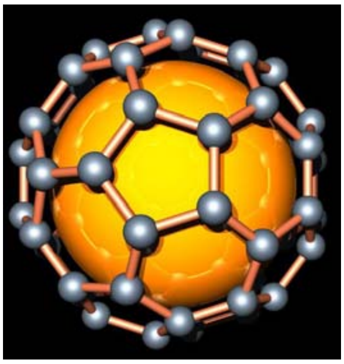


Figura 4.1

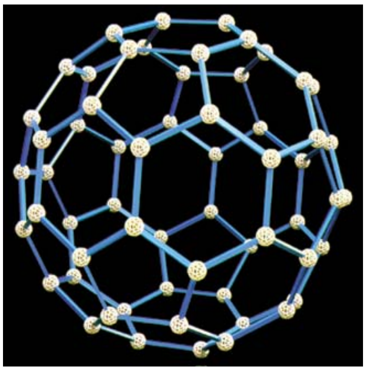


Figura 4.2

Altre analogie tra la natura e le forme poliedriche si riscontrano nelle forme biologiche (radiolari); in chimica dove, ad esempio, la molecola del metano (CH_4) ha la forma di un tetraedro regolare.

- *I poliedri nell'arte*

Il periodo storico in cui si ebbe il maggiore utilizzo dei poliedri nell'arte fu il Rinascimento. La composizione di molte opere d'arte in quel periodo si basava su una figura pitagorica. L'insegnante propone agli studenti la lettura delle seguenti righe:

> *"Multa sunt corpora lateribus costituta, quae in spherico corpore locari queunt, ita ut eorum anguli sperae superficiem omnes contingunt. Verum quinque ex eis tantummodo sunt regularia: hoc est, quae aequales bases habent et latera"*[1] (Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, 1480 ca.).

[1] "Sono molte le figure costituite di lati che si possono inscrivere nella sfera in modo che i loro angoli tocchino tutti la superficie della sfera. Tuttavia soltanto cinque di essi sono regolari, cioè quelli che hanno angoli e lati uguali".

Il passo risulta particolarmente significativo in quanto afferma che i poliedri regolari sono solo cinque e induce ad una riflessione sulla validità di tale considerazione.
Si propone la discussione in classe e si predispone una tabella come quella di seguito riportata Tabella 1), da compilare con l'ausilio degli studenti, nella quale vengono calcolati la somma degli angoli concorrenti nello stesso vertice in funzione della tipologia delle facce (poligoni regolari).

Facce (poligoni regolari)	**Angoloide triedro**	**Angoloide tetraedro**	**Angoloide pentaedro**	**Angoloide esaedro**
Triangolo equilatero	$3\cdot 60° = 180°$	$4\cdot 60° = 240°$	$5\cdot 60° = 300°$	$6\cdot 60° = 360°$
Quadrato	$3\cdot 90° = 270°$	$4\cdot 90° = 360°$	–	–
Pentagono regolare	$3\cdot 108° = 324°$	–	–	–
Esagono regolare	$3\cdot 120° = 360°$	–	–	–

Tabella 1

Durante la compilazione della tabella si farà osservare che quando si ottiene in una casella il valore di 360°, il valore stesso non sarà accettabile e le caselle successive risulteranno vuote in quanto la somme delle facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro.
Dalla tabella si ha una conferma che i poliedri regolari sono solo cinque, come ha dimostrato Euclide nell'ultima proposizione de *Gli Elementi* (libro XIII, proposizione 18):

> *"Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette [i poliedri regolari], non può costruirsi nessun'altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali".*

Per il docente: Il fatto che esistono solo cinque tipi di poliedri regolari può anche essere ricavato - in modo più astratto - dal teorema di Eulero (Matematica 2003, Spazio e Figure, Simmetrie nei poliedri): $V + F = S + 2$, dove F, S e V indicano, rispettivamente, il numero delle facce, il numero degli spigoli e il numero dei vertici di un poliedro regolare. Per questo occorre osservare che per ottenere la superficie di un poliedro occorrono F poligoni regolari, ognuno con p lati (p = numero dei lati di ciascuna faccia di un poliedro regolare). Una volta ottenuto il poliedro, uno spigolo è sempre in comune a due facce del poliedro: pertanto $2S = pF$.
Pensiamo ora di costruire il poliedro a partire dai sui spigoli. Se indichiamo con q il numero degli spigoli che concorrono in un vertice del poliedro e se pensiamo che ogni spigolo deve congiungere due vertici, allora si ha anche $2S = qV$. Si ottiene pertanto che $F=2S/p$ e $V=2S/q$. Sostituendo i valori trovati di F e di V nella formula di Eulero, si ricava la formula $S = \dfrac{2pq}{2(p+q)-pq}$ e le analoghe $F = \dfrac{4q}{2(p+q)-pq}$ e $V = \dfrac{4p}{2(p+q)-pq}$.
Il denominatore delle precedenti frazioni si può scrivere nella forma: $4-(p-2)(q-2)$; ne consegue che il prodotto $(p-2)(q-2)$ deve essere un numero naturale minore di 4. I valori permessi per p e per q sono dunque quelli riportati nella Tabella 2.

p	***q***	***S***	***V***	***F***	**Poliedro regolare**
3	3	6	4	4	Tetraedro regolare
3	4	12	8	6	Cubo
4	3	12	6	8	Ottaedro regolare
5	3	30	20	12	Dodecaedro regolare
3	5	30	12	20	Icosaedro regolare

Tabella 2

Si mostrano poi le illustrazioni realizzate da Leonardo da Vinci per il libro, dedicato alla sezione aurea (Matematica 2003, Spazio e Figure, Alla ricerca del rettangolo più bello), di Luca Pacioli, *De Divina Proportione*: in esse sono rappresentati i poliedri regolari e i loro derivati semplici e stellati pieni e vuoti. Per poter eseguire correttamente questi lavori, Leonardo dovette costruire alcuni modelli in legno dei solidi e studiarne le facce come proiezione del piano (Figure 5.1 e 5.2).

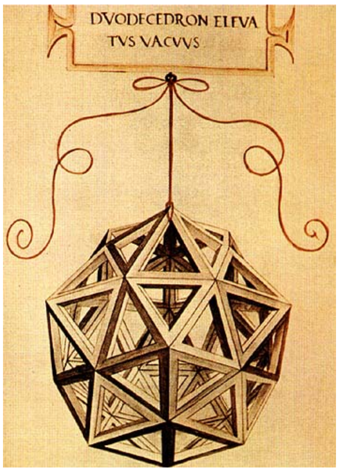


Figura 5.1

Figura 5.2

Come Piero della Francesca e Leonardo nel Rinascimento, anche artisti a noi contemporanei hanno mostrato un accentuato interesse per i solidi platonici. Il caso più emblematico è forse quello del grafico olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972) che ha fatto dei solidi platonici l'oggetto di numerose rielaborazioni (per una riproduzione delle sue opere si rinvia al sito http://www.mcescher.com). Interessante è l'analisi della xilografia *Stelle* realizzata nel 1948. La stampa raffigura un dodecaedro stellato, limitato dai piani di dodici stelle a cinque punte. Su ognuno di questi piani vive un mostro senza coda con il corpo imprigionato in una piramide a cinque facce e con la testa e le zampe che sporgono dai fori che si aprono sulle mura di questa prigione.

- *I poliedri nell'architettura*

L'architettura, come l'arte pittorica, ha subito il fascino dei poliedri come forme di riferimento per realizzare costruzioni. Fin dai tempi antichi le forme poliedriche hanno influenzato l'architettura; ne sono un esempio le piramidi dall'antico Egitto ad oggi (Figura 6).

Anche Castel del Monte (Andria, Puglia) presenta una struttura che si ispira ai poliedri e alla sezione aurea (Figura 7). Forme regolari, come quella del cubo (esaedro regolare), hanno influenzato anche l'architettura contemporanea. L'ingegnere-architetto Richard Buckminster Fuller ha realizzato cupole geodetiche molto particolari come, ad esempio, quella progettata per l'Expo di Montreal (Canada) nel 1966 (Figura 8).


Figura 6 – Piramidi di Giza


Figura 7 – Castel del Monte


Figura 8 – Padiglione per l'Expo

<u>Quarta fase</u>
L'insegnante, in continuità con quanto proposto nelle precedenti fasi e anche nell'attività Simmetrie nei poliedri (Matematica 2003, Spazio e Figure), propone una sintesi sulle simmetrie nei poliedri regolari e una riflessione su una particolare proprietà di cui esse godono: la dualità. Si riporta come esempio una figura che evidenzia la dualità tra cubo ed ottaedro regolare (Figura 9).

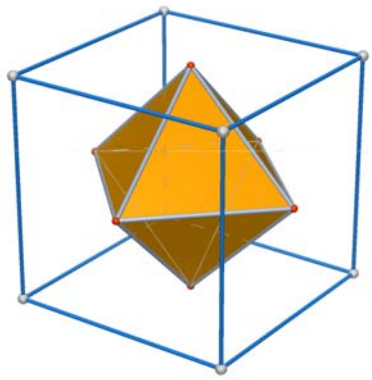


Figura 9

Con l'analisi dell'immagine riportata e con opportune considerazioni si può arrivare ad una generalizzazione del principio di dualità: se si fissa un poliedro regolare P e si uniscono con un segmento i centri di tutte le coppie di facce aventi uno spigolo comune, si ottiene un poliedro regolare P* che è detto duale del poliedro dato. E' da notare che il tetraedro è duale di se stesso.

Possibili sviluppi

- Il docente, riprendendo le figure di Leonardo da Vinci e di Escher relative ai poliedri regolari stellati, stimola una riflessione su come si possa passare da un poliedro regolare ad un poliedro semi-regolare o stellato.
  Se nella definizione di poliedro regolare si lascia cadere l'ipotesi che gli angoloidi siano uguali, si può ottenere, per esempio, il poliedro formato da due tetraedri regolari accostati lungo una faccia (Figura 2); se, invece, si lascia cadere l'ipotesi che il poliedro sia convesso, si ottengono i poliedri regolari che prendono il nome di poliedri regolari stellati (Figura 10).

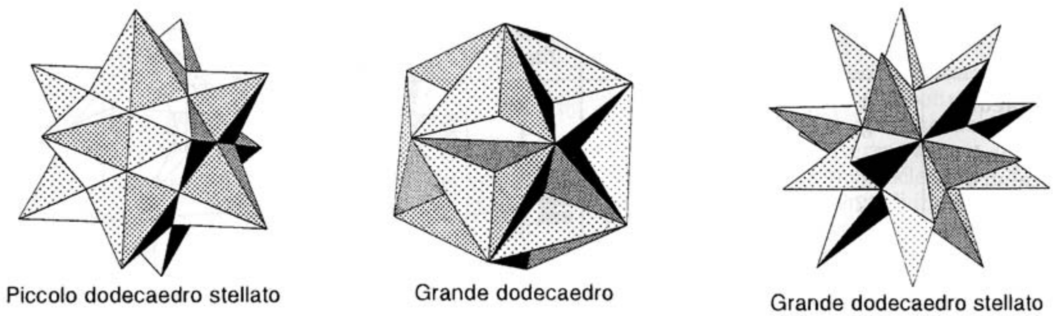


Figura 10

- Per stimolare la curiosità degli studenti, sempre partendo dai poliedri, l'insegnante può sollecitare una riflessione sui paradossi percettivi e sulle conseguenti "figure impossibili". Nella litografia *Belvedere* di Escher del 1958 (vedi ad es.: http://www.wordofescher.com/gallery/A4.html), si osserva un palazzo a tre piani, avente sullo sfondo un paesaggio montuoso. Sul pavimento, in primo piano, giace un pezzo di carta su cui è tracciata la figura di un cubo (detto "cubo di Necker"). Due cerchietti indicano i punti di intersezione dei lati. A seconda di come si guarda il cubo, si vede una delle due linee davanti all'altra. Il ragazzo seduto sulla panca tiene tra le mani un puzzle cubico che combina le due possibilità: il "sopra" e il

"sotto" si contraddicono a vicenda. Anche l'edificio alle sue spalle presenta le stesse incongruenze e contraddizioni.
Per esempio, la scala a pioli al centro, pur essendo stata disegnata correttamente dal punto di vista prospettico e in maniera credibile come oggetto, ha la base che poggia nella casa, mentre l'estremità superiore ne resta fuori. Quindi tra il "fuori" e il "dentro" del palazzo viene riproposta la stessa contraddizione contenuta nel cubo di Necker, proposto nel 1832 da Louis Albert Necker, cristallografo svizzero (Figura 11).

Figura 11 – Cubo di Necker

- Nella litografia *Cascata* del 1961 (per es., vedi: http://www.wordofescher.com/gallery/A63.html), Escher presenta un ulteriore paradosso raffigurando un canale che localmente sembra scorrere in discesa, ma globalmente è in salita. Il tema della cascata è basato sul triangolo di Penrose (Roger Penrose, matematico inglese) (Figura 12).

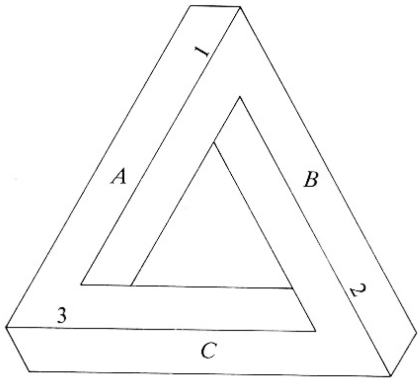


Figura 12 – Triangolo di Penrose

Sullo stesso triangolo è basata anche la figura impossibile contenuta in un'opera dell'artista svedese Oscar Reutersvard (Figura 13).

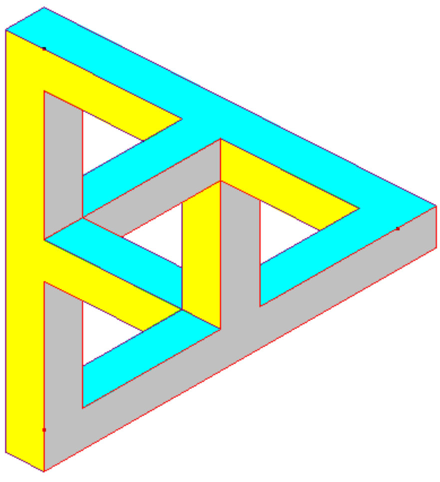


Figura 13 – Una figura impossibile di Oscar Reutersvard

- In continuità con quanto già proposto per il piano in merito allo studio della tassellazione (Matematica 2003, Spazio e Figure, Tassellazioni del piano), sarà possibile riproporre lo stesso problema per lo spazio. In tal caso gli studenti saranno guidati ad individuare il cubo come il più semplice poliedro regolare che consente la tassellazione dello spazio.

Elementi di prove di verifica

1. Piero della Francesca, nel secondo libro del *Libellus de quinque corporibus regularibus*, tratta i poliedri regolari considerando le relazioni euclidee tra spigoli e diametro della sfera circoscritta. Si riportano di seguito le relazioni enunciate per:
   - *Tetraedro regolare*: lo spigolo è medio proporzionale fra l'altezza del tetraedro e il diametro della sfera circoscritta; il quadrato dello spigolo sta al quadrato del diametro della sfera circoscritta come 2 sta a 3; il rapporto tra il quadrato dello spigolo e il quadrato dell'altezza è 3/2.
   - *Cubo*: il quadrato del diametro della sfera circoscritta sta al quadrato dello spigolo come 3 sta ad 1; ancora il quadrato del diametro sta alla superficie come 2 sta ad 1.

   In base agli elementi acquisiti, si può ritenere che quanto affermato da Piero della Francesca corrisponda a verità? In che modo è possibile motivare le risposte?

2. Si consideri il tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

   a) Indicati rispettivamente con V e S il volume e l'area totale di T, con r il raggio della sfera iscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

   b) Considerati il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

   c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e detta s la lunghezza di uno spigolo di T, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

3. Date le seguenti immagini, evidenziare le eventuali "incongruenze".

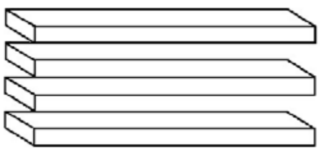


Figura 14

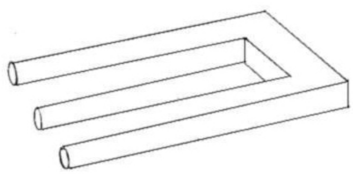


Figura 15

Alla ricerca di massimi e minimi con metodi elementari

Percorso: **Problemi di massimo e minimo**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, …). Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie. Calcolare perimetri e aree di poligoni. Calcolare aree e volumi di solidi.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. Lunghezze e aree dei poligoni. Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze.	Spazio e figure Misurare	Fisica Economia

Contesto
Costruzioni geometriche.

Il contesto è quello dello costruzioni geometriche finalizzate alla ricerca delle soluzioni di problemi di massimo e minimo, utilizzando metodologie esplorative permesse dal software di geometria.

Descrizione dell'attività
Il tema dei massimi e minimi ha una notevole importanza teorica ed applicativa. Problemi di massimo e minimo si ritrovano nella vita di tutti i giorni, nella fisica, nella tecnologia, nell'economia... Questa attività di consolidamento propone alcuni problemi di massimo e minimo, seguendo perlopiù itinerari geometrici che conducono alla costruzione delle soluzioni. Il tema è ovviamente molto vasto e per essere sviluppato richiede di fare delle scelte, anche perché si presta ad essere trattato con diversi approcci. L'attività ha il compito di consolidare alcune conoscenze di geometria e di algebra e di utilizzarle, con l'aiuto di un software di geometria, in modo da esplorare situazioni di massimo e di minimo. All'inizio di questa attività si farà riferimento anche ad alcune identità e disuguaglianze, interpretandole geometricamente. Tutti i problemi proposti sono risolti per via elementare, senza far uso della nozione di derivata.

<u>Prima fase</u>
All'inizio dell'attività proponiamo un semplice problema di massimo che si presenta in matematica e nelle sue applicazioni. Espresso in linguaggio geometrico il problema è il seguente:
Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, trovare quello che ha area massima.
E' intuitivo pensare che la risposta sia il quadrato. Per affrontare questo problema si possono proporre diversi metodi. Inizialmente si può sfruttare la disuguaglianza tra la media geometrica e la media aritmetica. La media geometrica di due numeri positivi è minore od uguale alla media aritmetica (le due medie sono uguali solo se $x = y$):

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Di questa disuguaglianza esiste una dimostrazione “visuale” (figura 1), per via geometrica, che si può proporre agli studenti. Posto $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = y$, si costruisce un segmento AB di lunghezza $x + y$ e la circonferenza di diametro AB. Allora il raggio OD misura $\frac{x+y}{2}$ e CD, che è altezza relativa all’ipotenusa del triangolo rettangolo ABD, misura $\sqrt{xy}$. Dal triangolo ODC, si ricava che CD≤OD.

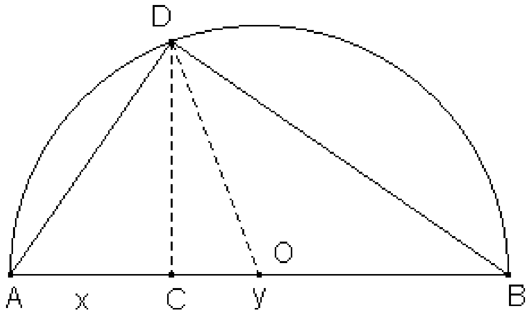


Figura 1

Alla risoluzione del problema si poteva arrivare anche con altre considerazioni, facendo ad esempio uso della geometria analitica. Se si fissa il semiperimetro del rettangolo ($x + y = 2a$), xy rappresenta l’area del rettangolo e si può scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = k \end{cases}$$

Nel piano cartesiano il sistema rappresenta l’intersezione tra una retta e un fascio di iperboli equilatere. Affinché il sistema abbia soluzioni occorre che l’iperbole di equazione $xy = k$ $(k > 0)$ intersechi la retta $x + y = 2a$. Il massimo dell’area del rettangolo si ottiene quando l’iperbole è tangente alla retta (figura 2), ossia per $x = y = a$; per questa iperbole si ha quindi $k = a^2$.

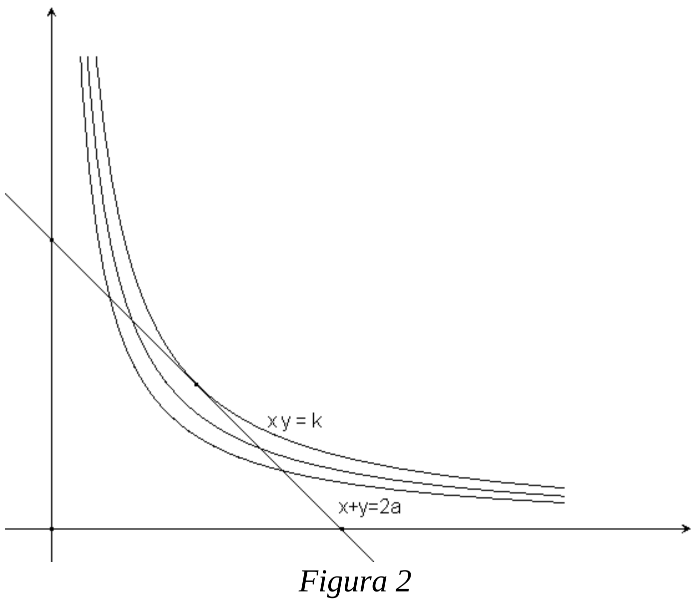


Figura 2

In generale, quindi, per le iperboli che intersecano la retta, si ha $xy \le a^2$ ovvero

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 .$$

Quest'ultima relazione, se si estrae la radice quadrata, esprime la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica. La disuguaglianza può essere letta in entrambi i versi e dà origine sia ad una proprietà di massimo che ad una proprietà di minimo. In precedenza abbiamo fissato il valore di $x+y$; se, viceversa, fissiamo il valore di xy - ossia l'area di un rettangolo - la disuguaglianza esprime allora la proprietà simmetrica di quella finora studiata:
tra tutti i rettangoli di area costante, il quadrato ha il perimetro minimo.
Può essere interessante dal punto di vista didattico presentare questo problema anche tramite un'animazione ottenuta con un software di geometria. Si fissa un segmento AB, che diventa il semiperimetro del rettangolo, e si costruiscono dei rettangoli isoperimetrici. L'area è rappresentata da un arco di parabola di equazione $S = x \cdot (2a - x) = -x^2 + 2ax$, che ha il massimo per $x = a$, ascissa del vertice. La dinamicità della figura permette di trascinare il punto D e osservare il variare dell'area del rettangolo e contemporaneamente il grafico dell'area di ADHK in funzione di *x* (figura 3).

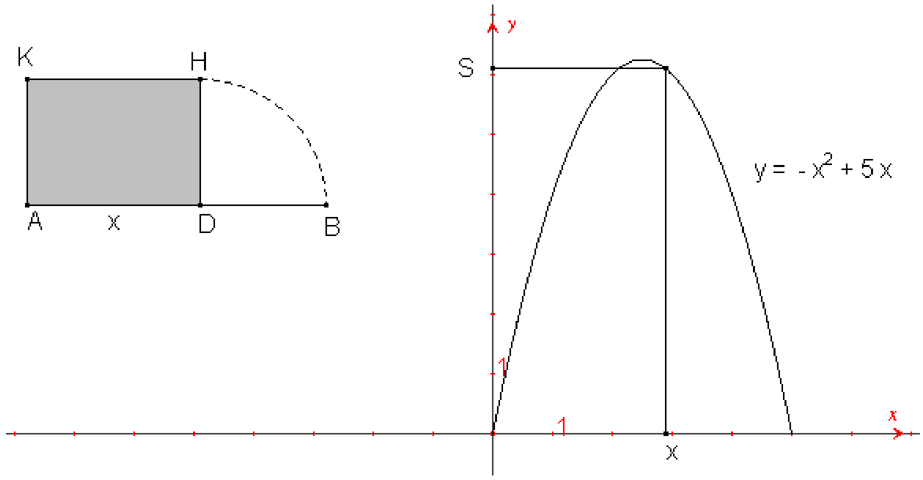


Figura 3

Lo stesso problema può essere presentato anche con un approccio storico, partendo dalla lettura della proposizione 5 del II libro degli *Elementi* di Euclide. Questo approccio, perché possa interessare gli studenti, dovrebbe essere proposto in laboratorio, mediante un software di geometria. Euclide, nella proposizione citata afferma:
Se si divide un segmento in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali del segmento, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà del segmento.
Poniamo $\overline{AB} = 2a$. Il punto C divide a metà il segmento AB. Quindi $\overline{AC} = a$. Sia D un punto qualunque di CB. Quindi $\overline{AD} = a + b$ e $\overline{DB} = a - b$ (figura 4).

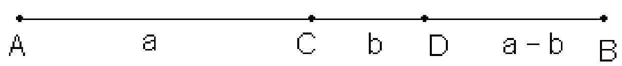


Figura 4

La formulazione della proposizione diventa allora:

$$\text{rettangolo(AD, DB)} + \text{quadrato(CD)} = \text{quadrato(DB)}$$

e in termini algebrici $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$, ossia il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

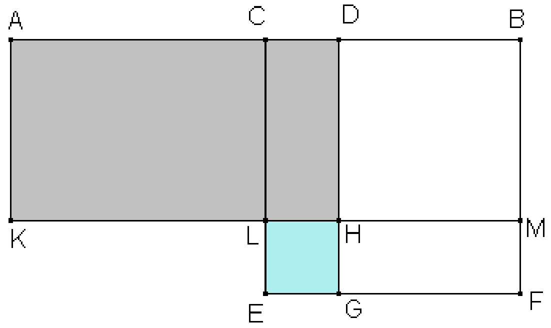


Figura 5

Dalla figura 5 si osserva che il rettangolo costruito su AD e DB rimane sempre dello stesso perimetro ($4a$). Da quanto detto in precedenza possiamo ricavare che per "raggiungere" il quadrato costruito su a - che è costante - occorre aggiungere all'area di questi rettangoli il quadrato costruito su *b*. In modo algebrico, possiamo scrivere:

$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$$

L'area del rettangolo ADHK diventerà quindi massima quando non occorrerà aggiungere nulla a $(a+b)(a-b)$ per ottenere a^2; deve quindi essere $b=0$. Ma se $b=0$, allora il rettangolo ADHK diventa un quadrato. Ne segue che: tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, il quadrato è quello che ha area massima. Se si pone $a+b=x$, $a-b=y$, la proposizione di Euclide si può scrivere in forma algebrica nel seguente modo:

$$xy+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

dalla quale è evidente che xy è massimo quando $x=y$.

La dimostrazione di Euclide non è difficile e può essere lasciata agli studenti. Si disegna il segmento AB, che sarà il semiperimetro dei rettangoli isoperimetrici, e si prende su di esso un punto D, con AD maggiore di DB. Si disegna quindi il rettangolo ADHK con DH=DB e il quadrato CBFE, dove C il punto medio di AB. Detta L l'intersezione delle rette CE ed LM, si nota che il quadrato CBFE è formato dal rettangolo CDHL, che è in comune con il rettangolo ADHK, dal rettangolo HMFG, che è uguale al rettangolo CDHL, dal quadrato DBMH e dal quadrato LHGE, che ha lato uguale alla differenza tra AD (lato maggiore del rettangolo) e AC (metà di AB ovvero metà del semiperimetro).

Si fa notare che il rettangolo ADHK ha una superficie minore del quadrato CBFE, in quanto tale quadrato ha "in più" il quadrato LHGE. Facendo variare D su CB si può notare che quando D coincide con C il quadrato LHGE degenera in un punto e che il rettangolo ADHK diventa un quadrato uguale a CBFE. Si può quindi concludere che il rettangolo costruito ADHK ha area massima quando le due parti, AC e CD, in cui viene diviso il segmento considerato sono uguali (D coincidente con B).

Si propone un altro esempio nel quale si verifica una situazione analoga. Nella figura 6 è rappresentato il quadrato ABCD il cui lato è la somma di due segmenti AP e PB. Il quadrato è costituito da quattro rettangoli la cui area è uguale al prodotto delle misure di AP e PB e da un quadrato il cui lato è la differenza dei segmenti AP e PB. Le aree dei rettangoli risulteranno massime quando il quadrato ABCD risulta scomposto solo nei quattro rettangoli, ovvero quando AP = PB (come gli studenti possono notare facendo variare il punto P sul segmento AB).

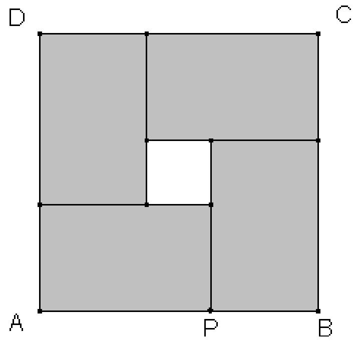


Figura 6

Si può anche far notare che la figura 6 rappresenta, in forma geometrica, l'identità algebrica $(x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2$. Dall'analisi di questa identità, si vede che l'area dei rettangoli ($4xy$) diventa massima per $x = y$.
In questo prima parte è stata rivista la disuguaglianza tra la media geometrica e la media aritmetica. Si può anche citare il fatto - ed eventualmente fornire una dimostrazione - che questa proprietà non vale solo per due numeri positivi, ma vale in generale per n numeri positivi.
Proposizione 1. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono numeri positivi e indichiamo con $m_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ la loro media aritmetica e con $m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ la loro media geometrica, allora si ha $m_g \le m_a$ e l'uguaglianza $m_g = m_a$ si ha solo se i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono uguali tra loro.
Sulla base di questa proposizione è possibile dimostrare le seguenti proposizioni tra loro "simmetriche" (per passare da una all'altra la parola "prodotto" viene sostituita con "somma" e la parola "massimo" viene sostituita con "minimo").
Proposizione 2. Il prodotto di n numeri non negativi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la cui somma è costante, è massimo quando i numeri sono uguali tra loro.
Proposizione 3. La somma di n numeri non negativi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il cui prodotto è costante, è minimo quando i numeri sono uguali tra loro.

<u>Seconda fase</u>
Come applicazione di quanto visto in precedenza si propone di indagare come varia l'area dei rettangoli inscritti in un triangolo (ovvero rettangoli che hanno due vertici consecutivi su un lato del triangolo e gli altri due su ognuno degli altri due lati) e in particolare se si può individuare il rettangolo di area massima.
L'indagine può essere condotta usando un software di geometria che evidenzi il cambiamento dell'area del rettangolo al variare della posizione di uno dei suoi vertici su uno dei lati del triangolo, considerando la situazione nei tre possibili casi (base del rettangolo appartenente a ciascuno dei tre lati del triangolo).
Osservando la figura 7 si può congetturare che l'area massima è quella dei tre rettangoli che hanno l'altezza uguale alla metà dell'altezza del triangolo relativa al lato sul quale giace la base dello stesso rettangolo. E' utile sottolineare come in questo caso il problema ammette tre soluzioni diverse per l'area massima.

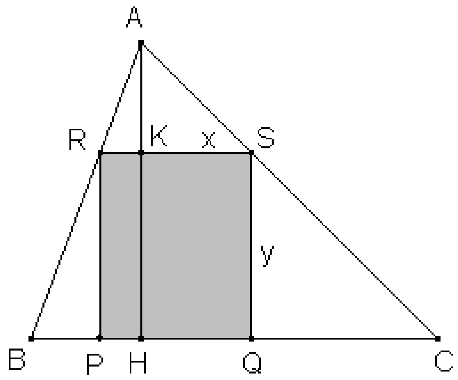


Figura 7

Per dimostrare ciò possiamo, indicati con a, b, c rispettivamente i lati BC, AC, AB e con x e y la base e l'altezza dei rettangoli, applicare una proprietà dei triangoli simili e notare che l'area dipende dal prodotto di due numeri che hanno somma costante.
Osservando che i triangoli ARS e ABC sono simili (omotetia di centro A che manda R in B) si può scrivere la proporzione $x : a = (h - y) : h$, da cui si ricava $x = a(h - y)/h$; l'area del rettangolo PQSR è allora uguale a $ay(h - y)/h$ e quindi, essendo a/h costante, varia al variare del prodotto $y(h - y)$ i cui fattori hanno somma costante ($h - y + y = h$). Si conclude, in base a quanto dimostrato nella prima fase, che l'area è massima quando i due fattori sono uguali $h - y = y$, ovvero quando $y = h/2$ e $x = a/2$. L'area del rettangolo è uguale a $ah/4$, che è la metà dell'area del triangolo.
Si ragiona analogamente per i rettangoli inscritti relativamente agli altri lati. Qui abbiamo supposto che il triangolo fosse acutangolo. Si propone agli studenti di esaminare anche gli altri casi (triangolo rettangolo e triangolo ottusangolo).

<u>Terza fase</u>
Si considerano i rettangoli di data area e si guidano gli studenti a individuare quello di perimetro minimo.

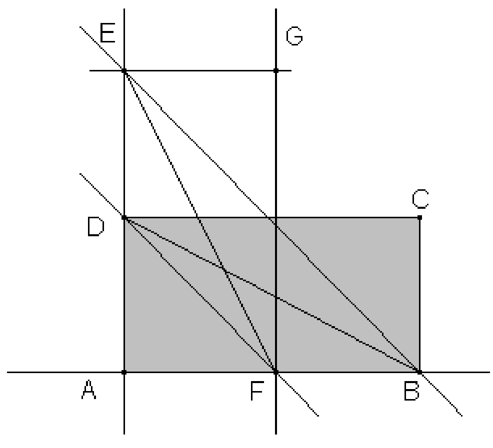


Figura 8

Dato il rettangolo ABCD (figura 8) si costruisce il rettangolo AFGE equivalente ad ABCD nel seguente modo: sul prolungamento di AD si prende un punto E e successivamente si determina il punto F di intersezione tra il lato AB e la retta parallela a EB passante per D. Si fa quindi osservare che i triangoli ABD e AFE sono equivalenti.
Infatti hanno in comune il triangolo AFD e sono completati rispettivamente dai triangoli DFB e DFE che sono tra loro equivalenti perché hanno stessa base DF e uguale altezza, essendo DF

parallela a EB. Quindi sono equivalenti anche i rettangoli AFGE e ABCD le cui aree sono doppie di quelle dei triangoli AFE e ABD. Pertanto, al variare di E sul prolungamento di AD i rettangoli AFGE hanno tutti la stessa area di ABCD.
Il perimetro dei rettangoli AFGE, invece, varia al variare di E sulla retta AD. Misurando la lunghezza del perimetro con il software, si può congetturare che raggiunga il suo valore minimo quando AF = AE. Indicato con x la misura del lato AF e con y quella di AE, si ha $xy = c$ per quanto si è dimostrato. Il semiperimetro è quindi $x + y = k$. Nel piano cartesiano si è ricondotti ad un sistema formato da un'iperbole equilatera e da un fascio di rette. Il minimo valore di k, in modo che il sistema abbia soluzioni, si ottiene quando la retta è tangente all'iperbole, cioè per $x = y$, che fornisce $x = \sqrt{c}$ (figura 9). Si conclude che:
Tra tutti i rettangoli di data area il quadrato è quello di perimetro minimo.

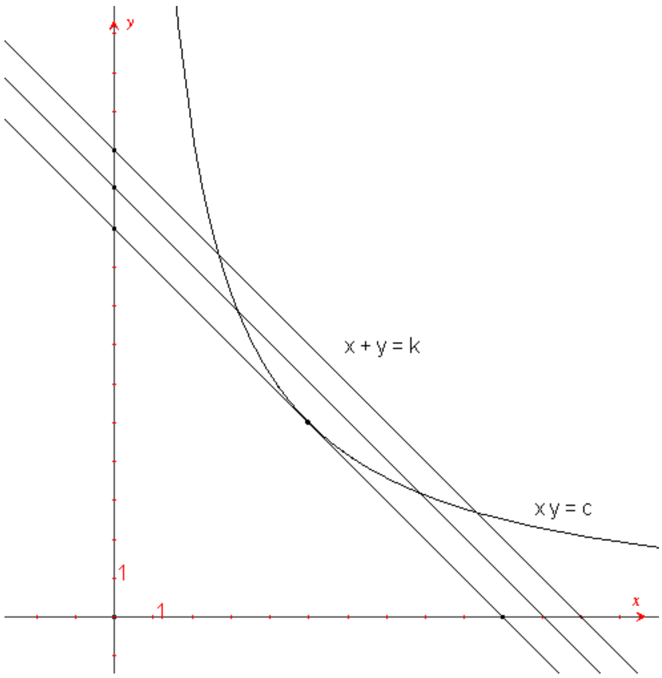


Figura 9

Questo problema porta dunque a concludere che se x e y sono due numeri positivi di prodotto costante ($xy = c$), la loro somma è minima quando $x = y$.
Con l'uso della geometria analitica, si potrebbe riformulare il problema nel seguente modo. Si ricava $y = c / x$ e si esamina la curva $s = x + c / x$. Questa curva è un'iperbole (figura 10) di asintoti l'asse y e la retta $y = x$. In base a quanto è stato detto in precedenza, il minimo di questa iperbole (con $x > 0$) si ha per $x = c / x$, cioè per $x = \sqrt{c}$ e in questo caso la somma vale $s = 2\sqrt{c}$

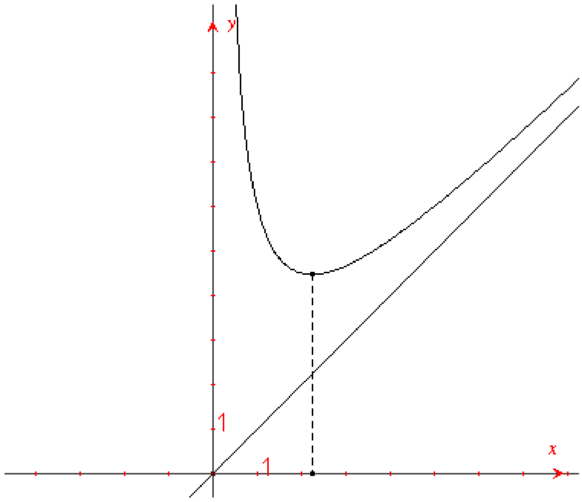


Figura 10

Questo problema si può leggermente ampliare. Supponiamo che a e b siano costanti positive. Vogliamo determinare il valore minimo della somma $s = ax + b/x$. In questo problema abbiamo due quantità positive che hanno prodotto costante. La somma $s = ax + b/x$ è minima solo se $ax = b/x$, ossia se $x = \sqrt{b/a}$ e in questo caso la somma vale $2\sqrt{ab}$.

Quarta fase

Si propone di determinare tra i triangoli rettangoli di data ipotenusa quello che ha area massima. Un triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza e si può osservare che il problema posto è equivalente a quello di determinare tra i rettangoli di data diagonale quello di area massima (figura 11). E' facile per gli studenti rendersi conto che il rettangolo richiesto è il quadrato con la diagonale uguale all'ipotenusa assegnata. Se x e y sono i cateti del triangolo rettangolo e c l'ipotenusa, che rimane costante, allora $x^2 + y^2$ è costante al variare di x e y. Algebricamente si osserva che prodotto xy è massimo quando x e y sono uguali perché si può scrivere l'identità: $xy = \dfrac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{2}$, ovvero $xy = \dfrac{c^2 - (x-y)^2}{2}$, che è massimo per $x = y$.

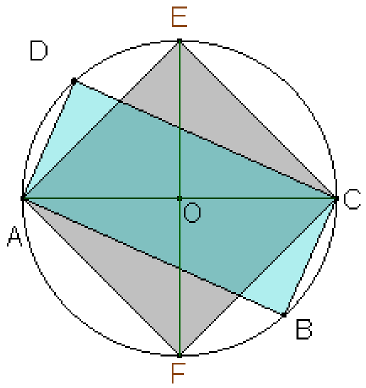


Figura 11

Quinta fase

Si propone agli studenti il problema di individuare il rettangolo di area massima tra quelli inscritti in una ellisse (figura 12). Il problema può sembrare complesso, ma la sua risoluzione può divenire più facilmente raggiungibile se si cercano analogie con quanto osservato in precedenza.

Si guidano gli studenti ad osservare che l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right)$ indica che rimane costante la somma dei quadrati di x/a e di y/b e quindi, in base a quanto emerso nella quarta fase, il prodotto tra x/a e di y/b è massimo quando i due termini sono uguali tra loro, ovvero quando $x/a = y/b$ cioè per $x/y = a/b$. Facendo riferimento alla figura 11 possiamo concludere che ciò si verifica quando il rettangolo PQRS, inscritto nell'ellisse, è simile al rettangolo ABCD circoscritto (con i lati paralleli agli assi) dell'ellisse.

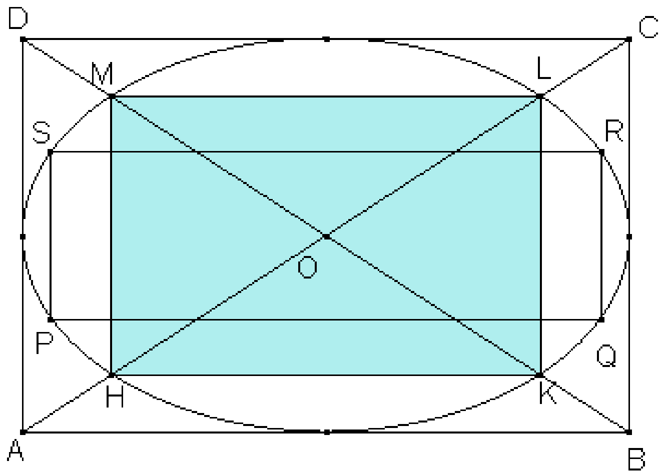


Figura 12

<u>Sesta fase</u>

Si propone il problema di individuare tra i rettangoli di dato perimetro quello di diagonale minima. Nel caso in cui vengono considerati rettangoli di perimetro assegnato si può fare una costruzione simile a quella vista nella prima fase, per poi considerare la diagonale del rettangolo ADB'E (figure 13 e 14). Facendo variare il punto D sul segmento AB si può notare che il segmento AB' è minimo quando coincide con AH, ovvero quando è perpendicolare a BH. Questa conclusione deriva dall'analisi del triangolo rettangolo AHB'. Ciò avviene quando il punto D coincide con C e questo comporta che il rettangolo ADB'E diventi il quadrato con il lato uguale alla metà del segmento AB.

Questo problema traduce geometricamente l'identità $x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}$. Essendo $x + y = p$, si ottiene $d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{p^2 + (x-y)^2}{2}}$, che è minima soltanto se $x = y$.

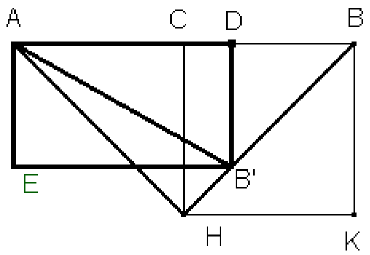


Figura 13

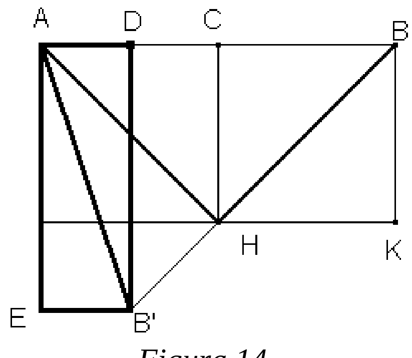


Figura 14

Nelle attività descritte sono stati proposti alcuni problemi di massimo e minimo di origine geometrica tra gli innumerevoli che si potevano presentare. Altri problemi, nei quali si usano metodi geometrici unitamente all'algebra e allo studio di funzioni elementari, sono quelli relativi ai problemi di scelta (Ricerca operativa) e dei problemi di programmazione lineare. Questi problemi potrebbero rappresentare un'ulteriore occasione per consolidare conoscenze e abilità apprese nei primi due bienni.

Biglietto della corriera

Percorso: **Pendenza di una retta e variazione di una funzione**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (variazione di una grandezza in funzione di un'altra, semplici successioni,…) Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi.	Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzioni polinomiali, funzioni definite a tratti.	Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	Economia

Contesto
Modello economico.

Una situazione di contesto economico viene descritta con una funzione lineare a tratti. Una semplificazione del modello risulta possibile passando ad una funzione polinomiale di secondo grado che coincide con la precedente in alcuni punti. L'attività si propone di determinare la funzione quadratica e di valutare l'errore commesso all'interno degli intervalli.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
È proposto il seguente problema:
Una scuola stipula una convenzione con l'azienda cittadina dei trasporti per le gite scolastiche. La convenzione stabilisce che verrà applicata una tariffa di € 30 per ogni studente fino a 20 studenti. Se vi saranno più studenti si applicherà uno sconto che, partendo dal 10% dopo i primi 20 studenti, aumenta ancora del 10% per fasce successive di 20 studenti. Ad esempio per un numero di studenti che va da 21 a 40 si applica lo sconto del 10%, da 41 a 60 del 20% e così di seguito. Quale sarà il costo complessivo per la scuola?

Evidentemente fino a 20 studenti il costo è proporzionale al loro numero, dato che la quota unitaria è costante. Il calcolo del costo viene poi fatto per accumulo: lo sconto maturato è applicato solo alla fascia di competenza. Dunque, al costo maturato fino ad una certa fascia di studenti, si aggiunge per l'intera fascia successiva il costo calcolato con il corrispondente sconto. Dopo alcuni esempi, risulterà opportuno costruire una tabella (ci si può eventualmente avvalere di un foglio elettronico o di una calcolatrice) che contenga in colonna: il numero di studenti per fasce di 20, lo sconto applicato alla fascia, il costo complessivo. Conviene anche tabulare alcuni valori opportuni che consentano da una parte di facilitare il calcolo per le fasce successive, dall'altra di tracciare un grafico dell'andamento dei costi. Per una successiva formalizzazione, indicato con x il numero degli studenti che partecipa alla gita scolastica, sono utili le seguenti notazioni: $p = [(x-1)/20]$ (quoziente intero della divisione di x-1 per 20; il "-1" serve ad evitare che per $x = 20$ si passi alla fascia di sconto successiva), $r = x - 20p$ (resto della divisione di x-1 per 20).

FASCIA	$p = \left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor$	SCONTO	FORMULA CHE ESPRIME IL COSTO	VALORI DI x	COSTO $f(x)$	COSTO PER STUDENTE
$1 \leq x \leq 20$	0	0%	$30x$	0	0	-
				20	$f(20) = 600$	30
$21 \leq x \leq 40$	1	10% di €30: €3	$f(20) + r(1- p/10)30 = 600 + 27(x-20)$	40	1140	1140/40 = 28,5
$41 \leq x \leq 60$	2	20% di €30: €6	$1140 + 24(x-40)$	60	1620	27
$61 \leq x \leq 80$	3	30%: €9	$1620 + 21(x-60)$	80	2040	25,5
$81 \leq x \leq 100$	4	40%: €12	$2040 + 18(x-80)$	100	2400	24
$101 \leq x \leq 120$	5	50%: €15	$2400 + 15(x-100)$	120	2700	22,5
$121 \leq x \leq 140$	6	60%: €18	$2700 + 12(x-120)$	140	2940	21
$141 \leq x \leq 160$	7	70%: €21	$2940 + 9(x-140)$	160	3120	19,5
$161 \leq x \leq 180$	8	80%: €24	$3120 + 6(x-160)$	180	3240	18
$181 \leq x \leq 200$	9	90%: €27	$3240 + 3(x-180)$	200	3300	16,5
$201 \leq x \leq 220$	10	100%: €30	$3300 + 0(x-200)$	220	3300	15
$221 \leq x \leq 240$	11	110%: €33	$3300 - 3(x-220)$	240	3240	13,5

Si può tracciare un grafico riportando in ascissa i valori della colonna 5 della tabella (numero di studenti), e in ordinata quelli della colonna 6 (costo). Può essere opportuno mostrare, in un paio di casi, la retta corrispondente all'equazione della colonna 4.
La Figura 1 mostra il grafico della funzione continua che corrisponde alla funzione discreta della tabella, costruito con una calcolatrice grafica.

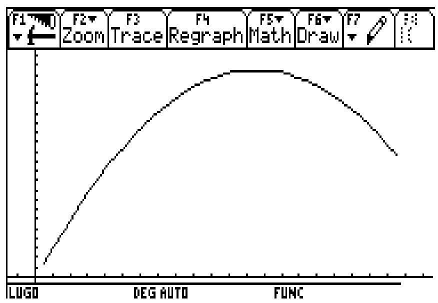


Figura 1

La pendenza del grafico esprime la variazione del costo della corriera. Per come è formulata la proposta, il costo unitario è costante (30 euro) fino a 20 studenti; successivamente diminuisce progressivamente di 3 euro per studente (sconto del 10%) per ogni fascia successiva di 20 studenti. Il grafico, quindi, è lineare fino a 20 e successivamente è costituito da segmenti che hanno sempre la proiezione sulle ascisse pari a 20 e una pendenza che via via diminuisce. La variazione di pendenza tra due segmenti consecutivi è troppo piccola perché sia apprezzata sullo schermo della calcolatrice anche ingrandendo il grafico.
Il grafico e la tabella mostrano che ad un certo punto, aumentando il numero di studenti, diminuisce il costo complessivo del viaggio, contro ogni logica commerciale. Evidentemente chi ha formulato la proposta si aspetta che ci sia un numero massimo di utenti possibili.

Seconda fase

Ci proponiamo di esprimere la relazione tra il numero di studenti ed il costo complessivo con una funzione. Una funzione *f(x)*, che calcoli il costo del viaggio per un numero qualsiasi di studenti, può essere definita in modo ricorsivo, prendendo spunto dalla precedente tabella. Come prima, poniamo $p = [(x-1)/20]$ e $r = x - 20\,p$. allora si ha $f(x) = f(20p) + r\cdot(1 - p/10)30$.

Il grafico visto in precedenza suggerisce però di approssimare la funzione con una parabola.

Per trovare l'equazione della parabola candidata a descrivere la nostra relazione, ne scegliamo alcuni punti. A questo scopo scorriamo le due colonne 5 e 6 della tabella.

Scegliamo il punto (0; 0) e i due punti (200; 3300) e (220; 3300) che saranno simmetrici rispetto all'asse della parabola $y = ax^2 + bx + c$. Risolvendo il sistema, che si ottiene imponendo alla parabola di passare per questi tre punti, si ricavano i coefficienti della funzione polinomiale $g(x)$ cercata, come indicato a fianco.

$$c = 0$$
$$3300 = a(200)^2 + b(200)$$
$$3300 = a(220)^2 + b(220)$$
$$a = \frac{-b}{420};\ b = 31{,}5;\ a = \frac{-3}{40}$$
$$parabola:$$
$$g(x) = \frac{-3}{40}x^2 + 31{,}5x$$

L'uso di una calcolatrice sarà naturalmente utile. Si può in tal caso tabulare la funzione $g(x)$ per alcuni dei valori presenti nella colonna 5.

Si verifica che il grafico di $g(x)$ si sovrappone, almeno nella scala che lo produce globalmente, a quello della tabella.

Possiamo anche verificare che, per i valori delle colonne 5 e 6, la funzione $g(x)$ coincide con i corrispondenti elementi della funzione *f(x)*, sopra definita.

La parabola passa per i punti della tabella a cominciare da quello di ascissa 0, ma naturalmente non darà il costo esatto del viaggio per un numero qualsiasi di studenti: il calcolo secondo la convenzione è infatti lineare all'interno delle fasce di sconto. Vogliamo evidenziare l'errore che verrebbe commesso calcolando il costo del viaggio con la *g(x)*.

L'errore commesso viene calcolato come

$$g(x) - f(x) = err(x)$$

Il grafico di *err(x)* riportato nella Figura 2, mostra una forma all'apparenza periodica di periodo 20, con un errore relativamente contenuto rispetto ai valori della funzione *f(x)*. Variando l'intervallo di rappresentazione della funzione *err(x)*, si può osservare la stessa regolarità anche per i valori seguenti di *x*.

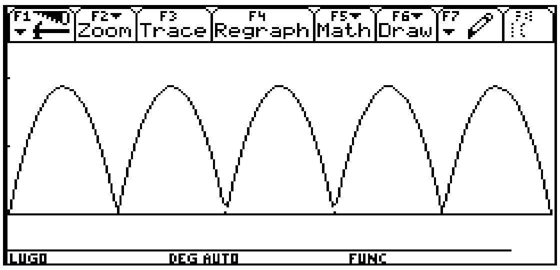


Figura 2

Possibili sviluppi

- Si può indagare sul significato del coefficiente $-\frac{3}{40}$ del termine in x^2 della parabola che approssima la funzione del costo. Ci si può chiedere, ad esempio, come deve cambiare l'aliquota di sconto se si riduce l'ampiezza della fascia di applicazione e si vogliono mantenere gli stessi valori di costo complessivo. Ad esempio, se si dimezza la fascia si dimezza anche lo sconto? Quanto vale lo sconto quando la fascia è costituita da un solo studente?
- Nella Figura 2 il grafico è costituito da archi di parabole, dato che si tratta di una differenza tra un polinomio di secondo grado (la parabola) ed uno di primo (la retta secante). Come sono le parabole 'differenza' quando la retta secante proietta sull'asse delle ascisse segmenti di lunghezza costante?

Crescita e decadimento

Percorso: **Potenze, successioni, funzioni esponenziali e logaritmiche**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura. Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, la notazione con freccia, il diagramma ad albero, il grafico. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza. Costruire modelli sia discreti che continui di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale. Possedere il senso intuitivo di “limite di una successione”.	Relazioni d’ordine. Esempi di funzioni e dei loro grafici. La funzione esponenziale; la funzione logaritmica. Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Il numero *e*. Incrementi a passo costante.	Relazioni e funzioni	Scienze
Stimare l’ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L’insieme dei numeri reali.	Numeri e algoritmi	
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate.		Argomentare, congetturare, dimostrare	
Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni.		Misurare	
Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni e fenomeni matematici e non per affrontare problemi.		Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Decadimento radioattivo.

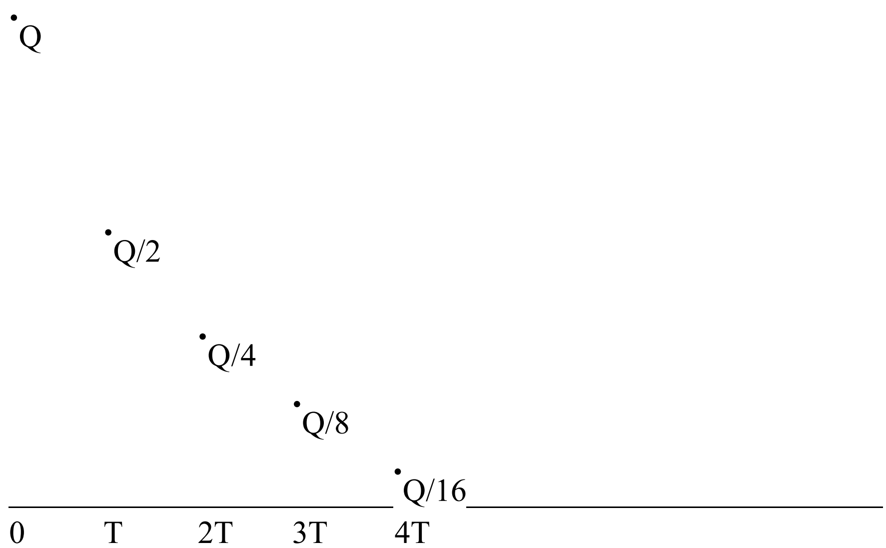
Il contesto dell’attività è quello dei fenomeni di crescita e decrescita, che si traducono in funzioni esponenziali. Il punto di partenza è fornito dal decadimento radioattivo.

Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in fasi di difficoltà crescente. I fenomeni di decadimento radioattivo vengono prima schematizzati, poi interpretati in termini di successioni geometriche per arrivare poi a funzioni esponenziali, prima in base 1/2 e successivamente in base *e*. Parallelamente a questa evoluzione varia la possibilità di risolvere equazioni di tipo esponenziale, prima in via approssimata e poi in modo più esatto.

Prima fase

Si inizia con la definizione di *decadimento radioattivo* e di *tempo di dimezzamento*. Per tempo di dimezzamento T di un materiale radioattivo si intende il periodo passato il quale la metà del materiale è decaduta (cioè si è trasformata). Tali valori sono generalmente riportati in tavole e possono essere molto diversi per i vari materiali radioattivi. Ad esempio il tempo di dimezzamento dell'azoto è di 10 minuti, il tempo di dimezzamento del Carbonio è di 5570 anni (cfr. Matematica 2003, Misurare, Crescite veloci e crescite lente).
L'insegnante propone allora il primo problema:
Data una certa quantità iniziale Q(0) di azoto, dopo quanti tempi di dimezzamento (e quindi dopo quanto tempo) la quantità di sostanza radioattiva si riduce a meno di 1/4, a meno di 1/100, a meno di un millesimo della quantità iniziale?
Si può schematizzare la situazione con un grafico come quello che segue:



per arrivare poi a trovare le relazione $Q(n) = Q(0)(1/2)^n$. Si vede allora che $Q(n) = Q(0)/4$ per n =2, quindi dopo due tempi di dimezzamento ossia dopo 20 minuti. Ma il valore di *n* per cui $Q(n) < Q(0)/100$ deve essere approssimato, con le successive potenze di (1/2). Si trova che $(1/2)^7 < 1/100$ (sette tempi di dimezzamento equivalgono a 70 minuti).

Seconda fase

Dal momento che una sostanza radioattiva decade con continuità e non a intervalli, l'insegnante propone agli studenti di non considerare solo valori interi dell'esponente, e di riscrivere quindi l'equazione trovata come $Q = Q(0)(1/2)^x$. Si può poi porre uguale a 1 (cioè al 100%) la quantità iniziale, e giungere così a $Q = (1/2)^x$. Si osserverà che il grafico di quest'ultima curva "contiene" i punti del grafico discreto precedente.
A questo punto l'insegnante può chiedere:
Dopo quanto tempo la quantità di azoto radioattivo si è ridotta ad un centesimo del valore iniziale?

Ora abbiamo un nuovo strumento per la risoluzione dell'equazione esponenziale $(1/2)^x = 1/100$: i logaritmi.
Da $\log (1/2)^x = \log (1/100)$ si ricava $x = \log(1/100)/\log(1/2) = 6{,}64$. Il risultato si può confrontare con quello ottenuto precedentemente per approssimazione, ma la risposta è ora più precisa: 6,64 tempi di dimezzamento equivalgono a 1h 6 min 24 s (anche se è dubbio che si possa calcolare il tempo in modo così esatto per un fenomeno reale).

Terza fase
Si introduce ora un punto di vista più generale per tutti i fenomeni di crescita e decadimento. Si può infatti ipotizzare che la variazione (aumento o diminuzione) della quantità di sostanza considerata sia proporzionale alla quantità stessa e al tempo trascorso:

$$\Delta y \sim y \cdot \Delta t$$

Introducendo una costante reale k otteniamo:

$$\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t \quad \text{con} \quad \begin{cases} k < 0 \text{ per decrescita} \\ k = 0 \text{ per stagnazione} \\ k > 0 \text{ per crescita} \end{cases}$$

Questa equazione può essere ulteriormente elaborata sia nel caso discreto che nel continuo.
Caso discreto: se indichiamo con y_j la quantità di materiale dopo j intervalli di tempo Δt, dall'equazione alle differenze $\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t$ segue l'equazione $y_j - y_{j-1} = k \cdot y_{j-1} \cdot \Delta t$. Risolvendo rispetto a y_j si ottiene $y_j = y_{j-1} \cdot (1 + k\Delta t)$ con valore iniziale y_0.
Segue $y_{j-1} = y_{j-2}(1 + k\Delta t)$, quindi in complesso $y_j = y_{j-2}(1 + k\Delta t)^2$. Ripetendo il procedimento si ottiene così:

$$y_j = y_0 (1 + k\Delta t)^j \text{ con valore iniziale } y_0.$$

Ritroviamo così che crescita e decrescita sono descritte, nel modello discreto, da successioni geometriche. Nel caso trattato precedentemente si aveva $\Delta t = 1$ (un tempo di dimezzamento) e $k = -1/2$.
Più interessante è l'estensione al caso continuo: immaginiamo l'intervallo [0; Δt] diviso in un numero crescente di intervalli sempre più piccoli. Sia n il numero di intervalli di tempo. Allora si ha $t = n \cdot \Delta t$. Dal modello discreto sappiamo che:

$$y_n = y_0 (1 + k\Delta t)^n = y_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n.$$

Come si comporta tale espressione per $n \to \infty$? Ricordando il numero di Eulero $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, possiamo trovare che $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = e^{kt}$.

Ne segue, per il processo nel caso continuo, che $y_n = y_0 \cdot e^{kt}$, con valore iniziale y_0.

Quarta fase
Torniamo ora al problema di partenza: ponendo $y_0 = 1$, abbiamo che il decadimento di una sostanza radioattiva può essere espresso dalla funzione $y = e^{kt}$. Per determinare k usiamo i dati a nostra disposizione: per $t = 10$ min si ha $y = 1/2$. Quindi $e^{10k} = 1/2$. Risolvendo ancora con l'aiuto dei logaritmi otteniamo $k = -0{,}0693147$.

Come è possibile che lo stesso problema si formalizzi sia con un'equazione del tipo $y = (1/2)^x$ sia con l'equazione y = $e^{-0,069t}$?
Verifichiamo che le due equazioni sono equivalenti. Si tratta innanzi tutto di ricordare che le due equazioni usano unità di misura diverse: la prima ha come unità di misura il tempo di decadimento T = 10 min, la seconda ha come unità di misura 1 minuto. Quindi dobbiamo porre $t = 10x$. Segue che: $e^{-0,069t} = e^{-0,069(10x)} = (e^{-0,69})^x = (0,501)^x$. Dunque, con ottima approssimazione, $e^{-0,069t} = (1/2)^x$.

Possibili sviluppi
Al momento in cui si introducono le derivate, l'equazione $y = e^{-0,069t}$ si può ritrovare come soluzione di un problema in cui è noto il tasso di decrescita (rispettivamente di crescita) di una certa quantità y, ovvero come soluzione di una semplice equazione differenziale del tipo $dy/dx = -0,069\ y$.

Una scatola da costruire

Percorso: **Equazioni e disequazioni**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni e disequazioni.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	Relazioni e funzioni	
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali.	Numeri e algoritmi Laboratorio di matematica	

Contesto

Soluzione approssimata di equazioni.

Il punto di partenza dell'attività è costituito dalla constatazione del fatto che, data un'equazione polinomiale di grado n a coefficienti reali, al di là di quanto afferma il teorema fondamentale dell'algebra (l'equazione ha certamente n soluzioni complesse, ognuna contata con la rispettiva molteplicità), non esiste alcun teorema che stabilisca quante di tali soluzioni siano reali. Nella modellizzazione di un problema può capitare di ottenere un'equazione risolvente di terzo grado o di grado ancora superiore: diventa allora importante avere a disposizione metodi efficienti e non eccessivamente complicati per stabilire se tale equazione ammette soluzioni reali, valutare il numero di tali soluzioni e riuscire a darne un'approssimazione accettabile per i propri scopi. D'altronde in analisi matematica uno degli aspetti salienti delle funzioni polinomiali è che esse sono definite in tutto l'insieme dei numeri reali e che sono ovunque continue. E' intuitivo dal punto di vista grafico comprendere che, se in corrispondenza dei valori distinti x_1 e x_2 della variabile indipendente x, una funzione polinomiale f assume valori di segno diverso, allora nell'intervallo di estremi i suddetti punti x_1 e x_2, f ammette almeno uno zero, ovvero esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$. Questa proprietà è espressa a livello teorico dal teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue: *se una funzione $y = f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato di estremi* *a e b e se f (a) e f (b) sono valori di segno opposto, allora esiste almeno un valore c interno all'intervallo (a , b) per il quale f (c) = 0*. Questo teorema permette allora di individuare opportuni intervalli all'interno dei quali ricercare gli eventuali zeri di una funzione. Uno strumento di cui ci si può servire per tale ricerca è il metodo grafico, che evita il ricorso alle formule esplicite che forniscono le soluzioni delle equazioni polinomiali di terzo e quarto grado, poco pratiche da utilizzare, benché storicamente molto significative: ricordiamo che, generalmente, non esistono neppure formule esplicite per una generica equazione polinomiale di grado superiore al quarto.

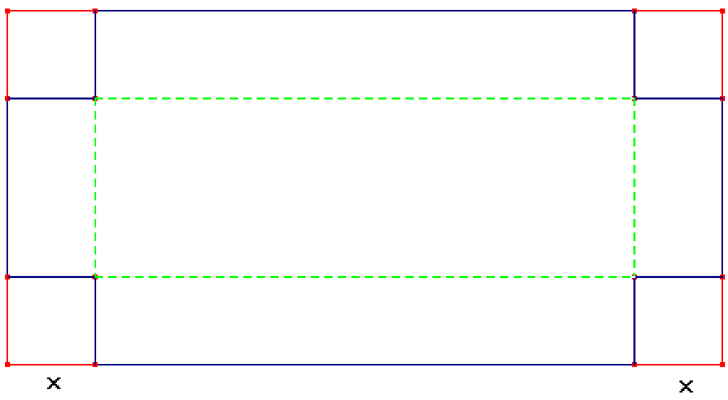
Descrizione dell'attività

Prima fase

La prima fase dell'attività consiste nel proporre agli studenti un semplice problema che può essere formalizzato proprio con un'equazione di terzo grado.

Problema: Considera un foglio di cartoncino rettangolare i cui lati hanno una lunghezza di 8 cm e di 4 cm, rispettivamente. Stabilisci come ritagliare in corrispondenza di ciascuno dei quattro angoli del foglio un quadrato, in modo da ottenere, piegando le parti laterali del cartoncino così realizzate, una scatola di volume 10 cm^3.

Partendo dalla rappresentazione del foglio rettangolare, dal quale si ritagliano quattro quadrati laterali di lato *x*, in primo luogo si deve definire l'insieme di variabilità dell'incognita *x* ($0 \le x \le 2$) affinché il problema abbia senso, stabilendo una limitazione che accompagna l'intero processo di risoluzione; si verifica quindi che il volume (in cm^3) della scatola che si può costruire secondo le istruzioni assegnate è espresso dalla formula $x(8-2x)(4-2x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$. Si giunge così all'equazione che risolve il problema: $4x^3 - 24x^2 + 32x = 10$, riconducibile a $2x^3 - 12x^2 + 16x - 5 = 0$.



Dal cartoncino si ritagliano alle estremità i quattro quadrati uguali in modo da ottenere una figura con 12 lati che, piegata lungo le quattro linee tratteggiate, genera una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo.

Figura 1

Seconda fase

Si propone a questo punto agli studenti di verificare che, per l'equazione ricavata, non si trovano soluzioni elementari, né intere, né frazionarie, secondo quanto previsto dall'algebra elementare (le eventuali soluzioni intere o frazionarie sarebbero infatti ± 1, ± 5, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$).

Una possibile strategia da suggerire agli studenti per affrontare il problema è la trasformazione dell'equazione in un sistema di due equazioni interpretabili graficamente nel piano cartesiano, servendosi della variabile ausiliaria y.

Si può scrivere: $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 12x^2 - 16x + 5 \end{cases}$

Rappresentando nel piano cartesiano i grafici delle due funzioni ottenute, immediatamente si percepisce il numero dei punti di intersezione dei due grafici, che corrispondono al numero delle soluzioni del sistema e dell'equazione iniziale ad esso associata.

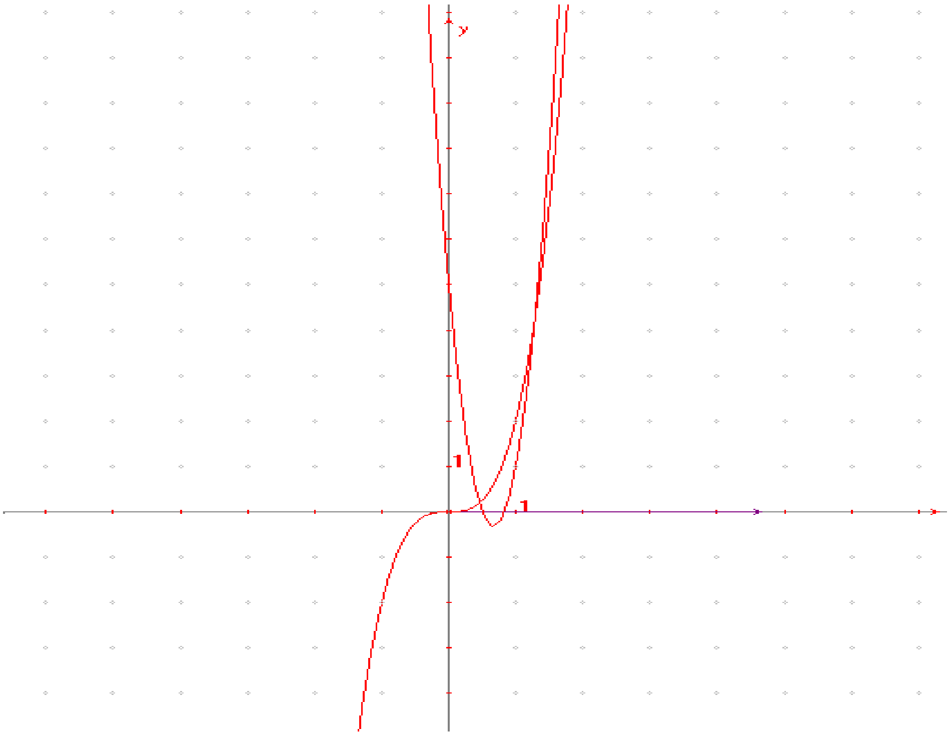


Figura 2

Si vede subito che le ascisse dei due punti di intersezione dei due grafici che si trovano nell'intervallo selezionato [0 ; 2] sono costituite da un valore compreso tra 0,4 e 0,5 ed un valore compreso tra 1,2 e 1,3. Il punto chiave, dal punto di vista teorico, è verificare che in tali intervalli la differenza tra i valori delle due funzioni considerate cambia segno. In effetti denominando y_1 l'ordinata della prima funzione (cubica) e y_2 l'ordinata della seconda funzione (quadratica), il segno di $y_1 - y_2$ corrisponde proprio al segno della funzione di partenza. Servendosi di un'opportuna tabulazione dei valori delle due funzioni con un software tipo foglio elettronico, gli studenti possono agevolmente trovare le soluzioni con l'approssimazione desiderata, svolgendo in tal modo un esercizio di codifica di istruzioni finalizzate alla verifica di una specifica proprietà numerica. Si può ricavare ad esempio, in prima approssimazione, la seguente tabella relativa alla ricerca della prima radice, adottando un passo di discretizzazione pari a 0,1 durante la tabulazione dei dati. Sono riportati solo alcuni dei valori delle tabulazioni effettuate.

x	y1	y2	y1 –y2	dx
				0,1
0,1	0,002	3,52	-3,518	
0,3	0,054	1,28	-1,226	
0,4	0,128	0,52	-0,392	
0,5	0,25	0	0,25	
0,6	0,432	-0,28	0,712	
0,7	0,686	-0,32	1,006	

Tabella 1

La tabella conferma l'esistenza di una soluzione tra 0,4 e 0,5. Raffinando l'indagine, portando il passo a 0,01, si ottiene immediatamente:

x	y1	y2	y1-y2	dx
0,4				0,01
0,41	0,137842	0,4572	-0,319358	
0,44	0,170368	0,2832	-0,112832	
0,45	0,18225	0,23	-0,04775	
0,46	0,194672	0,1792	0,01547	
0,47	0,207646	0,1308	0,07685	
0,48	0,221184	0,0848	0,13638	

Tabella 2

Miglioriamo dunque il risultato con una soluzione compresa tra 0,45 e 0,46. Ripetiamo tale operazione per la seconda radice:

x	y1	y2	y1-y2	dx
1,2				0,01
1,21	3,543122	3,2092	0,33392	
1,24	3,813248	3,6112	0,20205	
1,27	4,096766	4,0348	0,06197	
1,28	4,194304	4,1808	0,0135	
1,29	4,293378	4,3292	-0,035822	
1,3	4,394	4,48	-0,086	
1,31	4,496182	4,6332	-0,137018	

Tabella 3

Analizzando le due tabelle di valori si può subito dedurre che le soluzioni cercate sono espresse da valori compresi rispettivamente negli intervalli $(0{,}45\,;0{,}46)$ e $(1{,}28\,;1{,}29)$. E' evidente che modificando il punto iniziale della tabulazione ed il relativo passo si possono valutare le soluzioni dell'equazione iniziale con una precisione crescente.

Possibili sviluppi

L'attività offre a questo punto numerosi altri spunti didattici, che sono comunque adattabili senza eccessiva difficoltà alla situazione scolastica nella quale si opera.

In effetti, un altro interessante aspetto di calcolo, collegato per di più con l'effettivo percorso che storicamente è stato compiuto dagli algebristi del cinquecento (Cardano, Dal Ferro, Tartaglia) per giungere alle formule esatte per la risoluzione di una generica equazione polinomiale di terzo grado completa, consiste nell'osservare che una tale equazione può essere riportata mediante una sostituzione lineare opportuna ad un'equazione incompleta del tipo $ax^3 + bx + c = 0$, mancante cioè del termine di secondo grado. Si osserva che trovare quale sostituzione lineare consente di passare ad un'equazione di terzo grado ridotta, partendo da un'equazione completa, è già di per sé un esercizio significativo, dal momento che richiede da parte degli studenti una gestione non pedissequa del calcolo letterale, utilizzato in questo caso per ottenere uno scopo ben preciso, ma può anche diventare un semplice esercizio di verifica nel caso la sostituzione venga direttamente suggerita dall'insegnante.

Data allora un'equazione polinomiale generica di terzo grado, della forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, mediante la sostituzione lineare $X = x + \frac{b}{3a}$, la si può ricondurre alla forma incompleta $aX^3 + CX + D = 0$. Nel nostro caso si ha: $X = x - 2$, il che conduce all'equazione ridotta $2x^3 - 8x - 5 = 0$. Ovviamente, operando la sostituzione che porta alla nuova variabile *X*, cambia l'intervallo di ammissibilità per i valori di *X*, che diventa nel caso considerato l'intervallo (-2 ; 0). Con questa nuova versione dell'equazione è possibile servirsi dello stesso grafico della funzione di terzo grado già utilizzata, insieme al grafico di una linea retta, ottenendo il sistema $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 8x + 5 \end{cases}$.

La corrispondente rappresentazione grafica, ottenuta con un software geometrico, è la seguente:

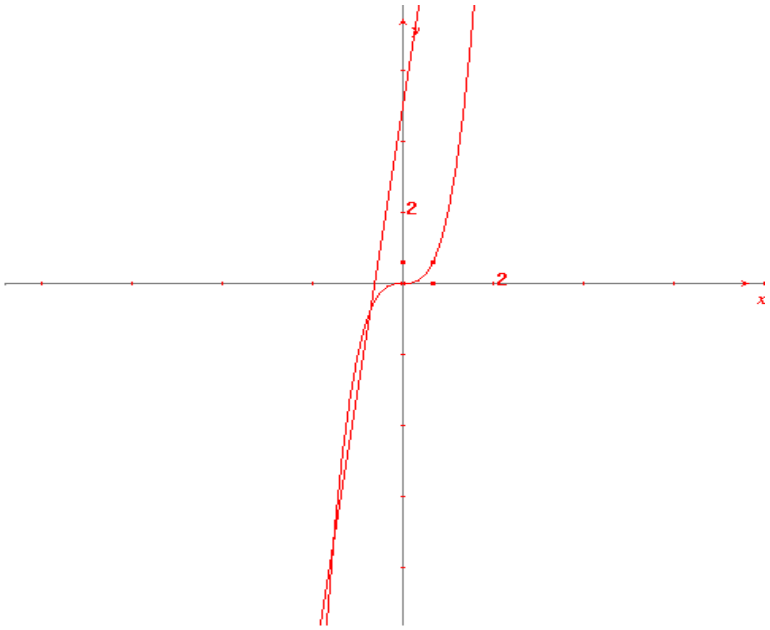


Figura 3

La nuova tabulazione, ottenuta con un software tipo foglio elettronico, è:

x	*y1*	*y2*	*y1-y2*	*dx*
-2				0,1
-1,9	-13,718	-10,2	-3,518	
-1,6	-8,192	-7,8	-0,392	
-1,5	-6,75	-7	0,25	
-1,4	-5,488	-6,2	0,712	
-1,2	-3,456	-4,6	1,144	
-1	-2	-3	1	
-0,8	-1,024	-1,4	0,376	
-0,7	-0,686	-0,6	-0,086	
-0,6	-0,432	0,2	-0,632	
-0,5	-0,25	1	-1,25	
-0,1	-0,002	4,2	-4,202	

Tabella 4

(essendo y_1 la funzione di terzo grado e y_2 la funzione lineare) e mostra che le soluzioni ammissibili per il problema sono negli intervalli (-1,6 ; -1,5) e (-0,8 ; -0,7) rispettivamente.
Migliorando l'approssimazione si tabulano, per la prima soluzione, i seguenti valori:

x	*y1*	*y2*	*y1-y2*	*dx*
-1,6				0,01
-1,59	-8,03936	-7,72	-0,319358	
-1,56	-7,59283	-7,48	-0,112832	
-1,55	-7,44775	-7,4	-0,04775	
-1,54	-7,30453	-7,32	0,01547	
-1,53	-7,16315	-7,24	0,07685	
-1,52	-7,02362	-7,16	0,13638	

Tabella 5

Dunque un valore, per la soluzione, cade tra –1,55 e –1,54.
Per la seconda soluzione si tabulano, invece, i seguenti valori:

x	*y1*	*y2*	*y1-y2*	*dx*
-0,8				0,01
-0,79	-0,98608	-1,32	-0,33392	
-0,76	-0,87795	-1,08	-0,20205	
-0,73	-0,77803	-0,84	-0,06197	
-0,72	-0,7465	-0,76	-0,0135	
-0,71	-0,71582	-0,68	0,035822	
-0,7	-0,686	-0,6	0,086	
-0,69	-0,65702	-0,52	0,137018	

Tabella 6

Questi insiemi di dati riportano come soluzioni per *x* due valori compresi rispettivamente tra –1,55 e –1,54 e tra –0,72 e –0,71, i quali, riferiti all'incognita iniziale, sono traslati nei due intervalli $(0{,}45\ ;\ 0{,}46))$ e $(1{,}28\ ;\ 1{,}29))$, già individuati. Ancora una volta è possibile continuare a migliorare l'approssimazione della soluzione, tabulando i valori di *y* servendosi di incrementi minori per la variabile indipendente *x*.

Tornando alla prima rappresentazione grafica, la visualizzazione grafica delle soluzioni del problema con una cubica ed una parabola può servire per valutare qualitativamente e con un certo errore di approssimazione, senza però l'ausilio delle derivate, il valore massimo del volume della scatola che si vuole costruire.
Infatti l'idea consiste nel servirsi di un software che tracci i grafici di funzioni, come ad esempio un software di geometria dinamica, per rappresentare il grafico della famiglia di funzioni $y = 12x^2 - 16x + \frac{V}{2}$, ottenuta dopo aver posto uguale a *V* il volume della scatola ed aver ottenuto il sistema parametrico $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 12x^2 - 16x + \frac{V}{2} \end{cases}$, con *V* ovviamente parametro positivo. La famiglia di funzioni di secondo grado che si ricava permette di rivedere in azione il concetto di traslazione come trasformazione geometrica elementare, applicata al grafico di una parabola. La limitazione sulla variabile *x* ($0 \le x \le 2$) individua una striscia nel piano cartesiano *xOy* in cui ricercare un eventuale punto di intersezione tra i due grafici delle funzioni che compongono il sistema. Nel caso della presenza del parametro *V*, un software di geometria dinamica offre la possibilità di visualizzare il grafico della parabola corrispondente ad un valore generico del parametro. L'attività che si propone consiste proprio in un'esplorazione diretta della configurazione dinamica che il software realizza: si può così osservare l'esistenza di un valore massimo del parametro $\frac{V}{2}$ per il quale si ha effettivamente un'intersezione tra i due grafici con ascissa racchiusa nell'intervallo previsto, di estremi 0 e 2. Si tratta di un'esplorazione a livello qualitativo che può al massimo fornire un valore approssimato del valore massimo del volume della scatola: l'aspetto saliente è che si coglie l'esistenza di un valore massimo per il parametro *V*, in corrispondenza di uno specifico valore dell'incognita *x*.

Elementi di prove di verifica

1. I due punti A e B sono le intersezioni di ordinata positiva della parabola $y = -x^2 + 4x$ con una retta parallela all'asse delle ascisse, mentre C e D sono le loro proiezioni sull'asse delle ascisse. Tra i rettangoli ABCD così individuati, si chiede di calcolare il perimetro di quello di area 6.

2. Per ricercare con un metodo iterativo le soluzioni dell'equazione $2\log(x+2) - x = 0$, si vogliono preliminarmente individuare gli intervalli della *x* in cui tale ricerca è significativa. Di quali intervalli si tratta?

3. Si verifichi che $x^3 + 3x - 12 = 0$ ammette una sola radice α compresa tra 1 e 2. Si usi poi un'approssimazione per determinare un numero *k*, espresso alla prima cifra decimale, tale che $k < a < k + 0{,}1$.

4. Si determini, con un metodo grafico, un valore approssimato per la radice di $f(x) = x + e^x$.

Probabilità nel continuo: bersagli e paradossi

Percorso: **Misurare la probabilità**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Calcolare perimetri e aree di poligoni. Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado. Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano (in particolare, semirette, segmenti, semipiani). Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato della probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale. Semplici distribuzioni di probabilità. Lunghezze e aree dei poligoni. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero π. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali.	Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare	Italiano Filosofia

Contesto

Probabilità nel continuo.

Il contesto dell'attività è quello della misura della probabilità con riferimento all'approccio classico e a quello frequentista. Motivano la classe alcuni paradossi noti.

Descrizione attività

<u>Prima fase</u>

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:

Consideriamo un bersaglio circolare. Qual è la probabilità di colpire a caso un punto "più vicino al centro" che alla circonferenza?

Il problema non è difficile; non è possibile, però, enumerare i casi possibili e i casi favorevoli perché ci troviamo in uno spazio di eventi che non è finito. Un esempio del genere permette di consolidare le conoscenze relative allo spazio degli eventi che sono state trattate nel primo biennio.
Per il modo in cui il problema è stato enunciato, il colpo va a segno se la sua distanza dal centro è minore della metà del raggio. Considerato ciò, per risolvere il problema occorre tenere presente che i casi possibili possono essere visti come i punti interni alla circonferenza che rappresenta il bersaglio e i casi favorevoli come i punti interni alla circonferenza, concentrica alla precedente, di raggio metà del raggio del bersaglio dato.

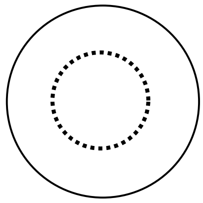


Figura 1

Per calcolare la probabilità è allora sufficiente fare il rapporto tra le aree dei due cerchi:

$$p = \frac{\pi \frac{r^2}{4}}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4}$$

Si può proporre agli allievi di simulare la situazione con il foglio elettronico.
Per l'implementazione delle formule sarà necessario rivedere alcune conoscenze di geometria analitica, in particolare l'equazione di una circonferenza.
Nella predisposizione del foglio Excel è stata scelta la seguente costruzione:
Il cerchio che rappresenta il bersaglio ha raggio uno e centro nel punto di coordinate (1;1). Le coordinate di un punto a caso P(x;y) sono state scelte tramite la funzione Casuale().
L'insegnante invita gli studenti a riflettere sui diversi modi di misurare la probabilità e sui possibili confronti fra di essi. Nell'attività prospettata il fare riferimento al rapporto fra area della "superficie favorevole" e l'area della "superficie ugualmente possibile" richiama immediatamente la definizione classica di misura di probabilità. Con l'attività di simulazione il rapporto tra il numero delle volte in cui l'evento si è verificato ed il numero degli esperimenti fatti dà una misura frequentista di probabilità.
Si possono presentare altri problemi in cui la probabilità si ottiene come rapporto di aree (basterà per esempio considerare bersagli aventi forma di una qualunque figura piana); questi offrono l'opportunità di consolidare anche conoscenze relative al nucleo Spazio e figure. (cfr. Matematica 2003, Argomentare, congetturare, dimostrare, Grissini e triangoli).

<u>Seconda fase</u>
Un altro problema che offre interessanti sviluppi è il seguente:
Qual è la probabilità che un punto scelto a caso nel quadrato (Figura 2) sia interno alla circonferenza inscritta?

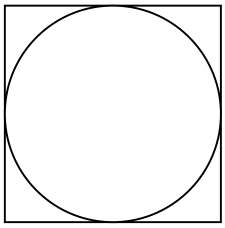


Figura 2

Anche in questo caso la probabilità è misurata dal rapporto delle aree. Se il quadrato ha lato *a*, il cerchio inscritto ad esso ha raggio $\frac{a}{2}$. Si ha dunque:

$$p = \frac{\pi \frac{a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

Che numero è pi greco?
Può essere questa l'opportunità per consolidare le conoscenze relative ai numeri irrazionali.
Si possono, poi, invitare gli studenti alla seguente riflessione: se, grazie alla simulazione, si riesce a realizzare un esperimento e quindi a calcolare la frequenza relativa, f, di successi si potrà utilizzarla per avere una stima del valore di π.
Infatti dalla relazione precedente segue che $\pi = 4p$; quindi quanto più la frequenza che si ottiene sperimentalmente si avvicina alla probabilità, tanto più si potrà ottenere una approssimazione attendibile per π: basterà moltiplicare per 4 il valore della frequenza:

$$\pi \cong 4f.$$

Si invitano gli studenti a simulare l'esperimento con il foglio elettronico.
Per l'implementazione si può considerare il quadrato unitario posizionato con un vertice nell'origine e il vertice opposto nel punto di coordinate (1;1); la circonferenza inscritta avrà il centro nel punto $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$. I punti interni al quadrato avranno coordinate variabili tra 0 e 1, mentre i punti interni alla circonferenza dovranno soddisfare la disequazione:

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{4} < 0$$

La funzione Casuale() del foglio elettronico che fornisce un numero tra 0 e 1 darà le coordinate dei punti del quadrato.
Il grafico di Figura 3 è stato ottenuto con 3000 prove. Esso mostra che, anche se gli scostamenti dal valore di π rappresentato dalla linea orizzontale in nero vanno diminuendo all'aumentare del numero delle prove, si tratta ancora di un'approssimazione poco attendibile. Infatti, come indica l'etichetta riportata sul grafico, se si cerca la frequenza relativa a 3000 prove si ottiene uno scostamento da π di -0,009593 e quindi un valore di π "esatto" solo alla prima cifra decimale ($\cong$ 3,132000).

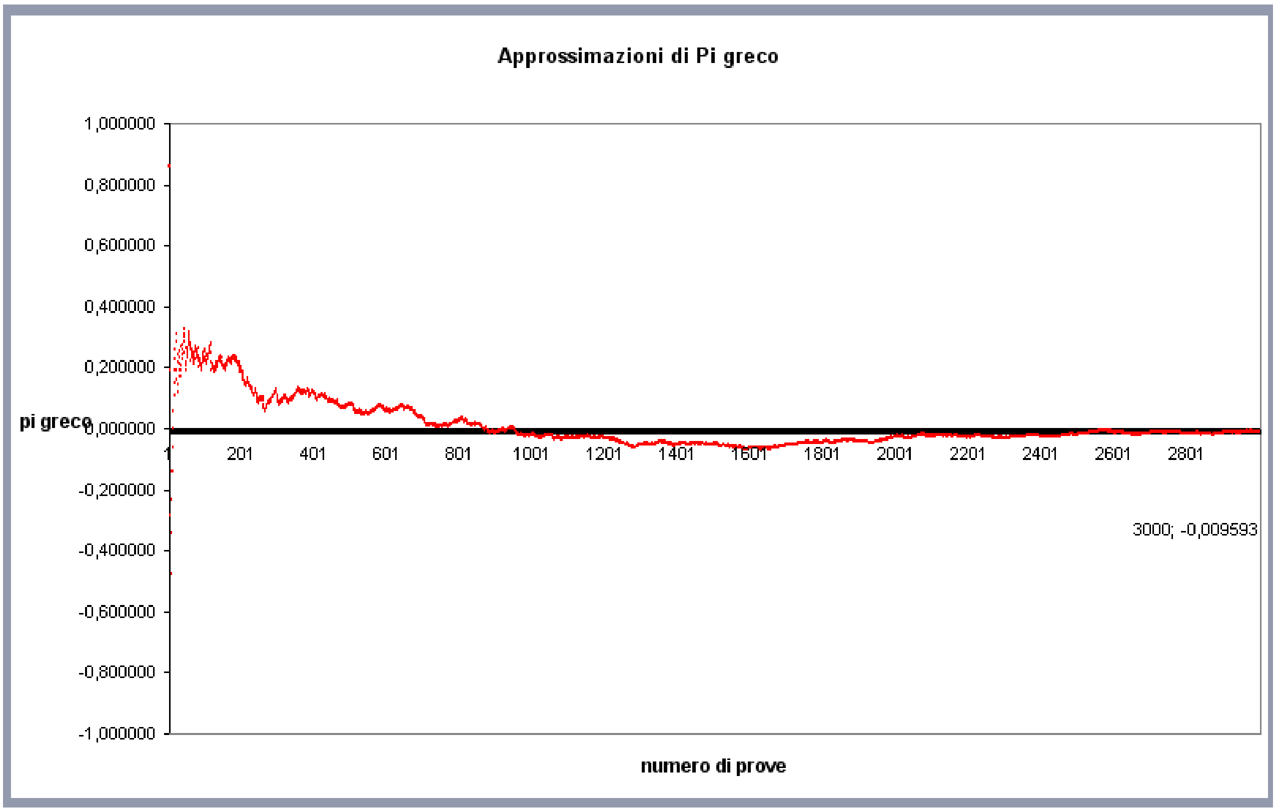


Figura 3

Il docente osserverà che, generalmente, quanto più è alto il numero delle prove, tanto più è probabile che il valore delle frequenze relative di un evento sia vicino alla probabilità dell'evento stesso (ovvero la *legge dei grandi numeri*).
E questo fatto accade naturalmente nel processo che abbiamo visto di approssimazione di π ? (cfr. Matematica 2003, Misurare, Un numero misterioso: π).

<u>Terza fase</u>
Si possono portare altri esempi in cui si tratta di spazi di eventi rappresentabili nel continuo.
Si propone il seguente problema:
Consideriamo un segmento AB e prendiamo un punto a caso su di esso. Qual è la probabilità che questo punto sia il punto medio del segmento?
Il docente inviterà gli studenti a discutere su cosa significhi prendere un punto "a caso".
Un segmento contiene un'infinità di punti. Basta osservare che tra due punti di un segmento ce n'è sempre un terzo, se non altro il punto medio del sottosegmento definito dai due punti; questo procedimento si può ripetere all'infinito.
Il caso favorevole è uno, i casi possibili sono infiniti; quanto vale la probabilità in questo caso?
Per rispondere, si procede per gradi.
Supponiamo di dividere il segmento AB in 10 parti uguali; un punto scelto a caso su AB avrà la stessa probabilità di trovarsi in uno qualsiasi dei 10 intervalli, per esempio la probabilità di trovarsi nell'intervallo contrassegnato dall'asterisco in Figura 4 è $\frac{1}{10}$:

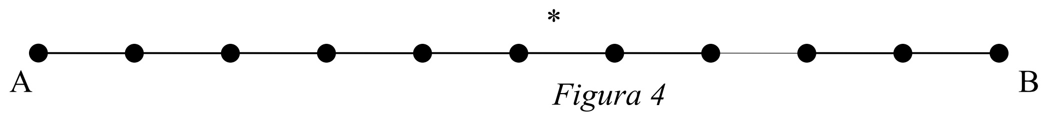


Figura 4

Se avessimo diviso il segmento AB in 100 parti la probabilità che il punto si trovi in una qualsiasi di quelle parti sarebbe stata $\frac{1}{100}$. Il procedimento si può generalizzare, per cui si può concludere che la probabilità che un punto, preso a caso su un segmento di lunghezza *L*, cada su un sottosegmento di lunghezza $l = \frac{L}{n}$ (con n uguale al numero delle parti) è:

$$p = \frac{l}{L} = \frac{1}{n}$$

L'insegnante porta gli studenti a riflettere sul fatto che dati due segmenti di lunghezza l e L, il primo contenuto nel secondo, la probabilità di scegliere un punto a caso nel primo è dato da $\frac{l}{L}$.
Tornando al problema da cui si è partiti, si cerca ora di calcolare la probabilità che il punto scelto a caso sia proprio il punto medio M. Dimostreremo come non sia possibile attribuire a tale probabilità un valore diverso da zero.
Supponiamo, infatti, per fissare le idee che il nostro segmento abbia lunghezza L = 100 (misurato ad es. in cm) e che la probabilità cercata abbia valore $h \neq 0$; nel nostro segmento AB potremmo sempre isolare un intervallo di lunghezza *h* che contenga M.
Perché un punto scelto a caso su AB sia M occorre innanzitutto che si trovi nell'intervallo di lunghezza *h*, evento che ha probabilità $\frac{h}{100}$.
M è un punto qualsiasi del segmento: la probabilità che il punto scelto sia proprio M risulta minore, pertanto, della probabilità di scegliere tutto il segmento. Si ha allora:

$$h \leq \frac{h}{100} \;;$$

relazione che è verificata solo se *h=0.*
Peraltro è intuitivamente lecito pensare che un punto sia un segmento di lunghezza zero; quindi potremo anche "giustificare" questo risultato con la definizione classica. Dunque la probabilità cercata è:

$$p = \frac{0}{L} = 0 .$$

Eppure non possiamo dire che scegliere a caso il punto medio di un segmento sia (un evento) impossibile!
La discussione sul fatto che esistano eventi possibili di probabilità nulla, porterà a riflettere su alcune situazioni concrete vicine alla realtà degli studenti: per esempio la probabilità di vincere acquistando un biglietto della lotteria è un numero molto vicino allo zero, ma ciò non vuol dire che nessuno vinca!
Questa discussione, peraltro, può aprire la strada per parlare del problema dell'infinito in Matematica e di alcuni paradossi legati al concetto di infinito, argomento che affascina sempre gli studenti e che si presta a collegamenti interdisciplinari con la Filosofia e con la Letteratura.

<u>Quarta fase</u>
Un problema di probabilità che offre un esempio di paradosso è il problema di Bertrand. Joseph Bertrand, matematico francese del 1800, ha posto il seguente problema e ne ha dato tre diverse

soluzioni, tutte ugualmente accettabili. Il paradosso consiste nel fatto che le tre soluzioni conducono a valutazioni diverse della probabilità.
La formulazione del problema è:
Presa a caso una corda in un cerchio, qual è la probabilità che sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto?
Una volta proposto il problema si invitano gli studenti a dividersi in tre gruppi e si consegna ad ogni gruppo una scheda che guida ad una delle tre strategie risolutive indicate da Bertrand.

I gruppo
Sia P un'estremità della corda, l'altra estremità (Q) è scelta a caso sulla circonferenza (v. *Figura 5*)

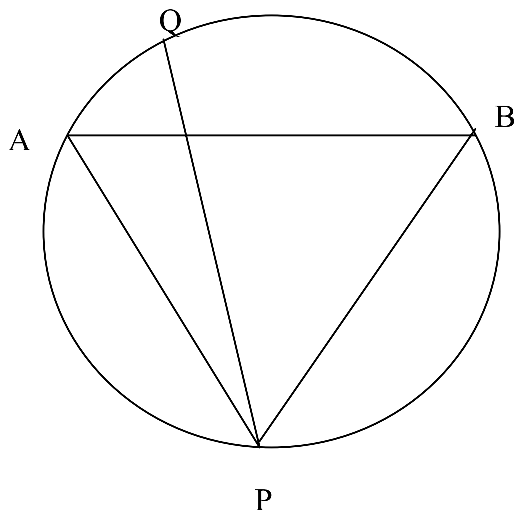


Figura 5

Il triangolo ABP è equilatero. Come sono gli archi AB, BP, PA ?
………………………………………………………………………..
Se Q è nell'arco AB quanto misura la corda?
…………………………………………………………………………
Calcolate la probabilità che una corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto.

II gruppo
Per motivi di simmetria si può scegliere arbitrariamente la direzione della corda. Scegliete quindi la direzione della corda in modo che il suo punto medio sia un punto del diametro PQ (Figura 6).

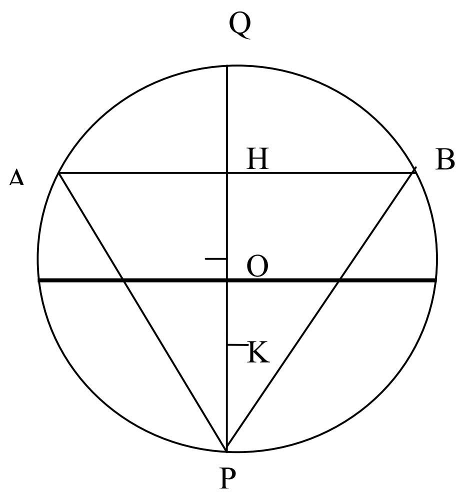


Figura 6

Il triangolo ABP è equilatero. Come sono i quattro segmenti $\overline{PK}, \overline{KO}, \overline{OH}, \overline{HQ}$?

……………………………………………………………………..

Come è la lunghezza della corda rispetto al lato del triangolo se il suo punto medio si trova nel segmento $\overline{HK}$?

………………………………………………………………………

Calcolate la probabilità che una corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto.

III gruppo

Una corda in un cerchio è completamente determinata se si conosce il suo punto medio M.
Infatti una corda è perpendicolare ………………………….

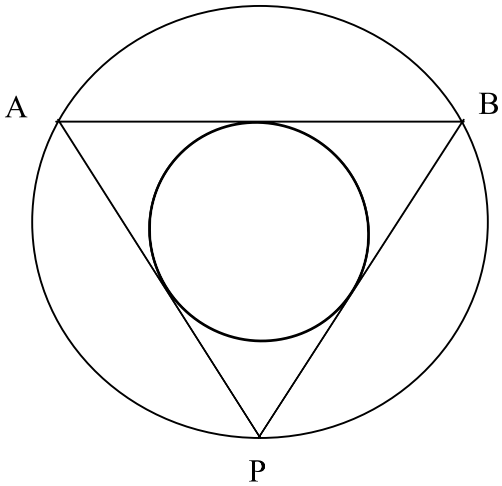


Figura 7

Considerate il cerchio inscritto nel triangolo equilatero. Qual è il raggio di questo cerchio?

……………………………………………………………………..

Come è la lunghezza della corda se il suo punto medio M è all'interno del cerchio piccolo?

………………………………………………………………………

Calcolate la probabilità che una corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto.

Quando i tre gruppi si confrontano si accorgono di essere arrivati alle seguenti conclusioni:

per il primo gruppo la probabilità cercata è $\frac{1}{3}$

per il secondo gruppo la probabilità cercata è $\frac{1}{2}$

per il terzo gruppo la probabilità cercata è $\frac{1}{4}$.

A questo punto si avvierà la discussione se esiste una soluzione "giusta" ed, eventualmente, quale delle soluzioni trovate sia quella "giusta".
Dalla discussione emergerà che le tre soluzioni si riferiscono a tre strategie diverse per la scelta *a caso* di una corda; infatti, anche se abbiamo usato sempre la dizione "a caso" ci accorgiamo che esse corrispondono a tre esperimenti diversi i quali, a loro volta, portano a tre diversi spazi degli eventi.
Ma che significa allora prendere *a caso* una corda in un cerchio?
L'enunciato del problema non è abbastanza esplicito a questo riguardo. Anzi potremmo dire che è assai carente in quanto a chiarezza.

Quante sono le corde in un cerchio? In quanti modi si possono tracciare?
Una corda in un cerchio può essere ottenuta dall'intersezione di una retta con la circonferenza e quindi dipende dal variare di due parametri. Nell'attività del primo gruppo, tenendo fisso un estremo della corda, si fa variare la direzione (è come se avessimo considerato un fascio proprio di rette); nell'attività del secondo gruppo, tenendo fissa la direzione della corda, si fa variare il suo punto medio (è come se avessimo considerato un fascio improprio di rette). E nell'attività del terzo gruppo ci troviamo di nuovo di fronte al problema dell'infinito: un'infinità di corde.
Le tre variabili che abbiamo preso in considerazione sembrano tutte egualmente plausibili per individuare la corda, ma abbiamo visto che esse danno luogo a modelli diversi a seconda della variabile alla quale si assegna la distribuzione uniforme.

Per il docente:

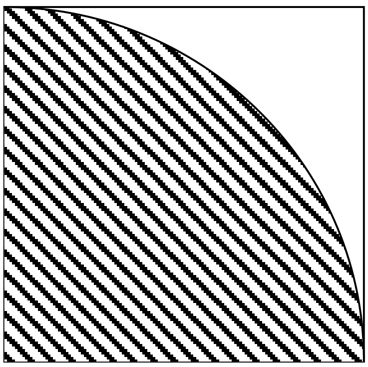
1) Si possono pensare esperimenti di tipo fisico che danno luogo a diverse modellizzazioni, anche oltre quelle individuate. Ad es. si può pensare di lanciare una moneta su un tavolo rigato e considerare la corda ottenuta dall'intersezione della moneta con una delle righe del tavolo; oppure si può attaccare un ago in un punto della circonferenza e farla oscillare fino a che non si ferma; oppure si può far rotolare un tronco (d'albero) su una circonferenza e considerare la corda dove si ferma (tangenzialmente) l'albero; oppure si può costruire una canalina sulla circonferenza e lanciare, in tempi diversi, due palline nella canalina e considerare i punti di impatto delle palline;......

2) Le tre soluzioni non sono esaustive. Sul libro di E. Parzen se ne elencano 2, una delle quali diversa dalle 3 precedenti; in un articolo di Czuber (professore a Vienna nel 1900) se ne elencano 6; infine in un articolo di A. Moro se ne dimostra l'esistenza di ....infinite.

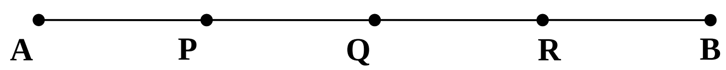
3) Infine si può osservare come il rigore e la esattezza tipica del matematico "non applicato" considera una sola di queste soluzioni "accettabili" ovvero quella che lascia invariata, per trasformazione di coordinate, la distribuzione (uniforme) di probabilità (vedi ad es. M. G. Kendall and P. Moran).

Elementi di prove di verifica

1. Qual è la probabilità, colpendo a caso un punto dentro il quadrato di lato unitario che si cada nella zona tratteggiata?



2. Un segmento *AB* è suddiviso come in figura:



La probabilità di colpire un punto del segmento *PQ*, supponendo di sapere con certezza che verrà colpito un punto appartenente ad *AB*, è:

a) $\frac{1}{4}$
b) 0
c) $\frac{1}{5}$

La probabilità di colpire il punto *Q*, supponendo di sapere con certezza che verrà colpito un punto appartenente ad *AB*, è:

d) $\frac{1}{4}$
e) 0
f) $\frac{1}{5}$

Giustifica l'eventuale discordanza fra i due casi.

3. Una moneta di diametro d è lasciata cadere su una scacchiera. Qual è la probabilità che cada all'interno di una casella di lato l, con $l > d$?

4. Un insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Se ne deduce che:
a) l'insieme è numerabile
b) l'insieme ha la potenza del continuo
c) l'insieme è finito
d) l'insieme è infinito

5. Carlo e Diana hanno fissato un appuntamento in Piazza Duomo dalle 16.00 alle 17.00. Sapendo che nessuno dei 2 è disposto ad aspettare l'altro per più di 15 minuti, qual è la probabilità che i due si incontrino effettivamente?

Griglia di correzione

1. $\frac{\pi}{4}$

2. a; e

3. $\frac{(l-d)^2}{l^2}$

4. d

5. 7/16.

Ripetenti promossi ed ottimi respinti

Percorso: **Lettura probabilistica di una distribuzione doppia**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in contesti problematici diversi. Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. Utilizzare la formula di Bayes. Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali.	Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Valori medi e misure di variabilità, definizioni e proprietà . Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale. Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. Formula di Bayes e suo significato. Semplici distribuzioni di probabilità.	Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi	Italiano Società civile

Contesto

Sociale: istruzione.

Il contesto dell'attività riguarda dati sugli studenti che sono per gli stessi di particolare interresse. Si tratta infatti dei loro giudizi di ingresso e dei loro esiti finali. Questi dati consentono di motivare gli studenti a trattare un argomento che non è semplice e agevolano la lettura e l'interpretazione dei risultati ottenuti.

Descrizione dell'attività

Con il seguente esempio si vuole consolidare il concetto di probabilità (definizione classica) partendo da una situazione reale e lavorando su dati che riguardano gli studenti delle classi prime di un certo anno scolastico e per una determinata scuola.

Per ogni studente sono state rilevate contemporaneamente le caratteristiche qualitative X = giudizio di ingresso (le cui modalità sono: ripetente, sufficiente, buono, distinto, ottimo) e Y = esito finale (con modalità: promosso, respinto).

La classificazione congiunta fornisce i dati riportati nella Tabella 1.

X Giudizio di ingresso	*Y* Esito finale		Totale
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	20	4	24
x_2 Sufficiente	32	41	73
x_3 Buono	79	5	84
x_4 Distinto	66	1	67
x_5 Ottimo	45	1	46
Totale	242	52	294

Tabella 1

L'insegnante, al fine di riprendere alcuni concetti di statistica descrittiva, chiede agli studenti il significato di alcuni numeri riportati in tabella: ad esempio il 79, l'84, il 52. I numeri richiamano i concetti di frequenza congiunta e frequenza marginale.
L'insegnante propone un quesito. Se si pensasse di scegliere uno qualsiasi fra i 294 studenti, quali situazioni potrebbero evidenziarsi? Si potrebbe verificare una situazione che chiamiamo A ={è un allievo ripetente promosso} oppure la situazione F ={è un allievo con giudizio di ingresso buono che è stato respinto}e tante altre. L'insegnante definisce l'insieme delle possibili scelte, che viene indicato con Ω, ed è costituito dall'insieme dei 294 studenti. Esso è denominato spazio fondamentale o campionario associato all'esperimento "scelta di uno studente". Le situazioni sopra indicate con A ed F rappresentano due suoi sottoinsiemi. Ciascuna situazione possibile si chiama "evento casuale" in quanto si tratta di un esito il cui verificarsi non è a priori certo.
N.B.. Alcune delle scelte si possono ripetere: ad es., 20 studenti ripetenti sono stati promossi; 5 hanno avuto giudizio di ingresso buono e sono stati respinti; ecc.

Gli eventi casuali distinti dello spazio campionario Ω sono indicati nella tabella 2

X Giudizio di ingresso	*Y* Esito finale	
	y_1 Promosso	y_2 Respinto
x_1 Ripetente	A	B
x_2 Sufficiente	C	D
x_3 Buono	E	F
x_4 Distinto	G	H
x_5 Ottimo	I	L

Tabella 2

dove i sottoinsiemi rappresentano gli eventi congiunti:

A	Ripetente e Promosso (x_1,y_1)
B	Ripetente e Respinto (x_1,y_2)
C	Sufficiente e Promosso (x_2,y_1)
D	Sufficiente e Respinto (x_2,y_2)
E	Buono e Promosso (x_3,y_1)
F	Buono e Respinto (x_3,y_2)
G	Distinto e Promosso (x_4,y_1)
H	Distinto e Respinto (x_4,y_2)
I	Ottimo e Promosso (x_5,y_1)
L	Ottimo e Respinto (x_5,y_2)

L'insegnante propone i seguenti quesiti.
Qual è la probabilità di scegliere a caso uno studente promosso? Qual è la probabilità di scegliere a caso uno studente con giudizio Distinto che è stato Respinto? Fra gli studenti con giudizio Sufficiente qual è la probabilità di scegliere a caso un Promosso? Se lo studente è stato Promosso, qual è la probabilità che avesse un giudizio di ingresso Buono?
L'insegnante richiama la definizione classica di probabilità del verificarsi di un evento T:

$$\mathrm{P}(T) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli\ a\ T}{numero\ di\ casi\ possibili}$$

Se nella precedente Tabella 1 calcoliamo le frequenze relative rispetto al totale generale, esse possono essere interpretate come la probabilità congiunta dei due eventi "giudizio d'ingresso" (X) ed "esito finale" (Y).
Ogni evento congiunto è dato dall'osservazione simultanea di due modalità dei caratteri osservati, ad esempio (Ripetente e Promosso)=(x_1,y_1) , (Buono e Respinto)=(x_3,y_2), ecc. e, nel caso analizzato, ci sono (5x2) eventi distinti.

X Giudizio di ingresso	Y Esito finale		$p_1(x_i)$
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	0,068	0,014	0,082
x_2 Sufficiente	0,109	0,139	0,248
x_3 Buono	0,269	0,017	0,286
x_4 Distinto	0,224	0,003	0,228
x_5 Ottimo	0,153	0,003	0,156
$p_2(y_j)$	0,823	0,177	1,000

Tabella 3

I due eventi congiunti considerati precedentemente: (Ripetente e Promosso) = (x_1,y_1) e (Buono e Respinto) = (x_3,y_2), che nello spazio Ω sono indicati con A ed F, hanno rispettivamente probabilità 0,068 e 0,017 di verificarsi. Infatti, A rappresenta l'intersezione fra i due eventi: Ripetente e Promosso; F rappresenta l'intersezione fra i due eventi: Buono e Respinto.
L'insegnante chiede: qual è la probabilità di trovare a caso un alunno Promosso? Qual è la probabilità di scegliere a caso uno studente con giudizio Distinto?
Le risposte a queste due domande si trovano rispettivamente nell'ultima colonna e nell'ultima riga della Tabella 3. Queste ultime contengono, infatti, le probabilità marginali, indicate rispettivamente con $p_1(x_i)$ e $p_2(y_j)$, che si possono intendere anche come somma di riga o di colonna delle probabilità congiunte.
Indicando con x_i la generica modalità del carattere X = "giudizio di ingresso" e con y_j quella del carattere Y = "esito finale", che in questo contesto definiscono degli eventi, le due probabilità precedenti possono intendersi come:

$p_1(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$ probabilità di trovare, rispettivamente, un x_1 = Ripetente, x_2 = Sufficiente, x_3 = Buono, x_4 = Distinto, x_5 = Ottimo.

$p_2(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$ probabilità di trovare, rispettivamente, un y_1 = Promosso, un y_2 = Respinto.

L'insegnante pone un'altra domanda: scelto a caso uno studente y_1=Promosso, qual è la probabilità che egli abbia un giudizio x_2=Sufficiente nella scuola media?
A questa domanda si risponde utilizzando la seguente la Tabella 4 che riporta le frequenze relative rispetto ai totali di colonna.

X Giudizio di ingresso	Y Esito finale		$p_1(x_i)$
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	0,083	0,077	0,082
x_2 Sufficiente	0,132	0,788	0,248
x_3 Buono	0,326	0,096	0,286
x_4 Distinto	0,273	0,019	0,228
x_5 Ottimo	0,186	0,019	0,156
Totale $p_2(y_j)$	1,000	1,000	1,000

Tabella 4

L'insegnante guida alla ricerca del valore 0,132 come di quello che risponde alla domanda posta.
I valori della Tabella 4 potevano anche essere calcolati a partire dalla Tabella 3 nel modo seguente:
$p(x_2 / y_1) = \dfrac{p(x_2, y_1)}{p_2(y_1)}$ dove $p_2(y_1)$ è la probabilità di scegliere a caso uno studente Promosso calcolato con la formula: $p_2(y_1) = \sum_i p(x_i, y_1)$. L'insegnante fa notare che il numeratore è un addendo della somma a denominatore.
La scrittura $p(x/y)$, che si legge probabilità di x condizionata a (oppure: dato) y, è denominata probabilità condizionata.
E se la domanda fosse: scelto a caso uno studente con giudizio x_2 = Sufficiente qual è la probabilità che sia stato y_1 = Promosso?
A questa domanda risponde la seguente Tabella 5 che riporta le frequenze relative rispetto ai totali di riga.

X Giudizio di ingresso	Y Esito finale		Totale
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	$p_1(x_i)$
x_1 Ripetente	0,833	0,167	1,000
x_2 Sufficiente	0,438	0,562	1,000
x_3 Buono	0,940	0,060	1,000
x_4 Distinto	0,985	0,015	1,000
x_5 Ottimo	0,978	0,022	1,000
$p_2(y_j)$	0,823	0,177	1,000

Tabella 5

Il valore 0,438 è la risposta alla domanda.
I risultati della Tabella 5 potevano anche essere calcolati a partire dalla Tabella 3 nel modo seguente:

$p(y_1 / x_2) = \dfrac{p(x_2, y_1)}{p_1(x_2)}$ dove $p_1(x_2)$ è la probabilità di scegliere a caso uno studente respinto.

L'insegnante fa riflettere su alcuni importanti concetti emersi dai "calcoli" precedenti.

Da un punto di vista algebrico le due probabilità condizionate sono determinate con un procedimento analogo. Il significato probabilistico è però sostanzialmente diverso se si pensa al significato degli eventi presi in considerazione.
I giudizi di ingresso sono infatti degli eventi iniziali che possono essere interpretabili come "cause"; gli esiti, invece, sono degli eventi che si manifestano successivamente ai primi e ne individuano un possibile "effetto"; il manifestarsi di questi ultimi può essere collegato ai primi.
Quando si parla di eventi condizionati ad esempio y_1/x_2 (studente Promosso che aveva avuto giudizio di ingresso Sufficiente), l'informazione dell'evento condizionante, nel nostro caso Sufficiente come giudizio di ingresso, modifica la realizzazione dell'evento "Allievo Promosso". E' come avere un nuovo esperimento il cui spazio fondamentale è costituito dai soli studenti che hanno avuto giudizio Sufficiente in ingresso e in esso si considera l'evento studente Promosso di cui si vuole calcolare la probabilità. Secondo la definizione classica, la probabilità risulta pari a:

$$P(\textit{Promosso / Sufficiente}) = \frac{\textit{numero di studenti promossi presenti tra i sufficienti}}{\textit{numero di studenti con giudizio di ingresso sufficiente}}$$

L'insegnante chiede alla classe di rileggere i dati della Tabella 4 secondo questa nuova interpretazione e guida la classe a comprendere che i valori riportati nella Tabella 4, $p(x/y)$ danno la probabilità di risalire alla causa noto l'effetto. Che cosa si può dire della Tabella 5? Essa riporta i valori di $p(y/x)$ che si riferiscono al succedersi logico di due eventi: ad esempio la probabilità che uno studente con giudizio di ingresso Ottimo sia Promosso (effetto nota la causa).
L'esperimento sopra riportato può essere simulato come l'estrazione da un'urna composta da 294 palline tutte dello stesso colore, ciascuna contenente un bigliettino con l'esito finale e il giudizio di ingresso di un allievo secondo le specifiche della Tabella 1.
Supponendo di estrarre una pallina:

a) qual è la probabilità di estrarre un Promosso?
b) qual è la probabilità di estrarre un Promosso con giudizio di ingresso Buono?
c) qual è la probabilità di estrarre uno studente con giudizio di ingresso Buono?
d) sapendo che si è estratto un Promosso, qual è la probabilità che sia Ripetente?
e) qual è la probabilità di avere un Promosso, sapendo che si è estratto uno studente con giudizio di ingresso Ottimo?

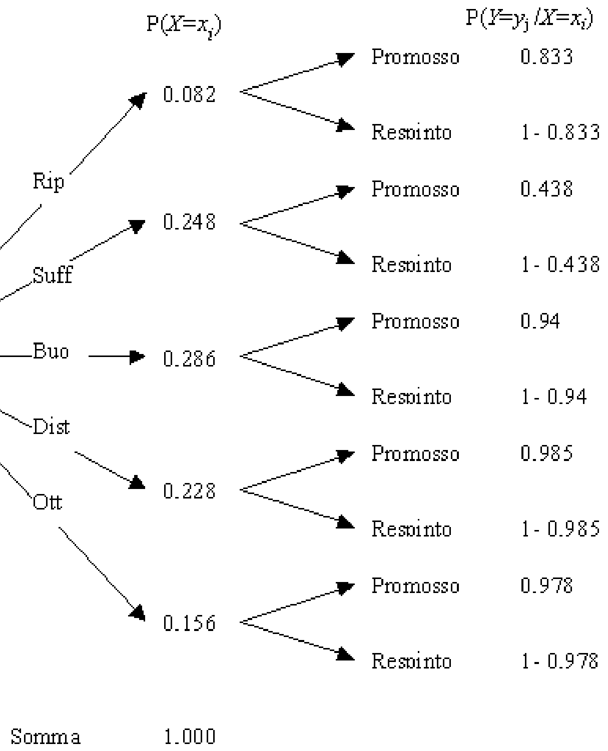


Figura 1

Ad alcune delle richieste è facile rispondere come alla c) o alla e); per le altre non è immediata la risposta. Essa può venire agevolata dalla rappresentazione grafica dell'esperimento attraverso un diagramma ad albero che mostra la sequenza logica del manifestarsi degli eventi che in esso si possono realizzare. E' formato da rami e nodi sui quali si inseriscono le probabilità dei rispettivi eventi.

Rispetto alla Figura 1, l'insegnante chiede agli studenti di recuperare, in questa nuova forma di scrittura, gli eventi semplici la cui probabilità è riportata nella colonna dei totali della Tabella 3 e gli eventi condizionati la cui probabilità è riportata nella seconda e terza colonna della Tabella 5.

Il percorso che dalla radice va al primo nodo rappresenta un evento semplice; dal nodo parte un ramo che rappresenta invece un evento condizionato. Il percorso completo individua un evento congiunto.

La probabilità di cui al punto b) ossia, la probabilità dell'evento congiunto Promosso e Buono, è il percorso lungo i rami "Buono e Promosso", ovvero lungo il ramo "Promosso" che segue il ramo "Buono". Essa è calcolabile come prodotto delle probabilità che si incontrano lungo il percorso. Sicché P(Buono∩Promosso) = P(Buono) · P(Promosso/Buono) e vale 0,286 · 0,94 = 0,269.

Le risposte alle altre domande si possono sempre ottenere con l'aiuto del diagramma ad albero applicando procedimenti via via più articolati.

Per rispondere al punto a), ad esempio, si deve seguire il percorso che dall'origine porta alla voce Promosso: si possono percorrere 5 rami e ciascuno evidenzia un evento complesso: (Ripetente∩Promosso)U(Sufficiente∩Promosso) ∪ (Buono∩Promosso) ∪ (Distinto∩Promosso) ∪ (Ottimo∩ Promosso).

Si noti che i 5 rami rappresentano 5 eventi incompatibili, nel senso che arrivare all'evento "Promosso" percorrendo un ramo esclude che se ne sia percorso un altro. Per ottenere la probabilità cercata, si ricorre quindi alla regola delle probabilità totali: "la probabilità del verificarsi di uno o l'altro di più eventi incompatibili si ottiene come somma delle probabilità dei singoli eventi".

Quindi la probabilità cercata è data da:

P(Promosso) = (Ripetente∩Promosso) + (Sufficiente∩Promosso) + (Buono∩Promosso) +
+ (Distinto∩Promosso) + (Ottimo∩ Promosso) =
= P(Ripetente) · P(Promosso/Ripetente) + P(Sufficiente) · P(Promosso/Sufficiente) + P(Buono) · P(Promosso/Buono) + P(Distinto) · P(Promosso/Distinto) + P(Ottimo) · P(Promosso/Ottimo) =
= 0,082*0,833+0,248*0,438+0,286*0,94+0,228*0,985+0,156*0,987 = 0,823.
Essa si può vedere anche come media aritmetica delle probabilità condizionate con pesi dati dalle probabilità degli eventi condizionanti.
L'insegnante conduce gli studenti ad interpretare il risultato ottenuto. Quale fra i giudizi di ingresso porta ad una maggior probabilità di promozione?

Per la risposta alla domanda d) il percorso è più complesso; si semplifica scrivendo la formula della probabilità condizionata di un evento e ricercando, con l'aiuto del diagramma, le probabilità richieste.

$$\mathrm{P}(\mathit{Ripetente/Promosso}) = \frac{\mathrm{P}(\mathit{Ripetente, Promosso})}{\mathrm{P}(\mathit{Promosso})} =$$

$$= \frac{0{,}082 \cdot 0{,}833}{0.082 \cdot 0.833 + 0.248 \cdot 0.438 + 0.286 \cdot 0.94 + 0.228 \cdot 0.985 + 0{,}156 \cdot 0.987} = 0{,}083.$$

Il numeratore è la probabilità dell'evento congiunto (Ripetente∩Promosso) e il denominatore è la probabilità dell'evento Promosso esaminata in risposta alla domanda a).
La probabilità P(*Ripetente/Promosso*) è detta probabilità a posteriori e si calcola applicando la formula di Bayes (vedi ad es. E. Parzen) che valuta la probabilità della causa noto l'effetto.
L'insegnante porta ad analizzare i dati dei giudizi iniziali noti gli esiti finali. A parità di esito finale "Promosso", qual è il giudizio iniziale che ha la probabilità più elevata di esserne "la causa"?

Elementi di prove di verifica

Considerazioni su un test di ingresso.
Si è presa in esame la tabella con alcuni risultati relativi ad un questionario, proposto agli studenti del corso di laurea in Economia della Cooperazione Internazionale e dello sviluppo nelle Università di Roma e Perugia. Tra le domande, nel questionario si chiedeva una autovalutazione della preparazione ricevuta nel corso degli studi preuniversitari (X) e il tipo di scuola di provenienza (Y).
La tabella seguente riporta la classificazione doppia dei 99 studenti che hanno risposto ad entrambe le domande.
La seguente tabella è presa da un articolo di. E. Lombardo. G. Schinaia.

Scuola di provenienza	Autovalutazione della propria preparazione				Totale
	Buona	Mediocre	Scarsa	Non so giudicare	
Liceo Scientifico	15	10	3	3	31
Liceo Classico	6	17	15	1	39
Altri Istituti	7	8	10	4	29
Totale	28	35	28	8	99

Tabella 6
Distribuzione di frequenza per scuola di provenienza e autovalutazione della preparazione.

1) Quante persone provengono dal Liceo Scientifico?
2) Quante persone provenienti dal Liceo Classico considerano buona la propria preparazione?
3) Quante persone considerano mediocre la propria preparazione?
4) Quante persone che considerano scarsa la propria preparazione provengono da Altri istituti?
5) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente questo provenga dal Liceo Scientifico?
6) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente questo abbia un'autovalutazione scarsa e provenga dal Liceo Classico?
7) Costruire una tabella che permetta di rispondere a domande analoghe alla 5) e alla 6) per ogni tipo di scuola e per ogni livello di autovalutazione.
8) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente proveniente dal Liceo Scientifico, questo risulti con un'autovalutazione mediocre?
9) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente con un'autovalutazione scarsa, questo risulti provenire dal Liceo Classico?
10) Costruire la tabella che fornisce le probabilità di provenire dai diversi tipi di scuola condizionatamente al livello di autovalutazione.
11) Costruire la tabella che fornisca le probabilità dei diversi livelli di autovalutazione condizionatamente a ciascun tipo di scuola.
12) Costruire il diagramma ad albero che mostra le possibili sequenze logiche del manifestarsi degli eventi "Tipo di scuola" e "Livello di autovalutazione" (secondo la sequenza indicata) nel caso di estrazione casuale di uno studente. Integrare il grafo con le probabilità di percorrenza di ciascun ramo.
13) Costruire il grafo che mostra le possibili sequenze logiche del manifestarsi degli eventi "Livello di autovalutazione" e "Tipo di scuola" (secondo la sequenza indicata) nel caso di estrazione casuale di uno studente. Integrare il grafo con le probabilità di percorrenza di ciascun ramo e commentare la successione degli eventi che nel grafo si presentano.
14) Qual è la scuola di provenienza più probabile tra chi autovaluta "buona" la propria preparazione? E tra chi la autovaluta "mediocre"?
15) In base ai dati di questa rilevazione, un docente della Facoltà di Economia, sapendo che i 52 studenti della sua classe provengono tutti dal liceo classico, quanti studenti che autovalutano la propria preparazione inferiore a buono può stimare di avere?

Come quando fuori piove

Percorso: **Leggere, analizzare e prevedere: uso di una serie storica**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi rispetto a una rilevazione pianificata e inserire i dati rilevati anche in un foglio elettronico. Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici. Rappresentare fenomeni non lineari valutando la variazione media. Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze. Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze e utilizzarli per effettuare previsioni.	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. Serie storiche e loro rappresentazione. Valori medi e misure di variabilità, definizioni e proprietà. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza tra due punti. Equazione della retta; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità. Incrementi a passo costante, pendenza media.	Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Meteorologico.

L’attività nasce dalla curiosità degli studenti sul clima del proprio paese, città, regione.

Descrizione dell’attività
La climatologia è fenomeno complesso, il cui studio fa riferimento a diversi aspetti: temperatura, precipitazioni e fenomeni vari, umidità e pressione atmosferica, stato del cielo e vento. Dopo averlo chiaramente definito, ogni fenomeno viene misurato con l’aiuto di strumenti opportuni; ciò può attivare l’interdisciplinarità con la fisica.

L'insegnante può condurre la classe ad usare internet per trovare risultati di ricerche già effettuate sulla meteorologia che possano servire da guida. Un sito interessante può essere www.climagri.it, che contiene fra l'altro l'elenco delle reti di osservazioni e banche di dati meteorologici, oppure quello dell'Istat www.istat.it dove il percorso: ambiente-stato ambientale-statistiche meteorologiche conduce ai dati del 1997 per tutti gli aspetti sopra indicati. Altra fonte di conoscenza scientifica e di dati meteorologici possono essere gli osservatori geofisici (es www.ossgeo.unimo.it).
Per non rimanere disorientati si suggerisce di seguire dapprima le sole precipitazioni. L'analisi può essere condotta o per una sola stazione di rilevamento lungo tutto il corso di un anno per cui sono disponibili i dati oppure rispetto a un mese particolare in tutte le stazioni rilevate.
La situazione dei siti Web indicati fa riferimento all'aprile 2004.
Nell'attività si fa uso dello strumento derivata, nota solo intuitivamente agli studenti. Il docente fornirà i dovuti aiuti.

Prima fase
La presente attività ha lo scopo di trattare un argomento pluridisciplinare e di consolidare elementi di statistica descrittiva quali i valori medi, in particolare la media aritmetica, e la variabilità.
I dati possono essere ricercati, anche in internet (ad esempio nel sito dell'Istat). Quelli sui quali si lavorerà sono serie storiche delle precipitazioni rilevate nella stazione meteorologica di Trieste:

Precipitazioni* (quantità in mm; frequenza in giorni) per la stazione di Trieste dal 1982 al 1999. (fonte ISTAT)

anno	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**
quantità	1063,4	706,3	1028,6	745,3	871,8	1314,2	766,2	827,4	917,9
frequenza	82	73	100	85	83	85	88	92	85
anno	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
quantità	887,4	933,2	781,7	879,1	1166,8	1281,5	864,9	946,1	718,4
frequenza	83	92	80	83	100	108	78	84	105

Tabella 1

***Nota:** la quantità comprende il complesso di precipitazioni (nebbia, pioggia, neve, grandine ecc.) ridotte in acqua; per frequenza si intende il numero di giorni in cui la quantità di precipitazione ha raggiunto almeno un millimetro di altezza.

L'insegnante invita gli studenti a leggere la tabella. Qual è l'unità statistica? Cosa è stato rilevato rispetto a ciascuna unità? Cosa si intende per quantità? Cosa si intende per frequenza in questo contesto? Se si dovesse calcolare la quantità media delle precipitazioni per anno con riferimento al periodo come si potrebbe fare? L'insegnante guida gli studenti a scrivere la formula della media:
$M=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{n}$, dove n è il numero degli anni osservati, poi a calcolare la deviazione standard $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(q_i-M)^2}{n}}$, la varianza σ^2, il coefficiente di variazione C.V.= σ/M e a rappresentare graficamente i dati.

Parametri	Unità di misura
media 927,78	mm
dev.st. 175,66	mm
varianza 30855,15	mm^2
C.V. 0,1893	

Tabella 2

Tale lavoro può essere fatto manualmente e si può in un secondo tempo confrontare i dati ottenuti con quelli ricavati usando le funzioni predefinite del foglio elettronico. L'insegnante invita gli studenti a riflettere sul significato degli indici trovati e sul loro utilizzo. E' corretto affermare che le precipitazioni nei diversi anni sono stati pari alla media aritmetica M? Il valor medio fornisce un'informazione precisa dell'ammontare totale del fenomeno? La media aritmetica è quel valore che sostituito ai singoli dati non modifica la somma degli stessi? La somma degli scarti dei valori dalla media è pari a zero? La variabilità delle precipitazioni della stazione presa in considerazione è maggiore, minore o uguale a quella delle precipitazioni di un'altra stazione? L'insegnante invita gli studenti a cercare su Internet dati di altre stazioni, per lo stesso periodo, e ad effettuare confronti.
Gli studenti rappresentano graficamente la serie storica delle precipitazioni e tracciano la costante che rappresenta M.

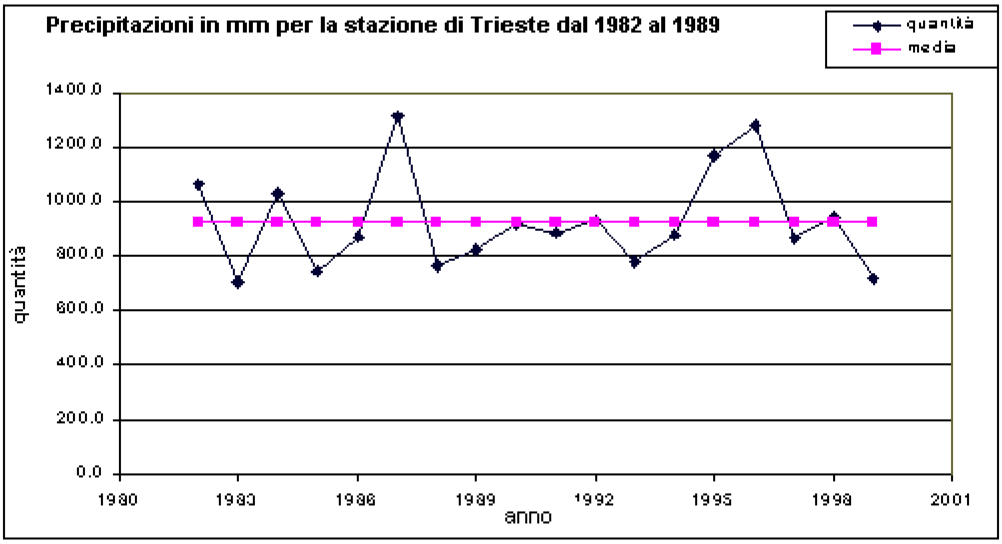


Figura 1

Una delle proprietà della media aritmetica è quella di rendere minima la somma dei quadrati degli scarti rispetto ad un altro qualsiasi valore, ossia:

$$\sum_{i=1}^{n}(q_i - M)^2 < \sum_{i=1}^{n}(q_i - Q)^2$$

dove Q è un valore qualsiasi diverso dal valore della media aritmetica.
La verifica sperimentale di quanto affermato sopra può essere fatta utilizzando un foglio elettronico del quale la tabella seguente fornisce un esempio.

Tabella dei valori $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{q_i - Q})^2$

Qmin= 706,3
Qmas= 1314,2

passo 60,79

Q	$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{q_i - Q})^2$
706,3	1438424,7
767,1	1020227,1
827,9	679595,2
888,7	552407,4
949,5	**550863,9**
1010,3	674964,9
1071,0	924710,2
1131,8	1300100,0
1192,6	1801134,3
1253,4	2427812,9
1314,2	3180135,96

Tabella 3

L'insegnante invita gli studenti a cercare i valori Minimo e Massimo delle quantità delle precipitazioni e a calcolare il valore chiamato "passo" come rapporto fra la differenza tra il massimo e il minimo (range) e un valore arbitrario k (in questo esempio k = 10), tenendo presente che il numero dei valori Q rispetto ai quali si vuol verificare la diseguaglianza è k+1.
In corrispondenza di ogni valore di Q viene calcolata la somma dei quadrati degli scarti tra le quantità annuali di precipitazione: $\sum_{i=1}^{n}(q_i - Q)^2$.
I dati corrispondenti sono riportati nel grafico di Figura 2.
L'insegnante pone alcun domande:

- L'andamento dei punti può essere associato a qualche funzione nota?
- L'andamento dei punti è decrescente? Se sì, fino a quale valore di Q?
- Dove si posiziona, rispetto ai valori di Q, il valore medio delle precipitazioni?

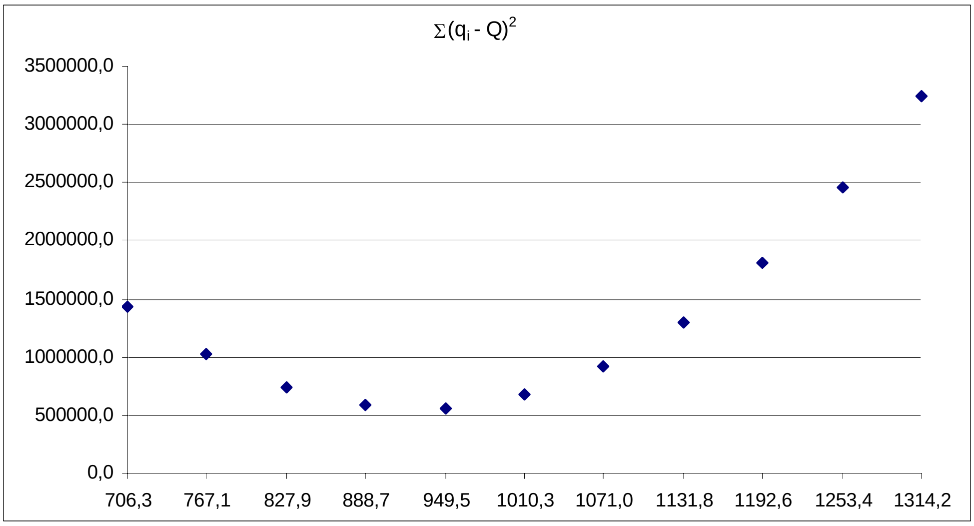


Figura 2

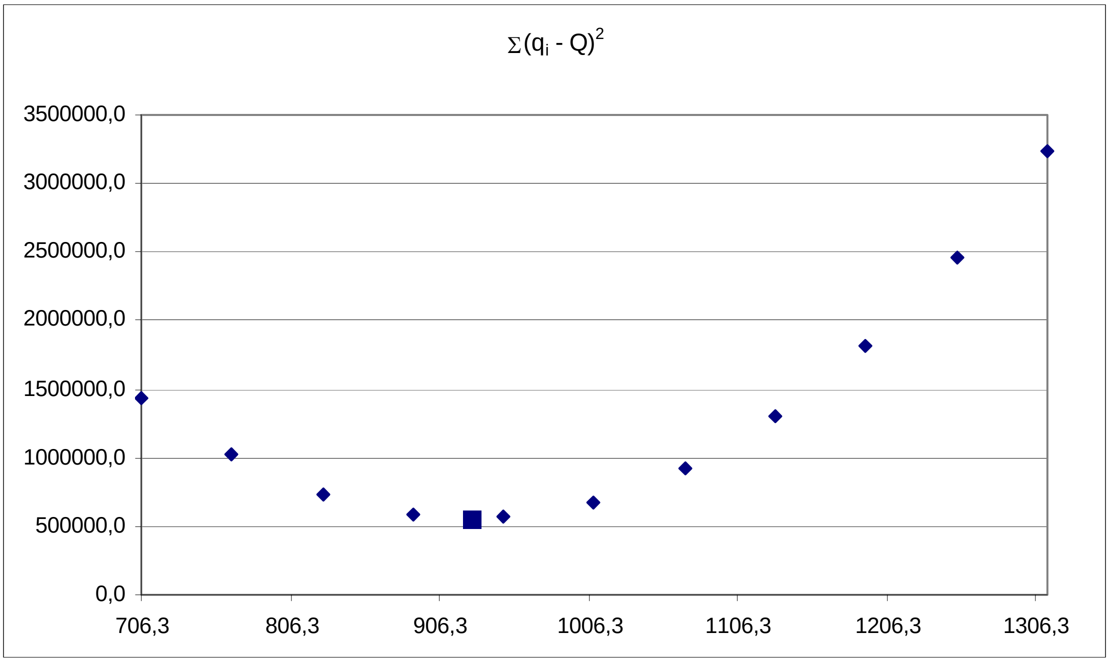


Figura 3

L'insegnante fa poi calcolare la somma dei quadrati degli scarti tra le quantità annuali di precipitazione e Q = M. Successivamente il valore è riportato nel grafico di Figura 3 segnalandolo in modo diverso.
Si evidenzia che la media è il valore che minimizza la somma dei quadrati degli scarti. L'insegnante consiglia di rifare la prova riducendo il passo da assegnare a Q nell'intervallo [888,7; 949,5] contenente il valor medio delle precipitazioni.
In un momento successivo l'insegnante propone lo studio analitico della funzione $f(Q)=\sum_{i=1}^{n}(q_i-Q)^2$, supponendo, per comodità di calcolo, Q variabile continua.
Il calcolo della derivata prima e del suo segno consente di verificare la congettura precedente.

$$\frac{d}{dQ}f(Q)=-2\cdot\sum_{i=1}^{n}(q_i-Q).$$

$$\frac{d}{dQ}f\quad(Q)=0\qquad\Rightarrow\qquad\sum_{i=1}^{n}q_i-nQ=0\qquad\Rightarrow\qquad Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}q_i}{n}$$

Lo studio del segno della derivata prima consente di affermare che il valore trovato Q = M è un punto di minimo.
Ci possono essere altri punti di minimo? L'insegnante induce gli studenti a riflettere sul tipo di funzione studiata. In corrispondenza al valore di minimo la funzione è pari a $\sum_{i=1}^{n}(q_i-M)^2$ che è il numeratore di σ^2.
L'insegnante fa calcolare agli studenti il valore della deviazione standard (σ= 175,66 in mm) e chiede se il valore trovato indica una alta o una bassa variabilità del fenomeno.
Essendo le precipitazioni un carattere di tipo trasferibile – si può cioè pensare che le precipitazioni si spostino da un anno a un altro - è possibile costruire un indice adimensionale di variabilità normalizzato basato sul confronto fra la deviazione standard trovata e il valore che essa assume in corrispondenza al caso di massima variabilità. Quando si può parlare di massima variabilità?

L’insegnante ipotizza una situazioni limite: il totale delle precipitazioni si è avuto in un solo anno (caso di massima trasferibilità). Il calcolo della deviazione standard è riportato nella Tabella 4:

Caso teorico di massima variabilità			
quantità: q_i	**n_i**	**$q_i n_i$**	**$q_i^2 n_i$**
0	17	0	0
16700,2	1	16700,2	278896680
totali	18	16700,2	278896680
		Media = 927,8	
		$_1\sigma_{max}$ = 14633467,8	

Tabella 4

L’insegnante fa osservare che la media aritmetica della distribuzione teorica di massima variabilità è la stessa della distribuzione osservata, mentre la deviazione standard è diventata grandissima.
Il caso analizzato è realistico? E’ forse più realistico assegnare ad ogni anno la quantità minima di precipitazione e all’ultimo anno la rimanente quantità fino ad arrivare al totale osservato ($\sum_{i=1}^{n} q_i$)?
L’insegnante guida gli studenti a costruire la distribuzione di massima variabilità vincolata e fa calcolare anche per questa distribuzione la deviazione standard. La Tabella 5 riporta i calcoli della deviazione standard:

Distribuzione teorica di massima variabilità vincolato			
quantità: q_i	**n_i**	**$q_i n_i$**	**$q_i^2 n_i$**
706,3	17	12007,1	8480614,73
4693,1	1	4693,1	22025187,6
totali	18	16700,2	30505802,3
		Media = 927,8	
		$_2\sigma_{max}$ = 833974,574	

Tabella 5

Anche in questo caso il valore medio della distribuzione teorica di massima variabilità vincolata è lo stesso della distribuzione osservata, mentre lo scarto quadratico medio è diminuito rispetto al precedente, pur rimanendo più elevato rispetto a quello calcolato sui dati osservati.
A questo punto l’insegnante fa osservare che per rispondere alla domanda posta (La variabilità rilevata è alta o bassa?) occorre effettuare un confronto fra 175,66 mm e, alternativamente, $_1\sigma_{max}$, $_2\sigma_{max}$. Come è possibile confrontare i tre dati trovati?
L’insegnante ricorda che i confronti si possono effettuare per differenza o per rapporto. In questo caso entrambi i confronti sono possibili, poiché l’unità di misura della deviazione standard è sempre espressa in mm. Invita perciò gli studenti ad effettuare tutti i confronti possibili. Quanti sono? (σ- $_1\sigma_{max}$; $_1\sigma_{max}$- σ; σ - $_2\sigma_{max}$; $_2\sigma_{max}$ -σ:. $\frac{\sigma}{_1\sigma_{max}}, \frac{_1\sigma_{max}}{\sigma}, \frac{\sigma}{_2\sigma_{max}}, \frac{_2\sigma_{max}}{\sigma}$). L'insegnante invita a giustificare ciascuno di essi e conduce gli studenti verso quei confronti che variano tra 0 e 1. Si tratta di confronti mediante rapporti. Essi hanno tra l’altro il vantaggio di perdere ogni riferimento all’unità di misura.
Il valore della deviazione standard della serie storica delle precipitazioni è un valore non negativo ed inferiore al massimo calcolato in una delle situazioni limite sopra descritte. L’insegnante fa pertanto calcolare i due indici normalizzati come rapporto tra la deviazione standard della serie storica e quella delle due situazioni limite.

Primo caso: $\dfrac{\sigma}{_1\sigma_{max}}$	0,0000120
Secondo caso: $\dfrac{\sigma}{_2\sigma_{max}}$	0,0002106

L'insegnante fa osservare che lavorando sui rapporti compresi tra 0 e 1, la lettura del risultato ottenuto è facilitato. E' ora evidente che la variabilità delle precipitazioni rispetto alla variabilità massima teorica è effettivamente bassa.

Nota di approfondimento.
Facendo riferimento a una distribuzione di frequenze (x_i, n_i), con media M, l'insegnante potrà esprimere il caso teorico di massima variabilità in modo formale:

x_i	n_i
0	n – 1
n·M	1
Totale	n

L'insegnante farà vedere che la media della distribuzione di massima variabilità è ancora M, guiderà poi gli studenti ai passaggi algebrici che consentono di dimostrare che $\sigma_{max} = M \cdot \sqrt{n-1}$ e perciò $\dfrac{\sigma}{\sigma_{max}} = \dfrac{\sigma}{M \cdot \sqrt{n-1}}$.

Ciò giustifica un'altra delle misure proposte, ossia $C.V. = \dfrac{\sigma}{M}$. L'insegnante domanda agli studenti da cosa dipende C.V.

Seconda fase.
L'insegnante ripropone agli studenti parte della Tabella 1 per mostrare loro altri approfondimenti che sono agevolati dall'uso del laboratorio di matematica.

Precipitazioni (quantità[1] in mm) per la stazione di Trieste dal 1982 al 1999.
(fonte ISTAT)

anno	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**
quantità	1063,4	706,3	1028,6	745,3	871,8	1314,2	766,2	827,4	917,9
anno	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
quantità	887,4	933,2	781,7	879,1	1166,8	1281,5	864,9	946,1	718,4

Tabella 6

4 Utilizzando il foglio elettronico, e in particolare la funzione Tendenza( ), è possibile visualizzare il Trend, ossia l'andamento delle precipitazioni in funzione del tempo (Figura 4).

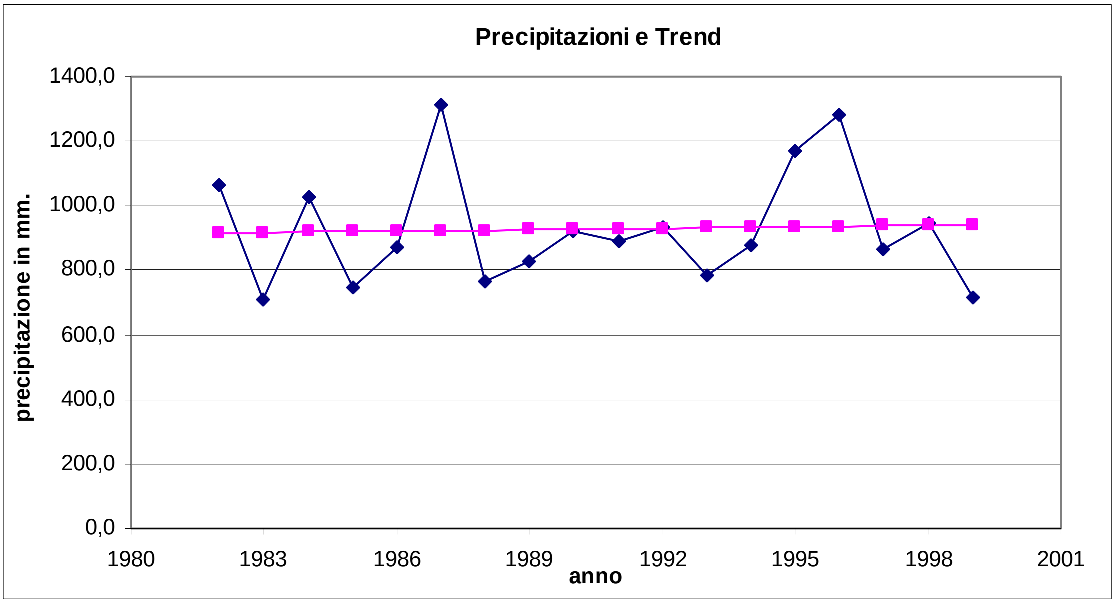


Figura 4

Si può sintetizzare l'andamento con una funzione matematica? Quale principio potremmo usare per la sua determinazione? A cosa può servire la funzione scelta? Conviene scegliere una funzione che passa "per" i punti osservati o "fra" gli stessi?
Si apre così un dibattito con gli studenti.
Successivamente l'insegnante descrive i passi necessari alla risoluzione del problema dell'interpolazione statistica "fra" punti.

- Con l'aiuto della rappresentazione grafica si sceglie il tipo di funzione che meglio descrive il fenomeno da osservare (lineare, quadratica, esponenziale,….).
- Ricerca dei parametri che caratterizzano la funzione scelta.
- Verifica della attendibilità del modello individuato.

La ricerca dei parametri può essere fatta con metodi tra loro alternativi. Scelta la funzione che passa fra i dati è possibile usare, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati. In tal caso ci si propone di trovare la funzione che minimizza l'errore che si commette sostituendo ai dati osservati i valori calcolati attraverso la funzione scelta. Il ricorso alla funzione Tendenza( ) di fatto ha già imposto la scelta della funzione interpolatrice: la retta y = a + b·x (dove con y si indicano le quantità e con x gli anni) ed anche del metodo di interpolazione: il metodo dei minimi quadrati ossia la minimizzazione della quantità:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2$$

L'uso della funzione Excel Trend() fornisce automaticamente i valori teorici interpolati che sono le quantità $\hat{y}$ di precipitazioni in mm. Il foglio elettronico consente inoltre il calcolo dei parametri della "retta dei minimi quadrarti" utilizzando le funzioni predefinite di Excel.[2]

b =	= PENDENZA( )
a =	= INTERCETTA ( )

[2] Le espressioni di a e b sono rispettivamente a = M_y - bM_x ; $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)^2}$; per i dettagli vedere Matematica 2003, Dati e Previsioni, Anche le rette raccontano.

In questo caso la retta interpolatrice è: y = -2103,769 + 1,523·x. Nell'equazione l'intercetta è espressa in mm e la "pendenza", o meglio il coefficiente angolare, è espresso in mm per anno. L'insegnante conduce gli studenti a riflettere sul significato del coefficiente angolare che esprime qui l'incremento della quantità di precipitazione al variare da un anno al successivo.
L'insegnante chiede alla classe di calcolare il valore di $\hat{y}$ quando x = 1990,5, ossia il valore medio degli anni. Si ottiene 927,76. Si era già trovato questo valore o una sua approssimazione? Se sì, cosa rappresenta? Dunque la retta dei minimi quadrati passa per il punto (M_x; M_y). Qual è l'equazione del fascio di rette passanti per (M_x; M_y)? L'insegnante, dopo aver ricordato l'equazione: $y - M_y = m \cdot (x - M_x)$, invita gli studenti ad assegnare valori arbitrari al coefficiente angolare m ed a calcolare, per ciascun valore di m, il valore dell'errore, ossia ε.
La rappresentazione grafica di Figura 5 mostra alcune rette del fascio passante per P = (M_x; M_y).

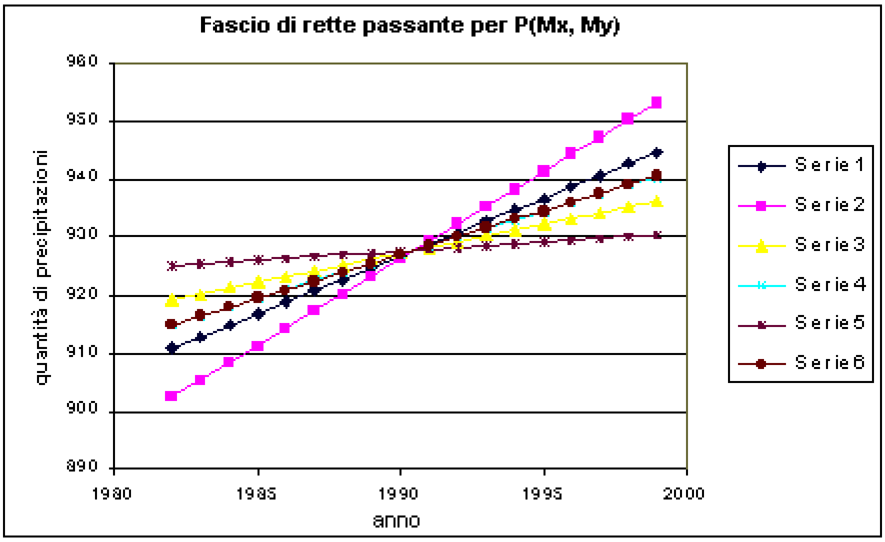


Figura 5

La seguente tabella riporta i valori del coefficiente angolare m delle rette rappresentate nel grafico e del corrispondente errore ε. In grassetto è evidenziato il valore di m corrispondente al valore dell'errore ε più piccolo.

m	ε
2	554379,1578
3	555325,8578
1	554401,4578
1,5	**554269,1828**
0,3	554993,6228

Tabella 6

La Tabella 7 mostra uno stralcio del foglio Excel con le funzioni e il procedimento usato per il calcolo del valore interpolato $\hat{y}$ e dell'errore.

	A	B	C
1	**anno**	**1982**	**1983**
2	**quantità**	1063,4	706,3
3	trend	=TENDENZA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1;B1:C1;VERO)	=TENDENZA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1;C1:D1;VERO)
4	$\hat{y}$	=$B$8*B1+$B$7	=$B$8*C1+$B$7
5	e($\hat{y}$)	=(B4-B2)^2	=(C4-C2)^2
6			
7	a	=PENDENZA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1)	
8	b	=INTERCETTA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1)	

Tabella 7

L'errore della retta dei minimi quadrati risulta pari a 554268,9. L'insegnante fa notare che questo valore è vicino al valore calcolato sperimentalmente per m=1,5. Fa poi scrivere agli studenti le equazioni della retta con minimo errore sperimentale e quella fornita dal metodo dei minimi quadrati e fa commentare i risultati ottenuti.

La funzione trovata sintetizza in modo appropriato il fenomeno studiato? Può servire per la ricostruzione di serie storiche mancanti di alcuni dati? Può servire a prevedere la quantità nei prossimi anni?

Le precipitazioni annuali sono anche influenzate da altri fattori (che qui non compaiono) che fanno assumere al grafico di Figura 4 l'andamento a "picchi", di cui il trend è una delle componenti. Sarebbe stato opportuno scegliere qualche altro tipo di funzione per poter rispondere ai quesiti riguardanti problemi di interpolazione e previsione? Usando il foglio elettronico Excel è possibile inserire nel grafico linee di tendenza di grado superiore al primo e di queste si possono avere anche le corrispondenti equazioni matematiche. Il grafico di Figura 6 mostra alcuni esempi.

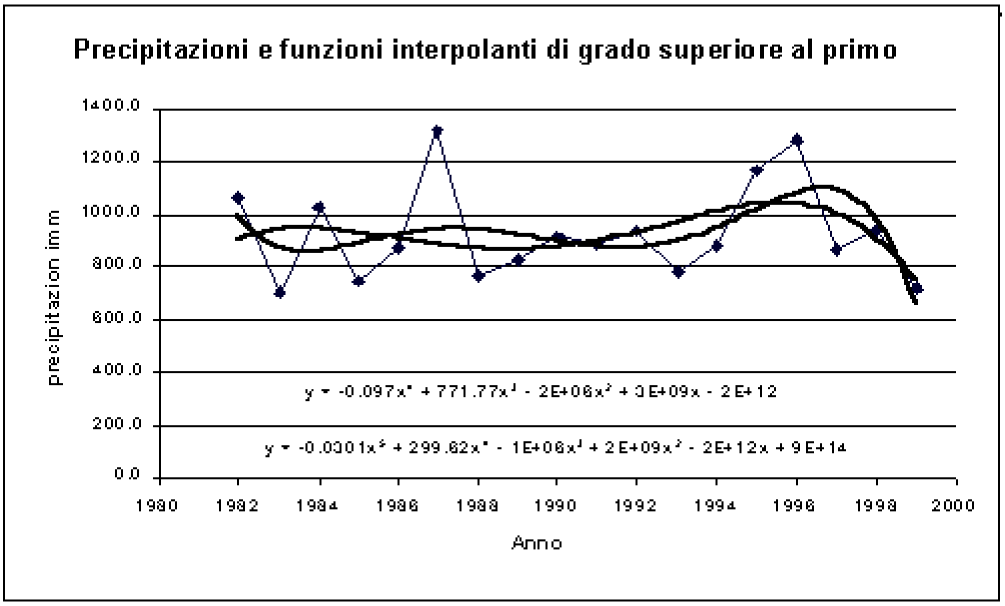


Figura 6

L'insegnante fa osservare che, sui dati di Tabella 1, oltre che la quantità delle precipitazioni era riportata anche la frequenza in giorni. L'insegnante propone di prendere in considerazione la quantità in funzione della frequenza, in modo da effettuare previsioni in funzione non più dell'anno in cui le precipitazioni avvengono, ma in funzione del numero di giorni con precipitazioni.

Seguendo le indicazioni che hanno consentito l'interpolazione della serie storica delle quantità, si arriva a visualizzare la Figura 7 che rappresenta la nuvola dei punti e la retta interpolatrice che, in questo contesto si è chiamata di regressione. La sua equazione, ottenuta utilizzando le funzioni di Excel, è:

$$\hat{y} = 7{,}468x + 269{,}767$$

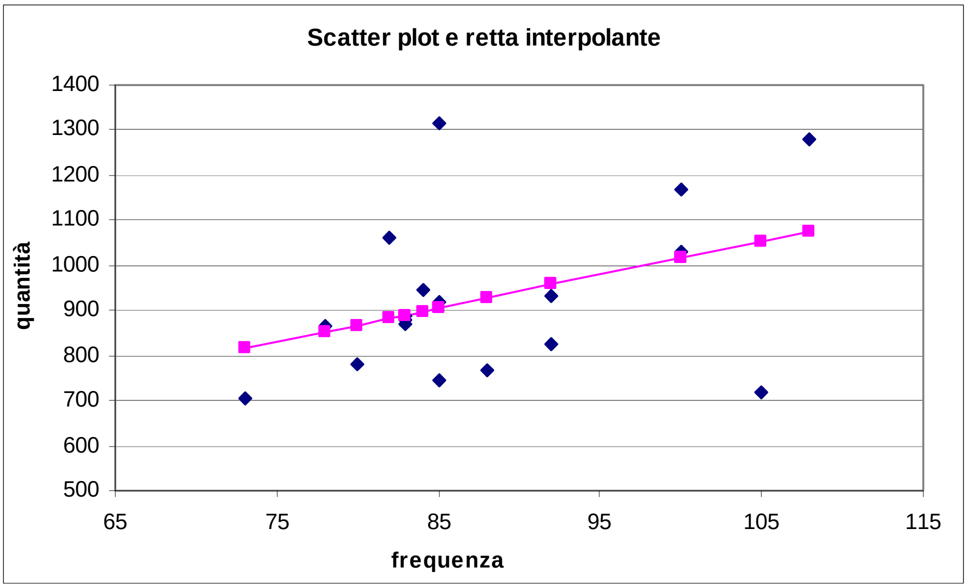


Figura 7

E' attendibile la scelta fatta? Possiamo effettuare qualche previsione?
Per rispondere l'insegnante fa calcolare agli studenti la media dei valori interpolati $\hat{y}$, e chiede cosa si è ottenuto. E' stato ottenuto proprio il valore di M_y? Fa calcolare poi la somma dei quadrati degli scarti fra valori osservati delle quantità di precipitazioni e la propria media (cioè fa calcolare la devianza di y) e la stessa quantità sui dati teorici forniti dalla retta. Se si calcola la loro differenza, cosa si ottiene? E' l'errore ε
L'insegnante formalizza quanto osservato:
$M_y = M_{\hat{y}}$;
$\sum_{i=1}^{n}(y_i - M_y)^2$ è la devianza (totale) calcolata sui dati osservati, $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - M_y)^2$ è la devianza calcolata sui valori interpolati;
la loro differenza è l'"errore" e viene indicato con $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$.

L'insegnante pone il problema: quanta parte della devianza totale è imputabile all'errore ε? L'insegnante fa calcolare il rapporto fra ε e la devianza totale. Il valore è 0,844.
Il complemento a 1, pari a 0,156 come si può interpretare? La retta interpolante spiega molto o poco del legame tra la quantità di precipitazione e la frequenza? Forse le variabili che sono state prese in considerazione per spiegare la quantità di precipitazione sono poche? Si possono invitare gli studenti a ricercare in Internet le tecniche utilizzate per fare previsioni meteorologiche.

Il cruciverba matematico

Percorso: **L'importanza del linguaggio**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici (linguaggio degli insiemi, linguaggio dell'algebra elementare, linguaggio logico). Analizzare semplici testi del linguaggio naturale, individuando eventuali errori di ragionamento. Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se…allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi.	Argomentare, congetturare, dimostrare	Italiano Storia Lingua straniera
Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, la notazione con freccia, il diagramma ad albero, il grafico.		Relazioni e funzioni	
Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali.		Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Linguaggio e vocabolario.

Il contesto dell'attività è quello dell'uso del vocabolario, dei manuali, dei libri di consultazione che si potrebbe pensare abbiano perso di importanza. Invece, anche con l'avvento della tecnologia, rimangono un ottimo strumento, in particolare per la ricerca del significato dei termini matematici. È dunque importante progettare delle attività che rendano gli studenti consapevoli delle possibilità e dei limiti degli strumenti che hanno a disposizione (biblioteca, aula multimediale,…)

Descrizione dell'attività

L'attività inizia con una tecnica di *brain-storming* per l'individuazione di termini conosciuti dagli studenti appartenenti al lessico della matematica e di proposte di inserimento (da parte dell'insegnante) di altri termini fondamentali sfuggiti all'attenzione degli studenti. Si prosegue con una discussione sui termini trovati che hanno significati diversi in altre discipline (parabola, sistema, evento,…).
Si propone la costruzione di un "vocabolario", contenente i lemmi individuati. Si giungerà, quindi, alla compilazione di *un lessico di base*, attraverso la registrazione del termine, la ricerca della definizione:

a. nella propria memoria, con tutte le inesattezze del caso;
b. sui libri di testo di matematica – meglio se si consultano più libri
c. su vocabolari – anche qui meglio consultarne più di uno

Questa ricerca si può fare singolarmente o in gruppo, in biblioteca per reperire vocabolari e manuali scolastici diversi che contengano i termini presi in esame e ulteriore ricerca della definizione del termine su *internet* per valutarne la correttezza o meno nell'uso e/o eventualmente il suo arricchimento semantico. E' essenziale che alla fine tutti condividano la correttezza delle *definizioni* trovate per la stessa parola.
L'attività offre anche l'occasione per consolidare conoscenze ed abilità su argomenti già affrontati nel corso degli anni precedenti. L'attenzione va posta quindi sul confronto tra le diverse definizioni, gli esempi, le rappresentazioni, le dimostrazioni e tutto ciò che può essere significativo. Un dibattito a conclusione dell'attività consente eventuali altre osservazioni sui linguaggi usati dai manuali o da altri testi e un'analisi sulle difficoltà più comuni che incontrano gli studenti nella comprensione di tali linguaggi.

<u>Prima fase</u>

L'insegnante invita gli studenti a scrivere alla lavagna i termini di matematica che ricordano, incontrati negli anni precedenti (*brain-storming*).
L'insegnante, poi, costruisce un cruciverba facile e piccolo (50-60 caselle), che viene proposto già risolto agli studenti, ma privato delle *definizioni*.
Gli studenti sono invitati a fornire essi delle definizioni alle parole inserite nello schema.

L'attività può essere organizzata all'inizio dividendo gli studenti della classe, tre, quattro gruppi: a ciascun gruppo viene assegnato un cruciverba diverso e così quando un gruppo ha dato tutte le definizioni può ridisegnare lo schema senza le parole e darlo a risolvere a un altro gruppo.

Una possibilità alternativa a quella descritta all'inizio è quella di far costruire agli studenti degli schemi di cruciverba completi. Questa modalità dà più soddisfazione ma è un'impresa non facile. Si può rendere più efficace organizzando una gara a squadre.
Attraverso il lavoro svolto in questa prima fase gli studenti familiarizzano con la nozione di definizione, seppure in un contesto di gioco, e riflettono sul *ruolo*, l'*importanza*, la *ricchezza* delle *parole*.

Esempio 1:

	1 C	I	2 R	C	3 O	N	4 F	E	5 R	E	N	Z	6 A	
	M		E		R		A		E				N	
7 P			8 A	S	I	N	T	O	T	I			G	
R			L		G		T		T			9 A	O	
10 I	N	11 D	I	C	I		O		O				L	
M		U		12 I	N		R			13 C	U	14 B	O	
I		E		15 F	E		16 E	17 N	N	E		A		18 T
	19 P			R		20 A		O				S		R
	21 A	R	E	A		V		22 N	U	L	L	E		E

Figura 1

Orizzontali

1. Luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto centro.
8. L'iperbole ne ha sempre due.
9. Asintoto orizzontale.
10. Coppia di numeri naturali che indicano la posizione di un elemento di una matrice.
12. Isaac Newton.
13. Parallelepipedo con i lati tutti congruenti.
15. Federigo Enriques.
16. Lettera con cui si indica l'insieme dei naturali.
21. Misura di una superficie.
22. Né positive né negative.

Verticali

1. Centimetri.
2. L'insieme dei numeri che soddisfa l'assioma del continuo.
3. Il punto di incontro degli assi nel piano cartesiano.
4. Uno dei termini della moltiplicazione.
5. Uno dei quattro angoli formati da due perpendicolari.
6. La parte di piano compresa tra due semirette aventi origine comune.
7. I numeri naturali maggiori di uno che sono divisibili solo per uno e per se stessi.
11. Il successivo di uno.
13. Campo di esistenza.
14. Lato la cui misura serve per calcolare l'area di un rettangolo.
17. Negazione.
18. Precede il quattro nei numeri naturali.
19. Principia Arithmetica.
20. Asintoto verticale.

Seconda fase

Nella seconda fase si indaga sulle definizioni di particolari parole di significato matematico.
Si fissa l'attenzione su una o più parole (per esempio: angolo, fattore, radice, equazione, incognita, costante, variabile, indeterminata, parametro, postulato, superficie, sistema, assioma, principio, teorema, proposizione, legge, regola, proprietà, e così via) e se ne cerca la definizione in matematica e nelle altre discipline per quelle possibili.
Alla fine di questa fase si *discute tutti insieme sulla qualità delle definizioni* date.
Se si sovrappone questa fase della ricerca alla precedente, si può cercare di inserire tali parole in uno schema di cruciverba: per facilitare il compito si può adottare uno schema con molte caselle nere, ovvero con pochi incroci.

Terza fase

Nella terza fase si discute delle varie definizioni adoperate, al fine di:

a. capire bene il significato del termine in questione: con un'attività così orchestrata rimane certamente più impresso un concetto di quanto non accada normalmente;
b. confrontare diciture diverse, per trovare errori (se ce ne sono) e capire *perché* sono errori. Errori nelle definizioni date dagli studenti, ma talora anche nei libri (confrontare più testi diversi serve a smitizzare il "testo"). Ma più che ricercare errori si possono trovare **sfumature** diverse di significato per esempio tra lingua comune (vedi vocabolari) e lingua tecnica, imprecisioni e trascuratezze nel considerare ad esempio tutti i possibili casi.

Si possono fare ricerche e considerazioni etimologiche e storiche, se è il caso.
In generale si approfitta dell'occasione per concentrarsi sull'importanza della osservazione minuziosa delle parole e del loro uso appropriato. La ricerca stessa di una definizione dal libro di testo è di per sé un'attività non banale, anche perché bisogna saper distinguere tra definizioni e proprietà: ad esempio una cosa è la definizione di m.c.m. (il più piccolo numero….), un'altra cosa è la regola per determinarlo (quel numero che ha come fattori tutti i fattori comuni e non comuni….).
E' opportuno, inoltre, distinguere tra i vari tipi di definizione. Quella del *Vocabolario* deve tener conto di tutti i possibili significati del termine e tende ad essere al massimo esauriente ed esplicativa. Quella che in *enigmistica* è chiamata definizione, lo è fino a un certo punto. Infatti è, o una "descrizione" del senso della parola cercata, o allude a una proprietà o caratteristica della stessa. E se la parola in questione ha più di un significato, si può fare riferimento ad uno di essi a scelta. Qualche volta si gioca sullo "slittamento" tra la parola come oggetto linguistico e il suo significato. La presenza di definizioni ambigue, umoristiche, evocative, originali è un pregio, purché non si ecceda in tal senso. Invece, in *matematica* deve essere chiara, non ambigua, non circolare (non si possono definire le rette perpendicolari come quelle che formano angoli retti e gli angoli retti come quelli formati da rette perpendicolari!); essa è inoltre "normativa" in un senso molto forte. Quando si dichiara ad esempio che un rettangolo è un quadrilatero con gli angoli retti, poi bisogna attenersi rigorosamente e concludere ad esempio che un quadrato è un particolare rettangolo. Inoltre, bisogna osservare che le definizioni in matematica hanno un senso in riferimento ad una teoria: cambiando la teoria potrebbe cambiare il senso della definizione stessa, oppure perdersi il medesimo. Ad esempio in un contesto di geometria euclidea ha senso definire che una retta r è parallela ad una retta s se ha la stessa distanza da questa, ma in un contesto di geometria iperbolica la definizione non ha più valore (infatti una curva equidistante da una retta non è neanche una retta). Sono cose ovvie per un insegnante, ma vale la pena di sottolineare questi aspetti che spesso sfuggono agli studenti anche perché sono presenti solo nella matematica e (molto parzialmente) nelle altre materie scientifiche.

Osservazione. Bisogna tener presente che lo scopo finale è di riflettere su alcuni concetti e sull'uso della lingua per chiarirli: il gioco del cruciverba è solo uno strumento (divertente e motivante) per giungere ad essi.

Se non si lavora più con le parole crociate, le parole matematiche da indagare potranno scaturire dal lavoro che l'insegnante sta svolgendo nella classe o da qualunque altra fonte, anche occasionale, facendo, anche, costruire agli studenti un *Glossario* di *matematica* con le *parole chiave*.
Infatti, una maggiore consapevolezza del significato dei termini permette anche una maggiore comprensione dei concetti.

Possibili sviluppi
Si possono porre e discutere questioni come: perché occorre dare definizioni, qual è l'uso che se ne fa (ad es. nelle dimostrazioni). Si può parlare della libertà che c'è nel definire, delle scelte possibili a volte diverse (un parallelogramma è o non è un trapezio? Un triangolo equilatero è o non è isoscele?), della necessità di nozioni primitive, in una certa misura dell'arbitrio della loro scelta, e così via. Qualsiasi argomento, comunque, può dare l'occasione per riflessioni, in particolare sul linguaggio usato dai manuali scolastici o da altri testi, e sarà sempre possibile chiarire contestualmente qualche dubbio sugli aspetti teorici. I testi scolastici quando parlano di geometria presentano solitamente una maggiore varietà nell'impostazione, e quindi può essere più interessante (ma anche più impegnativo) un lavoro di confronto: iniziando da un argomento specifico, si potrà poi ampliare il discorso all'intera struttura organizzativa della disciplina.

Un altro sviluppo è dato dal *Crucinumero*, che può servire come ripasso di argomenti precedentemente svolti. Ecco un esempio:

1		2	■	3
	■	4	5	
6	7			
8				■

Orizzontali

1. Valore di k in $x^2 - 26x + k$ per avere 2 radici entrambe numeri primi
1. Il numero primo che viene dopo il quadrato del 7 verticale
6. L'antiperiodo del numero che si ottiene dividendo per 30000 il numero x che si ottiene sottraendo 30 all'uno orizzontale e moltiplicando il risultato per il numero delle carte in un mazzo da gioco francese.
8. $x^2 + 1$ con x quinta parte del 3 verticale

Verticali

1. E' un quadrato perfetto (ma è scritto in binario)
2. Un cubo perfetto
3. Numero di partite (a tennis) per avere un vincitore in un torneo con 216 giocatori
5. Tante sono le partite del campionato di calcio di Serie A (nel 2004-2005)
7. Euro che sarebbe onesto ricevere giocandone 1 al Lotto sul singolo estratto

Elementi di prove di verifica

1. Rispondi alle seguenti domande utilizzando quello che hai imparato sulle definizioni:
   a. Quando due equazioni o due disequazioni o due sistemi si dicono “equivalenti”?
   b. In quali altri contesti hai utilizzato il termine equivalenti?
   c. Che cos’è un numero?
   d. Che cosa si intende per successivo di un numero naturale?

2. Spiega che cosa significano in matematica le parole: dimostrazione, congettura, argomentazione, assioma, teorema, legge, regola, formula. Evidenzia analogie e differenze.

3. I seguenti termini assumono significati diversi a seconda del contesto (matematico, extra-matematico): parabola, fattore, sistema, iperbole, radice, divisione, segno, proprietà. Spiega tali diversi significati.

4. Costruisci un cruciverba matematico con 6 righe e 6 colonne.

Euclide o Cartesio?

Percorso: **Congetture, refutazioni, dimostrazioni**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Produrre congetture e sostenerle con ragionamento coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confrontare la proprie congetture con quelle prodotte da altri. Comprendere e usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazione. In semplici casi costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.	Definizioni; teoremi e dimostrazioni.	Argomentare, congetturare, dimostrare	
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. Individuare e riconoscere proprietà di figure. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza fra due punti. Equazione della retta; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità.	Spazio e figure	
Ricorrere a mezzi tecnologici disponibili per esplorare situazioni problematiche individuate o proposte. Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.		Risolvere e porsi problemi	

Contesto

Congetture e dimostrazioni in geometria.

Il contesto è quello dei problemi aperti nella geometria piana e della conseguente esplorazione di una situazione con un software di geometria dinamica.

Descrizione dell'attività

L'attività fa riferimento a problemi che potrebbero già essere stati affrontati negli anni precedenti, per esempio a problemi del tipo di quelli proposti in Matematica 2003 (Nucleo: Argomentare, congetturare, dimostrare, *Attività con software geometrico*).

Il fatto che vengano ripresi in considerazione problemi eventualmente già affrontati è sensato, in quanto l'avvio al sapere teorico e alla dimostrazione richiede tempi lunghi e la possibilità di riflettere, anche da prospettive diverse, sugli stessi temi.

In questo caso, alcuni problemi che sono stati affrontati nell'ambito della geometria euclidea, possono essere riconsiderati dal punto di vista della geometria analitica; l'insegnante dovrebbe aver cura di evidenziare limiti e potenzialità di approcci diversi contribuendo all'acquisizione di una buona flessibilità, da parte degli studenti, nella scelta degli strumenti da utilizzare per risolvere problemi.

In quest'attività si riprendono in considerazione due problemi proposti in Matematica 2003 (Nucleo: Argomentare, congetturare, dimostrare, *Attività con software geometrico*) per fornire un esempio di possibile discussione sull'opportunità di seguire un approccio piuttosto che un altro.

Per rendere più significativa la discussione, si ritiene importante che gli studenti provino a risolvere i problemi in piccoli gruppi di lavoro (se il rapporto tra numero totale di studenti ed elaboratori disponibili lo consente, sarebbe meglio far lavorare gli studenti a coppie, per dare loro la possibilità di disporre frequentemente del mouse).

I due problemi aperti che prendiamo in considerazione, come esempio, sono i seguenti:

1. Sia dato un quadrilatero *ABCD* e siano *L, M, N* e *P* rispettivamente i punti medi dei lati *AB, BC, CD, DA*. Quali configurazioni assume il quadrilatero *LMNP* al variare di *ABCD*? Dimostrare le varie congetture prodotte. (*Fig. 1*)
2. Costruire un quadrato esternamente a ogni lato di un quadrilatero *ABCD*. Considerare il quadrilatero $O_1O_2O_3O_4$ che si ottiene congiungendo i centri dei quattro quadrati così ottenuti (*Fig. 2*). Che cosa accade a $O_1O_2O_3O_4$ al variare di *ABCD*? Dimostrare le varie congetture prodotte.

Nel primo problema si possono produrre diverse congetture riferite a casi particolari. Ad esempio, si può dimostrare che il quadrilatero *LMNP* è un parallelogramma, qualunque sia il quadrilatero *ABCD* (basta utilizzare il seguente teorema: *la congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato*).

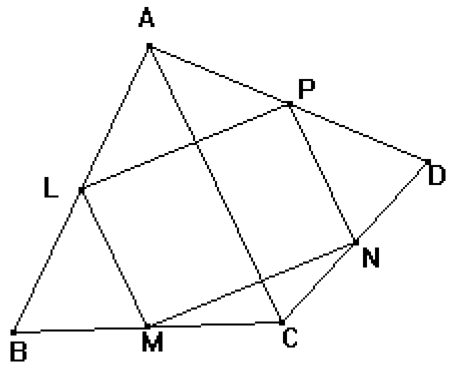


Figura 1

Riconoscere questa proprietà senza costruire la diagonale può, però, non essere semplice; molti studenti potrebbero non riuscire a costruire autonomamente la dimostrazione. L'insegnante può far notare come, in tal caso, un approccio analitico, con la scelta di un opportuno sistema di riferimento, possa essere risolutivo.

Per esempio, si può scegliere un sistema di riferimento in cui l'origine coincida con il punto A e il lato AB appartenga all'asse x. In tal caso i punti possono essere così rappresentati:
$A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(c; e)$, $D(d; f)$.

A partire dalle coordinate di A, B, C, D, è possibile calcolare le coordinate dei punti medi $L(\frac{b}{2}; 0)$, $M(\frac{b+c}{2};\frac{e}{2})$, $N(\frac{c+d}{2};\frac{f+e}{2})$, $P(\frac{d}{2};\frac{f}{2})$. A questo punto è semplice verificare che LM è parallelo a PN e che MN è parallelo a PL, calcolando le pendenze dei segmenti e dimostrando così che, in ogni caso, $LMNP$ è un parallelogramma.

Anche nel secondo problema la consegna è volutamente aperta, per favorire l'esplorazione e la produzione di congetture e anche per motivare alla loro validazione. Il fatto che sia possibile produrre molte congetture, le cui dimostrazioni sono di diverso livello di difficoltà consente a tutti gli alunni di partecipare attivamente al lavoro. Per esempio, fra le varie congetture formulabili, le due seguenti sono facilmente dimostrabili per via sintetica:

- Se $ABCD$ è un quadrato, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato
- Se $ABCD$ è un rettangolo, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato.

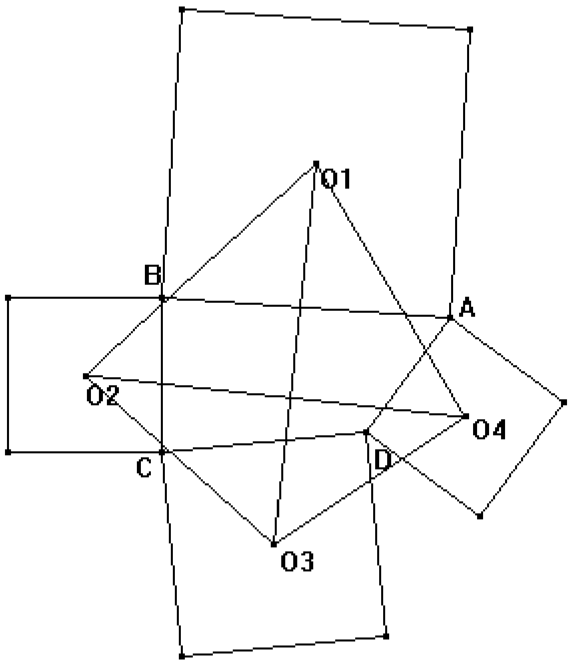


Figura 2

Altre congetture, come le seguenti, comportano qualche difficoltà in più:

- Se $ABCD$ è un rombo, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato
- Se $ABCD$ è un parallelogramma, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato
- Se $ABCD$ è un quadrilatero qualunque, allora $O_1O_3 = O_2O_4$ e O_1O_3 è perpendicolare a O_2O_4.

L'insegnante, prima di fornire le dimostrazioni per via sintetica delle congetture che gli studenti hanno prodotto e testato con gli strumenti messi a disposizione dal software, ma che non sono riusciti a dimostrare autonomamente, può far notare come, in tal caso, l'approccio analitico non sia particolarmente indicato, anche se i casi sono semplici e anche se si utilizzano strumenti di calcolo simbolico. In particolare può far notare che la procedura dimostrativa per via analitica è relativamente semplice da enunciare, ma non è altrettanto semplice da portare a termine a causa della complessità dei calcoli e delle condizioni che occorre considerare per individuare, di volta in volta, nella risoluzione

delle equazioni di secondo grado, la soluzione che si vuole prendere in considerazione.
Questa discussione dovrebbe avere lo scopo di motivare gli studenti alla comprensione della dimostrazione per via sintetica che l'insegnante stesso potrà proporre, nel caso non sia stata trovata da alcuno studente. All'indirizzo web http://agutie.homestead.com/files/vanaubel.html si trova una dimostrazione bella e relativamente semplice della tesi che, qualunque sia il quadrilatero *ABCD*, $O_1O_3=O_2O_4$ e O_1O_3 è perpendicolare a O_2O_4, di cui le tesi precedenti sono casi particolari.

Elementi di prove di verifica

1. Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 6. Quali congetture si possono formulare sul prodotto di quattro numeri naturali consecutivi? E di cinque? E, in generale, di *m* numeri naturali consecutivi? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

2. Si considerino due quadrati *ABCD* e *AEFG* che hanno in comune il solo vertice *A* e con i vertici orientati nello stesso verso. Considerata la mediana *AM* del triangolo *ABG*, quali relazioni si possono congetturare fra il segmento *DE* e la retta *AM* al variare del quadrato *ABCD*? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

3. Quali congetture si possono formulare sulla divisibilità di $n^5 - n$, al variare di *n* nell'insieme dei numeri naturali? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

4. Quali congetture si possono formulare sulle relazioni che legano fra loro due numeri naturali consecutivi? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

$\sqrt{2}$ è irrazionale

Percorso: **Dimostrazioni e modi di dimostrare**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Usare il linguaggio dell'algebra elementare. Comprendere e usare forme diverse di dimostrazione. In semplici casi costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Schemi di ragionamento (ad esempio ragionamento per assurdo). Teorema fondamentale dell'aritmetica.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi	

Contesto
Analisi di una dimostrazione.

Si tratta di leggere e analizzare una dimostrazione, con particolare attenzione alla struttura della dimostrazione e agli schemi di deduzione utilizzati.

Descrizione dell'attività
Allo scopo di creare una situazione favorevole a una significativa riflessione sulla struttura della dimostrazione, l'insegnante potrà chiedere agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi di lavoro, di provare a riprodurre una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. In seguito, mediante una discussione matematica rivolta a tutta la classe e guidata dall'insegnante, si potranno confrontare le produzioni dei diversi gruppi di lavoro con una dimostrazione proposta dall'insegnante. L'insegnante guiderà gli studenti alla lettura dello schema dimostrativo: l'analisi della struttura della dimostrazione e l'esplicitazione delle regole inferenziali utilizzate dovranno avere lo scopo di fornire elementi, oltre a quelli già in possesso dagli studenti, per capire le idee che stanno dietro alla dimostrazione presa in esame e, più in generale, per capire come si struttura una dimostrazione.
A titolo esemplificativo proponiamo la seguente dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, evidenziandone il principale schema inferenziale utilizzato. Si nega la tesi, ossia si assume l'ipotesi che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Ciò equivale a dire che $\sqrt{2}$ può essere espresso come rapporto di numeri naturali primi fra loro (si farà notare che l'ipotesi che i numeri siano primi fra loro non fa perdere generalità alla dimostrazione).
Dall'ipotesi che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, con m e n primi fra loro (ossia $2n^2 = m^2$) segue un assurdo in quanto nel numero $2n^2$ si ha un fattore primo 2 in più rispetto al numero m^2 (ciò suppone il teorema fondamentale dell'aritmetica sull'unicità essenziale della scomposizione in fattori di un intero).
Si dice che si è dimostrato per assurdo l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Cerchiamo di capire meglio il significato di questo importante schema dimostrativo. Per fare ciò si analizzeranno preliminarmente due segni logici, il *non* (~) e il *se...allora* (→). Si possono esplicitare gli schemi deduttivi utilizzando, per esempio, le regole della deduzione naturale o anche limitarsi a descrivere nella lingua naturale gli schemi di deduzione utilizzati, come suggerito qui di seguito.

1. L'implicazione materiale.
Supponiamo che assumendo una certa ipotesi p si derivi un enunciato q: è naturale dire che ciò

equivale a una dimostrazione di $p \to q$ (sarebbero necessarie alcune ulteriori restrizioni su cui si sorvola per semplicità). Si può rappresentare questa equivalenza con la seguente regola:

$$\frac{\begin{array}{c}[p]\\ | \\ q\end{array}}{p \to q}$$

(schema di introduzione dell'implicazione)

Il significato della parentesi quadrata è questo. Ogni formula dedotta a partire da un dato insieme di assunzioni, dipende in genere da queste (la sbarretta verticale indica che nella dimostrazione ad esempio di q dall'ipotesi p possono essere stati fatti vari passaggi, che non vengono esplicitati). Nel corso di una dimostrazione è però possibile *scaricare* alcune assunzioni, ossia fare in modo che le formule derivate non dipendano più da tali assunzioni. Nell'esempio, se si assume la formula p, da essa si deriva la formula q, e si conclude $p \to q$: tale formula non dipende più dalla assunzione p (che è stata assorbita nella formula $p \to q$); si dice allora che p è stata *scaricata* e per indicare tale fatto si mette p fra parentesi quadre.
La regola descritta è 'inversa' a quella del cosiddetto 'modus ponens', che fa passare da una dimostrazione di $p \to q$ a una dimostrazione di q in cui p è assunto come ipotesi:

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

(modus ponens: schema di eliminazione dell'implicazione)

2. Significato del non.
Si introduce un segno per l'assurdo: $\perp$.
Il segno di assurdo permette di entrare nel significato di $\sim p$: infatti asserire $\sim p$ significa proprio asserire che da p segue un assurdo, cioè $p \to \perp$. (si pensi ad esempio al significato dell'enunciato "$\sqrt{2}$ non è razionale").. Con questa interpretazione di $\sim p$ si può osservare che lo schema di introduzione dell'implicazione diventa:

$$\frac{\begin{array}{c}[p]\\ | \\ \perp\end{array}}{\sim p}$$

Cioè se dall'ipotesi p si deduce un assurdo, ciò equivale a una dimostrazione di $\sim p$: lo scaricamento di p ha come conseguenza che in tale dimostrazione non si ha più p come ipotesi. Nella dimostrazione presa in considerazione, $\sim p$ è la proposizione "$\sqrt{2}$ non è razionale": la si è dimostrata usando proprio questo schema.

Lo schema di eliminazione diventa:

$$\frac{p \qquad \sim p}{\perp}$$

Cioè se si dimostrano sia p sia $\sim p$, si è dimostrato un assurdo.

3. Dimostrazione per assurdo.
Più complesso lo schema di dimostrazione per assurdo, che viene schematizzato così:

$$\frac{\begin{array}{c}[\sim p] \\ | \\ \perp\end{array}}{p}$$

Cioè: se supponendo $\sim p$ si dimostra un assurdo, allora ciò equivale ad una dimostrazione di p, senza utilizzare l'ipotesi $\sim p$ ($\sim p$ è scaricato). In altre parole per dimostrare la tesi p, si suppone che valga la sua negazione e si dimostra un assurdo (ad esempio un enunciato q in contraddizione con un altro enunciato $\sim q$ già provato).
Si osserva che con la regola di introduzione dell'implicazione si dimostra solo $\sim\sim p$, per scaricamento di $\sim p$.

$$\frac{\begin{array}{c}[\sim p] \\ | \\ \perp\end{array}}{\sim\sim p}$$

Lo schema di dimostrazione per assurdo equivale ad ammettere la regola di cancellazione della doppia negazione, cioè la regola in base alla quale $\sim\sim$ p equivale a p.
È raro incontrare questo schema nelle dimostrazioni che si incontrano a scuola: di solito si tratta invece dello schema di introduzione dell'implicazione applicato a dimostrazioni in cui si è dimostrato l'assurdo a partire da un'ipotesi p, da cui si conclude $\sim p$, scaricando p. È proprio il caso del nostro esempio sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$: nella dimostrazione presa in considerazione, $\sim p$ è la proposizione "$\sqrt{2}$ non è razionale" e la si è dimostrata usando proprio lo schema visto nel punto 2.
Un altro esempio di questo tipo negli Elementi di Euclide è la proposizione 20 del IX libro che asserisce l'infinità dei numeri primi (si identifica "l'essere infinito" con il "non essere finito"): si parte dall'assunzione che i numeri primi siano in numero finito e si dimostra un assurdo. Si conclude che i numeri primi non sono in numero finito.

Un esempio di uso dello schema di dimostrazione per assurdo come illustrato nel punto 3 è invece la proposizione numero 6 del primo libro di Euclide (è la prima dimostrazione per assurdo degli *Elementi*): un triangolo che ha due angoli uguali ha uguali anche i lati opposti a quegli angoli. Nella dimostrazione si parte con la negazione della tesi, supponendo che i due lati non siano uguali e si trova un assurdo. Quindi si conclude che i due lati devono essere uguali.
(Si può consultare il sito web http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI6.html per leggere la traduzione in inglese degli *Elementi* di Euclide: esso contiene degli applet Java con figure animate dei vari teoremi).

Elementi di prove di verifica

1. Dopo aver dimostrato che il prodotto di tre numeri naturali è divisibile per 6, esplicitare gli schemi deduttivi utilizzati (suggerimento: dati tre numeri naturali consecutivi, almeno uno è pari e almeno uno è divisibile per 3...)

2. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti valgono i seguenti fatti:
A1. i cavalieri dicono sempre la verità;
A2. i furfanti mentono sempre;
A3. sull'isola non vi sono altri abitanti oltre ai cavalieri e ai furfanti.
Si supponga che appena arrivato sull'isola si presentino due abitanti dell'isola che dicono entrambi:
"Io sono un cavaliere se e solo se lui è un cavaliere".
È possibile decidere la natura dei due abitanti (ossia dire se sono cavalieri o furfanti)? Giustificare la risposta esplicitando lo schema deduttivo utilizzato nel ragionamento.

3. Dimostrare che il quadrato di un numero dispari è il successivo di un multiplo di 8. Esplicitare lo schema deduttivo utilizzato nella dimostrazione.

4. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi. Esplicitare lo schema deduttivo utilizzato nella dimostrazione.

Riferimenti bibliografici

Barozzi, G. C., (1996), *Corso di analisi matematica*, Zanichelli: Bologna.

Berzolari, L.; Vivanti, G.; Gigli, D., (1930), *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi,* Hoepli: Milano (esistono varie riproduzioni anastatiche dell'opera, l'ultima delle quali a cura della Casa Editrice Pagine Srl - Via G. Serafino, 8 - 00136 Roma)

Boursin, J.-L., (1992), *Caso e probabilità - Il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni*, Marco Nardi Editore, Firenze; Stampatore: Cox e Wyman Reading (Traduzione dal francese di Fiorenza Magari del volume: *Les structures du hasard*, Ed. Seuil, Paris, 1986).

Campbell, H.G.; Spencer, R. E., (1977), *Finite Mathematics and Calculus*, Macmillan Publishing Co.: New York.

Cicchitelli G., (2001), *Probabilità e statistica*, Maggioli ed.: Rimini.

De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità,* vol. 1, vol. 2, Einaudi: Torino.

Guseo R., (1997), *Istituzioni di statistica*, CEDAM ed.: Padova.

Impedovo, M., (1999), *Matematica: insegnamento e computer algebra*, Springer: Milano.

Junek, H.; Menghini, M., (2004), Processi di crescita e decadimento: un percorso per alunni del triennio di scuola superiore, *Progetto Alice*, V, 79-102.

Kendall, M. G.; Moran, P. A. P., (1963), *Geometric Probability,* Hafner: New York.

Leti G., 1983. *Statistica descrittiva*, Il Mulino: Bologna.

Lombardo, E.; Schinaia, G., (2003), Considerazioni su un test d'ingresso per corsi di Matematica e Statistica nelle facoltà di Economia, *Induzioni*, n. 26.

Lombardo Radice, L.; Mancini Proia, L., (1977), *Il metodo Matematico*, Principato: Milano.

Menghini, M.; Barsanti, M., (1998), *Strategie matematiche: problemi di analisi*, Pitagora: Bologna.

MPI, (1996), *L'insegnamento della Logica*, Maglie, L.G. "Capece".

MPI, (1997), *I temi nuovi nei programmi di Matematica (Probabilità, Statistica, Logica, ...) e il loro inserimento nel curriculum*, Collana "Quaderni", n. 26/2, Lucca, L.S. "A.Vallisneri".

MPI, (1999), *Probabilità e Statistica nella Scuola liceale,* Collana "Quaderni", n. 28, Lugo di Romagna, L.S. "G. Ricci Curbastro".

Parzen, E., (1974), *La moderna teoria delle probabilità e le sue applicazioni*, F. Angeli.

Villani, V., (1997), *Matematica per discipline biomediche*, McGraw-Hill, 2ª ed..

Commissione UMI
"Curricolo di Matematica"

Coordinatore:
Ferdinando Arzarello, Università di Torino

Componenti:
Ajello Marilina, L.S. "Cannizzaro", Palermo
Anichini Giuseppe, Università di Firenze
Anzellotti Gabriele, Università di Trento
Bernardi Claudio, Università "La Sapienza" di Roma
Castagnola Ercole, Università di Napoli, Scuola di Specializzazione
Ciarrapico Lucia, Ministero Istruzione, Roma
Citrini Claudio, Politecnico di Milano
D'Aprile Margherita, Università della Calabria
Dalé Marina, L.S. "Copernico", Brescia
Dibilio Biagio, Ministero Istruzione, Roma
Eugeni Franco, Università di Teramo
Giacardi Livia, Università di Torino
Greco Rosario, L.S. "Majorana", Caltagirone (CT)
Impedovo Michele, Università "Bocconi" di Milano
Mammana Carmelo, Università di Catania
Marchi Mario, Università "Cattolica" di Milano
Maroscia Paolo, Università "La Sapienza"di Roma
Menghini Marta, Università "La Sapienza" di Roma
Ottaviani Gabriella, Università "La Sapienza" di Roma
Paola Domingo, L. S. "Issel", Finale Ligure (SV)
Proia Daniela, L. G. "Virgilio", Roma
Robutti Ornella, Università di Torino
Rossi Carla, Seconda Università di Roma
Ruganti Riccardo, L.G. "Forteguerri", Pistoia
Sbordone Carlo, Università "Federico II" di Napoli
Tomasi Luigi, L.S. "Galilei", Adria (RO)

Seminario "Lugo 2004"

Responsabili del Progetto:
Prof. Ferdinando Arzarello (UMI)
Isp. Lucia Ciarrapico (MIUR)

Direttore organizzativo:
Prof. Mariangela Liverani, Dirigente scolastico, L. S. "G. Ricci Curbastro", Lugo di Romagna

Elenco dei partecipanti:

Accomazzo Pierangela	Liceo Scientifico "Einstein", Torino
Ajello Maria	Liceo Scientifico "Cannizzaro", Palermo
Anichini Giuseppe	Università di Firenze
Baruzzo Gianpaolo	I.T.I.S. "G. Zuccante", Mestre (Ve)
Cagnacci Roberto	Liceo Scientifico "A. Vallisneri", Lucca
Cappuccio Sebastiano	Istituto Tecnico Aeronautico "F. Baracca", Forlì
Capucci Elisa	Liceo Scientifico "G. Ricci Curbastro", Lugo (Ra)
Castagnola Ercole	Università di Napoli, Scuola di Specializzazione
Conti Bruno	Liceo Scientifico "G. Ricci Curbastro", Lugo (Ra)
Dalé Marina	Liceo Scientifico "N. Copernico", Brescia
Di Sorbo Domenica	MIUR
Dirani Paola	Liceo Scientifico "G. Ricci Curbastro", Lugo (Ra)
Greco Rosario	Liceo Scientifico "E. Majorana", Caltagirone (Ct)
Margiotta Giovanni	MIUR
Menghini Marta	Università "La Sapienza" di Roma
Nardini Paolo	Liceo Scientifico "A. Vallisneri", Lucca
Nolli Nicoletta	Liceo Scientifico "G. Aselli", Cremona
Ottaviani M. Gabriella	Università "La Sapienza" di Roma
Paola Domingo	Liceo Scientifico "A. Issel", Finale Ligure (Sv)
Pirazzini Enrica	Liceo Scientifico "G. Ricci Curbastro", Lugo (Ra)
Proia Daniela	Liceo Classico "Virgilio", Roma
Ranzani Paola	I.T.I.S. "C. Zuccante", Mestre (Ve)
Rigatti Luchini Silio	Università di Padova
Robutti Ornella	Università di Torino
Rossetto Silvano	I.T.T. "G. Mazzotti", Treviso
Ruganti Riccardo	Liceo Classico "Forteguerri", Pistoia
Tomasi Luigi	Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (Ro)
Zanzi Obriana	Liceo Scientifico "G. Ricci Curbastro", Lugo (Ra)

Indice

Tipografia FRANZOSO di Giuseppe Giacomoni
Lugo di Romagna, marzo 2006