Ministero
dell'Istruzione,
dell'Università e
della Ricerca

Direzione Generale
per la Formazione

MATEMATICA 2003

Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica

Ciclo secondario

Unione
Matematica
Italiana

Società Italiana
di Statistica

Mathesis

Comitato di redazione

Giuseppe Anichini
Ferdinando Arzarello
Lucia Ciarrapico
Ornella Robutti

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri"
Lucca
Maggio 2003

LA FORMAZIONE MATEMATICA NELLA SOCIETÀ D'OGGI

Giuseppe Cosentino
Direttore Generale per la Formazione, MIUR

La collana dei "Quaderni" del MIUR si arricchisce di un nuovo volume dedicato ai docenti della scuola secondaria di secondo grado.
Lo scopo della pubblicazione è duplice:
- contribuire alla formazione e all'aggiornamento dei docenti della scuola italiana;
- dare un'ulteriore testimonianza delle numerose iniziative che il Ministero dell'Istruzione realizza attraverso i protocolli d'intesa stipulati con le varie associazioni disciplinari, in questo caso l'Unione Matematica Italiana, la Società Italiana di Statistica, la Mathesis.

La scuola vive un momento di grandi trasformazioni. Un volume come questo, quindi, è di estrema attualità in quanto offre ai docenti interessanti spunti didattici, soprattutto perché pensato e realizzato da loro colleghi che vivono quotidianamente la difficoltà di tradurre in concrete e fattive proposte didattiche i contenuti delle varie discipline. È fondamentale, infatti, promuovere un insegnamento che coinvolga attivamente gli allievi e produca in loro una crescita culturale, etica e civica, facendone dei cittadini in grado di operare scelte e di prendere decisioni consapevoli e con capacità critica.
Anche a livello internazionale è riconosciuto il contributo fondamentale dell'educazione matematica nella formazione dei giovani, cittadini del domani. Essa, tuttavia, è spesso poco amata, soprattutto per l'immagine non positiva che ne danno i mass-media. Ciò avviene proprio mentre la richiesta di formazione matematica è sempre più diffusa ed avvertita in tutti i Paesi.
Jean-Pierre Bourguignon, Presidente della Società Matematica Europea nel 2000, scriveva che:

> *"Molti… "oggetti" della matematica sono collegati sia con le componenti più dinamiche dell'economia, in quanto questa nuova presenza è strettamente connessa alle possibilità offerte dai computer, sia con molti altri aspetti dell'organizzazione nella società moderna. Quotidianamente noi usiamo molti oggetti il cui funzionamento è basato su risultati matematici e spesso su quelli più recenti. Nell'attuale società la matematica è sempre presente, ora più che mai, ma di questo non sempre siamo consapevoli, neppure noi matematici".*

La frase lancia una sfida ai paesi maggiormente sviluppati e che mirano a un forte avanzamento tecnologico: è soprattutto la scuola che deve farsene concretamente carico.
L'Italia non può non raccogliere questo invito pressante. La scuola ha quindi bisogno di docenti ben preparati in matematica, che siano in grado di avvicinare gli allievi a questa disciplina in modo stimolante ed amichevole.

Vogliamo perciò diffondere questo materiale veicolandolo principalmente su un supporto informatico[1], ma anche come volume a stampa. In tal modo i docenti interessati potranno accedere con facilità ai suoi contenuti, adattandoli al proprio stile di insegnamento.
Come Direttore Generale per la Formazione del MIUR, desidero ringraziare quanti hanno contribuito alla sua realizzazione e in particolare:
- l'Unione Matematica Italiana, la Società Italiana di Statistica, l'Associazione Mathesis, per il rilevante contributo scientifico offerto,

[1] Il testo reperibile sul sito del L. S. "Vallisneri" di Lucca (www.liceo-vallisneri.lu.it) e in quello dell'UMI (www.dm.unibo.it/~umi).

- gli ispettori Lucia Ciarrapico e Biagio Dibilio, senza i quali questa iniziativa non si sarebbe realizzata,
- il dirigente scolastico del L.S. “A.Vallisneri” di Lucca, prof. Giuseppe Ciri, che ha diretto il corso con la consueta efficienza, e il personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di Segreteria,
- i docenti partecipanti, per i loro preziosi contributi.

Sono certo che il volume arricchirà la professionalità dei docenti e contribuirà a migliorare l’insegnamento della matematica nella scuola italiana.

PRESENTAZIONE

Ferdinando Arzarello, UMI-CIIM
Lucia Ciarrapico, MIUR
Biagio Mario Dibilio, MIUR

Nel luglio 2000 il Presidente dell'Unione Matematica Italiana (UMI), prof. Carlo Sbordone, facendo seguito ad una delibera della Commissione Scientifica dell'Unione, ha insediato una Commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai mutati bisogni della società del nuovo secolo. Iniziative analoghe sono state avviate anche da associazioni di matematici in Europa e nel mondo, che hanno avvertito le stesse esigenze.

La Commissione è coordinata dal Presidente della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), prof. Ferdinando Arzarello, e costituita da docenti sia universitari sia della scuola. In particolare ne fanno parte i membri dell'attuale CIIM e i suoi passati Presidenti.

La Commissione ha deciso di elaborare un curricolo di matematica definendone le conoscenze fondamentali da acquisire, indipendentemente, per quanto riguarda il ciclo secondario, dalla varietà dei suoi indirizzi. E' emersa perciò l'idea della "matematica per il cittadino", cioè di un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.

Sono stati elaborati un unico curricolo sia per la scuola primaria e secondaria di primo grado sia per il ciclo secondario. Nel secondo ciclo il docente opererà approfondimenti e adattamenti tenendo presente la specificità dei singoli indirizzi.

Alla conclusione dei lavori, la Commissione ha deciso di promuovere iniziative volte ad illustrare il significato delle scelte operate all'interno del curricolo. In questa prospettiva ha ritenuto che i messaggi da lanciare al mondo degli insegnanti di matematica sarebbero stati meglio compresi attraverso concrete esemplificazioni.

Perciò un gruppo di esperti (ispettori, docenti universitari, insegnanti di scuola, alcuni dei quali membri della Commissione stessa) ha lavorato durante alcuni seminari residenziali svoltisi a Viareggio, alla produzione di un cospicuo numero di esempi di attività didattiche e di suggerimenti per prove di verifica, coerenti con gli obiettivi dei curricoli elaborati.

Tale attività è stata realizzata nell'ambito delle finalità previste da un Protocollo d'Intesa, sottoscritto nel 1993 dall'allora Ministero della Pubblica Istruzione e dall'UMI, esteso nel 1999 alla Società Italiana di Statistica, e rinnovato nel 2002 dal MIUR. Scopo dell'intesa è una sempre maggiore qualificazione dell'insegnamento della matematica nella scuola italiana.

Il presente volume è strutturato in due parti: nella prima parte è presentato il curricolo dei primi quattro anni del ciclo secondario, nella seconda sono esposti i relativi esempi di attività in numero di 85.

Le due parti, curricoli ed esempi, sono organizzate nel seguente modo.

Il curricolo, preceduto da una *premessa* che individua le linee guida per l'insegnamento della matematica, è strutturato in sette nuclei che individuano le abilità e le conoscenze fondamentali che devono essere acquisite nei primi quattro anni del ciclo secondario. L'esposizione dei curricoli è completata da un documento sul Laboratorio di Matematica e su alcuni aspetti metodologici che esprimono il punto di vista emerso nell'ambito della Commissione UMI.

La seconda parte, cui ha collaborato anche la società Mathesis, presenta gli esempi di attività didattica e di elementi di verifica organizzandoli verticalmente in relazione ai vari nuclei previsti nel curricolo. All'inizio di ogni nucleo, prima delle attività, è presente una introduzione, seguita da una tabella riassuntiva delle varie attività relative al nucleo stesso, con il numero della pagina in cui sono collocate. In ogni esempio è comunque indicato il livello scolare più appropriato cui esso si riferisce. Gli esempi proposti sono di vario livello di difficoltà; ovviamente sarà cura dell'insegnante sceglierli secondo le proprie preferenze e adattarli al livello della classe.

Il curricolo di matematica
Ciclo Secondario

(primo e secondo biennio)

Premessa

L'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale e non deve costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni.

In tal senso la matematica compare in tutto il mondo quale elemento essenziale nella formazione degli allievi a tutti i livelli d'età e qualunque sia il percorso scelto, di istruzione o di formazione, nel ciclo secondario. Purtroppo questa necessità è spesso presentata in forma negativa dai mass-media: la matematica di conseguenza è da molti studiata più per obbligo che per piacere. Per giunta molte persone anche colte giustificano il loro disinteresse con il pretesto, scientificamente infondato, di non avere inclinazione per la materia. Invece la moderna società richiede conoscenze e abilità matematiche sempre più diffuse.
Significativa a questo proposito è la risoluzione approvata all'unanimità nel 1997, in cui la Conferenza generale dell'UNESCO così si esprime:

> *"...considerata l'importanza centrale delle matematica e delle sue applicazioni nel mondo odierno nei riguardi della scienza, della tecnologia, delle comunicazioni, dell'economia e di numerosi altri campi;*
>
> *consapevole che la matematica ha profonde radici in molte culture e che i più importanti pensatori per migliaia di anni hanno portato contributi significativi al suo sviluppo, e che il linguaggio e i valori della matematica sono universali e in quanto tali ideali per incoraggiare e realizzare la cooperazione internazionale;*
>
> *si sottolinea il ruolo chiave dell'educazione matematica, in particolare al livello della scuola primaria e secondaria sia per la comprensione dei concetti matematici, sia per lo sviluppo del pensiero razionale".*

In questa sfida all'inizio del nuovo millennio l'Italia non può restare indietro. Abbiamo, perciò, bisogno di docenti ben preparati in matematica che avvicinino gli allievi a questa disciplina con curiosità e fantasia.

La formazione del curricolo scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro un sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambi gli aspetti sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato lungo tutto il percorso di formazione. Dentro a competenze strumentali come

eseguire calcoli, risolvere equazioni, leggere dati, misurare una grandezza, calcolare una probabilità, è, infatti, sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati, non ha senso senza i riferimenti ai calcoli, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, alle diverse dimostrazioni che evidenziano i diversi significati di un enunciato matematico: essi costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della matematica traggono alimento. Entrambi i tipi di competenze costituiscono, perciò, obiettivi di lungo termine, cui occorre dare compimento nel corso del ciclo secondario. La loro costruzione completa così un percorso iniziato già nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado, realizzando una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta.

Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà in particolare essere colto dagli alunni attraverso opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli studenti. È, infatti, importante che non si operino delle forzature, o peggio si inventi una storia inesistente, per adattare le problematiche storiche alle conoscenze degli alunni: la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata.

Il bambino, e tanto più il giovane, non è una tabula rasa che acquisisce i concetti matematici per pura astrazione. Le ricerche più recenti hanno provato che sono le esperienze ad attivare gli opportuni circuiti cerebrali di cui l'essere umano già dispone. Non si tratta di imporre una matematica dall'esterno, ma di fare evolvere dall'interno la matematica che vive nel nostro corpo. Quindi le intuizioni, le metafore concettuali ecc. non sono un primo vago approccio ai concetti matematici, qualcosa di 'sporco' e scorretto da fare sparire al più presto, ma ne costituiscono un ingrediente fondamentale, che rimane anche a livelli estremi di rigore. Conseguentemente, la matematica deve essere insegnata come un'impresa umana (nel senso ampio di questo termine), non come qualcosa che va contro il nostro essere. Ciò ha conseguenze importanti sia rispetto a molte teorie didattiche sia rispetto al ruolo che i misconcetti e gli errori possono giocare nell'apprendimento.

Con riferimento alla doppia modalità introdotta sopra, i nuclei essenziali su cui costruire le competenze matematiche del giovane proseguono quelli già individuati per il primo ciclo.
Pertanto quattro sono i nuclei tematici del curricolo che qui è proposto: essi completano i contenuti dell'educazione matematica avviati negli anni precedenti:

- *Numero e algoritmi;*
- *Spazio e figure;*
- *Relazioni e funzioni;*
- *Dati e Previsioni*.

Rispetto ai Nuclei proposti per il ciclo primario, sono stati aggiunti alcuni temi particolarmente significativi: algoritmi e funzioni, che pure in forma intuitiva trovavamo posto già negli anni precedenti. L'insegnante dovrà cercare di svilupparli unitamente agli altri argomenti in modo coordinato, cogliendo ogni occasione di collegamenti interni e con altre discipline.

Vi sono anche tre nuclei trasversali, centrati sui processi mentali degli allievi, che continuano anch'essi il percorso iniziato fin dalla scuola primaria, con l'aggiunta della parola "dimostrazione", attività chiave della matematica matura:

- *Argomentare, congetturare, dimostrare;*
- *Misurare;*
- *Risolvere e porsi problemi.*

Il primo, che in realtà è un nucleo misto, contiene anche alcuni contenuti di tipo logico e caratterizza le attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive a forme di pensiero più rigoroso e sistematico, in particolare alla dimostrazione, cuore del pensiero matematico stesso.
Il secondo consente un approccio esperienziale e teorico alle grandezze, in collegamento con le scienze, per ricavare relazioni tra le grandezze esperite e costruire modelli di fenomeni studiati.
Il terzo offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi, per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza e per giungere all'uso di modelli matematici in contesti vari.

La proposta è completata da una riflessione sul *Laboratorio di matematica* e da alcune *Indicazioni metodologiche*. Va osservato che il *Laboratorio* non costituisce né un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate sull'uso di strumenti, tecnologici e non, e finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non vuole essere un luogo fisico diverso dalla classe, ma piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone, strutture, idee.

Il curricolo è presentato secondo la seguente scansione:

- Primo biennio (classe prima e seconda)
- Secondo biennio (classe terza e quarta).

È in preparazione un ulteriore volume per la classe quinta contenente percorsi ed esempi sia di approfondimento sia di consolidamento rispetto alle abilità e conoscenze dei primi quattro anni. Esso conterrà anche un capitolo con suggerimenti per l'uso della storia della matematica nell'insegnamento: esso completa le sintetiche note storiche del presente volume.

Ferdinando Arzarello

Abilità e conoscenze matematiche

Ciclo Secondario
(Primo e secondo biennio)

Numeri e algoritmi

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• Calcolare quoziente e resto nella divisione tra interi : $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$. • Scrivere un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 ad esponente intero. • Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. • Scrivere un numero in notazione scientifica • Stimare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico. • Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. • Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali (cfr. *Misurare* e *Dati e previsioni*). • Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo ad essa equivalente e, viceversa, dato un grafo di calcolo, scrivere l'espressione numerica a esso corrispondente. Usare consapevolmente le parentesi. (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Calcolare somma, prodotto, quadrato di polinomi.	• Il teorema fondamentale dell'aritmetica. • Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi: elementi neutri, opposto, ordinamento, valore assoluto. • Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali: elementi neutri, opposto, inverso, ordinamento. • I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali (1). • Rappresentazioni scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali. • Analogie e differenze tra i diversi insiemi numerici. Rappresentazione dei numeri sulla retta. • La potenza di numeri positivi con esponente razionale. • I polinomi e le loro operazioni (addizione e moltiplicazione). Il grafo di calcolo di un'espressione (numerica e algebrica). • Polinomi in una indeterminata. (cfr. *Relazioni e funzioni*).

(1) I numeri reali vanno introdotti in forma intuitiva e non, ad esempio, come coppie di classi contigue.

Spunti storici

- Evoluzione storica del concetto di numero (i numeri nell'antichità, i numeri nel Medio Evo – gli "Abacisti", la difficoltà nell'accettare i numeri negativi, i numeri reali e il problema della continuità (cfr. *Spazio e figure*).
- Il numero zero.

Osservazioni

- Un esame critico di come si modifica il concetto di potenza quando si passa da un insieme numerico a un altro (ad esempio dagli interi, ai razionali, ai reali) prepara la strada all'introduzione della funzione esponenziale e della funzione logaritmica.
- Porre l'attenzione sui diversi significati che talvolta può assumere lo stesso segno; per es. il segno – (meno) può indicare l'opposto (operazione unaria) o l'operazione di sottrazione (operazione binaria). Le calcolatrici scientifiche e le moderne calcolatrici

grafiche possiedono due tasti distinti (e a volte utilizzano due simboli diversi) per indicare i diversi significati.
- Uno scoglio concettuale e operativo rilevante, sul quale è bene insistere, è il prodotto di un numero (positivo) x per un numero k compreso tra 0 e 1. Il risultato è minore di x, e questo si scontra con un modello di moltiplicazione (tra numeri naturali) acquisito e sedimentato, secondo il quale la moltiplicazione è un'addizione ripetuta. Occorre insistere per cogliere, per esempio nel prodotto $120 \cdot 0{,}8$ il calcolo dell'80% di 120. Nel calcolo con le percentuali (per esempio: il prezzo 120 euro diminuisce del 7%) il modello moltiplicativo ($120 \cdot 0{,}93$) dovrebbe affiancarsi e prevalere sul modello additivo ($120 - 0{,}07 \cdot 120$).

Si sconsiglia di:
- Calcolare espressioni numeriche eccessivamente complesse; conviene demandare a strumenti di calcolo simbolico la loro manipolazione e semplificazione.
- Trasformare espressioni contenenti radicali (ad es. la razionalizzazione del denominatore, ecc.): conviene ridurre al minimo il calcolo coi radicali.
- Introdurre i monomi e poi i polinomi. L'oggetto matematico fondamentale è il polinomio (per esempio a coefficienti razionali o reali).
- Sottolineare eccessivamente la Regola di Ruffini per la divisione dei polinomi: è importante invece il teorema di Ruffini, che verrà svolto eventualmente nel secondo biennio.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Individuare analogie e differenze tra i diversi insiemi, numerici (naturali, interi, razionali, reali) *e non* numerici (polinomi nei razionali, nei reali, nelle classi di resto, vettori, …) dal punto di vista operazionale. • Eseguire semplici fattorizzazioni di polinomi nei razionali. • Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	• La divisione dei polinomi. • Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale, prodotto scalare (cfr. *Spazio e figure*).

Spunti storici
- Cenni sulla teoria dei codici (con riferimenti anche alla statistica per i metodi frequentisti).

Osservazioni
- Lo strumento *vettore* viene utilizzato anche in altre discipline, come ad esempio in Fisica, ed è quindi opportuno esaminare tale concetto sotto diversi punti di vista. I nuovi software di Geometria Dinamica prevedono l'uso dello *Strumento Vettore*.

Spazio e figure

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure. geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri (cfr. *Laboratorio di matematica*). • Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, …) (cfr. *Laboratorio di matematica*). • Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Risolvere e porsi problemi, Laboratorio di matematica)*. • Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Laboratorio di matematica*). • Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Laboratorio di matematica, Dati e previsioni*). • Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare*). • Riconoscere e costruire poligoni equiscomponibili • Calcolare perimetri e aree di poligoni (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Misurare*). • Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato (cfr. *Relazioni e funzioni*).	• Dallo spazio al piano: nozioni intuitive. Rette, semirette, segmenti, piani, semipiani, angoli. Poliedri, coni, cilindri, sfere e loro sezioni. • Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. • Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. • Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. • Lunghezze e aree dei poligoni. Esempi di grandezze incommensurabili. • Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. Simmetrie nei poliedri regolari. • Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza tra due punti. Equazione della retta; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità.

Spunti storici

- Il problema della conoscenza in geometria: origini empiriche e fondazione razionale dei concetti geometrici.
- Le origini: Talete, Pitagora, Euclide.
- La scoperta di grandezze incommensurabili.
- Cartesio e l'algebrizzazione della geometria.
- L'origine degli strumenti geometrici: dalla riga e compasso al computer.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine e descrivere le figure con la terminologia specifica. • Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini (cfr. *Argomentare, congetturare, dimostrare, Laboratorio di matematica*). • Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza. (cfr. *Argomentare, congetturare, dimostrare*). • Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici (cfr. *Laboratorio di matematica*). • Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole (cfr. *Risolvere e porsi problemi*). • Calcolare valori approssimati di π (cfr. *Numeri e algoritmi, Laboratorio di matematica, Misurare*). • Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli. Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari (cfr. *Laboratorio di matematica, Argomentare, congetturare, dimostrare*, *Risolvere e porsi problemi*). • Calcolare aree e volumi di solidi (cfr. *Misurare*). • Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza (cfr. *Laboratorio di matematica, Argomentare*, *congetturare, dimostrare*, *Risolvere e porsi problemi*).	• Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze. • Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia. • La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili. • Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche. (1) • Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero π. • Seno, coseno e tangente di un angolo. Coordinate polari. • Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo. • Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio. • Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi. • Proprietà dei principali solidi geometrici.

(1) Le equazioni della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole saranno considerate in sistemi di riferimento opportuni.

Spunti storici

- La sezione aurea.
- I problemi classici: duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del cerchio.
- Ripercorrere il metodo di Archimede per determinare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.
- Dalla geometria alle geometrie (una panoramica sugli sviluppi che dall'Ottocento portano al nostro secolo).

Dizionarietto

- Macchine matematiche. Le 'macchine matematiche' hanno particolare interesse nella didattica della geometria. In questo contesto, una macchina matematica ha lo scopo di obbligare un punto, un segmento, una figura (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili e tangibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge.
  Esempi di macchine matematiche sono i tracciatori di curve, i pantografi, i prospettografi. Una vasta collezioni di MM per la didattica disponibile nel Laboratorio delle Macchine Matematiche del Dipartimento di Matematica di Modena (www.macchinematematiche.unimore.it).

Relazioni e funzioni

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (variazione di una grandezza in funzione di un'altra, semplici successioni,…) (cfr. *Numeri e algoritmi, Spazio e figure, Dati e previsioni, Risolvere e porsi problemi, Misurare*). • Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, la notazione con freccia, il diagramma ad albero, il grafico. • Utilizzare le proprietà delle operazioni tra i numeri per risolvere un'equazione di primo grado (cfr. *Numeri e algoritmi*). • Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado (cfr. *Spazio e figure, Risolvere e porsi problemi*).(2) • Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano (in particolare, semirette, segmenti, semipiani) (cfr. *Spazio e figure, Risolvere e porsi problemi*).	• Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. • Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti (1). • Zero e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita. • Sistemi lineari. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite. • Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica. • Relazioni d'ordine.

(1) Lo studio delle funzioni lineari e quadratiche può essere agevolato dall'osservazione del cambiamento dei loro grafici per effetto di trasformazioni geometriche elementari (traslazioni, opportune simmetrie centrali e assiali).
(2) Per acquisire le competenze relative alla formalizzazione e rappresentazione di leggi e relazioni, lineari e non, è consigliabile l'uso di software adeguati per le rappresentazioni grafiche.

Spunti storici

- Qualche esempio di antiche tecniche, utilizzate dagli Egiziani, dagli Indiani, dagli Arabi, per la risoluzione delle equazioni di primo grado: il metodo della "falsa posizione" semplice.

Si sconsiglia di:

- Presentare le relazioni, in particolare le relazioni d'ordine, come argomento a sé; esse vanno riconosciute e considerate durante l'esame delle proprietà dei vari insiemi numerici e delle funzioni elementari, come concetti che nascono generalizzando proprietà note.
- Introdurre precocemente simboli e formalismi non necessari; al contrario, per rendere comprensibile e apprezzabile l'uso dei simboli e delle formule conviene costruire e proporre, gradualmente, situazioni in cui siano evidenti i vantaggi di un linguaggio formale.

- Ridurre lo studio delle equazioni a pure tecniche manipolative per ottenere le soluzioni. Lo studente innanzitutto dovrà riconoscere e costruire equazioni lineari equivalenti e intenderne il significato.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni (1). • Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione; funzione inversa. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi (2). • Rappresentare e risolvere problemi di secondo grado, riconoscere problemi di secondo grado privi di soluzioni, rappresentare graficamente e risolvere problemi che si formalizzano con sistemi di secondo grado (cfr. *Spazio e figure, Risolvere e porsi problemi*). • Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici (cfr. *Numeri e algoritmi*, *Dati e previsioni, Risolvere e porsi problemi, Misurare*). • Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni e disequazioni (cfr. *Spazio e figure, Numeri e algoritmi, Misurare*). • Possedere il senso intuitivo di "limite di una successione" (cfr. *Numeri e algoritmi*, *Laboratorio di matematica*). • Rappresentare fenomeni non lineari valutando la variazione media. (cfr. *Risolvere e porsi problemi*).	• Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali (1). • Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari. • La funzione esponenziale; la funzione logaritmica; le funzioni seno, coseno, tangente. I loro grafici. • Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Il numero *e*. • Approssimazione dell'area sottesa da un grafico. • Incrementi a passo costante, pendenza media (3).

(1) Il repertorio di esempi di funzioni e equazioni dovrebbe essere abbastanza vasto da coprire le esigenze di applicazioni alla statistica e alla fisica, ma non deve includere funzioni e equazioni inutilmente complicate. Lo studio delle funzioni razionali e delle funzioni lineari va agevolato mediante la composizione di funzioni elementari e con l'uso delle trasformazioni geometriche (in particolare: traslazioni; opportune simmetrie centrali e assiali; cambiamenti delle unità di misura; cfr. *Spazio e figure, Dati e previsioni*).
(2) Lo studio delle funzioni deve essere qualitativo e deve utilizzare principalmente la lettura del grafico. E' spontaneo inoltre, nell'ipotizzare il comportamento di funzioni quali $y = 1/x$, $y = ln(x)$, $y = exp(x)$, introdurre il concetto di asintoto orizzontale o verticale, calcolando alcuni valori e ragionando sul loro andamento.
(3) La nozione di pendenza nasce nello studio di fenomeni rappresentati in sistemi cartesiani non monometrici. E' naturale il confronto con la nozione di coefficiente angolare; in collegamento con il nucleo tematico *Spazio e figure,* se si ritiene opportuno, si

può utilizzare questo confronto per ragionare su proprietà geometriche non invarianti rispetto ad un insieme di trasformazioni geometriche ed invarianti invece rispetto ad un sottoinsieme del precedente.

Spunti storici

- La ricerca della formula risolutiva per le equazioni di grado superiore al secondo: da Cardano a Galois.
- Archimede e il metodo di esaustione.
- Il metodo degli indivisibili di B. Cavalieri.
- Galileo e il moto uniformemente accelerato.
- Achille e la tartaruga: limite di una successione.

Si sconsiglia di:

- Richiedere lo studio di funzioni ottenute componendo più di due funzioni elementari.
- Presentare studio di funzioni e ricerca delle soluzioni di equazioni come problemi separati e tra loro sconnessi.
- Proporre un campionario di regole per risolvere alcuni particolari tipi di equazioni polinomiali e di sistemi, di equazioni e di disequazioni, non lineari. Meglio far sapere (vedi gli spunti storici) che le equazioni algebriche per cui esiste una formula risolutiva sono una sparuta minoranza.
- Dedicare troppo tempo allo studio delle formule trigonometriche e al loro impiego, specialmente per la risoluzione di equazioni trigonometriche.

Dizionarietto

- Incrementi a passo costante. Differenze $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ dei valori di una funzione f calcolati per x_{k+1} , x_k a distanza (passo) costante h: $x_{k+1} = x_k + h$.
- Pendenza di un grafico. Rapporto tra la variazione delle ordinate e quella delle ascisse.

Dati e previsioni

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• Comprendere la differenza fra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui. • Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi rispetto a una rilevazione pianificata e inserire i dati rilevati anche in un foglio elettronico (cfr. *Laboratorio di Matematica*). • Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. • Calcolare i principali indici di posizione e di dispersione per caratteri quantitativi. (1) • Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. • Valutare la probabilità in diversi contesti problematici diversi. • Distinguere tra eventi indipendenti e non.	• Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. • Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze (2).Serie storiche e loro rappresentazione. • Valori medi e misure di variabilità, definizioni e proprietà (2). • Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni (3). • Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.

(1) Occorre distinguere con chiarezza, attraverso opportuni esempi, il caso in cui il calcolo degli indici si basa sui singoli valori effettivamente rilevati o su una distribuzione statistica con valori raggruppati in classi.
(2) Riprendere rappresentazioni e indici già introdotti nella scuola media in maniera ampliata e approfondita.
(3) Si suggerisce di dare spazio anche alla valutazione statistica della probabilità, non presentando cioè solo esempi riconducibili alla valutazione classica.

Spunti storici
- I censimenti e le osservazioni naturali nel mondo antico.
- La nascita della statistica nell'età moderna: principali filoni.
- Il gioco dei dadi nella storia dell'uomo.

Osservazioni
- Evidenziare sempre la distinzione tra il significato della probabilità e le regole di valutazione.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su una unità statistica formata da 2 elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica. • Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e	• Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. • Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni doppie rispetto a caratteri di qualsiasi natura.

riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. • Selezionare, produrre ed usare appropriate rappresentazioni grafiche delle distribuzioni doppie. • Utilizzare la formula di Bayes. • Valutare criticamente le informazioni fornite dai media, con riferimento particolare ai giochi di sorte e ai sondaggi.	• Concetto e significato di modello: correlazione e regressione. • Formula di Bayes e suo significato. • Semplici distribuzioni di probabilità. • Il concetto di gioco equo. • Il ragionamento induttivo e le basi concettuali dell'inferenza (1).

(1) Trattare il ragionamento induttivo e le basi concettuali dell'inferenza a livello informativo, partendo da esempi significativi come, per esempio, exit-poll per un ballottaggio, risultati di sondaggi.

Spunti storici

- I primi campionamenti pre-elettorali negli Stati Uniti.
- Dall'astrologia al controllo dell'incertezza.
- I giochi di sorte nella storia dell'umanita'.
- Il problema delle poste in Pacioli prima e Pascal-Fermat poi.

Osservazioni

- Proporre elaborazioni statistiche su dati di osservazione o di misurazione, inseriti in un contesto problematico.

Dizionarietto

- A caso. Si parla di fenomeno casuale (o *aleatorio*) quando, come nel caso dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene un numero finito, ad ogni "esito" si assegna la stessa probabilità di verificarsi. Ciò implica un previo "rimescolamento" delle palline o, in generale, l'uso di tecniche, semplici o sofisticate, di predisposizione casuale degli eventi (ad esempio l'uso di tavole di numeri casuali o del comando "random" nelle calcolatrici elettroniche).
- Matrice di dati. Tabella contenente i dati della rilevazione, con unità (nelle righe) e caratteri (nelle colonne).
- Incertezza. Variabilità di natura casuale. Si manifesta nei fenomeni per i quali è impossibile arrivare a conclusioni certe sulla regolarità (ad es. nei lanci di moneta o in genetica) o in relazione a errori di misura (fluttuazioni della risposta dovute a `rumore', non perfetta calibrazione dello strumento, ecc…). In quest'ultimo caso si parla anche di *incertezza di misura*.
- Giochi di sorte. Giochi il cui esito è legato *al caso*, come ad es., Lotterie, Tombole, Pesche di beneficenza, Slot machine, Roulette….
- Distribuzione di probabilità. Il comportamento di un fenomeno aleatorio (lancio di un dado, misura sperimentale, …) è descritto dalla sua legge di probabilità che, a sua volta, può essere caratterizzata in molti modi: il modo più comune è attraverso la *distribuzione di probabilità*. L'esempio più semplice di distribuzione è l'elencazione dei vari casi con le corrispondenti valutazioni di probabilità.

Argomentare, congetturare, dimostrare

Primo biennio

Abilità	**Conoscenze** (1)
• Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. • Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. • Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici (linguaggio degli insiemi, linguaggio dell'algebra elementare, linguaggio logico). • Analizzare semplici testi del linguaggio naturale, individuando eventuali errori di ragionamento. • Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se…allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). • Costruire la negazione di una frase. • Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. • Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. • Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. • Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. • In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture, proprie o altrui, .	• Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi. • Variabili e quantificatori. Legami fra connettivi e quantificatori. I predicati.

(1) Le conoscenze specifiche di questo nucleo sono poche, mentre vari e pervasivi sono i collegamenti alle conoscenze degli altri nuclei: spetta al docente scegliere gli argomenti più adatti ai propri allievi.
A titolo esemplificativo si suggeriscono le seguenti attività:

- funzioni elementari, equazioni, relazioni d'ordine in *Relazioni e funzioni;*
- regolarità in tabelle e grafici in *Dati e previsioni;*
- il metodo delle coordinate in *Spazio e figure.*
- attività volte alla costruzione di significati, uso consapevole di strumenti informatic*i nel Laboratorio di matematica*;
- semplici dimostrazioni in *Numeri e algoritmi;*
- verifiche e semplici dimostrazioni di teoremi *in Spazio e figure;*
- semplici dimostrazioni in *Dati e previsioni*

Spunti storici

- I paradossi.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze (1)
• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. • Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. • Applicare in semplici casi il principio d'induzione. • Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. • Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.	• Schemi di ragionamento (ad esempio, il ragionamento per assurdo). • Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizioni; teoremi e dimostrazioni.

(1) Le conoscenze specifiche di questo nucleo, come già nel primo biennio, sono poche, mentre vari e pervasivi sono i collegamenti alle conoscenze degli altri nuclei: spetta al docente scegliere gli argomenti più adatti ai propri allievi.
A titolo esemplificativo si suggeriscono le seguenti attività:

- analogie e differenze tra i diversi insiemi numerici: la potenza del numerabile, la potenza del continuo in *Numeri e algoritmi;*
- il metodo della geometria euclidea in *Spazio e figure;*
- relazioni fra variabili in *Relazioni e funzioni;*
- dimostrazioni e previsioni in *Dati e previsioni;*
- ragionamenti induttivi e deduttivi, confronto fra diverse strategie risolutive in *Risolvere e Porsi problemi;*
- uso consapevole degli strumenti informatici, simulazioni nel *Laboratorio di matematica.*

Spunti storici

- Le definizioni.
- Nascita e sviluppo dei linguaggi simbolici e artificiali.
- La crisi dei fondamenti della matematica.

Osservazioni

- E' opportuno che ci si abitui a congetture e argomentazioni in vari settori, per esempio è utile proporre lo studio di alcune proprietà dei numeri naturali o delle regole del calcolo algebrico, o anche del calcolo aritmetico (operazioni con le frazioni), come problemi di cui trovare la soluzione. Ciò significa assegnare al ragionamento algebrico (in particolare all'uso di variabili) il ruolo di strumento di pensiero. Se ne può ricavare così un'idea dell'algebra come metodo (più che come contenuto) di ragionamento "in generale". Altri esempi possono essere: proporre attività di esplorazione delle figure che conducano, attraverso la produzione di congetture e le relative prove, alla scoperta di proprietà geometriche; fare dimostrazioni non solo in geometria.
- Risulta molto importante confrontare verifiche e dimostrazioni e avere consapevolezza della differenza tra esse. Per le verifiche si può ricorrere sia all'esame di casi particolari, sia a modelli concreti, sia a strumenti informatici. Occorre mostrare che il sapere "ufficiale" è, non diversamente da quello prodotto dall'individuo o dal gruppo (ad esempio dal gruppo-classe), il frutto di un percorso fatto di congetture, verifiche,

argomentazioni, e infine sistemazione teorica: il tutto sempre modificabile, migliorabile e finalizzato in sostanza ad una condivisione la più ampia possibile.

- Può essere utile analizzare dimostrazioni sia "ufficiali" che prodotte dagli studenti (anche se scorrette), per evidenziare il ruolo delle ipotesi (e la loro arbitrarietà, provvisorietà, fondatezza), delle definizioni (più o meno formali, più o meno generali), oppure confrontare dimostrazioni diverse di uno stesso teorema. E' sempre meglio lavorare su teoremi importanti, storicamente e per il loro ruolo e impiego.
- Risulta utile proporre situazioni in cui si possa discutere della natura degli insiemi infiniti, di "grandezze infinitamente piccole" e di "grandezze infinitamente grandi".

Si sconsiglia di:

- Trattare la logica come un capitolo separato. Trovare invece collegamenti con nozioni di logica in diversi momenti e in vari ambiti; sarà anche utile qualche approfondimento specifico per riordinare e organizzare quanto visto.
- Contrapporre il senso comune alla logica matematica e la lingua naturale alla formalizzazione. Occorre invece evidenziare gli elementi di continuità (la logica trae origine dal senso comune) e spiegare le ragioni delle differenze: la formalizzazione logica è adatta per affrontare il ragionamento matematico, ma non per tutte le questioni, e quello che si guadagna in precisione, generalità e affidabilità, si perde in ricchezza di significato.
- Esagerare con le pretese di rigore in matematica; occorre, invece, richiedere , in ogni occasione, sensatezza e coerenza. Non eccedere nella formalizzazione. Non sottovalutare il ruolo dei ragionamenti intuitivi e non considerarli mai con una valenza negativa.
- Inserire in una trattazione teorica quelli che sono semplici esercizi.

Dizionarietto

- Catene deduttive. Una volta accettate alcune premesse, si ottengono a partire da queste altre proprietà a priori non evidenti. In matematica, le premesse sono fatti noti o comunque accettabili (in seguito si parlerà di assiomi), le conseguenze sono i teoremi. Si parla di *catene* per indicare che ogni passaggio del ragionamento è strettamente legato, in un certo ordine, ai precedenti e ai successivi.
- Verificare e dimostrare. La differenza fra verificare e dimostrare è particolarmente chiara in presenza di enunciati che iniziano con un quantificatore universale ("per ogni"). Se si esamina un enunciato di questo tipo, una verifica consiste nel controllo che l'enunciato è corretto in un caso particolare, mentre la dimostrazione deve avere un carattere generale (in tal senso, corrisponde ad infinite verifiche). Nel caso di proprietà di figure geometriche, una verifica è condotta su un particolare disegno, eventualmente con uno strumento informatico; nella verifica ci sono minori esigenze di rigore e di precisione rispetto ad una dimostrazione. In un'equazione o in un problema, una verifica consiste nel controllo che un singolo valore (numero o espressione algebrica) soddisfa o non soddisfa le richieste; questo, naturalmente, non dà informazioni sull'esistenza di altre soluzioni.

Misurare

Primo biennio

Le competenze individuate per il primo biennio sono da considerarsi punto di partenza per il secondo biennio. Esse non vengono pertanto ripetute nel secondo biennio, anche se varie attività saranno inevitabilmente destinate a consolidare e affinare l'acquisizione delle competenze previste nel primo biennio.

Abilità
• Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura (cfr. *Spazio e figure* e *Dati e Previsioni*). • Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze • Stimare l'ordine di grandezza di una misura (cfr. *Numeri e algoritmi*). • Verificare sotto l'aspetto dimensionale uguaglianze che esprimono relazioni fra grandezze (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. • Determinare l'incertezza assoluta che si propaga in una somma o differenza di grandezze misurate (1). • Determinare l'incertezza relativa (e successivamente quella assoluta) che si propaga in un prodotto o un quoziente di grandezze misurate (2). • Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure, con particolare attenzione alle cifre significative (cfr. *Risolvere e porsi problemi*). • Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineare, quadratica) (cfr. *Relazioni e funzioni*).

(1) Si tratta di sommare le incertezze assolute delle grandezze per ottenere l'incertezza assoluta della loro somma o differenza.
(2) Si tratta di sommare le incertezze relative delle grandezze per ottenere l'incertezza relativa del loro prodotto o divisione, da cui si può risalire all'incertezza assoluta.

Spunti storici

- Talete e la misura dell'altezza della piramide.
- Galileo e la misura di spazi e tempi nei moti.

Osservazioni

È opportuno proporre agli studenti attività che li mettano a confronto con problemi di misure effettive di grandezze, come, per esempio:

- misurare i tempi di una competizione sportiva o desumerli da tabelle, costruendo istogrammi rappresentativi di frequenze in intervalli di arrivo,
- misurare grandezze in funzione del tempo, costruendo grafici rappresentativi,
- effettuare stime di misure di grandezze come, per esempio, la capacità di una botte, l'estensione di una proprietà agricola, l'ordine di grandezza del numero di granelli contenuti in un bicchiere di sabbia, il numero di partecipanti a una manifestazione...,
- utilizzare le misure rilevate per descrivere e prevedere l'evoluzione di grandezze,
- effettuare confronti; per esempio, il confronto fra i dati che rappresentano le variazioni del prezzo di due prodotti in un dato intervallo temporale; oppure la costruzione di un modello di accrescimento di una popolazione in assenza di limitazione di risorse.

Si sconsiglia di:

- Proporre una teoria formale della misura, come potrebbe essere, per esempio, la classica teoria geometrica delle grandezze.

Secondo biennio

Abilità
• Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze (cfr. *Dati e previsioni*) • Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre (cfr. *Relazioni e funzioni*, *Dati e previsioni*). • Confrontare variazioni di grandezze utilizzando i concetti di pendenza e di variazione di pendenza (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza (cfr. *Spazio e figure*" e *Numeri e algoritmi*). • Dimostrare l'irrazionalità di alcuni numeri (cfr.*Numeri e algoritmi*). • Fare costruzioni geometriche di segmenti la cui misura, rispetto a una fissata unità, sia rappresentata da un numero irrazionale: es. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (cfr. *Spazio e figure*). • Riconoscere la curva a campana nella distribuzione empirica di misure ripetute della stessa grandezza (cfr. *Dati e previsioni*). • Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze (cfr. *Risolvere e porsi problemi* e *Dati e previsioni*) e utilizzarli per effettuare previsioni.

Spunti storici

- Le misure di grandezze inaccessibili.
- La scoperta di numeri irrazionali.
- Il problema delle quadrature in Archimede.
- Misure di grandezze astronomiche (da Keplero in poi).
- L'*Arenario* di Archimede.

Osservazioni

- Si suggerisce, ove possibile, l'uso di strumenti che consentono di rilevare misure di grandezze con sensori, con conseguente analisi dei dati con programmi esistenti in commercio su calcolatrici o su calcolatori.
- Sono di fondamentale importanza non solo il reperimento di dati di misura e la loro analisi, ma anche la costruzione di modelli per descrivere situazioni ed effettuare previsioni. Su un altro versante, quello della concettualizzazione delle basi dell'analisi, sono importanti gli algoritmi per il calcolo approssimato di lunghezze e aree, proprio come approccio successivo a concetti fondamentali.

Risolvere e porsi problemi

Primo biennio

Abilità
• Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non (fenomeni delle scienze sperimentali, economici, demografici, dei giochi sia di strategia che di sorte ecc.) per affrontare problemi (aperti o meno; posti da altri o auto-posti). • Esplicitare le proprie aspettative in termini di possibilità di trovare una soluzione, individuando alcuni elementi di controllo da tenere sistematicamente presenti nel corso del processo risolutivo per comprendere se si progredisce verso la soluzione (ad es. gli ordini di grandezza delle soluzioni attese, le conoscenze e i metodi matematici ritenuti utili per la risoluzione, le somiglianze e differenze con problemi analoghi, i tempi). • Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni (simbolici, geometrici, numerici, ecc.) e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. • Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie (formalizzazioni, calcoli, costruzioni geometriche, ecc.). • Confrontare i risultati ottenuti con le aspettative precedentemente esplicitate. Individuare le cause delle inadeguatezze considerando ed eventualmente modificando gli elementi di controllo precedentemente individuati. Chiedersi se lo stesso modello matematico sia adatto a diverse situazioni concrete. • Ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte (nel caso ciò sia opportuno); valutarne l'efficacia nei processi risolutivi che producono. • Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie (1). • Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali. • Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili (cfr. *Argomentare, congetturare, dimostrare*).

(1) Tipici concetti da esplicitare eventualmente: esistenza e unicità della soluzione; soluzione esatta e approssimata; sua dipendenza da parametri; soluzione matematica accettabile o meno per il problema; variabili significative e variabili ininfluenti per il problema.

Secondo biennio

Abilità
Le stesse abilità del primo biennio, e inoltre: • Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. • Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi; riconoscere fenomeni riconducibili a uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione o di previsione. • Valutare l'opportunità di ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili, e scegliere quali usare, per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte e per realizzare particolari strategie compatibili con l'uso di tali mezzi. • Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.

Osservazioni

- A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza. Affinché il porre e risolvere problemi sia effettivamente utile a mobilitare risorse intellettuali anche al di fuori delle abilità strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla formazione generale degli allievi, è necessario che quelli proposti siano autentici problemi per gli allievi e non semplici esercizi a carattere ripetitivo.
- Le competenze degli allievi, soprattutto per quanto riguarda i problemi, difficilmente possono essere conseguite in tempi medio-brevi. Per tale motivo, le abilità indicate per il primo biennio si collegano alle abilità previste per il ciclo precedente e sono anche previste per il secondo biennio (con alcune integrazioni che ne costituiscono un naturale sviluppo).
- Un insegnamento per problemi è un'attività impegnativa, ma realizzabile; il tempo si deve eventualmente recuperare da una riduzione degli argomenti puramente eruditi e dalla semplificazione degli esercizi proposti (meglio pochi esercizi capiti e discussi a fondo che tanti esercizi di pura routine. Fare molti esercizi "dello stesso tipo" è importante per acquisire scioltezza e sicurezza, ma può ottundere lo spirito critico se non vi è sufficiente variabilità).
- Non tutto l'insegnamento può essere svolto per problemi, sia per mancanza di tempo, sia per evitare il rischio di un'eccessiva frammentarietà.
- L'attività "per problemi" può essere più efficace se svolta in contesto interdisciplinare.
- È opportuno che discutendo opportunamente il significato delle soluzioni trovate, gli allievi imparino a distinguere la "matematica dell'incerto", in senso probabilistico, dalla "matematica dell'impreciso" propria del calcolo numerico, dalla "matematica dell'esatto" (ad es. il numero e è un numero trascendente, limite di una certa successione, che vale circa 2,718281828).

Si sconsiglia di:

- Ridurre le tecniche a casistiche, e gli esercizi a routine.
- Proporre problemi scarsamente significativi o di difficoltà sproporzionata rispetto alla classe.
- Lasciar accettare una soluzione “perché è venuta così”.
- Ridurre la matematica alla pura fase deduttiva.

Laboratorio di Matematica

Il laboratorio di matematica non costituisce un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici.

Che cos'è il laboratorio di matematica

Il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.

La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.

Gli strumenti del laboratorio di matematica

Gli strumenti possono essere di tipo tradizionale oppure tecnologicamente avanzati; ne citiamo, a scopo esemplificativo, alcuni.

- *I materiali "poveri"*

Il lavoro con fogli trasparenti, la piegatura della carta, l'uso di spilli, fogli quadrettati non dovrebbe essere considerata un'attività esclusivamente riservata ad allievi del ciclo primario; potrebbe invece costituire, per allievi del primo biennio, un significativo avvio allo studio delle isometrie, esplorate attraverso i movimenti che le determinano. Inoltre, l'uso di strumenti poveri, magari fatti costruire da gruppi di studenti, è un'attività particolarmente significativa e consona a rinforzare quell'atmosfera da bottega rinascimentale, nel senso prima detto.

- *Le macchine matematiche*

La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le *macchine* che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall'uso di software di geometria dinamica.

- *I software di geometria*

Nell'insegnamento della geometria vengono ormai sempre più utilizzati i software di geometria (detti comunemente software di *geometria dinamica*), veri e propri micromondi, nei quali gli studenti possono fare esperienze, compiere esplorazioni, osservare, produrre e formulare congetture e validarle con le funzioni messe a disposizione dallo stesso software. In questo modo lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere "fatti geometrici" e può essere avviato a un

significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all'interno di una teoria più o meno ben precisata, *perché* una certa proprietà osservata vale.

- *I software di manipolazione simbolica*

Nell'insegnamento dell'algebra, della geometria analitica e dell'analisi può rivelarsi particolarmente opportuno l'uso di software di manipolazione simbolica, detti comunemente CAS (Computer Algebra System), che mettono a disposizione diversi ambienti integrati, in genere quello numerico, quello simbolico, quello grafico e un linguaggio di programmazione.
Il loro uso consente di limitare il calcolo simbolico svolto con carta e penna ai casi più semplici e significativi, affidando al CAS i calcoli più laboriosi. Il vantaggio è duplice, perché da una parte consente di concentrarsi sugli aspetti concettuali, dall'altra permette di affrontare problemi più complessi, più ricchi e, sicuramente, meno artificiosi di quelli che è possibile affrontare senza l'ausilio di un potente strumento di calcolo.
I CAS inoltre presentano ambienti in cui poter effettuare esplorazioni, osservazioni, validazioni di congetture; si tratta di ambienti che, per loro stessa natura, aiutano a pianificare e costruire attività volte al conseguimento di quei significati degli oggetti di studio che costituiscono l'obiettivo fondamentale del laboratorio di matematica.
Infine, ma non meno importante, la programmazione in un linguaggio CAS è particolarmente utile per consolidare il concetto di *funzione*, di *argomenti* di una funzione (*numero* degli argomenti, *ordine* degli argomenti nella definizione della funzione …), di *input* e *output*. È altresì utile per arricchire la padronanza delle più importanti *strutture dati* (liste, vettori, matrici, …).

- *I fogli elettronici*

I fogli elettronici, pur non essendo software specifici per la didattica, permettono svariate applicazioni, in particolare quelle relative alla rappresentazione e all'analisi dei dati e hanno la non trascurabile caratteristica di essere al momento ancora i software più utilizzati nel mondo del lavoro.

- *Le calcolatrici grafico-simboliche*

Tutte le potenzialità prima indicate e offerte dai software di geometria dinamica, dai CAS e dai fogli elettronici si trovano oggi disponibili su calcolatrici tascabili che hanno il vantaggio di poter essere utilizzate con molta flessibilità e agilità, sia per quel che riguarda gli spazi (utilizzo in classe), sia per quel che riguarda i tempi (di trasferimento in laboratorio, di accensione dello strumento…). Molte calcolatrici offrono anche la possibilità di collegamenti con sensori fisici, ossia rilevatori di misure di grandezze fisiche, aprendo interessanti e nuove prospettive nella costruzione di concetti matematici legati alla rappresentazione dei dati e all'analisi della loro variabilità.

La storia della matematica e il laboratorio di matematica

La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo contesto, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio (inteso nel senso largo esposto prima) adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici.
Rinviando alle note presenti nei diversi temi per una più ampia esemplificazione e lasciando comunque al docente la scelta dei contenuti della storia della matematica che ritiene più significativi, è indubbio che, ad esempio, una trattazione storica dei problemi inerenti alla sezione aurea può costituire una efficace introduzione ai problemi di secondo grado; la trattazione storica dei rapporti tra algebra e geometria può gettare luce sugli stretti rapporti tra geometria sintetica e analitica; l'evolversi di alcuni aspetti della geometria euclidea può fornire un'introduzione alla problematica della dimostrazione e al significato

di sistema assiomatico; molti episodi storici riguardanti la storia di singoli problemi aritmetici possono motivare lo studio di procedure e algoritmi altrimenti troppo astratti; le motivazioni del calcolo delle probabilità e della statistica si colgono in modo illuminante attraverso la loro storia, ecc.
In questo quadro, quindi, la storia della matematica può dare al singolo docente l'opportunità di scegliere, se le condizioni lo consentono, un percorso didattico aperto alle connessioni interdisciplinari e generalmente capace di suscitare l'interesse degli allievi; è quindi ovvio che il contesto del laboratorio esclude la determinazione di contenuti disciplinari specifici relativi alla storia della matematica.

Le interazioni tra le persone nel laboratorio di matematica
La costruzione di significati è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall'insegnante. Ci soffermiamo, a scopo esemplificativo per quel che riguarda la gestione delle interazioni sociali in classe, sulla discussione matematica.
Un primo livello di discussione è quello che, per esempio, si sviluppa dopo la lettura del testo di un problema. Un secondo livello di discussione matematica si sviluppa al termine della soluzione (individuale o in piccoli gruppi) o, talvolta, in un momento cruciale della soluzione stessa. Tale discussione è centrata sul confronto delle soluzioni realizzate dagli alunni e si sviluppa attraverso la presentazione delle proprie soluzioni, oltre che sull'interpretazione e sulla valutazione di quelle realizzate dai compagni. Un terzo livello di discussione matematica riguarda la correttezza e la ricchezza delle soluzioni proposte, la coerenza e l'attendibilità, il livello di generalizzazione adottato. Quest'ultima fase dovrebbe condurre alla costruzione di significati che vanno oltre quelli direttamente coinvolti nella soluzione del compito, per consentire agli studenti di entrare in contatto con nuovi aspetti della cultura matematica, favorendo in particolare, un approccio, graduale ma sistematico, al pensiero teorico.

Indicazioni metodologiche

In continuità con i precedenti livelli scolari, anche nel ciclo secondario è opportuno sviluppare i concetti matematici in attività didattiche significative, in cui l'alunno possa essere attivamente coinvolto e stimolato ad affrontare e risolvere problemi. Un'attività didattica può essere considerata significativa se consente l'introduzione motivata di strumenti culturali della matematica per studiare fatti e fenomeni attraverso un approccio quantitativo, se contribuisce alla costruzione dei loro significati e se dà senso al lavoro riflessivo su di essi. Lo sviluppo in classe di attività didattiche con tali caratteristiche dovrà avere come fine la costruzione delle capacità di esercitare un controllo sulla realtà secondo i modelli della razionalità scientifica. Le attività didattiche potranno essere realizzate tramite vari approcci metodologici, che coinvolgano in varia misura studenti e insegnanti, ma che dovranno dare al processo di insegnamento-apprendimento prevalentemente una caratterizzazione di tipo collettivo, impostata sull'interazione tra gli studenti e tra insegnante e studenti.

La *lezione frontale* si presenta come la tecnica più sicura per gli insegnanti, i genitori, gli allievi, i capi d'istituto, in quanto garantisce che si "finisca il programma". Consiste nella spiegazione, da parte dell'insegnante, di - non sempre tutte le - varie parti del programma, alla cattedra o alla lavagna; è seguita da una serie di attività applicative (gli esercizi ripetitivi, in classe e a casa). Tale tipo di *lezione*, pur avendo una sua valenza didattica, nell'abituare gli studenti a prestare attenzione a una spiegazione, a imparare a prendere appunti in maniera autonoma, quando una persona parla, a sviluppare competenze di sintesi e di organizzazione dell'informazione, a comprendere un discorso fatto da un esperto su un argomento matematico, non è (e non deve essere) l'unica metodologia di insegnamento/apprendimento in classe. Essa andrebbe affiancata, integrata, alternata ad altre metodologie, che sviluppano altre competenze negli studenti.

Per esempio, l'*insegnamento per problemi* è assolutamente fondamentale come approccio alla costruzione del sapere, non solo nella matematica. Consiste nel porre problemi agli studenti, facendoli loro risolvere singolarmente, a gruppi, a casa o in classe, in tempi lunghi o brevi. Per problema non intendiamo solo la richiesta di ottenere un risultato a seguito di una serie di calcoli, ma la proposta di riconoscere una situazione problematica di ampia natura, formulata da altri: può trattarsi di un classico problema che ha caratterizzato la storia della matematica, o di un problema sorto da un contesto scolastico, oppure da un contesto extrascolastico, ambientale per esempio, o sportivo, o di vita quotidiana.

Risolvere problemi posti da altri è certamente una competenza ambiziosa e a lungo termine ed è anche per questo che dovrebbe essere perseguita fin dalla scuola dell'infanzia. In questo ambito metodologico altrettanto fondamentale è il *porsi problemi*, ovvero acquisire a poco a poco l'abitudine a porsi criticamente nei confronti della matematica, della scuola, del mondo, per diventare cittadino che utilizza la matematica da persona consapevole, che ne domina le tecniche e non si fa dominare, invece, da esse. Ed acquista di conseguenza una capacità critica che gli sarà utile ben oltre la lezione di matematica o l'ambiente scolastico. Per questo, l'insegnamento dei contenuti di tutti i nuclei deve poggiarsi sulla problematicità, quindi non perseguire solo il raggiungimento di abilità tecniche ma anche di ragionamento.

Gli studenti possono imparare a porsi e risolvere problemi sia in gruppo sia singolarmente. Pur perseguendo la stessa finalità, il lavoro di gruppo, rispetto a quello individuale, si prefigge anche altre finalità di tipo comportamentale, come il saper stare con gli altri, discutere in gruppo, rispettare l'opinione dell'altro e anche saper difendere la propria opinione, argomentando e dibattendo.

È fondamentale quindi, come metodologia di classe, il *lavoro in piccoli gruppi* (a seconda dei casi, possono essere di due, tre o quattro persone). La scelta dei raggruppamenti da

parte dell'insegnante può essere di vario genere, e oscilla tra le due polarità: gruppi eterogenei o gruppi omogenei. Il criterio dell'equi-eterogeneità, cioè di avere in una classe tutti gruppi ugualmente ripartiti per livello e competenze, consente di avere gruppi che si equivalgono, all'interno dei quali sono presenti forze eterogenee: per esempio uno studente di livello alto, uno di livello basso, ecc. Lo svantaggio può essere nel lavoro all'interno del gruppo, in cui può capitare che lo studente di livello più basso, o quello più timido, non partecipino alla discussione e rimangano in disparte. I gruppi omogenei hanno il vantaggio di avere, all'interno del gruppo, studenti con pari livello, e quindi consentire discussioni alla portata di tutti; ma, se il lavoro di gruppo è seguito da un momento di *intergruppo*, in cui si confrontano gli esiti dei vari gruppi, l'eterogeneità fra i risultati raggiunti potrebbe avere risvolti psicologici non positivi.
C'è di più: il lavoro di gruppo finalizzato al raggiungimento di un obiettivo comune sviluppa la capacità di mettere in gioco e coordinare le competenze di ognuno, di riconoscere una *leadership*, di dividersi i compiti e finalizzare il proprio operato all'obiettivo da raggiungere. Nel lavoro a gruppi si stabilisce uno spirito di interdipendenza positiva, in cui il successo di uno è strettamente collegato al successo di tutti. Agli studenti viene richiesta una responsabilità anche individuale nell'acquisizione delle competenze e delle conoscenze utili ad affrontare il compito proposto. Può essere utile distinguere, a grandi linee, almeno due differenti modalità: quella del *cooperative learning*, e quella del *collaborative learning*. Per cooperative learning si intende un gruppo di individui che lavora a un problema complesso, nel quale i compiti di ciascuno sono ben individuati e definiti, ma nel quale ogni individuo è aiutato dai suoi compagni di gruppo nell'affrontare i temi e problemi che sono oggetto e spunto di apprendimento. Per collaborative learning si intende un gruppo di individui che lavorano insieme su un compito o un problema che è stato posto al gruppo e che si prevede debba essere affrontato e risolto insieme, attraverso lo strumento della discussione e della condivisione delle strategie risolutive.
I fattori che influenzano sia il collaborative, sia il cooperative learning possono essere: la volontà di chi apprende di partecipare al lavoro di gruppo; la presa di coscienza, da parte di chi apprende e dai tutor (siano essi compagni o docenti), dei benefici di forme di apprendimento collaborative o cooperative; un sistema di valutazione che favorisca cooperazione e collaborazione e coinvolga lo studente nella propria valutazione; la presa di coscienza del fatto che chi apprende può controllare e gestire il proprio apprendimento.
Accanto al lavoro di gruppo, come in altri momenti del lavoro scolastico, è importante dedicare opportuni spazi alla *discussione matematica*. In essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta. È anche possibile far intervenire nella discussione *voci* di persone che non fanno parte della classe, come per esempio voci dalla storia, attraverso la lettura di un testo storico, oppure voci dalla realtà esterna, attraverso un testo scritto, una audio-registrazione, una video-registrazione o una tele-conferenza. La discussione si struttura quindi come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) all'interno del progetto didattico ed educativo.
Il lavoro di gruppo o individuale finalizzato alla risoluzione di un problema, o la spiegazione stessa dell'insegnante possono servirsi del *laboratorio* per avere strumenti o ambienti o metodi utili all'espletamento di un compito o all'introduzione di concetti nuovi, o alla costruzione sociale del sapere. A tale scopo, le indicazioni relative al laboratorio di matematica sono particolarmente significative non solo per l'interazione con gli strumenti, ma soprattutto per l'impianto metodologico. Tale impianto si dovrebbe basare su quello che viene chiamato *apprendistato cognitivo*. L'apprendistato cognitivo coinvolge abilità e

processi sia cognitivi sia metacognitivi: l'esperto modella e struttura l'attività del principiante, che osserva l'esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali. È un metodo variegato e flessibile che si contrappone all'*apprendistato pratico* che, invece, si identifica con uno specifico metodo di apprendimento basato esclusivamente sull'osservazione dell'attività dell'esperto, sulla strutturazione graduale e crescente delle abilità e, soprattutto, su una particolare attenzione all'acquisizione di abilità di carattere pratico. L'apprendistato diventa cognitivo in quanto riesce a bilanciare la dialettica tra l'azione strutturatrice e facilitatrice dell'intervento dell'esperto e la sfida che un problema da risolvere rappresenta per il principiante, che non si limita a riprodurre i comportamenti dell'esperto ma diviene consapevole dei motivi che portano l'esperto a scegliere certe strategie e non certe altre. La metafora che può ben descrivere l'apprendistato cognitivo è quella della bottega d'arte del Rinascimento, in cui l'allievo impara facendo, vedendo altri che fanno e riflettendo sul perché fanno così, il tutto sotto la guida di uno più esperto di lui. Un'altra analogia si può trovare con l'apprendimento dei linguaggi di programmazione nel laboratorio di informatica. L'apprendistato cognitivo richiede la costruzione di un ambiente di apprendimento aperto alla discussione, alla condivisione del sapere, che favorisca la produzione personale, ma anche l'osservazione ragionata dell'esperto al lavoro; un ambiente che potremmo chiamare "bottega della matematica".

In generale, le attività didattiche dovranno essere caratterizzate dalla pratica della verbalizzazione, dalla produzione e dalla verifica di ipotesi argomentate e dal ruolo di mediazione dell'insegnante in tutte le fasi dell'attività. L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante le discussione in classe e il lavoro di gruppo.

La matematica infine si caratterizza come una disciplina che ha bisogno di tempi lunghi di apprendimento, sia per la necessità di affrontare ed assimilare le strette connessioni tra i diversi concetti, sia per la loro caratterizzazione epistemologica. È consigliabile quindi sviluppare attività nell'ambito di progetti didattici di medio-lungo periodo. I tempi medio-lunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti gli studenti di compiere il consolidamento tecnico, l'approfondimento operativo e la riflessione necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze matematiche coinvolte nell'attività. L'insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, tenendo conto delle necessità della classe in cui opera.

Attività didattiche e prove di verifica

NUMERI e ALGORITMI

Sciogliamo i nodi

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo ad essa equivalente e, viceversa, dato un grafo di calcolo, scrivere l'espressione numerica ad esso corrispondente. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni	

Contesto
Calcolo algebrico.

Gli studenti non sempre riescono a raggiungere una soddisfacente competenza nel calcolo aritmetico e algebrico, nonstante il tempo che a esso è dedicato.
Le difficoltà incontrate dagli studenti si articolano sostanzialmente in due direzioni: l'aspetto computistico (il saper fare) e l'aspetto algoritmico (il saper organizzare). Mentre per l'ambito computistico è relativamente difficile aggiungere qualcosa di nuovo alle varie metodologie illustrate nei materiali didattici già esistenti, per l'aspetto algoritmico, invece, se preso in considerazione in maniera separata dal primo, si può prospettare un intervento didattico diverso e ipotizzare un percorso di apprendimento alternativo alle tradizionali metodologie di intervento.

Descrizione dell'attività
Tradizionalmente l'esecuzione di un'espressione algebrica è caratterizzata dalla risoluzione della stessa. Mediante una successione di operazioni (comunemente dette "passaggi"), si va da una forma descrittiva ampia, la traccia ("semplice" o "articolata"), ad una forma più sintetica, ma equivalente, che rappresenta il risultato.
Quest'attività, ai fini di un maggior coinvolgimento emotivo dello studente, pone l'attenzione sull'aspetto grafico, e rinvia il calcolo algebrico ad un secondo momento.

Prima fase
L'attività viene proposta in classe quando gli studenti devono affrontare espressioni algebriche più complesse e inizia con la costruzione verticale di un diagramma a forma di triangolo rovesciato. La stesura del diagramma, in seguito chiamata albero, inizia dalle operazioni indicate nella traccia e si articola in ramificazioni successive, sempre meno dense, terminanti all'ultimo nodo di chiusura. I nodi sono posti su vari livelli, in funzione delle regole di calcolo e dei criteri di svolgimento dell'esercizio.

Risoluzione grafica di espressione algebrica.

Esempio 1

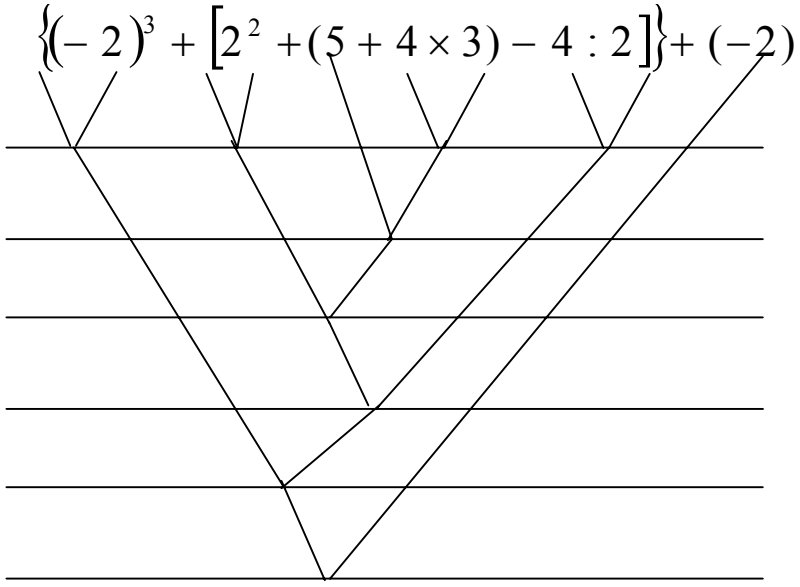


Figura 1

La risoluzione grafica di ogni espressione avviene seguendo queste fasi:

a) si tracciano delle linee orizzontali, man mano che servono: queste linee rappresentano i diversi livelli di risoluzione o di "scioglimento dell'espressione" necessari per la risoluzione della stessa;
b) rispettando le "regole algebriche", si tracciano per ciascuna operazione due linee oblique che confluiscono in un punto, detto nodo, terminanti sulla linea di livello corrispondente;
c) si ripetono le fasi precedenti, per tutte le operazioni e per i diversi livelli, fino all'esaurimento delle operazioni stesse e all'identificazione del nodo conclusivo;
d) le linee oblique di ciascuna operazione non si devono mai intrecciare: questa eventualità evidenzia una condizione di confusione o di disordine mentale (nell'esempio 2 che segue sono evidenziate in grassetto);
e) le linee oblique, quando confluiscono in un nodo, non devono attraversare più linee di livello: questa descrizione grafica evidenzia una modalità risolutiva elementare: "…un'operazione per volta …" (nell'esempio 3 sono evidenziate in grassetto);
f) le linee oblique, quando confluiscono in un nodo, non devono mai essere più di due: questa descrizione grafica evidenzia una modalità risolutiva complessa che può generare confusione se effettuata con scarsa consapevolezza (nell'esempio 3 sono evidenziate in grassetto).

Ogni espressione sarà, dunque, caratterizzata da un grafico e non da una sequenza di espressioni equivalenti: viene meno, dunque, il significato di uguaglianza ed è reso più evidente l'aspetto semantico della semplificazione.

Risoluzione grafica di espressioni contenenti errori.

Esempio 2

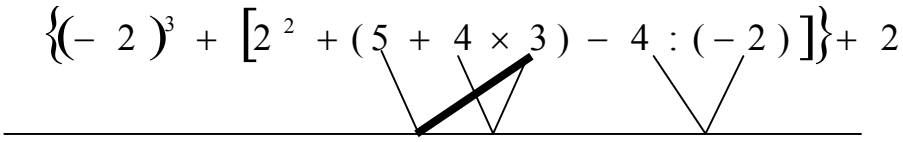


Figura 2

Esempio 3

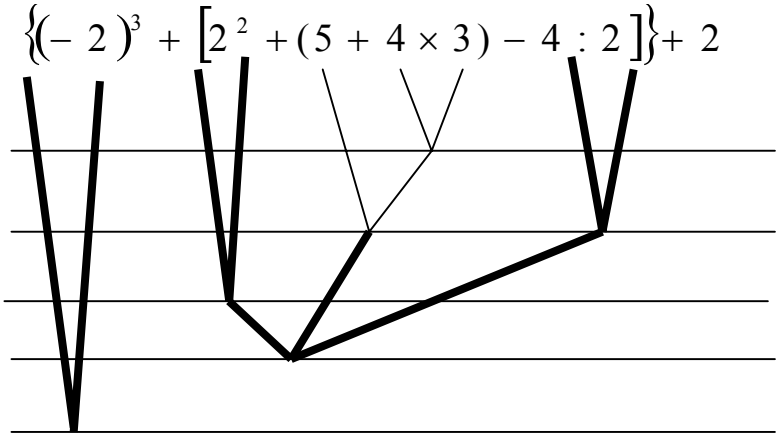


Figura 3

Dal punto di vista didattico la metodologia proposta presenta un'ulteriore vantaggio per l'insegnante e per lo studente: la possibilità di misurare oggettivamente la complessità di un esercizio.
Se per ogni linea di livello indichiamo il numero di nodi presenti (ossia le operazioni eseguite in quel momento) e lo confrontiamo con un altro valore di pari livello di un'altra espressione, conosceremo la diversa complessità delle due espressioni in un determinato momento risolutivo. Se questo risultato è moltiplicato per un peso avente solo un valore numerico e non qualitativo, ad esempio il numero ordinale del livello, si otterrà il peso dell'espressione relativo al livello, ossia la complessità relativa. In ultimo, se le considerazioni sono ripetute per tutta la risoluzione e sommate tra loro, si avrà, ovviamente, la misura o il peso della complessità globale dell'espressione.

Risoluzioni di espressioni algebriche con indicazione della complessità.

Esempio 4

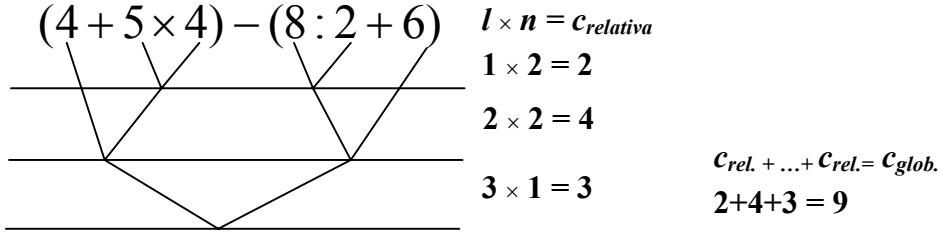
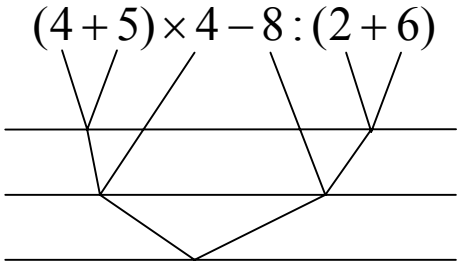


Figura 4

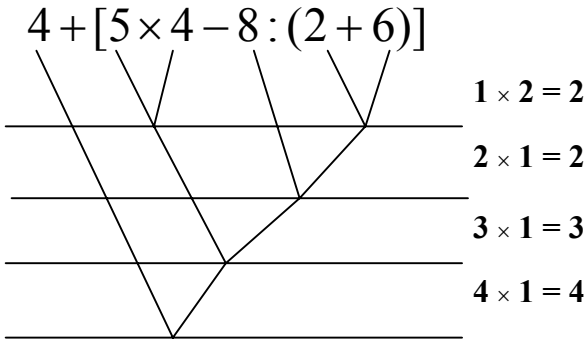
Esempio 5



Complessità=9

Figura 5

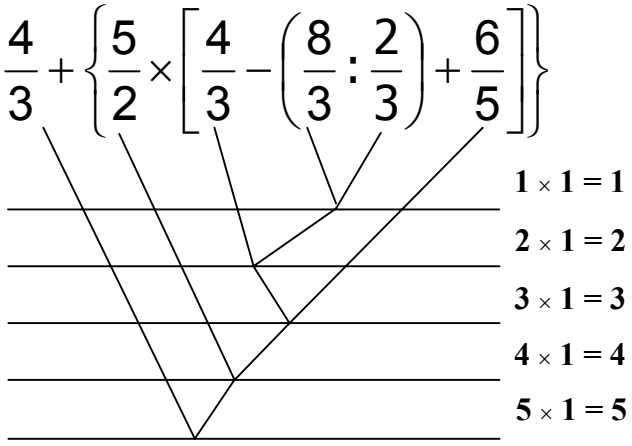
Esempio 6



Complessità=11

Figura 6

Esempio 7



Complessità=15

Figura 7

Alcune considerazioni

In questa prima fase l'azione dell'insegnante è favorita dalle seguenti considerazioni che nascono dai vantaggi e dalle valenze didattiche legate al metodo utilizzato.

1) Il grafico di calcolo (identificabile in un albero stilizzato) rappresenta la risoluzione di ogni espressione e permette di differenziarla meglio e/o di confrontarla più velocemente con altre risoluzioni presentate. Si può osservare come la modifica delle parentesi, negli esempi 4 e 5, ha variato il grafico e quindi la struttura risolutiva degli esercizi, pur mantenendo la stessa complessità.

2) Tradizionalmente lo studente é impegnato a confrontare solo il risultato finale di un'espressione, senza preoccuparsi dello sviluppo, anzi non accetta una "correzione" quando il risultato è corretto ma lo svolgimento è errato. Con questa metodologia egli pone tutta la sua attenzione al grafico e, quindi, al procedimento utilizzato.
3) Il metodo permette anche una "risoluzione modulare" dell'espressione, creando percorsi differenziati fra gli studenti e per lo stesso studente in uno stesso esercizio, in antitesi a quella più tradizionale che prevede sempre risoluzioni in sequenza (Figura 8).
   Con riferimento all'esempio 5:

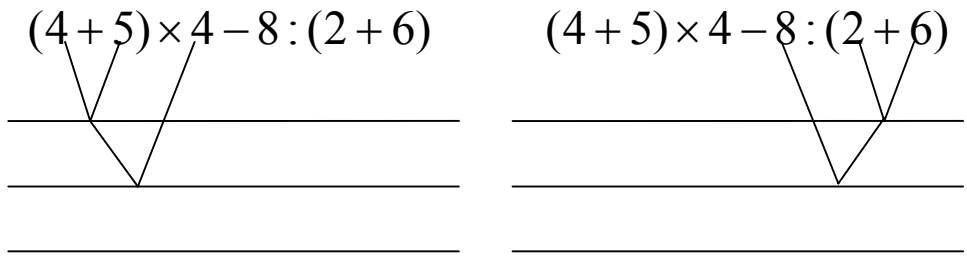


Figura 8

4) L'osservazione della struttura grafico-algoritmica permette una risoluzione mentale più immediata rispetto a quella numerico-computistica.
5) Un'ulteriore valenza didattica può essere riscontrata nella possibilità di identificare ogni espressione con alcuni parametri: il numero di livelli, la quantità di operazioni e la complessità globale. Negli esempi precedenti si può osservare, infatti, come tutte le espressioni sono formate dallo stesso numero di operazioni (è sufficiente contare i nodi di ciascun grafico) anche se distribuiti in diversi livelli e quindi con complessità differenti.
6) Un ulteriore arricchimento è fornito dalla possibilità di indicare, a fianco di ogni riga-livello, un numero intero progressivo (o peso) che, moltiplicato per il numero di operazioni presenti sulla riga corrispondente, fornisce la misura della complessità che le operazioni hanno nel processo risolutivo fino a quel momento.
   La somma di questi valori fornisce la misura della difficoltà complessiva di tutta l'espressione. Ad esempio nella prima espressione (Figura 4):
   - al 1° livello si trovano 2 operazioni e quindi il risultato è 2,
   - al 2° livello si trovano altre 2 operazioni e il risultato è 4,
   - al 3° livello si trova 1 operazione e il risultato è 3.

   Globalmente questa espressione ha una difficoltà, o complessità, di "9 punti" mentre, nell'ultimo esempio, la difficoltà complessiva, per la presenza delle parentesi e dei diversi livelli, risulta maggiore (Figura 7). Quest'opportunità permette all'insegnante di:
   a) programmare con più oggettività il proprio intervento nella classe,
   b) controllare meglio il livello di competenza raggiunto, globalmente o individualmente,
   c) differenziare il proprio intervento, nel tempo ed eventualmente anche tra gli studenti,
   d) operare in armonia con i colleghi dei corsi paralleli, nell'ambito della programmazione d'istituto.
7) L'aspetto computistico permette ad ogni studente di esprimere una valutazione assoluta della propria competenza acquisita: espressioni algebriche con diverse difficoltà o complessità si identificano con punteggi più elevati.
8) L'aspetto computistico permette a ogni studente di valutare la misura relativa della propria competenza, anche in caso di errore. In espressioni errate, infatti, egli è in grado di valutare il livello di competenza raggiunto, rapportando il valore totalizzato, prima dell'errore, al valore massimo indicato dall'insegnante. Una successiva "funzione punteggio" permetterà di trasformare questi valori grezzi in valori con base diversa o in valori percentuali, per permettere un confronto congruo con altre espressioni.

9) Il consolidamento della misura della competenza permette sia all'insegnante sia a ciascun studente di tenere sotto controllo, con opportuni indicatori statistici, la "performance" individuale e globale.
10) Gli studenti accettano più facilmente questo metodo perché più divertente e non oppongono alcuna resistenza all'apprendimento o al recupero.
11) La correzione, da parte dell'insegnante o da parte dello studente, risulta più agevole poiché non si ha la propagazione numerica dell'errore in tutta l'espressione, ma si può correggere la zona interessata, cancellando la linea errata e riscrivendo contestualmente quella esatta.

Seconda fase

L'attività viene proposta in classe quando gli studenti, dovendo completare la risoluzione di espressioni algebriche, partono dall'apprendimento globale dell'algoritmo per giungere all'apprendimento specifico computazionale.
Per trasformare il diagramma in espressione numerica si procede nel seguente modo. Si scrivono i risultati di ciascuna operazione in corrispondenza di ogni nodo e successivamente si ricopia la sequenza numerica e simbolica di ogni linea. In questo modo è possibile trasformare la rappresentazione grafica in una rappresentazione lineare dove i cosiddetti "passaggi" corrispondono ai vari livelli (Figura 9).
Con riferimento all'esempio n° 4 si ottiene:

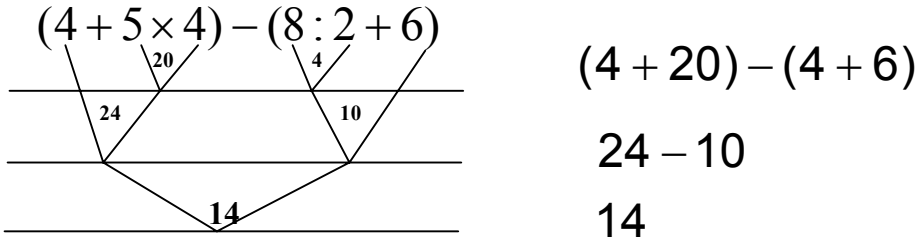


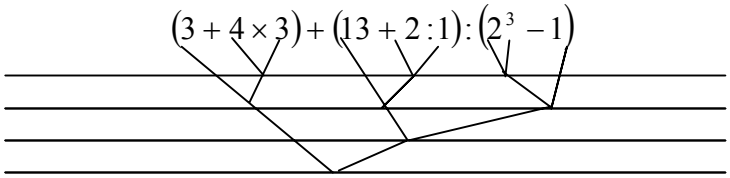
Figura 9

Elementi di prove di verifica

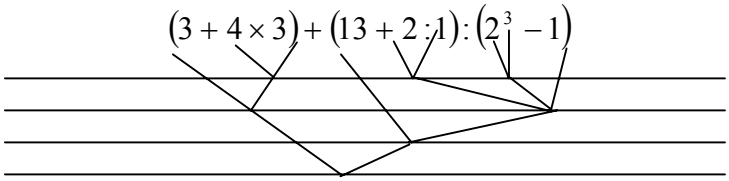
1. Indicare qual è l'esatta rappresentazione grafica della seguente espressione:

$$(3+4\times3)+(13+2:1):(2^3-1)$$

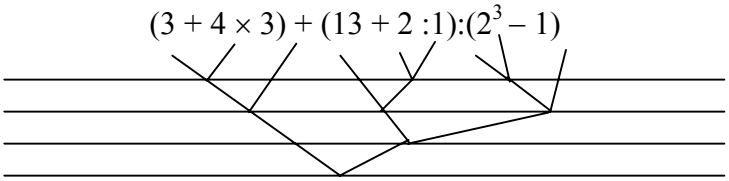
a)



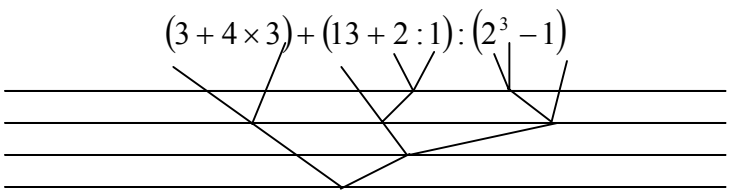
b)



c)



d)



e)

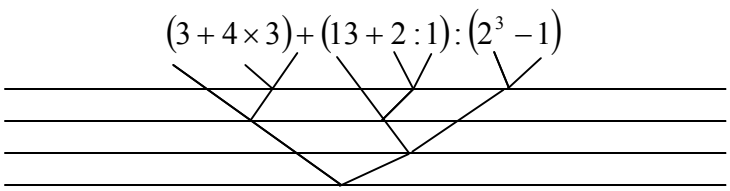


Figura 10

2, Indicare qual è la complessità relativa al 5° livello della seguente espressione:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$$

a) 7 *b)* 31 *c)* 13 *d)* 24 *e)* 6

3. Indicare qual è la complessità globale della seguente espressione:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$$

a) 8 *b)* 31 *c)* 13 *d)* 24 *e)* 6

4. Nella seguente espressione:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$$

uno studente ha eseguito correttamente la risoluzione algoritmica della stessa fino al 6° livello incluso. Indicare qual è la sua "performance" espressa in forma percentuale:

a) 89% *b)* 29% *c)* 58% *d)* 86% *e)* 77%

5. Con riferimento all'espressione precedente, indicare qual è l'esatta rappresentazione lineare della stessa a partire dal 3° livello incluso:

a) $\left\{\frac{5}{6}+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{3}{2}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

b) $\left\{\frac{25}{36}+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{3}{2}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

c) $\left\{\frac{25}{36}+\left[\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

d) $\left\{\frac{25}{36}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

e) $\left\{\frac{25}{36}\right\}+\frac{4}{5}$

Numeri e algoritmi

Nella nostra civiltà i numeri sono una componente essenziale della vita contemporanea: i numeri che appaiono sui giornali e nei telegiornali sono ancora strettamente collegati al contesto di riferimento. Tuttavia i numeri esistono di per sé, al di fuori del contesto in cui vengono usati, e gradualmente essi stessi diventano un contesto significativo per l'apprendimento.
Le competenze che si costruiscono all'interno del nucleo sono legate ai molti approcci (ordinale, cardinale…) e significati di numero che s'incontrano nelle esperienze, scolastiche ed extrascolastiche, ed alle numerose conoscenze ed abilità relative alle operazioni aritmetiche, ma soprattutto al riconoscimento delle diverse situazioni problematiche che sono caratterizzate da considerazioni quantitative e alla conseguente scelta di strategie risolutive.
Il calcolo è uno strumento, importante ma non prevalente. Ne segue che anche le operazioni vanno viste come una tappa necessaria per la concettualizzazione. È pertanto fondamentale capirne il significato e la loro valenza per la soluzione di problemi.
L'approccio consigliato lungo il percorso scolastico è quello di fare inizialmente esperienze reali, legate ai problemi quotidiani. Ben presto, tuttavia, gli oggetti introdotti (numeri e operazioni) diventano essi stessi occasioni di riflessione e di studio. Ad esempio si possono ricercare regolarità, individuare numeri che soddisfino a condizioni date, come anche si può riflettere su metodi di scrittura e di rappresentazione, anche attraverso le diverse tappe di sviluppo nella storia dell'umanità. Contestualità e astrazione, sono, comunque, pur con modalità diverse e dosaggi adeguati, esigenze da rispettare durante tutto il percorso d'istruzione.
A livello di ciclo secondario gli studenti, che negli studi precedenti hanno acquisito una buona comprensione dei numeri interi ed hanno una conoscenza generale dei numeri razionali e delle loro proprietà, devono iniziare a lavorare con i numeri irrazionali, per arrivare poi alla conoscenza (a livello intuitivo) dei numeri reali e, contemporaneamente, alla comprensione del completamento della retta numerica.
È opportuno a questo punto rivedere la costruzione teorica degli insiemi **N**, **Z**, **Q** e **R**, non assiomaticamente, ma evidenziando sempre di più la loro struttura "incapsulata" e il distinguersi gli uni dagli altri per le loro proprietà e i loro usi. La possibilità offerta agli studenti di lavorare con insiemi (come polinomi, classi di resto, vettori), aventi proprietà diverse da quelle dei numeri reali, dovrebbe aiutarli a capire sia la struttura comune dei vari insiemi numerici sia le differenti caratteristiche. L'accresciuta abilità degli studenti nel riflettere e nel controllare la propria attività con i numeri dovrebbe condurre ad una maggiore capacità di astrazione e di generalizzazione.
Infine l'uso dei nuovi strumenti di calcolo richiede una particolare consapevolezza delle diverse possibilità di rappresentazione e degli errori che possono generarsi dal loro utilizzo improprio. Si pone in tal modo il problema delle approssimazioni: gli studenti devono saper distinguere e scegliere fra risultati esatti e risultati approssimati in una varietà di problemi e situazioni.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
1° biennio	Sciogliamo i nodi	Calcolo algebrico		
1° biennio	Dalla frazione al numero decimale: esploriamo	Calcolo aritmetico. Storia della matematica	Informatica	
1° biennio	La radice di due va a teatro: dove si siede?	Visualizzazioni geometriche e storia dei numeri	Filosofia greca	
1° biennio	Quando viene Pasqua?	Algoritmi numerici	Geografia astronomica Religione Storia	
1° biennio	In quale giorno cade Natale?	Algoritmi numerici	Geografia astronomica Religione Storia	
1° biennio	I numeri delle macchine	I numeri macchina		
1° biennio	L'algebra si sposa con la geometria	Configurazioni geometriche	Storia	
1° biennio	Dentro o fuori il triangolo?	Geometria analitica		
2° biennio	La somma dei primi numeri naturali	Algoritmi numerici e calcolo algebrico		
2° biennio	L'algoritmo per la divisione dei polinomi	Calcolo algebrico		
2° biennio	Ma dove si azzera?	Risoluzione di equazioni algebriche.	Informatica	
2° biennio	Una regola pazza e geniale	Geometria analitica		
2° biennio	Segui la freccia	Geometria analitica		

Dalla frazione al numero decimale: esploriamo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. Scrivere un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 ad esponente intero. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Il teorema fondamentale dell'aritmetica.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare	Informatica

Contesto
Calcolo aritmetico. Storia della matematica.

La verifica ed il consolidamento delle necessarie abilità di calcolo con i numeri (naturali e razionali), di cui è opportuno verificare il possesso da parte degli allievi all'inizio del percorso di matematica al primo biennio, può essere condotta attraverso attività diverse (analisi e rappresentazione di semplici indagini condotte nella classe, risoluzione di problemi con percentuali, …). L'attività qui proposta si colloca al termine di queste verifiche, prima di passare alla formalizzazione delle strutture indotte dalle operazioni nei diversi insiemi numerici. Essa intende da una parte consolidare negli studenti la consapevolezza e la padronanza dell'uso degli strumenti di calcolo elementare, dall'altra fornire loro un buon bagaglio di esperienze significative cui far riferimento, per contesti ed esempi applicativi, quando saranno introdotti, nel seguito degli studi, strumenti più formali.

Descrizione dell'attività
L'attività si articola in momenti di calcolo manuale con i numeri naturali, le frazioni e i numeri decimali, anche in basi diverse da 10, e in momenti di esplorazione e riflessione di proprietà. L'uso degli strumenti di calcolo è motivata dalla necessità di poter condurre in modo più ricco ed esteso questa sorta di sperimentazione con "oggetti" della matematica che, seppure utili come strumenti per risolvere problemi di contesti reali, assumono qui una loro autonomia e diventano essi stessi un interessante ambito di esplorazione e di riflessione.

Il percorso procede per domande alle quali si cercherà di dare risposte utilizzando gli strumenti (concettuali e di calcolo) che gli studenti hanno a disposizione.

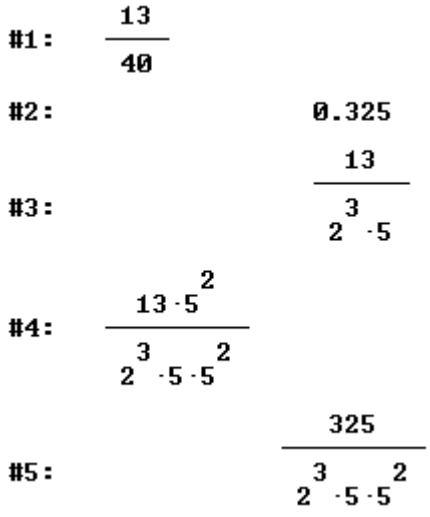
Domanda 1: Data una frazione ridotta ai minimi termini, in quali condizioni la frazione è espressa (in base dieci) da un numero decimale finito?

Le frazioni sono date come rapporto di numeri naturali: i concetti coinvolti sono l'equivalenza delle frazioni, la scomposizione (in particolare l'unicità della fattorizzazione) di un numero naturale, il numero decimale finito come frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

È agevole osservare, anche in modo informale, che la frazione è espressa da un numero decimale finito soltanto se il denominatore ha come fattori primi esclusivamente il 2 oppure il 5, che sono i soli fattori della base.
È utile verificare, anche carta e penna, qualche caso, con esempi a conferma e con controesempi.

Domanda 2: In una frazione, che si esprime con un numero decimale finito, che relazione c'è tra il denominatore e il numero delle cifre della parte decimale?

Anche in questo caso è semplice osservare che il numero di cifre decimali è l'esponente maggiore tra la potenza di base 2 e quella di base 5 nella fattorizzazione del denominatore. Infatti, per avere una frazione, equivalente alla data, che abbia una potenza di 10 al denominatore basta moltiplicare per la potenza mancante.
Per condurre o confermare queste osservazioni può essere utile utilizzare un ambiente di calcolo che elabori la frazione in modo esatto, cioè come coppia di numeri naturali.
Ecco un esempio con un software di calcolo simbolico.



La frazione introdotta nella riga #1 è espressa nella riga #2 come numero decimale finito. Si osserva che il numero decimale ha 3 cifre.
A riga #3 il denominatore è scomposto in fattori: la fattorizzazione ha solo potenze di 2 e di 5.
L'esponente più alto delle due potenze al denominatore è 3, esattamente come il numero di cifre dopo la 'virgola' del numero decimale.
Per avere al denominatore una potenza di 10 (la minima possibile) occorre moltiplicare per 5^2: in questo modo il denominatore è 1000.
Moltiplicando per 5^2 il numeratore si ottiene proprio la parte decimale del numero (325).

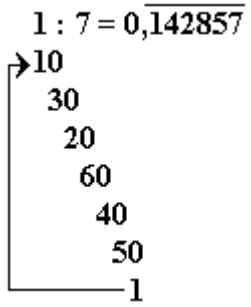
Figura 1

Domanda 3: Cosa succede alla espressione decimale della frazione (ridotta) se questa ha al denominatore un fattore che non è divisore della base?

Per la proprietà della unicità della fattorizzazione dei numeri naturali, nessuna potenza di 10 può contenere come fattore il denominatore se questo ha un fattore primo diverso da 2 e da 5. Questa proprietà è usata in tanti contesti dell'aritmetica ed è quindi opportuno richiamarla in modo esplicito e non darla per scontata, anche se non la si può certamente dimostrare ad allievi di questa età. La conseguenza è che la frazione non può essere espressa da nessun numero decimale finito perché questo corrisponderebbe ad una frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

Come dimostrare, o almeno giustificare intuitivamente, il fatto che il numero decimale, che esprime una frazione, se non è finito, è necessariamente periodico? Gli allievi sanno già calcolare con la divisione il numero decimale corrispondente ad una frazione: la dimostrazione parte da questa conoscenza. Nel calcolo il divisore è il denominatore. Quando nel calcolo si trova come resto 0, il processo ha termine e quindi il numero decimale è finito. D'altra parte, se nel calcolo si ritrova un resto già incontrato in precedenza, il processo si ripete con la stessa sequenza indefinitamente.
Nella divisione (tra numeri naturali) il resto è minore del divisore: per questo il numero dei possibili resti nel calcolo del numero decimale è minore del denominatore. Di conseguenza nel calcolo del numero decimale corrispondente ad una frazione i casi sono due: o dopo qualche passo si trova

resto 0 e quindi il numero decimale è finito, oppure si ritrova uno dei resti (il cui numero è minore del denominatore) già calcolato in precedenza e quindi il numero decimale è periodico. In questo ultimo caso la lunghezza del periodo è minore del denominatore della frazione.



La risposta alla terza domanda passa attraverso la sequenza dei resti trovati nel calcolo del numero decimale.
Prendiamo in esame un caso particolare: la frazione 1/7 si esprime con il numero decimale 0,142857 (qui le cifre del periodo sono sottolineate per comodità tipografica). La sequenza dei resti è 1, 3, 2, 6, 4, 5. Poiché l'ultimo passo ha prodotto come resto 1, che è il primo nella sequenza dei resti, la sequenza dei resti, e quindi anche delle cifre del numero decimale, si ripete all'infinito.

Figura 2

Il calcolo fatto nella figura 2 del numero decimale corrispondente ad 1/7 offre l'opportunità di fare qualche osservazione sulle regolarità delle cifre del periodo quando al denominatore ci sono numeri particolari (in questo caso primi). Lo scopo di queste osservazioni è di stimolare la curiosità degli allievi, di abituarli a formulare congetture e di sottoporle a verifiche per vedere se si tratta di mere coincidenze o di fatti che si possono generalizzare, di esprimere in modo corretto argomentazioni. Queste abilità sono la premessa necessaria alle attività di dimostrazione alle quali saranno avviati successivamente.
Una verifica 'sperimentale' di queste congetture troverà utile l'uso di strumenti di calcolo e potrà essere occasione per qualche attività di stesura di semplici programmi.

Prima osservazione: 142857 x 7 = 999999 il numero che si ottiene isolando il periodo moltiplicato per il denominatore dà un numero fatto da *tanti nove quante le cifre del periodo* (o se si vuole anche $10^6 - 1$). Questa è esattamente la regola della frazione generatrice dei numeri periodici, solo espressa al contrario, che almeno un tempo era bagaglio comune della scuola media.

Seconda osservazione: $142857 \times 2 = 285714$
$142857 \times 3 = 428571$
……
Il numero delle cifre del periodo ha questa curiosa proprietà: se lo si moltiplica per un numero minore di 7, produce un numero che ha la stessa sequenza di cifre spostata di qualche posto. La dimostrazione è immediata osservando il processo di calcolo del numero decimale.

Terza osservazione: 142 + 857 = 999 spezziamo il numero del periodo in due parti (di tre cifre ciascuna), la somma dei due numeri ottenuti è una sequenza di cifre 9. Questa è la curiosità più sorprendente di questo tipo di numeri, che naturalmente si ritrova anche per altri denominatori primi, ma la cui dimostrazione è più complicata.
La proprietà può anche essere espressa così: le cifre della seconda parte del periodo sono le complementari rispetto a 9 delle corrispondenti cifre della prima parte.

Si possono provare quali di queste proprietà si ritrovano con 1/11, 1/13 oppure 1/17.

Soprattutto l'ultimo caso, che produce una sequenza di 16 cifre, suggerisce l'opportunità di disporre di un programma che, dati due numeri come numeratore e denominatore, ne calcoli il corrispondente numero decimale. La stesura del programma naturalmente va proposta agli allievi più motivati o con maggiore autonomia nell'uso degli strumenti informatici. Nulla impedisce però di usare il programma predisposto per le osservazioni che verranno suggerite nel seguito.
Per i numeri decimali finiti il programma deve calcolate tutte le cifre decimali, mentre se il numero decimale è periodico si chiede che vengano calcolate tutte le cifre del periodo.
Nel primo caso si eseguirà la divisione finché il resto è 0, nel secondo finché si ritrova il resto iniziale del periodo. Ed è proprio questo il problema posto dalla quarta domanda, la cui risposta è necessaria per scrivere il programma che calcola il numero decimale di una frazione.

Domanda 4: Data una frazione ridotta, come si determina il numero di cifre della parte decimale che precede il periodo (antiperiodo) nel numero decimale corrispondente?

Scomponiamo in fattori il denominatore della frazione: possiamo raccogliere le potenze di 2 e di 5 in un primo fattore del denominatore e tutte le altre nel secondo. In modo formale possiamo scrivere:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^h 5^k p} = \frac{1}{2^h 5^k} \cdot \frac{m}{p}$$ dove compare una frazione strettamente decimale e una frazione nella

quale il denominatore è primo con 10. Il numero delle cifre dell'antiperiodo dipende solo dalla prima frazione ed è quindi (vedi Domanda 1) il massimo tra gli esponenti della potenza di 2 e di 5 contenute nella fattorizzazione del denominatore.

Data la frazione m/n (ridotta), il calcolo delle cifre dell'antiperiodo si può fare in questo modo:

antiperiodo(*n*)
n numero naturale dato (la lunghezza dell'antiperiodo dipende solo da *n*);
a numero naturale per il calcolo della lunghezza dell'antiperiodo;

assegna 0 ad *a*: all'inizio l'antiperiodo è vuoto

finché *n* è divisibile per 10
    assegna *n*/10 a *n*
    aumenta *a* di 1

finché *n* è divisibile per 2
    assegna *n*/2 a *n*
    aumenta *a* di 1

finché *n* è divisibile per 5
    assegna *n*/5 a *n*
    aumenta *a* di 1

la lunghezza dell'antiperiodo è *a*.

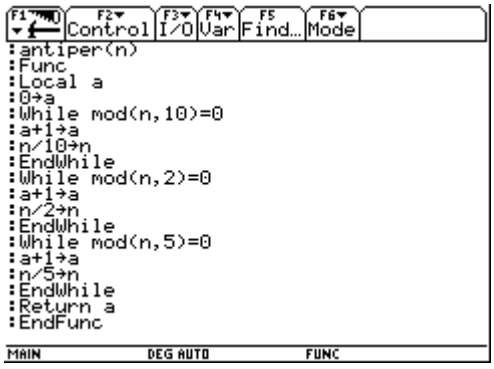


Figura 3

La Figura 3 contiene il listato della funzione scritto per una calcolatrice programmabile. Ecco ora alcune applicazioni della funzione antiper(*n*).

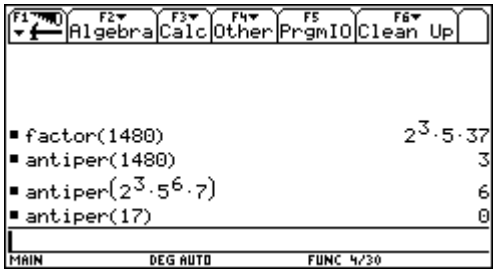


Figura 4

Nello schermo della calcolatrice a sinistra compare la riga immessa e a destra la risposta calcolata.
Nella scomposizione in fattori primi di 1480 il 2 compare con esponente 3, mentre il 5 ha esponente 1. Il numero di cifre dell'antiperiodo di 1480 è 3. Prendendo un numero già fattorizzato, l'antiperiodo ha la lunghezza prevista. Naturalmente 17 è primo e quindi in base 10 non ha antiperiodo.

Possiamo ora descrivere la funzione che produce il numero decimale di una frazione.
Numerodecimale(*n*,*d*)

n e *d* numeri naturali	rappresentanti il numeratore ed il denominatore della frazione
a numero naturale	per la lunghezza dell'antiperiodo
m numero naturale	per il massimo comun divisore tra numeratore e denominatore da usare per ridurre la frazione ai minimi termini
r numero naturale	che conterrà il resto al termine del calcolo delle cifre dell'antiperiodo: se il resto è 0 il calcolo ha termine e il numero decimale è finito, se invece è diverso da 0 sarà l'elemento di confronto per stabilire quando ha termine il periodo
s stringa di caratteri	nella quale saranno raccolte le cifre del numero decimale a mano a mano che sono calcolate; in *s* si userà la virgola per separare la parte intera da quella decimale e il segno: per separare, se serve, l'antiperiodo dal periodo.

primo passo:	Ridurre la frazione ai minimi termini.
secondo passo:	Calcolare la parte intera della frazione ed assegnarla come stringa a *s*, conservare in *n* il primo residuo della frazione.
terzo passo:	Calcolare le cifre dell'antiperiodo. Con la funzione *antiper* si calcola il numero di cifre dell'antiperiodo: questo numero stabilisce quante volte va fatto il calcolo delle cifre successive alla virgola da aggiungere alla destra della stringa *s*. Si osservi il ruolo della base di rappresentazione, il 10, sia nel calcolo della lunghezza (nella funzione *antiper*), sia nel calcolo delle cifre: questo sarà utile quando si vorrà applicare l'algoritmo ad altre basi di rappresentazione.
quarto passo:	Se il resto dell'ultima divisione è 0 il calcolo del numero decimale ha termine (numero decimale finito), altrimenti si calcolano le cifre del periodo. Si conserva il resto iniziale del periodo: quando si ritroverà nel calcolo lo stesso resto il procedimento ha termine. Prima di aggiungere a *s* la prima cifra del periodo si inserisce un segno di separazione ":".

Una possibile traduzione nel linguaggio della calcolatrice programmabile è la seguente. Usiamo ancora la forma della funzione, che restituisce il risultato nell'ambiente di calcolo, per poter fare sul numero decimale prodotto qualche elaborazione successiva.

```
:numdec(n,d)
:Func
:Local a,m,r,s
:gcd(n,d)→m
:n/m→n
:d/m→d
```

Figura 5

numdec(*n*,*d*) è una funzione che restituisce come sequenza di caratteri il numero decimale,
Local definisce le variabili di calcolo interne alla funzione.
La funzione gcd(*n*,*d*) è predefinita nella calcolatrice e calcola il MCD dei numeri *n* e *d*.

```
:antiper(d)→a
:string(intDiv(n,d))&"."→s
:mod(n,d)→n
:While a>0
:10*n→n
:s&string(intDiv(n,d))→s
:mod(n,d)→n
:a-1→a
:EndWhile
```

Figura 6

Calcolo delle cifre dell'antiperiodo. La funzione predefinita della calcolatrice intDiv(*n*,*d*) calcola il quoto (intero) nella divisione di *n* per *d* che corrisponde alla cifra da calcolare; la funzione mod(*n*,*d*) calcola il resto nella stessa divisione e produce il nuovo resto.
While … EndWhile descrive un ciclo che è eseguito quando la condizione iniziale è verificata. L'operatore & tra stringhe le concatena.

```
:If n>0 Then
:s&":"→s
:n→r
:Loop
:10*n→n
:s&string(intDiv(n,d))→s
:mod(n,d)→n
:If n=r
:   Goto fine
:EndLoop
:Lbl fine
:EndIf
:Return s
:EndFunc
```

Figura 7

Se il resto è 0, il calcolo è finito. Altrimenti si mette in coda a *s* il segno ":" che indica l'inizio del periodo.
Dopo aver registrato in *r* il resto di confronto, comincia il ciclo di calcolo delle cifre del periodo. Il ciclo Loop … EndLoop non ha mai fine: per terminare il processo occorre uscire dal ciclo con l'istruzione Goto <etichetta>, dove <etichetta> indica la riga di programma Lbl <etichetta> da cui riprendere il processo. Nel nostro caso l'istruzione di uscita è eseguita quando nella divisione intera si trova un resto uguale al resto iniziale.

Vediamo ora qualche applicazione della funzione numdec(*n*,*d*).

numdec(5, 24)	"0.208:3"
numdec(5, 240)	"0.0208:3"
numdec(3, $2^4 \cdot 7$)	"0.0267:857142"
numdec(3, $2^4 \cdot 5^2$)	"0.0075"

Figura 8

Il numero decimale è calcolato come stringa: non è possibile avere come risultato un *numero* se si vuole mantenere il segno di separazione tra l'antiperiodo ed il periodo.
Negli esempi sono evidenziate alcune delle proprietà dei numeri decimali già richiamate in precedenza.

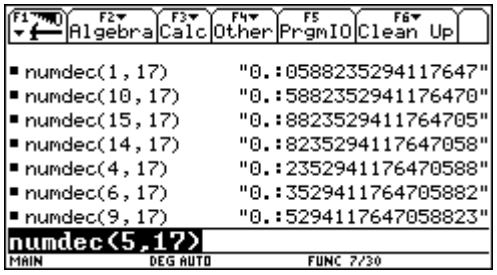


Figura 9

17 è un numero primo e la frazione 1/17 produce un numero decimale periodico con 16 cifre di periodo.
Tutte le frazioni n/17, con n da 1 a 16, producono la stessa sequenza di cifre solo spostate. Scegliendo opportunamente i numeratori, le sequenze risultano spostate ogni volta di un posto.

Anche 13 è un numero primo, ma 1/13 ha 6 cifre di periodo. In questo caso le sequenze *circolari* di cifre sono due:

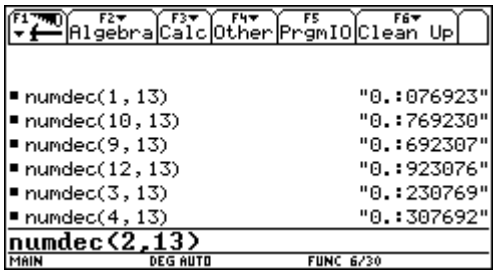


Figura 10

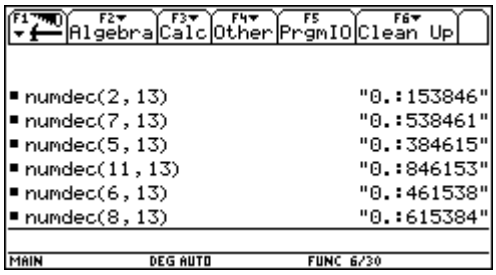


Figura 11

Si era osservato nelle pagine precedenti che i semiperiodi di 1/7 davano per somma 999. Questo fatto vale anche in altri casi? La Figura 12 a destra mostra alcuni altri casi e vuole essere un invito per condurre qualche esplorazione ulteriore su questo tema.

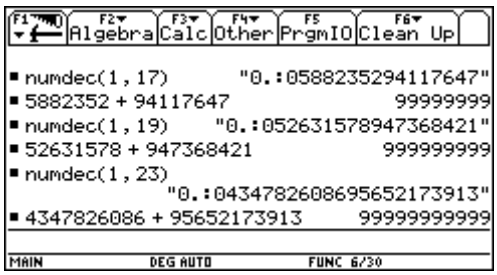


Figura 12

Possibili sviluppi

- Una prima estensione delle attività proposte può riguardare lo studio della relazione tra n, numero naturale, e la lunghezza del periodo di 1/*n*. Si può modificare la funzione numdec(*n*,*d*) in modo che produca solo la lunghezza del periodo della frazione. Poiché la lunghezza del periodo non dipende dal numeratore (se la frazione è ridotta in minimi termini) la funzione può avere come argomento il solo denominatore e considerare sempre 1 come numeratore. Si è già detto che la lunghezza del periodo di 1/n è minore di n: solo alcuni numeri primi hanno lunghezza del periodo pari a n-1 (massima possibile). Ad esempio 17 ha periodo 16, mentre 13 ha periodo 6.
  Si osserva la seguente proprietà per la lunghezza del periodo, qui espressa per 7: 7 ha periodo 6, 49 ha periodo 42, 7^3 ha periodo 6 x 7^2, in generale 7^k ha periodo 6 x 7^{k-1}.
- Le funzioni per la lunghezza dell'antiperiodo e per il calcolo del numero decimale possono essere adattate a qualche altra base di rappresentazione, ad esempio la base 2 o la base 6. Con esse si possono poi ripetere le osservazioni fatte con la base 10; in particolare si può evidenziare il fatto che la frazione 1/10 scritta in forma razionale in base 2 è periodica con tutte le ben note problematiche del calcolo approssimato con il computer.
- La sequenza dei resti nel calcolo del numero decimale corrispondente a m/n, con $m < n$ e con numero di cifre del periodo massimo (si provi, ad esempio, con $n = 541$), appare *del tutto* imprevedibile e ben distribuita (compaiono tutti i numeri compresi tra 1 e 540). Se dividiamo i resti di questa sequenza per n, otteniamo una sequenza di numeri < 1 distribuiti in modo apparentemente casuale e che possono rappresentare un modello semplificato della generazione di numeri casuali utilizzati dal computer per le simulazioni.

Elementi di prove di verifica

Numeri finiti e numeri periodici.

1. Quali delle seguenti frazioni produce numeri decimali finiti e quali periodici?
3/40, 5/15, 3/7, 7/35

2. Calcola la scrittura decimale di 1/13. Quante sono le cifre del periodo? Quante potevano essere al massimo?

3. Il numero di cifre del periodo di 1/37 è 3. Quante sono le cifre dell'antiperiodo di 1/3700?

A caccia di numeri periodici.

4. Si osservi che $10^6 - 1 = 999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$. I numeri 7 e 13 hanno lunghezza del periodo 6. Quali sono i numeri *candidati* ad avere 4 cifre di periodo e quali le hanno effettivamente?

La radice di due va a teatro: dove si siede?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali.	Numeri e algoritmi Spazio e figure Argomentare, congetturare e dimostrare	Filosofia greca

Contesto
Visualizzazioni geometriche e storia dei numeri.

La scoperta di segmenti incommensurabili presso i Greci produsse una profonda crisi nella concezione matematica del tempo. Ancora oggi, gli studenti evidenziano gran difficoltà nell'acquisire il concetto di numero irrazionale.
L'attività proposta coinvolge gli studenti in una rappresentazione di un passo tratto dal testo greco: il "*Menone*" di Platone, particolarmente significativo se rielaborato, in maniera adeguata, utilizzando la rappresentazione grafico-geometrica.
Può essere introdotta, nel primo biennio, dopo aver affrontato lo studio dei numeri naturali e razionali a livello operativo e strutturale.

Descrizione dell'attività
Il metodo socratico, favorito dalla visualizzazione delle figure, si alterna con quello euristico-dinamico: gli studenti, investiti del ruolo di scopritori, analizzano la figura, procedendo per gradi e, mediante successive intuizioni, tentativi e verifiche, arrivano alla conquista del concetto. L'apprendimento in situazione richiede un forte impegno da parte dell'insegnante che, oltre a coinvolgere lo studente nell'attività, ne deve anche guidare le intuizioni nella giusta direzione.
La sistematizzazione del processo spetta, nella fase conclusiva, all'insegnante che deve presentare questo numero con un nuovo simbolo (s'introduce il simbolo $\sqrt{2}$).

Prima fase
L'insegnante, dopo aver consegnato agli studenti copia del passo tratto dal testo originale del "Menone", li invita prima ad una lettura individuale e poi ad una rielaborazione dello stesso, inserendo, laddove è opportuno, il riferimento alla visualizzazione geometrica di cui devono corredare il testo.
La scoperta dell'incommensurabilità, oggi, al contrario di quanto non lo sia stato al tempo degli antichi greci, è facilitata dall'utilizzo di moderni strumenti informatici che conferiscono al disegno geometrico una grande potenzialità di apprendimento. Corredare il passo di Platone con una serie di illustrazioni significa, quindi, rivisitare un testo classico, di grande valenza didattica, in chiave moderna.
Socrate propone un problema geometrico ad un giovane, servo dell'amico Menone, senza particolari conoscenze matematiche.

[…]
Menone: Sì Socrate, ma in che senso dici che non apprendiamo e quello che denominiamo apprendere è reminiscenza? Puoi insegnarmi che sia davvero così?

Socrate: Non è certo facile, ma per amor tuo, ugualmente mi ci impegno. Chiama uno di questi molti servi del tuo seguito, quello che vuoi, sì che proprio in lui possa darti la dimostrazione che desideri.
[…]

Disegnare il quadrato avente area pari al doppio di quello assegnato

[…]
Socrate: Dimmi, ragazzo, l'area del quadrato come questo che vedi in figura, la conosci?

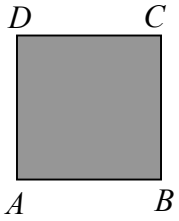


Figura 1

Ragazzo: La conosco.
S: È dunque un'area quadrata avente uguali tutti questi lati $AB = BC = CD = DA$ che sono quattro.
R: Precisamente.
S: Ora quest'area potrebbe essere e più grande e più piccola?
R: Precisamente.
S: Se pertanto il lato *AB* fosse due piedi, e questo *AD* fosse pure due piedi, di quanti piedi dovrebbe essere l'intero?
R: Quattro, o Socrate.
S: Or si potrebbe avere un'altra area doppia di questa, e tale da avere tutti e quattro i lati uguali come questa?
R: Sì.
S: E di quanti piedi sarà?
R: Di otto.
S: Su via provati a dirmi quanto sarà ciascun lato di essa. Il lato di questa è di due piedi: che cosa sarà il lato di quella doppia?
R: È chiaro, o Socrate, che sarà il doppio.
[….]
S: Dunque il lato sarebbe il doppio di *AB* se ne aggiungessimo un altro *BL* della stessa misura da questa parte?

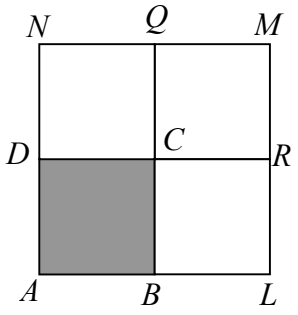


Figura 2

R: Precisamente.
S: E da questo lato *AL*, tu dici, nascerà l'area di otto piedi, quando quattro siano di tal misura?
R: Sì.
S: Disegniamone dunque da questo quattro uguali: non dovrebbe essere questa (*ALMN*) l'area che tu dici esser di otto piedi?
R: Precisamente.

S: Ma in essa ve ne sono quattro, queste (*ABCD*, *BLRC*, *CRMQ*, *DCQN*), ciascuna delle quali è uguale a questa (*ABCD*), che è di quattro piedi?
R: Sì.
S: Quanto dunque diventa? Non quattro volte tanto?
[….]
R: Sì, il quadruplo.
S: Dal lato doppio dunque non si ottiene un'area doppia ma quadrupla.
R: Dici vero.
S: E quattro volte quattro fanno sedici: o che no?
R: Sì.
[….]
S: Provati ora a dire di che misura credi che debba essere.
R: Di tre piedi.
S: Dunque, se ha da essere di tre piedi, aggiungiamo (ad *AB*) la metà di questo (cioè di *MQ*), e si avranno i tre piedi. Infatti questi (*AB*) sono due e questo (*BO*) uno. E si ha quest'area che tu dici (*AOPT*) .

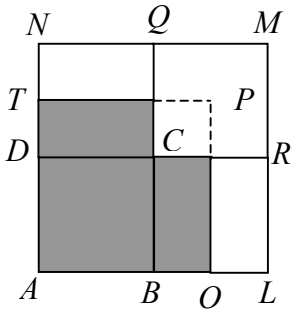


Figura 3

R: Sì.
S: Ma se da questa parte (*AO*) è di tre piedi, e da questa (*AT*) è di tre, l'area intera non diventa di tre piedi?
R: È evidente.
[…]
S: Non si ha dunque punto da un lato di tre piedi l'area di otto piedi.
R: No affatto.
S: E allora da quale? Provati a dircelo esattamente; e se non vuoi dire un numero, mostraci almeno da quale (fare qualche tentativo sulla figura).
R: Ma per Giove, o Socrate, io non lo so.
[…]
S: Dimmi dunque tu. La nostra area di quattro piedi non è questa qui (*ABCD*)? (vedi Figura 4).
R: Capisco.
[…]

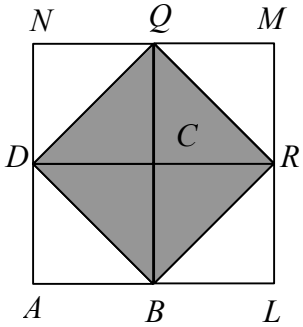


Figura 4

S: E che? Tutto questo intero (*ALMN*) quante volte è più grande di questo (*ABCD*)?
R: Quattro volte.
S: E a noi occorrevano due volte, ti ricordi?

R: Perfettamente.
S: Ora questa linea che si stende (*DB*, *BR*, *RQ*, *QD*), da un angolo all'altro non taglia essa per metà ciascuna di queste aree?
R: Sì.
S: Si hanno dunque quattro linee uguali che racchiudono quest'area (*DBRQ*).
R: Si hanno.
S: Ora osserva, di che misura è quest'area?
R: Non capisco.
S: Non sono quattro queste aree, e ciascuna linea trasversale non ne ha tagliata di dentro la metà di ciascuna? O non ti pare?
R: Sì.
S: Quante dunque di tali ve ne sono in questo (*DBRQ*)?
R: Quattro.
S: E quante in questo (*ABCD*)?
R: Due.
S: E il quattro del due che cosa è?
R: Il doppio.
S: Questo dunque, (*DBRQ*) di quanti piedi sarà?
R: Di otto piedi.
S: (Partendo) da quale linea?
R: Da questa (*DB*)
S: Da quella che va da un angolo all'altro dell'area di quattro piedi?
R: Sì.
S: Or questa gli intendenti la chiamano diagonale, e se questa (*DB*) ha nome diagonale, dalla diagonale, dunque, come tu dici, si potrebbe ottenere l'area doppia.
R: Perfettamente, o Socrate.

Fatta ora la conoscenza con questo nuovo numero, il passo successivo è quello di individuarne il comportamento operativo per notare come nelle applicazioni siffatti numeri si comportino diversamente da quelli fino ad ora conosciuti.
Avvalendosi del Teorema di Pitagora, è possibile passare, con l'uso di un software di geometria dinamica e con un procedimento ricorsivo, a partire dal segmento di misura $\sqrt{2}$, alla costruzione di più segmenti aventi per misura un numero irrazionale.

Seconda fase

Come si costruiscono geometricamente i numeri irrazionali del tipo $\sqrt{n}$?
A partire dal segmento unitario, si costruisce il triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa misura $\sqrt{2}$ (cfr. prima fase).
A partire dal segmento (cateto) di misura $\sqrt{2}$, si costruisce il triangolo rettangolo avente per cateto minore il segmento unitario. Si ottiene così l'ipotenusa che misura $\sqrt{3}$.
Iterando tale procedimento è possibile individuare le misure di segmenti espresse mediante radici quadrate di numeri interi positivi.

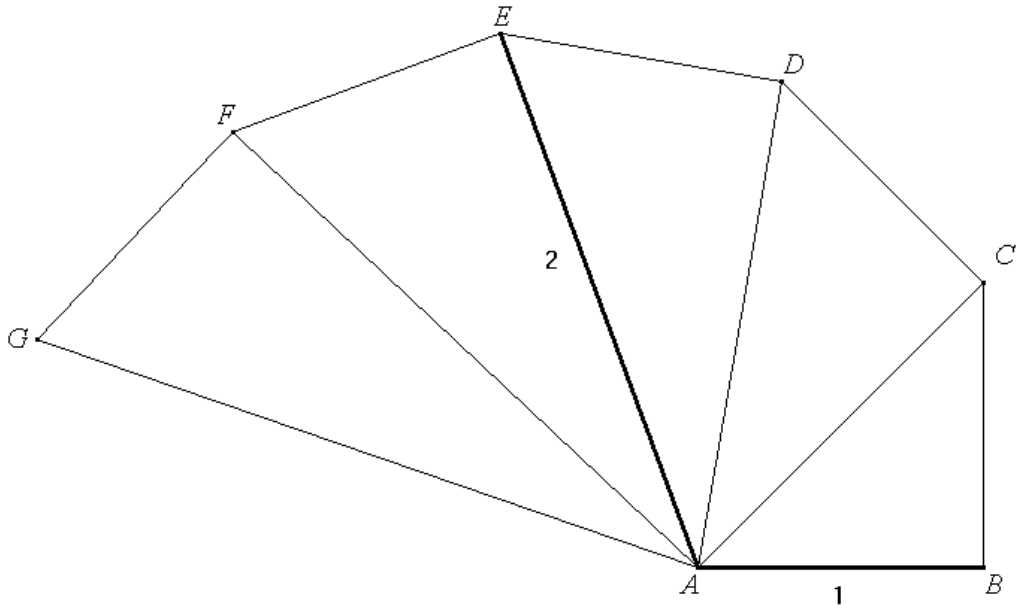


Figura 5

Terza fase

A partire dalla Figura 5 ha senso riportare i segmenti su una retta passante per *O* per eseguire le ordinarie operazioni tra segmenti (addizione e sottrazione) al fine di far osservare il diverso comportamento operativo dei numeri irrazionali rispetto a quelli fino ad ora studiati.

Lo stesso metodo di costruzione, riferito ad un piano cartesiano monometrico ortogonale, consente di rappresentare i numeri irrazionali sulla retta orientata.

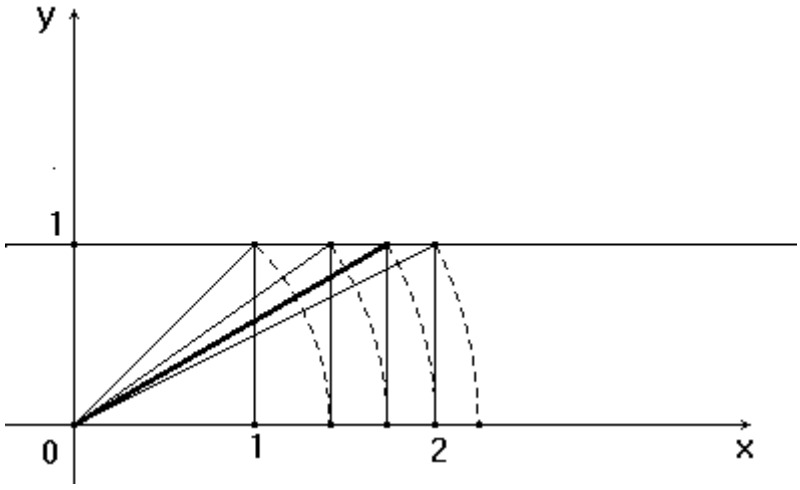


Figura 6

A questo punto occorre far osservare agli studenti, ad esempio, che $\sqrt{2}$ è un numero compreso tra 1 e 2, ma ciò non è sufficiente a far comprendere il concetto d'incommensurabilità. Si ricercano allora, con l'uso di una calcolatrice grafico-simbolica e per successive approssimazioni (due, tre, quattro, … cifre significative), i corrispondenti valori decimali di $\sqrt{2}$ come riportato nel seguente esempio.

x	y1
1.	1.
1.1	1.21
1.2	1.44
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25
1.6	2.56
1.7	2.89

x=1.4

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 1

x	y1
1.4	1.96
1.41	1.9881
1.42	2.0164
1.43	2.0449
1.44	2.0736
1.45	2.1025
1.46	2.1316
1.47	2.1609

x=1.41

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 2

x	y1
1.41	1.9881
1.411	1.990921
1.412	1.993744
1.413	1.996569
1.414	1.999396
1.415	2.002225
1.416	2.005056
1.417	2.007889

x=1.414

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 3

x	y1
1.414	1.999396
1.4141	1.9996788
1.4142	1.9999616
1.4143	2.0002445
1.4144	2.0005274
1.4145	2.0008103
1.4146	2.0010932
1.4147	2.0013761

x=1.4142

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 4

Gli studenti potrebbero, a titolo di esercizio, anche con l'uso di una semplice calcolatrice, costruire un'ulteriore tabella con le successive approssimazioni, verificando così che i numeri irrazionali, avendo la parte decimale formata da infinite cifre non periodiche, non possono essere espressi da una frazione né possono costituire un'unità di misura confrontabile con segmenti di misura finita.

Elementi di prove di verifica

1. Si può richiedere, la costruzione geometrica di $2\sqrt{2}$ (Figura 7).

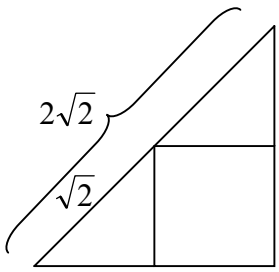


Figura 7

2. Come esempio di confronto si può richiedere la costruzione geometrica di $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ per far discutere sul risultato ora ottenuto in relazione a quelli precedenti.

Quando viene Pasqua?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Geografia astronomica Religione Storia

Contesto
Algoritmi numerici.

Questa attività affronta il problema del calcolo della data della Pasqua cattolica nei vari anni (*Computus Paschalis*), e presenta la successiva implementazione dell'algoritmo corrispondente nel foglio elettronico. Ciò consente agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di scoprire i collegamenti con le altre discipline e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Essa può essere introdotta in prima classe, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore dell'espressione numerica e algebrica corrispondente alle relazioni e alle formule presenti negli algoritmi sia utilizzare il computer e il foglio elettronico nelle funzioni essenziali.

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata al calcolo della data di Pasqua come applicazione individuale e manuale, per concludere con l'implementazione delle relazioni presentate che porta, in momenti successivi, all'uso più ampio dell'algoritmo corrispondente.

Prima fase
L'insegnante:
- Illustra l'esperienza e consegna agli studenti una scheda contenente notizie storiche, religiose e di geografia astronomica.
- Distribuisce agli studenti, eventualmente divisi in gruppi, la scheda contenente i due algoritmi e li invita ad effettuare manualmente il calcolo per entrambi.
- Sollecita gli studenti a confrontare i due algoritmi e a proporre differenze e analogie fra gli stessi.
- Sollecita la risoluzione di un nuovo problema: "Roberta, nata il 7/4/1983, ha festeggiato alcuni suoi compleanni nel giorno di Pasqua: in quali anni? Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nel giorno di Pasqua?".
- Sottolinea la necessità, per risolvere questo problema, di automatizzare la procedura di ricerca, con l'uso di un computer, implementando gli algoritmi nel foglio elettronico con le specifiche istruzioni.

Seconda fase

L'attività è proposta in laboratorio d'informatica quando gli studenti sono in grado di gestire un computer e un foglio elettronico.

L'insegnante:

- Invita gli studenti ad implementare gli algoritmi illustrati nel foglio elettronico disponibile.
- Sollecita la risoluzione del problema: "Roberta, nata il 7/4/1983 ha festeggiato alcuni suoi compleanni nel giorno di Pasqua: in quali anni. Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nel giorno di Pasqua?".
- Stimola gli studenti a confrontare i due algoritmi e a proporre differenze e analogie fra gli stessi, analizzando le diversità tra le difficoltà operative dei due algoritmi e quelle tra le istruzioni-macchina e le informazioni lette.

Possibili sviluppi

- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico l'*epatta*[1];
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il *numero d'oro*[2];
- Stabilire *l'intervallo di ricorrenza della festività pasquale nei prossimi vent'anni*[3];
- Stabilire, con riferimento al periodo 1950-2050, *in quali giorni ricorre maggiormente la Pasqua*.
- Utilizzare il *Metodo aritmetico* di Karl F. Gauss[4], per calcolare il giorno della Pasqua;
- Utilizzare l'*Algoritmo di Oudin-Tondering*[5], per calcolare il giorno della Pasqua.

Notizie storiche, religiose e astronomiche su Computus Paschalis

La Pasqua cristiana ricorda la passione, morte e resurrezione di Gesù Cristo che avvenne durante la Pasqua ebraica che cade fra il 14 ed il 15 del primo mese del calendario ebraico. Celebra anche la notte in cui Jahvè uccise tutti i primogeniti degli uomini e degli animali, risparmiando quelli delle famiglie ebraiche che avevano cosparso la soglia di casa con il sangue del sacrificio di un agnello maschio.

La determinazione della data della Pasqua cristiana, in dipendenza di quella ebraica, si è dimostrata subito problematica per la differenza fra il calendario ebraico, basato sulle fasi lunari, e quello cristiano, basato sulla rivoluzione completa della terra intorno al sole (365,25 giorni).

Poiché le "lunazioni ecclesiastiche" hanno un ciclo di 29^{d}, mentre le "lunazioni astronomiche" sono di $29^{d}\ 12^{h}\ 44^{m}$ è necessario portare alcuni correttivi.

Nell'anno 325 il Concilio di Nicea, per interrompere ogni discussione, che portava addirittura a festeggiare la Pasqua in domeniche differenti nelle varie aree geografiche, stabilì che la solennità cristiana della Pasqua di Resurrezione, dovesse cadere la prima domenica dopo il "plenilunio ecclesiastico" (ossia il quattordicesimo giorno della luna ecclesiastica) che viene dopo l'equinozio di primavera. Stabilendo questo criterio la Chiesa cristiana dimostrò di non voler interrompere nettamente con la tradizione platonica ed il misticismo pitagorico-babilonese.

In quell'occasione la data ufficiale dell'equinozio fu spostata dal 25 marzo al 21 marzo poiché, a causa delle imprecisioni del calendario giuliano, si erano accumulati a quell'epoca quasi quattro giorni di ritardo rispetto al tempo di Giulio Cesare. Va in ogni modo precisato che, per varie ragioni, la data astronomica esatta dell'equinozio varia da un anno all'altro e nel corso dei secoli. Per queste ragioni la data della Pasqua è compresa tra il 22 marzo e il 25 aprile (inclusi). Infatti, se il 21 marzo è luna piena, e questo giorno è di sabato, sarà Pasqua il giorno dopo, il 22 marzo; se invece è di domenica, il giorno di Pasqua sarà la domenica successiva, il 28 marzo. D'altro canto, se il

[1] cfr. Epatta - http://space.tin.it/edicola/esongi/epatta.htm
[2] cfr. Numero d'oro - http://space.tin.it/edicola/esongi/numerodoro.htm
[3] cfr. Tabella delle date di Pasqua - http://space.tin.it/edicola/esongi/datapasqua.htm
[4] cfr. Metodo aritmetico - http://space.tin.it/edicola/esongi/gauss.htm
[5] cfr. Algoritmo di Oudin-Tondering - http://space.tin.it/edicola/esongi/oudin.htm

plenilunio sopravviene il 20 marzo, quello successivo si verificherà il 18 aprile, e se questo giorno è una domenica occorre aspettare la domenica successiva, il 25 aprile.
La questione sul metodo di calcolo della data della Pasqua fu molto dibattuta all'interno della Chiesa, soprattutto prima, ma anche dopo il Concilio di Nicea. Nel corso dei secoli V-VII si affermò, grazie soprattutto all'opera di Dionigi il Piccolo, il metodo della compilazione delle tavole delle date della Pasqua, basato sul ciclo di Metone[7]. La riforma gregoriana del 1582[8] rese più preciso il calcolo, introducendo una correzione del ciclo di Metone. Parecchie chiese ortodosse utilizzano il calendario giuliano, anziché il gregoriano, per il calcolo della Pasqua, che in tal modo è celebrato in un giorno generalmente diverso rispetto a quello della chiesa cattolica e delle chiese protestanti. È in corso un tentativo da parte della chiesa cattolica, delle chiese ortodosse e di quelle protestanti di stabilire una stessa data della Pasqua sia per le chiese occidentali, sia per quelle orientali. Ciò sarebbe possibile se, anziché ricorrere ad algoritmi e ad una data dell'equinozio fissata a priori il 21 marzo, si eseguissero i calcoli sulla base del momento esatto degli eventi astronomici: equinozio e plenilunio.
Molti studiosi si occuparono del problema di stabilire un algoritmo per valutare esattamente la data del giorno di Pasqua: tra questi il monaco Anianus, Vittorio d'Aquitania, K. F. Gauss (1825), Cisa di Gresy (Torino 1820), F. Piccolini (Bologna 1854) e Kinkelin (Basilea 1872) che ne diede una dimostrazione. Altri metodi richiedono la conoscenza dell'epatta e del numero d'oro.

7 cfr. Metone, astronomo ateniese del V secolo a. C. - http://space.tin.it/edicola/esongi/numerodoro.htm
8 cfr. Anno gregoriano - http://space.tin.it/edicola/esongi/epatta.htm

Antico algoritmo benedettino che consente di stabilire la data della Pasqua

a) Chiama *y* l'anno di riferimento;
b) Chiama *n* la differenza tra *y* e 1900;
c) Dividi *n* per 19, chiama *a* il suo resto;
d) Dividi $(7a + 1)$ per 19 e chiama *b* il suo quoziente;
e) Dividi $(11a + 4 - b)$ per 29, chiama *m* il suo resto;
f) Dividi *n* per 4, chiama *q* il quoziente;
g) Dividi $(n + q + 31 - m)$ per 7, chiama *w* il resto.
h) Calcola $(25 - m - w)$ chiama *g* il risultato.
i) Se $g > 0$ la Pasqua cadrà ad Aprile nel giorno *g*
j) Se $g \leq 0$ la Pasqua cadrà nel mese di marzo del giorno $(31 + g)$

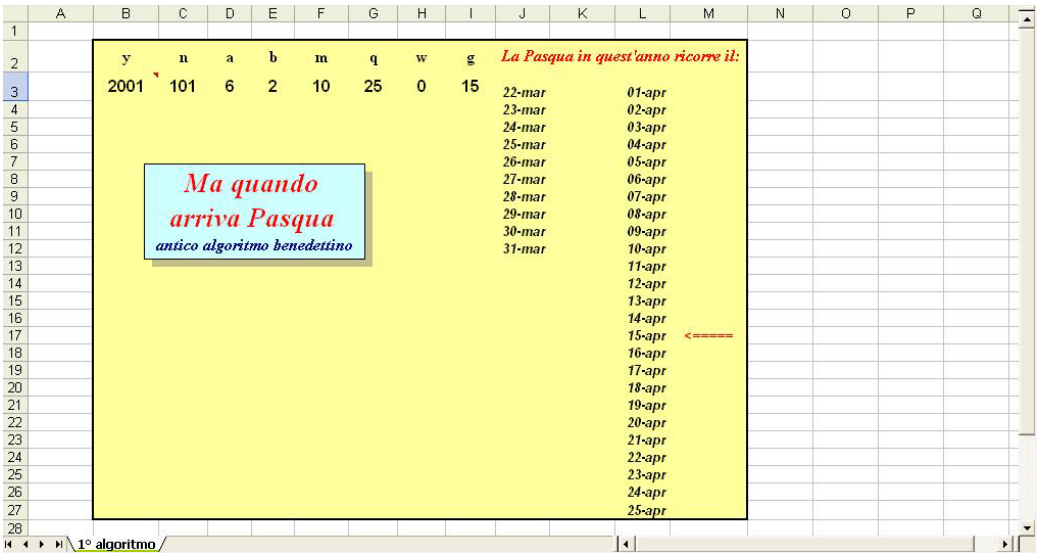


Tabella 1

Altro algoritmo per stabilire la data della Pasqua

a) Chiama *Y* l'anno di riferimento
b) Dividi *Y* per 19, chiama *G* il suo resto aumentato di *1*
c) Dividi *Y* per *100*, ignora il resto e chiama *C* il quoziente aumentato di *1*
d) Moltiplica *C* per *3* e dividi il risultato per *4*, trascura il resto e chiama *X* il quoziente diminuito di *12*
e) Calcola (*8*C + 5*)*/25* trascura il resto e chiama *Z* il quoziente diminuito di *5*
f) Moltiplica *Y* per *5* e dividi il risultato per *4*, trascura il resto e chiama *D* il quoziente diminuito di (*X+10*)
g) Dividi (*11*G + 20 + Z – X*) per *30* e chiama il resto *E*
h) Se si verifica che *E = 25* e *G > 11* oppure *E = 24,* aggiungi *1* ad *E*
i) Se non si verifica la condizione precedente il valore di *E* rimane invariato
j) Calcola (*44 – E*) e chiama il risultato *N*
k) Se *N < 21*, incrementa *N* di *30* altrimenti lascia invariato il valore
l) Calcola (*7 + N*) e sottrai il resto di (*D + N*)*/7* e chiama *R* il risultato
m) Se *R > 31* la Pasqua cadrà ad Aprile nel giorno *R – 31*
n) Se *R < 32* la Pasqua ricorre il giorno *R* del mese di Marzo.

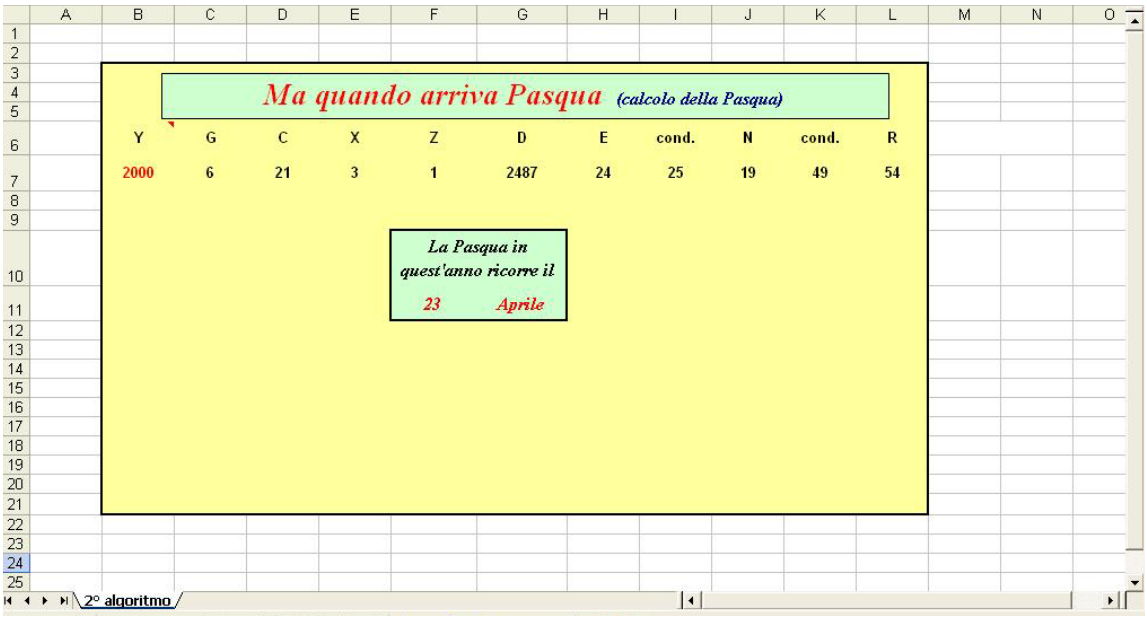


Tabella 2

Elementi di prove di verifica

1. Quante volte, fino ad oggi, Roberta ha festeggiato il suo compleanno nel giorno di Pasqua?
   a) una volta,
   b) due volte,
   c) tre volte,
   d) quattro volte,
   e) nessuna volta.

2. Fra quanti anni, a partire dal 2003, Roberta potrà festeggiare nuovamente il suo compleanno nel giorno di Pasqua?
   a) Settanta anni,
   b) Settantuno anni,
   c) Settantadue anni,

d) Settantatré anni,
e) Settantaquattro anni.

3. Qual è il periodo delle vacanze pasquali nell'anno scolastico 2003-04?
a) dall'8 aprile al 13 aprile,
b) dal 27 marzo al 1 aprile,
c) dal 15 aprile al 20 aprile,
d) dal 20 marzo al 25 marzo,
e) dall'7 aprile al 12 aprile.

4. Quando cade l'inizio della quaresima nell'anno scolastico 2004-05?
a) 7 febbraio
b) 8 febbraio
c) 9 febbraio
d) 10 febbraio
e) 11 febbraio

5. Qual è l'intervallo in cui può variare la Pasqua?
a) dal 21 marzo al 22 aprile
b) dal 27 marzo al 21 aprile
c) dal 15 aprile al 20 aprile
d) dal 2 marzo al 25 marzo
e) nessuna risposta delle precedenti è esatta

6. In che periodo la Pasqua coinciderà con la festa dell'Anniversario della liberazione?
a) dal 2019 al 2035
b) dal 1990 al 2010
c) dal 2036 al 2050
d) dal 2011 al 2020
e) nessuna risposta delle precedenti è esatta

7. In che periodo la Pasqua coinciderà con la festa del Lavoro?
a) dal 2019 al 2035
b) dal 1990 al 2010
c) dal 2036 al 2050
d) dal 2011 al 2020
e) nessuna risposta delle precedenti è esatta

In quale giorno cade Natale?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	Numeri e algoritmi Risolvere e porsi problemi Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	Geografia astronomica Religione Storia

Contesto
Algoritmi numerici.

Questa attività affronta il problema del calcolo del giorno della settimana in cui viene Natale[1] nei vari anni e in generale di un qualunque altro giorno del calendario, e presenta l'implementazione dell'algoritmo corrispondente nel foglio elettronico. Essa consente agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di scoprire i collegamenti con le altre discipline e di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato e sull'uso di una tabella complessa quale quella relativa al Calendario Perpetuo.
Può essere introdotta in prima classe, quando gli studenti sanno sia orientarsi in modo cosciente in una tabella sia calcolare il valore dell'espressione numerica e algebrica corrispondente alle relazioni e alle formule presenti nell'algoritmo sia, ancora, utilizzare il computer e il foglio elettronico nelle funzioni essenziali.

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività, prevalentemente operativa e personale, legata al calcolo del giorno corrispondente ad una qualsiasi data di un calendario in forma tabellare, che porta, in momenti successivi, all'uso più ampio dell'algoritmo corrispondente.

Prima fase
L'insegnante:

- Illustra l'esperienza e consegna agli studenti una scheda contenente notizie storiche, religiose e di geografia astronomica relative al Calendario.
- Distribuisce agli studenti, eventualmente divisi in gruppi, la scheda contenente il Calendario Perpetuo in forma tabellare e li invita a ricercare "in quale giorno della settimana cadrà il Natale nel successivo anno scolastico", dopo aver letto e commentato le istruzioni per l'utilizzo della stessa.
- Sollecita la risoluzione di un nuovo problema: "Rita, nata il 5/9/1980, ha festeggiato diversi suoi compleanni nello stesso giorno della settimana in cui è nata: quali sono questi anni? Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nello stesso giorno?".
- Sottolinea la necessità, per la risoluzione del problema, di automatizzare la procedura di ricerca con l'uso di un computer, implementando l'algoritmo nel foglio elettronico con le specifiche istruzioni.

[1] Il presente lavoro ha soltanto un valore didattico e non scientifico

Seconda fase

L'attività è proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado sia di calcolare il valore di un'espressione algebrica sia di gestire un computer e un foglio elettronico nelle funzioni essenziali.

L'insegnante:
- Invita gli studenti a implementare l'algoritmo analizzato nel foglio elettronico disponibile.
- Sollecita la risoluzione del problema: "Rita, nata il 5/9/1980, ha festeggiato alcuni suoi compleanni nello stesso giorno della settimana in cui è nata; fino ad oggi quali sono questi anni? Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nello stesso giorno?"**.**
- Stimola gli studenti a confrontare i due metodi: tabellare e algoritmico e a proporre differenze e analogie fra gli stessi; mette a confronto le differenti difficoltà operative e le diversità tra le istruzioni-macchina e le informazioni lette.

Possibili sviluppi
- Calcolare il giorno corrispondente ad una data utilizzando altri *calendari perpetui*[2];
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico la *lettera domenicale*[3]*;*
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il *ciclo solare*[4]*;*
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il *giorno della settimana*[5]*;*
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il giorno corrispondente all'inizio e alla fine dell'*ora legale in Italia* nel periodo antecedente al 1967[6];
- Costruire "*la ciclicità del giorno di Natale*";
- Costruire "*la ciclicità di un'altra festività fissa*".

Notizie storiche, religiose e astronomiche su Il Calendario Perpetuo

Un calendario[7] rappresenta una suddivisione dell'anno in mesi, settimane e giorni, nonché un metodo per ordinare gli anni. Diverse culture hanno prodotto diversi calendari, quasi tutti originariamente basati sul mese lunare, cioè sul periodo di tempo che intercorre tra una luna nuova e la successiva (circa 29 giorni e mezzo) e che è all'origine della definizione del mese. Il nome calendario deriva dal latino *calendæ*, il primo giorno del mese romano, in cui si celebrava proprio la comparsa della luna nuova. Il calendario che usiamo oggi è invece solare: i nostri dodici mesi durano 365 giorni in tutto, approssimando il periodo della rivoluzione completa della Terra intorno al Sole. Poiché l'anno solare dura in realtà 365 giorni e, circa, un quarto, ogni quattro anni aggiungiamo un giorno alla fine di febbraio (anno bisestile). Per definire le date usiamo come riferimento un'ipotetica data di nascita di Gesù Cristo, e chiamiamo avanti Cristo (a.C.) le date anteriori e dopo Cristo o Anno Domini (d.C. o AD) le date posteriori.

I calendari primitivi erano basati sull'osservazione della posizione del Sole (per la durata del giorno), sul ciclo della Luna (per la durata del mese) e sulle stagioni (per la durata dell'anno). La suddivisione del tempo rifletteva i vincoli imposti dalla natura e dalla geografia locale. In Egitto, dove la sopravvivenza dipendeva dalla fertilizzazione delle terre dovuta alle periodiche piene del Nilo, l'anno era diviso in tre stagioni: inondazione del Nilo, emersione delle terre, mietitura del grano. Ogni stagione era suddivisa in quattro mesi di 30 giorni ciascuno; alla fine si aggiungevano cinque giorni dedicati ad altrettante divinità. Gli egizi furono probabilmente i primi a dividere il giorno in 24 ore di eguale durata.

---

[2] cfr. Il calendario Perpetuo - http://space.tin.it/edicola/esongi/perpetuo.htm
[3] cfr. La lettera domenicale - http://space.tin.it/edicola/esongi/domenicale.htm
[4] cfr. Il ciclo solare - http://space.tin.it/edicola/esongi/ciclosolare.htm
[5] cfr. Metodo della formula per stabilire il giorno della settimana - http://space.tin.it/edicola/esongi/formula.htm
[6] cfr. L'ora legale in Italia - http://space.tin.it/edicola/esongi/oralegale.htm
[7] cfr. Il Calendario - http://www.ciaoumbria.it/incasa/soleluna/calendarioperpetuo/

Il primo calendario accurato, basato sul ciclo delle fasi lunari, fu probabilmente sviluppato 5000 anni fa dai Sumeri in Mesopotamia, regione compresa tra i fiumi Tigri ed Eufrate (nell'odierno Iraq).
Il calendario ebraico è una complessa combinazione di cicli lunari e solari: un anno può avere 12 o 13 mesi, la cui durata normalmente varia tra 29 e 30 giorni. Il conto degli anni è fatto iniziare nel 3761 a.C., data tradizionale della creazione del mondo.
Il calendario islamico, basato sul ciclo lunare, ha dodici mesi di 29 e 30 giorni alternativamente. L'anno musulmano dura quindi 354 giorni, undici in meno dell'anno solare: il calendario ruota intorno alle stagioni in un ciclo trentennale. La datazione musulmana inizia con l'ègira (16 luglio dell'anno 622), data del trasferimento di Maometto dalla Mecca a Medina.
Anche il calendario tradizionale cinese, in uso ancora oggi insieme a quello occidentale, è lunare e ha un ciclo di 60 anni.
In India l'inizio dell'anno cade il 22 marzo, subito dopo l'equinozio di primavera, e gli anni si calcolano a partire dall'inizio di varie dinastie: l'era Saka, per esempio, inizia nel 78 d.C.
Il calendario usato oggi da tutto l'Occidente ha invece le sue origini dal calendario giuliano, introdotto da Giulio Cesare nel 46 avanti Cristo, che portò la durata dell'anno a 365 giorni. Le date si misuravano *ab Urbe condita*, cioè dalla fondazione di Roma (il 22 aprile del 753 a.C.).
Fu il monaco scozzese Dionysius Exiguus, nel 525 d.C., a proporre la numerazione degli anni a partire dalla nascita di Cristo, che fissò nell'anno 753 dalla fondazione di Roma. Molti storici di oggi ritengono, invece, che Gesù sia nato alcuni anni prima. Il nuovo calendario definito da Exiguus, non era però ancora preciso, e determinava l'accumularsi di piccoli sfasamenti tra i mesi e le stagioni.
Fu la riforma gregoriana del 1582, ad opera del papa Gregorio XIII, a tenere conto del fatto che l'anno solare dura 365 giorni, 5 ore e 48 minuti: quindi poco meno di 365 giorni e un quarto. L'aggiunta di un giorno bisestile ogni quattro anni è quindi eccessiva. La riforma gregoriana per questa ragione stipulò che, degli anni secolari, soltanto uno ogni quattro fosse bisestile. Ecco perché gli anni 1700, 1800 e 1900 non sono stati bisestili, ma l'anno 2000 sì.
Il calendario gregoriano entrò in vigore in quasi tutta l'Europa giovedì 4 ottobre 1582. Quel giorno la gente lavorò normalmente, e alla solita ora tutti andarono a letto. Quando si risvegliarono era il 15 ottobre, venerdì. Il salto decretato da papa Gregorio XIII si era reso necessario perché, a causa della leggera imprecisione del calendario giuliano, si era accumulato, nei secoli, uno sfasamento in avanti di ben 10 giorni (quelli annullati tra il 4 e il 15 ottobre). Senza questa correzione, col passare del tempo si sarebbe celebrato il Natale in piena primavera.
La Francia, la Spagna, il Portogallo, i Paesi Bassi e quasi tutti gli staterelli italiani si adeguarono subito al calendario stabilito dallo stato pontificio, mentre gli stati cattolici della Germania e la Svizzera lo fecero solo nel 1584. La Gran Bretagna accettò il calendario gregoriano soltanto nel 1752, la Cina nel 1911, la Russia nel 1919 e la Grecia nel 1923.
Tra i più recenti esperimenti storici di modifica del calendario merita una menzione quello della Francia rivoluzionaria, che sostituì il calendario gregoriano con il Calendario Repubblicano, iniziando l'anno con l'equinozio di autunno del 22 settembre 1792, giorno della proclamazione della Repubblica. I mesi restavano dodici, ma di 30 giorni ciascuno. I 5 giorni mancanti (6 negli anni bisestili) erano riservati alle festività nazionali e si contavano a parte. Anche il nome dei mesi veniva modificato: vendemmiaio, brumaio e frimaio (per l'autunno), nevoso, piovoso e ventoso (per l'inverno), germinale, fiorile e pratile (per la primavera), messidoro, termidoro e fruttidoro (per l'estate). La Rivoluzione francese portò anche all'introduzione del sistema metrico decimale, e non mancò chi propose di passare a una settimana di dieci giorni anziché di sette. Questa riforma fu, poi, cancellata da Napoleone. Il calendario gregoriano fu restaurato in Francia il 1° gennaio 1806.
Più di una volta è stata avanzata la proposta[8] di creare un calendario che possa essere adottato da tutti i popoli e che superi le differenze esistenti tra i diversi calendari.

[8] cfr. La proposta di calendario perpetuo - http://space.tin.it/edicola/esongi/perpetuo1931.htm

Un calendario perpetuo[9] è, come dice il nome stesso, un calendario valido per sempre o per un periodo lunghissimo di tempo e può assumere svariate forme.

CALENDARIO PERPETUO

QUADRO I

ISTRUZIONE

1°. – Cercare nel Quadro 1° in basso a sinistra il numero dei secoli, in alto a destra quello degli anni e leggere all'incrocio della riga con la colonna il numero corrispondente. Se il numero degli anni è scritto in rosso, l'anno è bisestile. Se si tratta di un anno secolare (cioè tale che il millesimo termini con 00) ricordare che tutti gli anni secolari sono bisestili ad eccezione del 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700. Per questo motivo il numero 00, nella prima casella, in alto a sinistra, è scritto con uno zero nero e uno rosso. Occorre tener conto degli anni bisestili solo per le date relative ai mesi di Gennaio e Febbraio.

2°. – Cercare nella prima colonna del Quadro 2° la riga portante il numero ricavato dal quadro 1° e leggere, all'incrocio colla colonna contenente il mese dato, il numero corrispondente. Per gli anni bisestili e per i soli mesi di Gennaio e Febbraio, usare le colonne nelle quali questi mesi sono scritti in rosso; altrimenti cercare sempre il mese scritto in nero.

3°. – Cercare nella prima colonna del Quadro 3° la riga portante il numero ricavato dal Quadro 2° e leggere all'incrocio colla colonna portante la data del giorno cercato, l'iniziale del giorno stesso. (Quando la lettera M è scritta in nero significa Martedì, quando è scritta in rosso significa Mercoledì).

ANNI						
0**0**	01	02	03	—	**04**	05
06	07	—	**08**	09	10	11
—	**12**	13	14	15	—	**16**
17	18	19	—	**20**	21	22
23	—	**24**	25	26	27	—
28	29	30	31	—	**32**	33
34	35	—	**36**	37	38	39
—	**40**	41	42	43	—	**44**
45	46	47	—	**48**	49	50
51	—	**52**	53	54	55	—
56	57	58	59	—	**60**	61
62	63	—	**64**	65	66	67
—	**68**	69	70	71	—	**72**
73	74	75	—	**76**	77	78
79	—	**80**	81	82	83	—
84	85	86	87	—	**88**	89
90	91	—	**92**	93	94	95
—	**96**	97	98	99	—	—

SECOLI

GIULIANI (Dall'anno 0 al 4 Ottobre 1582)			GREGORIANI (Dal 15 Ottobre 1582 al 2899)										
0	7	14		17	21	25	6	0	1	2	3	4	5
1	8	15					5	6	0	1	2	3	4
2	9			18	22	26	4	5	6	0	1	2	3
3	10						3	4	5	6	0	1	2
4	11		15	19	23	27	2	3	4	5	6	0	1
5	12		16	20	24	28	1	2	3	4	5	6	0
6	13						0	1	2	3	4	5	6

QUADRO II

MESI – Numero risultante dai calcoli precedenti	MAGGIO	AGOSTO **FEBBRAIO B.**	FEBBRAIO MARZO NOVEMBRE	GIUGNO	SETTEMBRE DICEMBRE	APRILE LUGLIO **GENNAIO B.**	GENNAIO OTTOBRE
1	2	3	4	5	6	0	1
2	3	4	5	6	0	1	2
3	4	5	6	0	1	2	3
4	5	6	0	1	2	3	4
5	6	0	1	2	3	4	5
6	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	0

QUADRO III

GIORNI – Numero risultante dai calcoli precedenti	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
1	D	L	M	**M**	G	V	S
2	L	M	**M**	G	V	S	D
3	M	**M**	G	V	S	D	L
4	**M**	G	V	S	D	L	M
5	G	V	S	D	L	M	**M**
6	V	S	D	L	M	**M**	G
0	S	D	L	M	**M**	G	V

Tabella 1

[9] cfr. Il calendario perpetuo - http://space.tin.it/edicola/esongi/perpetuo.htm

Algoritmo che consente di determinare il giorno della settimana di un qualunque anno del calendario Gregoriano

a) Chiama *g*, *m*, ed *a* rispettivamente il giorno il mese e l'anno di riferimento
b) Se il mese è Gennaio allora *m* = 11
   se il mese è Febbraio allora *m* = 12
   se il mese è Marzo allora *m* = 1
   …
   se il mese è Dicembre allora *m* = 10
c) Se il giorno è domenica allora *g* = 0
   Se il giorno è lunedì allora *g* = 1
   …
   Se il giorno è sabato allora *g* = 6
d) Calcola *a*/100 e chiama *C* il quoziente e *Y* il resto
e) Calcola (13**m* – 1)/5 e indica con *E* il quoziente trascurandone il resto
f) Calcola *Y*/4 e indica *B* il quoziente trascurandone il resto
g) Calcola *C*/4 e indica *F* il quoziente trascurandone il resto
h) Calcola (*E* + *B* + *F* + *g* + *Y* – 2*C*) e indica tale valore con *D*
i) Calcola *D*/7 e indica il resto con *R*
j) Se *R* = 0 il giorno è domenica
k) Se *R* = 1 il giorno è lunedì
l) …
m) Se *R* = 6 il giorno è sabato

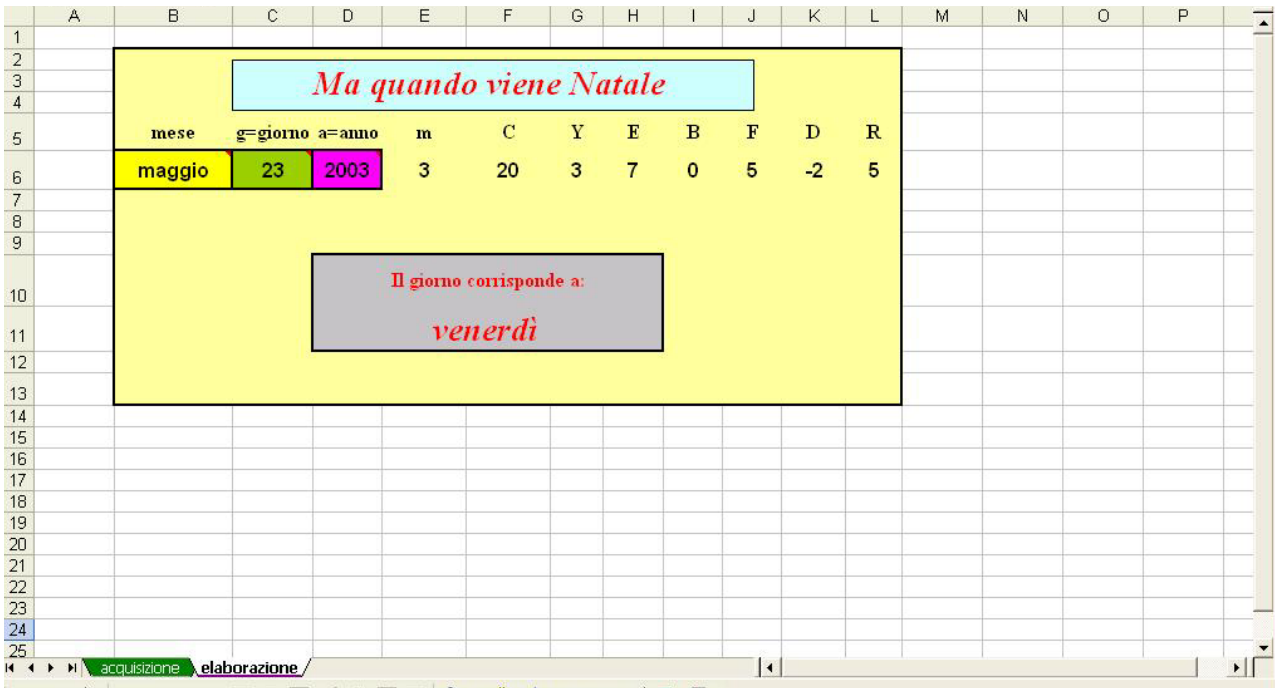


Tabella 2

Elementi di prove di verifica

1. In quali anni Rita ha festeggiato i suoi compleanni nello stesso giorno della settimana in cui è nata?

1) 1985 - 1996 - 2002
2) 1986 - 1996 - 2003
3) 1987 - 1998 - 2004
4) 1988 - 1999 - 2005
5) 1989 - 2000 - 2006

2. In quale anno Rita festeggerà il suo prossimo compleanno nello stesso giorno della settimana in cui è nata?

a) 2005
b) 2006
c) 2007
d) 2008
e) 2009

3. Utilizzando esclusivamente il Calendario Perpetuo tabellare calcolare il giorno della settimana relativo al 7/settembre/1947.

f) lunedì
g) martedì
h) giovedì
i) sabato
j) domenica

4. Utilizzando esclusivamente il Calendario Perpetuo algoritmico calcolare il giorno della settimana relativo al 13/ottobre/1582.

a) lunedì
b) martedì
c) mercoledì
d) sabato
e) nessuna delle risposte precedenti è esatta

5. Supponiamo che le vacanze di Natale dell'anno scolastico 2004-05 inizino il 23 dicembre 2003 e terminino il 6 gennaio 2004. A quali giorni della settimana essi corrispondono?

a) lunedì – martedì
b) martedì – martedì
c) mercoledì - venerdì
d) giovedì - giovedì
e) domenica - domenica

I numeri delle macchine

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e dei numeri razionali. I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali. Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.	Numeri e algoritmi Laboratorio di matematica	

Contesto
I numeri macchina.

Gli strumenti di calcolo, dalla più economica delle calcolatrici al più costoso dei computer, hanno oggi una grandissima diffusione e non solo in ambiente scolastico. È dunque importante che gli studenti si rendano conto delle possibilità e dei limiti degli strumenti che hanno a disposizione.
Le conoscenze matematiche necessarie per svolgere le attività di laboratorio qui descritte sono elementari e alla portata di qualsiasi studente del primo biennio.

Descrizione dell'attività
Esistono vari tipi di "errori" commessi dalle macchine: quelli dovuti alla rappresentazione dei numeri nella macchina, quelli legati alla "instabilità" di certi problemi, quelli di tipo grafico dovuti al modo utilizzato dallo strumento per realizzare un grafico, ...
Nell'attività descritta si farà riferimento a strumenti che non utilizzano sistemi di calcolo simbolico (CAS = Computer Algebra System), i quali usano metodi di rappresentazione e algoritmi di calcolo completamente diversi, bensì a calcolatrici non simboliche, fogli elettronici e anche CAS usati in modalità approssimata.
L'argomento di quest'attività non è, come il titolo potrebbe far pensare, i numeri-macchina, in altre parole come i numeri sono rappresentati nella memoria di un calcolatore o di una calcolatrice: questo è un argomento non facile e non proponibile in una classe del primo biennio; per eventuali approfondimenti su questo tema si rimanda alla Bibliografia.
L'obiettivo di quest'attività di laboratorio è imparare a conoscere i vari modi nei quali le "macchine" (calcolatrici e calcolatori) visualizzano i numeri, gli errori che possono essere indotti da un uso non consapevole di uno strumento di calcolo, la conoscenza delle prestazioni offerte dallo strumento disponibile e più in generale un approfondimento della conoscenza dei numeri, delle operazioni elementari e delle loro proprietà.
Non si parla quindi di numeri macchina, ma di numeri coinvolti nell'uso di strumenti di calcolo: arrotondamenti e approssimazioni, errori dovuti alla rappresentazione dei numeri...

Una difficoltà operativa notevole nell'uso delle calcolatrici in classe deriva dal fatto che, a meno che ci siano delle "adozioni" ufficiali da parte dell'insegnante, tutti gli studenti di norma possiedono una calcolatrice, ma di modelli, marche, prestazioni (e prezzi) spesso molto diversi tra loro. Se questa diversità costituisce un ostacolo nell'uso regolare della calcolatrice, in questa attività può anche essere considerata una risorsa, offrendo la possibilità di mettere a confronto le caratteristiche dei diversi strumenti.
Saranno esaminati i comportamenti di vari tipi di macchine di calcolo:

- la funzione "calcolatrice" presente in quasi tutti i modelli di telefoni cellulari (questo strumento è particolarmente utile proprio a causa delle sue modestissime capacità di calcolo);
- le calcolatrici più semplici ed economiche, tipicamente i Convertitori Lira-Euro e le calcolatrici offerte in omaggio con l'acquisto di alcuni prodotti (ad esempio nei fustini del detersivo);
- le calcolatrici cosiddette "scientifiche";
- le calcolatrici grafiche ovvero "scientifiche evolute (e programmabili)"
- i calcolatori o, meglio, alcuni software per calcolatori, tipicamente il foglio elettronico;
- le calcolatrici simboliche o più in generale i Computer Algebra System, siano essi su calcolatrice o su computer;
- potrebbero essere disponibili anche calcolatrici che operano in RPN (Reverse Polish Notation), oggi però poco diffuse: potrebbe essere utile allora far precedere una lezione sui diversi linguaggi algebrici (tradizionale, lineare, con grafi ad alberi e, per l'appunto, RPN) e i diversi modi di indicare le priorità delle operazioni.

In queste attività non saranno utilizzati CAS (sia esso per computer o per calcolatrice) perché con questo tipo di strumento la maggior parte dei problemi sotto elencati non si presenta in quanto la rappresentazione dei numeri nella macchina e i relativi algoritmi di calcolo sono completamente diversi.
Anzi, in alcune delle attività proposte è opportuno che la calcolatrice a disposizione abbia le prestazioni più scarse possibile.
Gli studenti opereranno in piccoli gruppi di apprendimento collaborativo. Sarà cura dell'insegnante fare in modo che in ciascun gruppo sia presente la maggior varietà possibile di calcolatrici; la presenza di un calcolatore non è indispensabile, ma sarà molto utile almeno un calcolatore a disposizione dell'insegnante con un dispositivo di proiezione. I software che possono essere particolarmente utili sono: un foglio elettronico e un programma di elaborazione simbolica (CAS).

Prima fase:
Individuazione delle capacità di calcolo
L'insegnante propone le seguenti attività, eventualmente guidate da un'apposita scheda da compilare (una per ciascun modello di calcolatrice):

- Individuazione delle operazioni eseguibili (le quattro operazioni sono disponibili su tutti gli strumenti di calcolo, le radici quadrate di norma non nei modelli più economici; spesso l'operazione di elevamento a potenza è disponibile solo dalle scientifiche in su).
- Individuazione del tasto da premere per ottenere il risultato (ENTER, tasto di uguaglianza, …).
- Individuazione del modo con cui la calcolatrice segnala un errore (ad esempio chiedendo di calcolare 5 / 0 o scrivendo un'espressione sintatticamente scorretta, come **8 + =**) attraverso un'apposita scritta che compare nel display oppure semplicemente non fornendo alcun risultato.
- Rilevazione della capacità di gestire i numeri razionali in forma frazionaria oltre che decimale.
- Riconoscimento della possibilità di eseguire operazioni in sequenza: in altre parole se, digitando per primo un operatore, viene o no automaticamente assunto come primo operando il risultato dell'operazione precedente. Questa possibilità è di solito presente anche nelle calcolatrici più economiche. A titolo di esempio si potrebbe far costruire una tavola delle potenze di due.

- Individuazione della possibilità di inserimento di numeri negativi, cioè dell'eventuale presenza del tasto di negazione (o "meno unario"). Sarà cura dell'insegnante rilevare le ambiguità che possono derivare dall'uso del simbolo "meno" e dai suoi diversi significati a seconda del contesto. E' interessante notare che i modelli più modesti di calcolatrici non permettono l'inserimento di numeri negativi, ma che comunque i risultati sono nell'insieme dei numeri relativi; l'eventuale risultato negativo di un'operazione è talvolta segnalato con un "meno" come suffisso anziché, come è uso, come prefisso. Ad esempio: 3 - 5 = 2-.
- Individuazione delle priorità delle operazioni. Le calcolatrici di norma danno alle operazioni due tipi di priorità a seconda del modello:
    - Tradizionale (le operazioni sono eseguite secondo le normali priorità stabilite in algebra; ad esempio, in mancanza di parentesi, prima sono eseguiti i prodotti, poi le somme.
    - Cronologica (le operazioni sono eseguite nell'esatto ordine con il quale sono indicate).

  Alcune delle calcolatrici meno evolute (es. le calcolatrici presenti come accessorio dei telefoni cellulari) talvolta non consentono di eseguire altro che una sola operazione alla volta. I tipi più evoluti hanno anche la possibilità di usare parentesi, anche su più livelli.
  Possono essere proposti agli studenti i seguenti esempi:

  3 * 4 - 5 che fornisce 7 su tutte le macchine: l'operazione che deve essere eseguita per prima è anche la prima ad essere digitata.

  2 + 4 * 5 fornisce invece 22 sulle macchine più evolute, 30 sulle altre. Per ottenere lo stesso risultato, bisogna digitare 4 * 5 + 2.

Questa è una buona occasione per parlare della priorità delle operazioni, della funzione delle parentesi, dell'arbitrarietà delle priorità assegnate alle operazioni…
Questa fase si conclude con l'esposizione da parte di ciascun gruppo dei risultati ottenuti. Data la grande varietà di modelli di calcolatrici e delle relative prestazioni, sarà interessante mettere a confronto i risultati.

Seconda fase:
Individuazione dei limiti di operatività dello strumento
Cura dell'insegnante è far osservare che l'insieme dei numeri gestibile dallo strumento è, per forza di cose, sempre finito.
Se lo ritiene utile, l'insegnante può anche accennare al fatto che i numeri sono rappresentati sempre secondo una codifica binaria. Può così parlare di rappresentazione dei numeri nelle diverse basi (in particolare in base 10 e in base 2) e proporre agli studenti di trovare quanti numeri naturali possono essere rappresentati, ad esempio, in un ottetto (Byte) di bit. Allo scopo gli studenti possono eventualmente utilizzare grafi ad albero. Può anche essere consigliabile mostrare, per esempio operando ancora in un singolo Byte, l'insorgere dell'"overflow" nel caso in cui il risultato di un'operazione superi le capacità di rappresentazione della macchina.
L'argomento è suscettibile di importanti approfondimenti, come gli algoritmi per il cambiamento di base e la rappresentazione interna dei numeri: ad esempio la complementazione a due per rappresentare i numeri interi negativi, la rappresentazione in virgola mobile per i numeri razionali ecc.; però, come si è detto nella Premessa, non è questo l'obiettivo dell'attività.
Anche in questa fase può essere opportuno operare con l'ausilio di una scheda di lavoro da compilare.
Queste sono alcune attività che potrebbero essere proposte:
- Individuazione del massimo numero intero gestibile dalla calcolatrice. A questo scopo si potrebbero lasciare gli studenti liberi di individuare la strategia da seguire; solo eccezionalmente

l'insegnante può suggerire di cercare per tentativi il numero intero tale che, aggiungendogli 1, dia origine a un messaggio di errore.
Sarà cura dell'insegnante, se non emerge prima dagli studenti stessi, far osservare che non vale (in determinate condizioni) la proprietà associativa: se ad esempio il massimo numero intero è 999999999, l'espressione $999999999 + 1 - 20$ non è calcolabile perché la prima operazione provoca un errore nella macchina; al contrario $999999999 - 19$ fornisce il risultato corretto.

- Individuazione della possibilità di rappresentare, nelle calcolatrici più evolute, i numeri in vari formati: "normale", scientifico, tecnico.
  Ad esempio 987654321 potrebbe essere indicato dalla calcolatrice, nei tre diversi formati, come: 987654321, $9.87654321 \cdot 10^8$, $987.654321 \cdot 10^6$. È importante che siano gli studenti stessi a riconoscere l'equivalenza dei tre diversi formati e a ricavare, in un'ottica di lavoro in laboratorio, le "regole" di rappresentazione dei numeri nei diversi formati. Questa potrebbe anche essere una buona occasione per riflettere sulla rappresentazione decimale dei numeri e sulle proprietà delle potenze.
- Scoperta, attraverso operazioni come ad esempio $1/3$, $2/3$, $2/7$, del massimo numero di cifre decimali visualizzate dalla calcolatrice, e se questa opera un troncamento o un arrotondamento. In questo secondo caso gli studenti saranno invitati a indicare le modalità con le quali è realizzato l'arrotondamento.
- L'insegnante può poi proporre di eseguire un'operazione e immediatamente dopo la sua inversa: ad esempio $1/3 \cdot 3$ oppure il quadrato della radice quadrata di 2 ecc. e invitare gli studenti a commentare i risultati ottenuti.
  Con alcune calcolatrici è riproposto il valore di partenza, con altre invece una sua approssimazione. Questa attività è molto utile soprattutto per rendere consapevoli gli studenti della non infallibilità degli strumenti di calcolo.
  È facile capire il motivo della approssimazione: in fin dei conti (immaginiamo di usare una calcolatrice che opera con cinque cifre decimali) $0.33333 \cdot 3$ fa effettivamente 0.99999.
  È invece meno facile capire come faccia una calcolatrice a fornire il risultato 1 nel prodotto $0.33333 \cdot 3$. In questa attività è utile l'intervento diretto dell'insegnante che può rivelare un "trucco" molto seguito dalle calcolatrici: quello di eseguire i calcoli con un numero di cifre decimali maggiore di quelle visualizzate. Ad esempio il numero 0.33333 è considerato, internamente alla macchina, come 0.333333. Al momento di moltiplicarlo per 3, viene calcolato 0.999999. Quando la macchina dovrà scriverlo sul display, avendo a disposizione solo cinque cifre, dovrà operare un arrotondamento alla quinta cifra; ecco così che appare il risultato atteso: 1.
  Possono anche essere proposte altre attività simili: nella Figura 1 viene calcolata su una calcolatrice evoluta la radice quadrata di 2, viene poi calcolato il quadrato della risposta precedente ottenendo così il risultato 2 e infine viene calcolato il quadrato del risultato che era stato indicato per la radice ricopiandolo, cifra per cifra. Si osserva che si ottengono due risultati diversi.

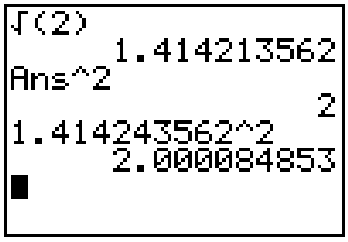


Figura 1

Al momento della sintesi, l'insegnante non mancherà di far notare che, quando si usa un numero *n* con uno strumento di calcolo, si ha in realtà a che fare con ben quattro diversi numeri:

- il numero *n* che intende l'utente;

- il numero n_1 che viene visualizzato dallo strumento di calcolo;
- il numero n_2 con il quale lo strumento di calcolo opera realmente;
- il numero n_3 che viene rappresentato internamente allo strumento, di norma secondo un codice binario.

Come si è visto, non è detto che questi quattro numeri coincidano.
A conclusione di questa attività gli studenti possono essere invitati a individuare in quali situazioni $n = n_1 = n_2$ e in quali situazioni invece ciò non avviene.

- Individuazione del minimo numero gestibile dalla macchina.
  Con il termine *eps* (o *macheps*) si indica il più piccolo numero che, sommato a 1, fornisce un risultato più grande di 1. Il suo ordine di grandezza può facilmente essere determinato in vario modo, soprattutto se la calcolatrice con la quale si opera è di tipo evoluto, in grado di accettare in input un predicato. In questo caso, a seconda del modello o della marca, risponde *true* oppure *false,* oppure gli equivalenti 1 o 0. Nella Figura 2 appare lo schermo di una calcolatrice non simbolica che mostra come 1 + 0.0000000001 viene riconosciuto come uguale a 1, mentre 1 + 0.000000001 no.

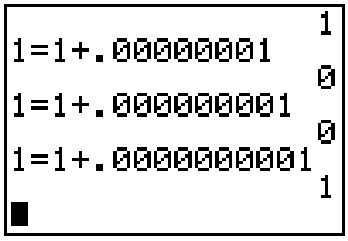


Figura 2

Come approfondimento di questa attività si può realizzare sulle calcolatrici più evolute un semplice programma per la determinazione dell'ordine di grandezza di *eps*; nelle *Figure* 3 e 4 appare il listato del programma e la schermata finale della sua esecuzione.

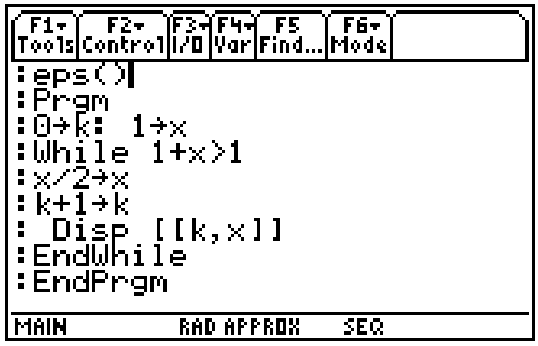


Figura 3

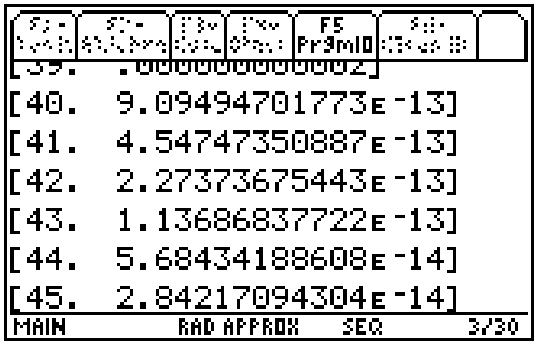


Figura 4

- L'insegnante può invitare gli studenti a determinare "calcoli sbagliati" a causa di valori troppo piccoli da essere valutati dalla macchina; è opportuno far notare che in situazioni "estreme" anche la legge di annullamento del prodotto non è più valida: con una calcolatrice non molto evoluta (ad esempio con un convertitore Euro/Lira) 1/10000 * 1/10000 dà come risultato 0.

Terza fase:
L'esplosione degli errori
In questa fase si può indagare sul fatto che l'errore che inevitabilmente uno strumento di calcolo numerico commette nel rappresentare numeri razionali periodici (o anche non periodici ma con un numero di cifre decimali "troppo grande" per le capacità della macchina) non necessariamente è limitato alle ultime cifre decimali visualizzate ma può, in situazioni particolari, facilmente "esplodere" in modo molto spettacolare.

La cosa non manca mai di meravigliare molto gli studenti e infondere in loro una certa diffidenza nei confronti delle macchine, tanto più benefica quanto più acritico e ingenuamente fiducioso è il loro atteggiamento nei confronti della tecnologia.
Un interessante esperimento potrebbe essere quello di esaminare il comportamento di un'opportuna successione definita ricorsivamente. Poiché queste attività sono consigliate in una classe prima,ovviamente è opportuno usare una terminologia ad hoc, ad esempio parlando di "un calcolo che si esegue a partire dal risultato di un calcolo precedente dello stesso tipo".
Quasi tutte le calcolatrici hanno la possibilità di iterare un calcolo utilizzando un risultato precedentemente ottenuto. Ciò in alcuni tipi di calcolatrici si ottiene invocando con un apposito tasto ANS(1), cioè l'ultimo risultato ottenuto; in altre, come si è già visto in una precedente attività, basta premere un tasto di operatore per utilizzare automaticamente come primo operando l'ultimo risultato.
La stessa cosa può essere ottenuta in un foglio elettronico digitando il valore iniziale in una cella, poi digitando la formula nella cella sottostante facendo riferimento alla prima cella, poi copiando nelle celle in basso tante volte quante si vuole.
Tuttavia lo strumento ideale per questo tipo di attività probabilmente è una calcolatrice evoluta, perché consente di costruire la successione ricorsiva inserendo il valore iniziale, poi digitando la risposta precedente e la definizione della successione in una sola linea; a questo punto è sufficiente premere più volte il tasto di esecuzione (= oppure ENTER) per avere ad ogni pressione l'uno dopo l'altro i termini della successione. Per altro verso, anche il foglio elettronico non è privo di vantaggi: basterà, infatti, modificare il valore della cella più in alto (valore iniziale della successione) perché automaticamente siano modificati tutti i termini della successione che sono stati costruiti a partire da questo.

- Costruzione della successione dei numeri pari. Per quest'attività è sufficiente una calcolatrice anche non evoluta, ma per le successive è opportuno operare con calcolatrici dei tipi più evoluti o con un foglio elettronico.
  2
  +2 = risultato 4
  +2 = risultato 6
  +2 = risultato 8 ecc.
  Per consolidare l'operatività con le successioni ricorsive possono essere proposte anche altre attività analoghe come la costruzione della successione dei numeri dispari, la successione delle potenze di 5, una progressione geometrica di termine iniziale 1000 e ragione 1.04 (calcolo dell'interesse composto) ecc., eventualmente ponendo anche alcune domande accessorie come: " Dopo quanti anni un capitale è raddoppiato in regime di capitalizzazione composta all'interesse del 5 % ?"
- Costruzione della successione "delle radici quadrate" ovvero, $a_n := \sqrt{a_{n-1}}$ con il valore iniziale, ad esempio, di 10.
  E' interessante osservare che, iterando questa successione un numero sufficiente di volte, si ottiene il valore costante 1. Gli studenti, grazie alle precedenti attività, dovrebbero essere in grado da soli di giustificare questo comportamento e di riconoscere se è corretto o meno.
- Costruzione della successione $a_n = a_{n-1}*2 +3$ con il valore iniziale $a_0 = 5$.
  Nelle immagini riportate nelle figure qui di seguito appaiono i risultati ottenuti con due calcolatrici di diverso livello e con un foglio elettronico; a parte l'aspetto generale, si nota che i tre strumenti sono sostanzialmente equivalenti.

	A	B
1	5	Val. iniziale
2	13	+a1*2+3
3	29	
4	61	
5	125	

	A	B
7	509	Val. iniziale
8	1021	+a1*2+3
9	2045	
	61	
	125	
6	253	

Figura 5 *Figura 6* *Figura 7*

- Determinazione del valore iniziale che costituisce una sorta di "punto fisso", cioè di un valore che genera una successione costante.
  Questo è un problema di facilissima risoluzione: gli studenti da soli possono scoprire che si tratta di $a_0 = -3$, soluzione dell'equazione $2x + 3 = x$. (vedi Figura 8)

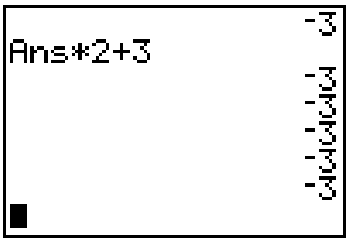


Figura 8

- Le precedenti attività (costruzione della successione e individuazione del valore iniziale che genera una successione costante) possono essere ripetute con le seguente successioni:

  $$a_n = a_{n-1}*5 - 2 \; ; \qquad a_n = a_{n-1}*3 - 12.$$

  E' opportuno invitare gli studenti a costruire altre successioni analoghe individuando per ciascuna il relativo "punto fisso".
  Nella Figura 9 appaiono i primi 15 termini delle due successioni; il calcolo è stato eseguito con un foglio elettronico ma, come si è visto, anche una calcolatrice evoluta si comporta allo stesso modo.

	A	B
1	0.500000000000000	6
2	0.500000000000000	6
3	0.500000000000000	6
4	0.500000000000000	6
5	0.500000000000000	6
6	0.500000000000000	6
7	0.500000000000000	6
8	0.500000000000000	6
9	0.500000000000000	6
10	0.500000000000000	6
11	0.500000000000000	6
12	0.500000000000000	6
13	0.500000000000000	6
14	0.500000000000000	6
15	0.500000000000000	6

Figura 9

- Quando si opera in "laboratorio" è opportuno che le "scoperte" siano fatte direttamente dagli studenti. Se per caso ciò non avviene potrà essere l'insegnante a suggerire qualche esempio

adatto. Nella seguente tabella appaiono alcune successioni particolarmente adatte alla "scoperta" che c'interessa:

$$a_n = a_{n-1}*15 - 2 \; ; \quad a_n = a_{n-1}*7 - 4 \; ; \quad a_n = a_{n-1}*4 - 1$$

con i valori iniziali, rispettivamente, 1/7, 2/3 e 1/3.

	A	B	C
1	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333333
2	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333333
3	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333333
4	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333332
5	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333329
6	0.142857142854	0.666666666672	0.333333333333314
7	0.142857142809	0.666666666701	0.333333333333258
8	0.142857142135	0.666666666910	0.333333333333030
9	0.142857132018	0.666666668373	0.333333333332121
10	0.142856980264	0.666666678614	0.333333333328483
11	0.142854703960	0.666666750296	0.333333333313931
12	0.142820559398	0.666667252073	0.333333333255723
13	0.142308390965	0.666670764511	0.333333333022892
14	0.134625864475	0.666695351576	0.333333332091570
15	0.019387967125	0.666867461032	0.333333328366280
16	-1.709180493118	0.668072227226	0.333333313465118
17	-27.637707396772	0.676505590585	0.333333253860474
18	-416.565610951584	0.735539134096	0.333333015441895
19	-6250.484164273760	1.148773938670	0.333332061767578
20	-93759.262464106300	4.041417570691	0.333328247070312
21	-1406390.936961600000	24.289922994835	0.333312988281250
22	-21095866.054423900000	166.029460963844	0.333251953125000

Figura 10

In cosa consiste in questo caso la "scoperta"? Che, pur trattandosi di successioni che dovrebbero essere a valori costanti, si rivelano tutt'altro che costanti. Dopo un certo numero di termini nei quali il comportamento è quello atteso, i valori vanno via via modificandosi fino ad ottenere addirittura successioni che rapidamente divergono.

La cosa è particolarmente vistosa con una calcolatrice che calcola i termini della successione ad ogni pressione del tasto ENTER: l'ultima cifra visualizzata comincia presto a modificarsi, poi l'errore erode anche la penultima, poi contagia la terzultima e così via con una specie di spettacolare reazione a catena.

Talvolta i valori ottenuti sono diversi in relazione alla rappresentazione interna dei numeri nei diversi strumenti di calcolo, ma in questa attività è sufficiente che il comportamento di massima sia lo stesso.

Si potrebbe indagare sul fatto che solo in alcuni casi si ottiene una successione che dovrebbe essere costante ma non lo è; potrebbe essere interessante studiare il motivo profondo di tale comportamento; ciò coinvolge la rappresentazione interna dei numeri nei calcolatori o nelle calcolatrici e un approfondimento in questa direzione appare eccessivo per il livello scolare (primo biennio) al quale si rivolge questa attività. Al momento ci si può accontentare di dare la seguente motivazione: i numeri molto spesso non possono essere memorizzati con il loro valore esatto ma in modo approssimato (ad esempio un numero razionale periodico come 1/3 = 0.3333… necessariamente avrà un numero finito di cifre decimali) e questo induce un errore

che, a causa dell'algoritmo iterativo, aumenta di entità fino a dare risultati molto diversi da quelli di partenza.
La cosa importante è riuscire a trasmettere agli studenti il messaggio che è bene non essere troppo fiduciosi sui risultati di un computer o di una calcolatrice e che i risultati possono essere affetti da errori non dovuti a guasti o "distrazioni della macchina" ma al modo stesso in cui i numeri sono memorizzati e trattati dallo strumento di calcolo.

L'algebra si sposa con la geometria

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolare somma, prodotto, quadrato di polinomi.	I polinomi e le loro operazioni (addizione e moltiplicazione). Polinomi in una indeterminata.	Numeri e algoritmi Spazio e figure	Storia

Contesto
Configurazioni geometriche.

Si vuole proporre un metodo grafico per la risoluzione di particolari equazioni. L'obiettivo è quello di spostare l'attenzione dal mero calcolo risolutivo al significato dell'equazione e alle relazioni che intercorrono tra i coefficienti dei suoi termini.
L'attività può essere proposta quale fase conclusiva delle attività sulle abilità di calcolo esercitate nei vari insiemi numerici e e di quelle sulle equivalenze tra figure, coniugando i due aspetti attraverso la ricerca e la visualizzazione delle soluzioni intere positive di un'equazione.

Descrizione dell'attività
Il più grande dei matematici greci classici è stato Eudosso (408 a.C – 355 a.C.), secondo soltanto ad Archimede: il suo primo grande contributo alla matematica fu una nuova teoria delle proporzioni.
I nuovi rapporti incommensurabili, scoperti dai Greci, furono considerati anch'essi come numeri. Essi comparivano nei ragionamenti geometrici, mentre i numeri interi e i rapporti di numeri interi comparivano sia in geometria sia nello studio generale delle grandezze.
La teoria di Eudosso ebbe numerose conseguenze: da un lato favorì una netta separazione tra il numero e la geometria, dall'altro spinse i matematici greci verso la geometria. Come risolvevano i Greci il problema della necessità dei numeri nel lavoro scientifico, nel commercio e nelle altre attività pratiche? Certo è che la rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali e delle operazioni con essi non è, anche oggi, molto pratica. Può darsi che sia logicamente soddisfacente pensare a $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ come all'area di un rettangolo, ma se si avesse bisogno di conoscere questo prodotto per comprare della "moquette", difficilmente si riuscirebbe a calcolarlo.
Nel periodo classico, le persone colte non si lasciavano coinvolgere in problemi pratici; si poteva pensare a tutti i rettangoli della geometria senza preoccuparsi minimamente della dimensione effettiva di alcun rettangolo. Il pensiero matematico fu in tal modo separato dai bisogni reali e i matematici non sentirono alcun bisogno di migliorare le tecniche aritmetiche e algebriche.
Nel periodo alessandrino (dal 300 a.C. fino al 600 d.C. circa) furono abbattute le barriere fra classi colte e schiavi e gli uomini colti cominciarono ad interessarsi degli affari pratici: anche la geometria divenne quantitativa. In altre parole, la matematica utilizzata nella vita quotidiana era una matematica fatta con i numeri interi e con frazioni di termini interi (cioè frazioni in cui numeratore e denominatore sono numeri interi).
Con la presente attività, a partire da semplici equazioni, traducendo in oggetti geometrici i suoi termini e procedendo con il metodo delle deduzioni locali, si vuole proporre un'ampia riflessione tra le equazioni e le loro soluzioni ricercate in insiemi numerici in cui non siano sempre possibili le operazioni fondamentali.

Si prenda in considerazione l'equazione di primo grado del tipo $c \cdot x = a \cdot b$. Si può pensare in questo modo: c per x è l'area di un rettangolo di base c e altezza x, allo stesso modo a per b è l'area di un rettangolo di base a e altezza b; il segno di uguaglianza sta ad indicare che le due figure sono equivalenti. È bene riferirsi ad un esempio numerico del tipo:

$$2x = 3 \cdot 4 \qquad (1)$$

L'equazione ci fornisce l'area di un rettangolo di base 4 e altezza 3. Si vuole sapere quanto vale la base di un rettangolo ad esso equivalente e avente l'altezza pari a 2.
La costruzione geometrica favorisce l'intuizione

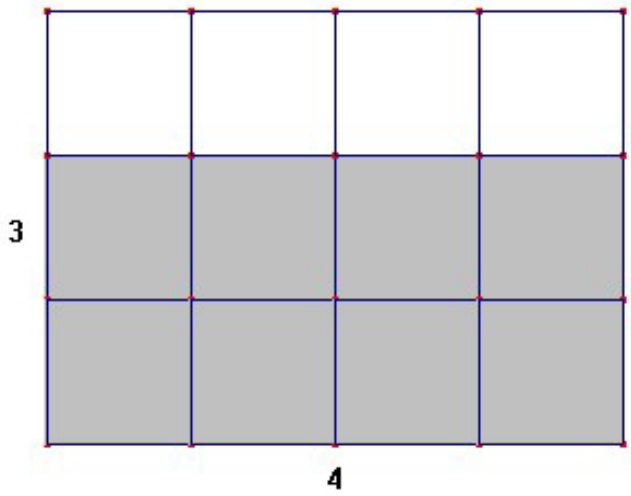


Figura 1

Si provi ora a costruire un rettangolo equivalente (significa usare lo stesso numero di quadrati) e con altezza pari a 2 (disponendoli in fila per due).

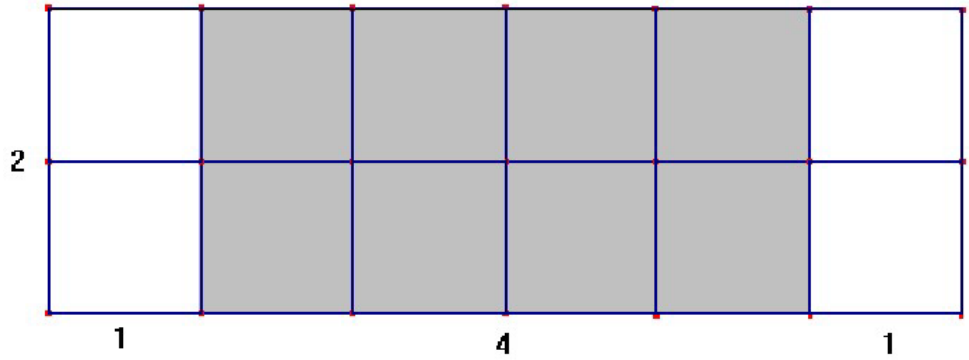


Figura 2

Dalla Figura 2 è facile intuire che la soluzione è 6.
Ha senso, a questo punto, a titolo di esercizio, applicare lo stesso metodo per l'equazione $2x = 3 \cdot 5$.
Una costruzione analoga alla precedente non è, in questo caso, possibile. Si apre allora la discussione: le due equazioni, dal punto di vista formale, sono identiche, si diversificano però dalla relazione tra i coefficienti; nel primo esempio c è sottomultiplo di b, nel secondo il coefficiente c è primo con gli altri due. Si può concludere che un'equazione del tipo (1) ha soluzioni intere solo se $a \cdot b$ è multiplo di c.
E allora come ci si comporta nel caso in cui $a \cdot b$ e c sono primi tra loro?
Sicuramente non si possono avere soluzioni intere. Ha senso, tuttavia, porsi il problema di risolvere in generale un'equazione del tipo $c \cdot x = a \cdot b$

Si consideri la Figura 3.

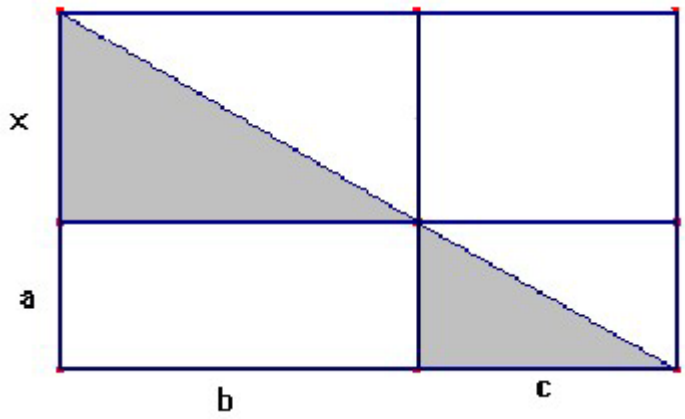


Figura 3

Dalla relazione di similitudine fra i triangoli rettangoli di cateti *a*, *c* e *x, b* consegue che *a*:*c*=*x*:*b*; essa rappresenta l'equazione assegnata (prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi), da cui si ricava $x = \frac{ab}{c}$. Mettendo a confronto i risultati dei due esempi, si può pensare che il secondo metodo sia quello più completo,. Infatti se *ab* è multiplo di *c*, *x* è intero, diversamente *x* è razionale. Questo significa che nella generalizzazione del problema, si può discutere sull'importanza del concetto di gruppo per l'insieme **Q** dei numeri razionali rispetto alla divisione e sulla relazione di inclusione tra l'insieme **N** dei numeri naturali e l'insieme **Q**.
Si passa ora alla ricerca delle soluzioni intere positive della seguente equazione di secondo grado ad una incognita ed a coefficienti interi:

$$x^2 + 10x = 39 \qquad (2)$$

Si procede per via geometrica.

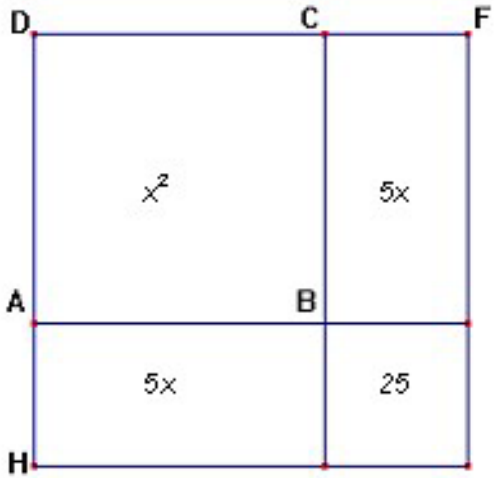


Figura 4

Sia la misura del segmento $\overline{AB}$ il valore dell'incognita *x* e si costruisca su esso il quadrato *ABCD*. Si prolunghino *DA* e *DC* di 5 tali che siano $\overline{AH} = 5$ e $\overline{CF} = 5$. Costruendo il quadrato di lato *DH* si ottiene un quadrato la cui area è data dalla seguente relazione

$$x^2 + 10x + 25 .$$

Dal confronto con la (2) si ottiene:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x+5)^2 = 64$$
$$(x+5)^2 = 8^2$$

due potenze che hanno lo stesso esponente sono uguali se e solo se sono uguali le basi. Si ha, dunque, che *DH*, lato del quadrato considerato nella Figura 4, misura 8 e *x* misura 3.
Ma le soluzioni non sono due?
Risolvendo algebricamente l'equazione, le soluzioni sono 3 e –13, ma, avendo limitato la ricerca alle soluzioni appartenenti all'insieme numerico $\mathbb{N}$, si deve accettare 3 e non –13.
In questi casi il metodo geometrico è efficace, in quanto a priori seleziona l'insieme numerico in cui si cerca la soluzione.
Questo metodo, proposto da Erone, va sotto il nome di metodo del completamento del quadrato; in effetti, si tratta di sommare ad ambo i membri quel numero, 25 nell'esempio, che consente di completare il quadrato a primo membro e di estrarre poi la radice quadrata. Se il radicando è un quadrato perfetto, si hanno soluzioni intere positive, diversamente no.
C'è da fare ancora un'osservazione: possiamo applicare sempre questo metodo?
La risposta è chiaramente negativa.
È sempre possibile risolvere l'equazione algebricamente, ma non sempre si può utilizzare il metodo geometrico.

Elementi di prove di verifica

1. Si inventi un quesito di geometria che abbia come soluzione la seguente equazione $3x = 6 \cdot 5$ e la si risolva in $\mathbb{N}$.

2. Data la seguente equazione $6x = 2 \cdot 5$ è possibile stabilire, senza svolgere esplicitamente i calcoli, se la soluzione è intera o no? Giustificare la risposta.

3. È possibile applicare il metodo del completamento del quadrato alla seguente equazione $x^2 + x = 20$? Le soluzioni sono numeri interi o no? Giustificare le risposte.

Dentro o fuori il triangolo?

Livello scolare: 1° biennio.

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	I polinomi e le loro operazioni.	Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	

Contesto
Geometria analitica.

L'uso del computer è sempre più facilitato da interfacce grafiche che aiutano l'utente nello svolgimento delle attività. Tali interfacce, se da una parte facilitano l'utente, dall'altra rischiano di renderlo inconsapevole delle problematiche, non solo tecniche, che stanno alla base delle attività. Si può discutere se questo sia un bene o un male; certamente può essere un elemento utile - anche per attirare l'attenzione e l'interesse degli allievi - a poter rivisitare argomenti della didattica tradizionale della matematica alla luce delle implicazioni che possono avere con le nuove tecnologie. Un esempio può essere lo studio del piano cartesiano con riferimento alla grafica del computer. Nell'attività presentata si propone lo studio delle disequazioni sul piano cartesiano come strumento per distinguere sullo schermo del computer, con un opportuno algoritmo, i punti interni da quelli esterni di un triangolo.

Descrizione dell'attività
Lo scopo dell'attività è la definizione di un algoritmo, e la relativa codifica in un linguaggio di programmazione, che riconosca quando un punto è interno, esterno o sul bordo di un triangolo. Il punto ed i vertici del triangolo sono dati attraverso le loro coordinate cartesiane. L'unità inizia mostrando come si possa riconoscere il semipiano d'appartenenza del punto rispetto alla retta determinata passante per due punti dati. Si discute poi come stabilire con una formula, che è una forma d'algoritmo, quando due punti appartengono allo stesso semipiano. La formula è la base dell'algoritmo che caratterizza i punti del piano rispetto ad un dato triangolo. L'unità si conclude con un gioco grafico: dato un triangolo si simula una passeggiata casuale all'interno del triangolo controllando che il punto in movimento, all'inizio coincidente con il baricentro, rimanga dentro.

Dentro o fuori il triangolo: che domanda è?
Preso un foglio di carta, disegnare un triangolo, segnare un punto e chiedere se è dentro o fuori il triangolo: questa sembra proprio la classica domanda che toglie agli alunni ogni dubbio sulla salute mentale del proprio insegnante. Eppure la domanda può avere un qualche interesse, anche per gli alunni più smaliziati. Il triangolo è dato sul piano cartesiano come terna di punti (i suoi tre vertici); ci si chiede come si colloca un punto, note le sue coordinate, rispetto al triangolo.
Si può anche dare al problema una veste più accattivante: "In un parco a forma di triangolo (Yellowstone) è stato introdotto un nuovo animale (Jogi), dotato di collare con radiocomando, che deve essere tenuto sotto controllo: quando Jogi è all'interno del parco (dentro il triangolo) va tutto bene, quando invece si avvicina al bordo in centrale si accende un lampeggiante giallo di avvertimento. Infine se Jogi esce dal parco scatta l'allarme".

Per far funzionare il sistema di controllo occorre un algoritmo che, a partire dalle coordinate dei tre vertici di un triangolo, calcoli quando un punto è interno, esterno o sul bordo dello stesso.

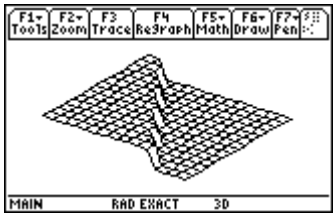
Segno di un punto rispetto ad una retta.
Una retta divide il piano in tre insiemi di punti: due semipiani (senza bordo) e la retta stessa. Dal punto di vista algebrico, i punti del piano cartesiano sono divisi nei tre insiemi per i quali il polinomio $P(x, y) = a\,x + b\,y + c$ produce rispettivamente un valore positivo, negativo o nullo.
Dati due punti $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, l'equazione canonica (o implicita) della retta passante per i due punti è: $x\,(y_0 - y_1) - y\,(x_0 - x_1) + x_0\,y_1 - x_1\,y_0 = 0$. Il polinomio, primo membro dell'equazione, si annulla sulla retta mentre darà valori positivi su un semipiano e negativi sull'altro.

Osservazione: nell'indicare i punti sul piano cartesiano si userà l'abituale notazione delle lettere latine maiuscole, come si è fatto nel precedente capoverso. Nei programmi invece le variabili, comprese quelle che indicano coppie di coordinate e quindi punti nel piano cartesiano, sono indicate per consuetudine con lettere minuscole. Nel seguito per i punti sarà usata indifferentemente l'una o l'altra notazione quando, in base al contesto, non ci sia ambiguità.

```
segno(a,b,p)
Func
Local  c,t
10^(-6)→t
p[1]*(a[2]-b[2])-p[2]*(a[1]-b[1])+
a[1]*b[2]-a[2]*b[1]→c
If abs(c)<t Then
   Return  0
Else
   If c>0 Then
      Return  1
   Else
      Return  -1
   EndIf
EndIf
EndFunc
```

Possiamo definire una funzione usando l'equazione sopra descritta. Nella Figura 1 la funzione è descritta nel linguaggio di una calcolatrice grafica programmabile.
La funzione *segno*(*a,b,p*) restituisce il valore 0 se il punto *p* è allineato con i punti *a* e *b*, mentre darà 1 se *p* appartiene ad un semipiano o −1 se appartiene a quello opposto. Si può anche osservare che il segno determina l'ordine della sequenza dei tre punti: se i punti si succedono (nel perimetro del triangolo di cui sono vertici) in verso antiorario allora la funzione *segno* produce 1, altrimenti (verso orario) −1. Se il triangolo è degenere il risultato è 0.

Figura 1



La Figura 2 mostra il grafico in 3 dimensioni della funzione $z1(x, y) = segno(a,b,\{x, y\})$, con *a* e *b* due punti fissati nel piano cartesiano. Nella figura si osserva che il piano è diviso in due semipiani: il primo a quota 1 e l'altro a −1. Le coordinate del punto generico (x, y) sono introdotte nella funzione *segno* come lista e, quindi nella calcolatrice, sono racchiuse in parentesi graffe.

Figura 2

Data la retta *AB,* due punti *P* e *Q* (non allineati con *A*, *B*) appartengono allo stesso semipiano se la funzione segno produce lo stesso valore. Per stabilire se i due punti sono nello stesso semipiano basta studiare il prodotto delle funzioni $segno(a,b,p) \times segno(a,b,q)$.

Dentro o fuori del triangolo?
La funzione *test*(*a,b,c,p*) controlla se un punto *p* è esterno, sul bordo o interno al triangolo di vertici *a*, *b* e *c*. Si descrive dapprima l'algoritmo della funzione con un diagramma di flusso.

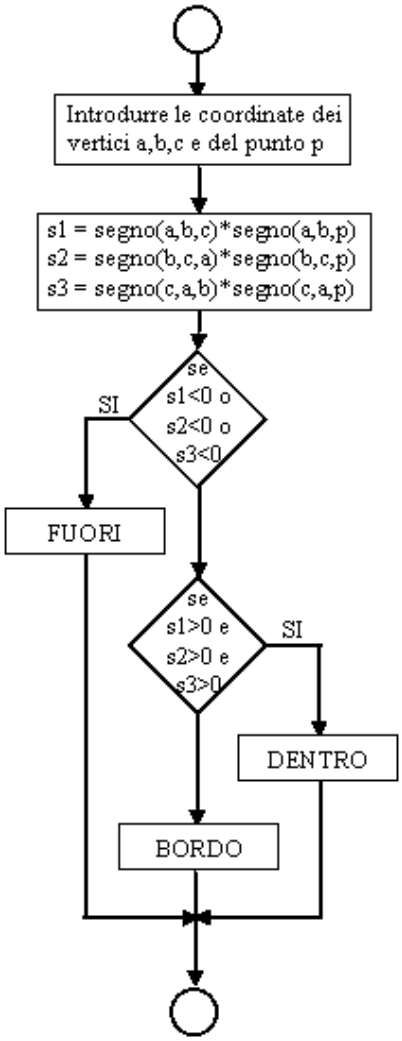


Figura 3

La funzione *test* riceve come argomenti le coordinate dei vertici *a*, *b*, *c* del triangolo e quelle del punto *p* da controllare.

Con la funzione *segno*, definita in precedenza, si verifica se il punto *p* appartiene in ogni caso allo stesso semipiano che contiene il terzo vertice rispetto alla retta che passa per gli altri due: il prodotto è positivo quando *p* e il terzo vertice appartengono allo stesso semipiano. Le variabili *s*1, *s*2, *s*3 contengono la posizione di *p* rispetto ai tre lati.

Se il valore delle variabili di controllo è in almeno un caso negativo, il punto *p* è esterno al triangolo.

Se i valori di controllo sono tutti positivi, il punto è interno al triangolo.

Infine, quando nessun valore è negativo, ma in qualche caso è nullo, il punto si trova sul bordo del triangolo.

Figura 3

Si passa ora alla stesura dell'algoritmo, sotto forma di funzione, nel linguaggio di una calcolatrice grafica programmabile.

```
test(a,b,c,p)
Func
Local  c,s1,s2,s3
If segno(a,b,c)=0 Then
  Return  "Triangolo degenere"
Else
  segno(a,b,c)*segno(a,b,p)→s1
  segno(b,c,a)*segno(b,c,p)→s2
  segno(c,a,b)*segno(c,a,p)→s3
  If s1<0 or s2<0 or s3<0 Then
    Return  "FUORI"
  Else
    If s1=0 or s2=0 or s3=0 Then
      Return  "BORDO"
    Else
      Return  "DENTRO"
    EndIf
  EndIf
EndIf
EndFunc
```

La funzione inizia controllando se i tre punti sono allineati: in tal caso dichiara *degenere* il triangolo.

Per un triangolo non degenere, il programma corrisponde esattamente al diagramma di flusso della Figura 3: i prodotti delle funzioni *segno*, registrati nelle variabili di controllo *s*1, *s*2 e *s*3, sono poi usati per stabilire la posizione del punto *p* rispetto al triangolo di vertici *a*, *b* e *c*. Il risultato è riportato sotto forma di *stringa*.

Figura 4

Si può dare il risultato della funzione *test* in forma grafica. Il programma *tri*(*a*,*b*,*c*,*p*) disegna il triangolo di vertici *a*, *b* e *c* e disegna il punto *p*. Poi riporta nella parte inferiore dello schermo la posizione del punto *p* rispetto al triangolo.

```
tri(a,b,c,p)
Prgm
setGraph("Axes","Off")
ClrGraph:ClrDraw
76→ymax:0→ymin
158→xmax:0→xmin
1→yscl:1→xscl

©Triangolo
PxlLine a[2],a[1],b[2],b[1],1
PxlLine b[2],b[1],c[2],c[1],1
PxlLine c[2],c[1],a[2],a[1],1
©Punto
PxlLine p[2]-1,p[1],p[2]+1,p[1],-1
PxlLine p[2],p[1]-1,p[2],p[1]+1,-1

PxlText test(a,b,c,p),ymax-20,xmax-50

Pause
setGraph("Axes","On")
DispHome
EndPrgm
```

La prima parte del programma *tri* predispone la finestra grafica ed imposta le dimensioni dello schermo.

Lo schermo è visto come 'matrice' di punti individuati da coppie di numeri interi (riga,colonna), con coordinate 'scambiate' rispetto all'ordinaria disposizione nel piano cartesiano di ascissa e ordinata.

Gli argomenti del programma sono dati come coordinate nell'ordine usuale. L'istruzione grafica nella Figura 5 (*PxlLine r0,c0,r1,c1,–1*) disegna il segmento delimitato dai punti (riga0,colonna0) e (riga1, colonna1) invertendo il 'colore' dei punti dello schermo.
Il punto da testare rispetto al triangolo è disegnato, per renderlo più evidente, come crocetta centrata nelle coordinate del punto.
La risposta del test è scritta in basso sulla destra dello schermo.

Figura 5

Ecco due esempi di esecuzione del programma:

tri({5,5},{140,30},{85,70},{100,50})

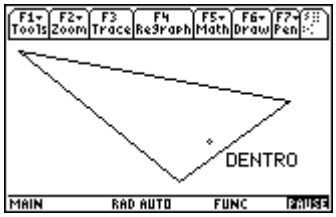


Figura 6

tri({5,5},{140,30},{85,70},{40,50})

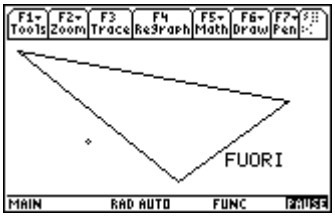


Figura 7

Jogi nel parco di Yellowstone.

La funzione *test2*, è la funzione *test* modificata in modo che restituisca un numero in base alla posizione del punto rispetto al triangolo: 1 se il punto è interno, 0 se è sul bordo oppure –1 se è esterno. Nel programma che segue la funzione *test2* è usata per un gioco grafico che offre l'occasione di qualche riflessione sulla programmazione.
Si immagina che il triangolo sia il recinto del parco di Yellowstone nel quale è rinchiuso l'orso Jogi. Jogi passeggia nel recinto, ma non può uscire. Il programma *jogi* simula la passeggiata dell'orso, che si muove a caso all'interno del recinto.

```
jogi(a,b,c)
Prgm
Local  x,y,p1,p2,k,l
setGraph("Axes","Off")
ClrGraph:ClrDraw
76→ymax:0→ymin
158→xmax:0→xmin
1→yscl:1→xscl
©Triangolo (recinto)
PxlLine  a[2],a[1],b[2],b[1],1
PxlLine  b[2],b[1],c[2],c[1],1
PxlLine  c[2],c[1],a[2],a[1],1
©Punto (jogi all'inizio)
int((a[1]+b[1]+c[1])/3+0.5)→x
int((a[2]+b[2]+c[2])/3+0.5)→y
PxlOn  y,x
PxlLine  y-2,x,y+2,x,-1
PxlLine  y,x-2,y,x+2,-1
1→p1:1→p2
0→k
While  k=0
  rand(10)-1→l
  While  l>0
    If test2(a,b,c,{x+p1,y+p2})=1 Then
       PxlOn  y,x
       PxlLine  y-2,x,y+2,x,-1
       PxlLine  y,x-2,y,x+2,-1
       x+p1→x:y+p2→y
       PxlLine  y-2,x,y+2,x,-1
       PxlLine  y,x-2,y,x+2,-1
    EndIf
    l-1→l
  EndWhile
  If rand(2)-1=0 Then
     -1*p1→p1
    Else
     -1*p2→p2
  EndIf
  getKey()→k
EndWhile
setGraph("Axes","On")
DispHome
EndPrgm
```

Il programma *jogi* ha come argomenti i tre vertici del triangolo.

Dopo aver disegnato, come nel programma *tri* descritto prima, i lati del triangolo, si pone nel baricentro del triangolo (calcolato come media dei vertici) la posizione iniziale dell'orso.

La direzione di marcia dell'orso è data dall'incremento delle coordinate, che può essere –1 o 1 e che è registrato nelle due variabili *p1* e *p2*. All'inizio la direzione è fissata, successivamente varierà in modo casuale. La variabile *k* registra il codice del tasto premuto e rimane 0 finché non si tocca la tastiera: serve ad interrompere l'esecuzione del programma premendo un tasto qualsiasi della calcolatrice.
La variabile *l* indica il numero di passi dell'orso, data la direzione: il numero di passi è un numero a caso tra 0 e 9.
Ad ogni passo, si controlla (funzione *test2*) se Jogi resta dentro al recinto: in questo caso si segna il punto in cui si trova, si cancella la 'crocetta' della posizione attuale, si fa il passo e si disegna la crocetta nella nuova posizione.
Finiti i passi nella direzione attuale, si calcola la nuova direzione: a questo scopo si inverte, dopo averlo scelto a caso, l'incremento in ascisse o in ordinate. In questo modo il cammino casuale dell'orso sarà sempre in direzione 'diagonale' rispetto allo schermo.

Figura 8

Le figure seguenti mostrano qualche percorso casuale, ma rigorosamente dentro al recinto, di Jogi.

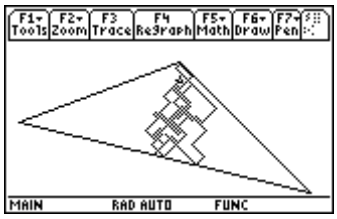


Figura 9

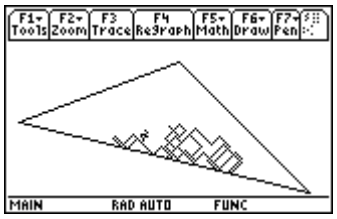


Figura 10

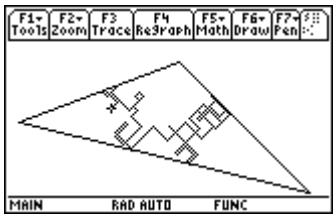


Figura 11

Possibili sviluppi

- Come si è detto, e come si vede nelle figure, il programma *jogi* fa muovere il punto in diagonale sullo schermo. Si può proporre di estendere il programma in modo che il punto si muova anche nelle direzioni nord-sud e est-ovest.
- Un secondo problema 'banale' se pensato *carta e penna*, ma più interessante se realizzato *al computer*, è il seguente: stabilire se due segmenti si intersecano o meno. I due segmenti sono

dati come coppie di punti (gli estremi) sul piano cartesiano. Una prima soluzione consiste nel calcolare l'intersezione delle rette sostegno e nel verificare se questa appartiene ad entrambi i segmenti. È questa la soluzione migliore, cioè quella che richiede meno calcoli? Una soluzione alternativa può essere trovata esprimendo i segmenti in forma parametrica: si ottiene un risultato migliore come complessità di calcolo?

- Un algoritmo è, in casi fortunati, esprimibile con una formula: un esercizio bello di geometria analitica può essere il calcolo della formula della simmetria assiale, rispetto ad una retta espressa nella forma $y = m\ x + q$. Indicati con $P(x_0, y_0)$ e $P'(x_1, y_1)$ i punti corrispondenti nella simmetria, le condizioni che danno le equazioni da porre a sistema sono che il punto medio di PP' appartenga alla retta e che la retta PP' sia perpendicolare a quella data. Avendo a disposizione un sistema di calcolo simbolico, la determinazione delle equazioni della simmetria assiale è a questo punto immediata. Con le formule ottenute, si possono poi dimostrare, per via algebrica, le ben note proprietà della composizione della simmetrie assiali.

Elementi di prove di verifica

Funzioni o programmi?

1. Qual è la differenza tra un algoritmo descritto da una funzione e quello descritto da un programma?

Se … allora … quando.

2. A cosa servono le strutture di controllo negli algoritmi? Quali sono quelle fondamentali?

Formule e algoritmi.

3. In quali condizioni un algoritmo può essere espresso da una formula?

La somma dei primi numeri naturali

Livello scolare: 2° biennio.

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Eseguire semplici fattorizzazioni di polinomi.	I polinomi e le loro operazioni.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Algoritmi numerici e calcolo algebrico.

Nell'ambito di questo contesto l'attività proposta favorisce la produzione di congetture e la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. Una particolare enfasi è data al principio d'induzione come strumento per dimostrare proprietà che riguardano i numeri naturali.
Quest'attività può essere introdotta, nella forma che qui è proposta, in una terza o in una quarta classe, quando gli alunni hanno già acquisito abilità nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni e di sistemi di equazioni lineari, nella risoluzione di problemi che richiedono la determinazione di leggi che regolano la generazione di alcuni dati numerici disponibili.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre, affrontare e approfondire nozioni come quelle di problema, di successione di numeri naturali, di serie numerica. Consente anche di comprendere e approfondire tecniche come quelle delle differenze finite per determinare leggi polinomiali, della risoluzione di sistemi lineari, dell'applicazione del principio di induzione come strumento per dimostrare proprietà nell'insieme dei numeri naturali. Consente, infine, di avviare una riflessione sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*. L'uso delle tecnologie informatiche, in particolare del foglio elettronico, è particolarmente indicato.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi di studenti, chiedendo loro di riferire sulla discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto tra le strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone la situazione–problema sotto riportata a gruppi formati da tre–quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).

Situazione – problema.

Situazione:

"Si consideri la somma dei primi due numeri naturali, poi la somma dei primi tre, poi quella dei primi quattro e così via …"

Problema:

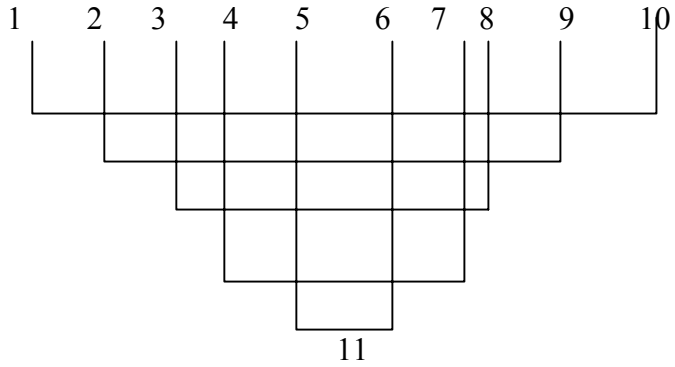
"Si determini una formula che esprima la relazione che lega la somma dei primi n numeri naturali al numero n di numeri naturali considerati."

L'insegnante può anche proporre, come suggerimento per quei gruppi di studenti che avessero difficoltà a capire che cosa s'intende per "somma dei primi *n* numeri naturali", la costruzione di una tabella del tipo:

n	Somma $S(n)$
2	1 + 2 = 3
3	1 + 2 + 3 = 6
4	1 + 2 + 3 + 4 = 10…
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
…	…
n	…

Tabella 1

L'insegnante può ottenere preziose informazioni anche osservando il modo nel quale gli studenti organizzano i dati. In un problema come questo l'organizzazione dei dati può essere risolutiva. Per esempio, l'idea del piccolo Gauss[1] (che la soma dei termini della successione equidistanti dal termine mediano è costante) può essere favorita dalla seguente organizzazione dei dati:



Un'organizzazione dei dati di questo tipo suggerisce immediatamente la formula $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Talvolta gli studenti ritengono che questa formula valga solo nel caso in cui *n* sia un numero pari. In questo caso è opportuno che l'insegnante, con ragionamenti anche differenti, li aiuti a capire che la formula vale per ogni *n* (per esempio si può dire che se *n* é dispari, ci si può ricondurre al caso di *n*

[1] Si dice che Gauss determinò in poco tempo e in questo modo, durante le elementari, la somma dei primi 100 numeri naturali, rispondendo alla richiesta del suo maestro che lo voleva tenere impegnato per un po' di tempo per potersi dedicare anche agli altri bambini.

pari considerando che $S(n)$ può essere scritta come $\frac{(n-1)n}{2}+n$ e invitare gli studenti a semplificare tale somma: $\frac{(n-1)n}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$).

Altre volte alcuni gruppi di studenti trovano una formula corretta grazie ad attente osservazioni, senza però capire bene perché funzioni; inoltre, talvolta, questa formula è equivalente, ma non uguale, a quella costruita seguendo il ragionamento del piccolo Gauss. In questo caso è bene chiedere agli studenti di dimostrare l'equivalenza delle diverse formule trovate.

Un'organizzazione dei dati del tipo di quella della prima tabella proposta favorisce la definizione per ricorrenza della successione che esprime la somma dei primi *n* numeri naturali:

$$\begin{cases} S(2)=3 \\ S(n)=S(n-1)+n \end{cases}$$

La determinazione di una legge di questo tipo è sicuramente facilitata dal lavorare in un ambiente del tipo di quello dei fogli elettronici. In tal caso, infatti, è possibile (e naturale, per chi è abituato a utilizzare un foglio elettronico) organizzare il foglio come qui di seguito suggerito (nella prima colonna, ottenuta con la formula = A2 + 1, ci sono i primi 30 numeri naturali e nella seconda colonna, ottenuta con la formula = A3 + B2, a partire dalla terza cella, c'è la somma dei primi 2, primi 3, primi 4, fino alla somma dei primi 30 numeri naturali):

n	S(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136
17	153
18	171
19	190
20	210
21	231
22	253
23	276
24	300
25	325
26	351
27	378
28	406
29	435
30	465

Tabella 2

È anche possibile chiedere agli studenti, che hanno utilizzato una formula del tipo $\begin{cases} S(2)=3 \\ S(n)=S(n-1)+n \end{cases}$, di determinare programmi che calcolino sia iterativamente sia ricorsivamente i valori della successione $S(n)$.

Seconda fase

L'insegnante avvia una discussione matematica alla presenza dell'intera classe, invitando i rappresentanti di alcuni gruppi a presentare la propria strategia risolutiva.

Nel caso in cui non siano state presentate da alcun gruppo, l'insegnante può anche suggerire le seguenti due ulteriori strategie.

Approccio geometrico:

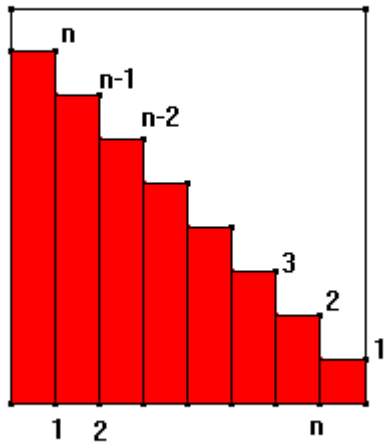


Figura 1

Organizzare i dati in questo modo consente di notare immediatamente, quasi senza bisogno di spiegare (almeno per alcuni studenti), che $1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ossia metà dell'area del quadrato di lato $n + 1$ rappresentato in Figura 1).

Approccio con le differenze finite:

La Tabella 2 costruita con un foglio elettronico e prima riportata può essere arricchita di importanti informazioni, fornite dalle colonne che riportano le differenze prime e seconde dei valori della successione $S(n)$:

N	S(n)	Diff. prime	Diff. seconde
1	1		
2	3	2	
3	6	3	1
4	10	4	1
5	15	5	1
6	21	6	1
7	28	7	1
8	36	8	1
9	45	9	1
10	55	10	1
11	66	11	1
12	78	12	1
13	91	13	1
14	105	14	1
15	120	15	1
16	136	16	1
17	153	17	1
18	171	18	1
19	190	19	1
20	210	20	1
21	231	21	1
22	253	22	1
23	276	23	1
24	300	24	1
25	325	25	1
26	351	26	1
27	378	27	1
28	406	28	1
29	435	29	1
30	465	30	1

Tabella 3

Poiché le differenze seconde sono costanti, allora $S(n)$ varia quadraticamente con n, ossia

$$S(n) = an^2 + bn + c$$

Si tratta di determinare a, b, c. Servono, quindi, tre condizioni, per esempio quelle date dalle prime tre righe della Tabella 3, che danno luogo al sistema lineare:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$$

Il sistema dà come soluzioni $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, in accordo con le altre soluzioni.

L'insegnante, dopo aver commentato le differenti strategie risolutive e dopo averne eventualmente suggerite altre, avendo cura di soffermarsi sui limiti e potenzialità di ciascuna (limiti e potenzialità che non valgono in assoluto, ma che in genere sono relative al risolutore), potrebbe passare a riflettere sulle diversità che caratterizzano i metodi di computazione per iterazione e per ricorsione[2].

[2] Vedere a questo proposito l'attività "Concentrazione di un farmaco nel sangue", presente nel nucleo Relazioni e funzioni.

Infine dovrebbe avviare una discussione–riflessione su cosa voglia dire giustificare la correttezza di un procedimento risolutivo in matematica: la discussione ha lo scopo di evidenziare l'importanza e la centralità in matematica della dimostrazione, che ha, fra le sue funzioni, certamente quella di esplicitare la relazione di conseguenza logica tra assiomi e teorema di una teoria. L'insegnante può far notare che nei procedimenti risolutivi presi in considerazione è ben chiara la tesi da dimostrare ($S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$), mentre è meno chiara qual è la teoria di riferimento, cioè quella nella quale avviene la dimostrazione (per esempio, quali sono gli assiomi da cui si parte e, addirittura, qual è il campo della matematica cui ci si riferisce, visto che si sono utilizzate anche conoscenze di geometria per risolvere un problema aritmetico).
Il tema è culturalmente ed epistemologicamente interessante (può essere fatto risalire al dibattito che fu particolarmente serrato agli inizi del Novecento tra dimostrazioni pure ed impure) e, secondo l'interesse e la partecipazione della classe, può essere approfondito, anche con il contributo di colleghi di altre discipline. Sicuramente, però, è l'occasione per una significativa e semplice applicazione del principio di induzione per dimostrare una proprietà dei numeri naturali.

Dimostrazione per induzione:
Base: $S(2) = 3$, infatti $1 + 2 = 3$
Passo induttivo:
Ipotesi: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ Tesi: $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Infatti: $S(n+1) = S(n) + n + 1$ (per definizione)
$S(n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ (per Ipotesi)
Quindi: $S(n + 1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, che è la tesi
Allora, poiché vale la base e il passo induttivo, la proprietà vale per ogni $n > 1$ (ma anche per $n = 1$: basta porre per definizione $S(1) = 1$).

Possibili sviluppi

- Dimostrazioni, per induzione, di alcune proprietà che riguardano i numeri naturali.
- Riflessione sul significato di una teoria.
- Riflessione sul ruolo della dimostrazione nell'organizzazione, nella sistemazione e nella comunicazione delle conoscenze matematiche.

Elementi di prove di verifica

Congetture e dimostrazioni con i numeri naturali

1. Trova la somma dei primi 100 numeri dispari. Trova la somma dei primi n numeri dispari.

2. Trova la somma dei primi 100 numeri pari. Trova la somma dei primi n numeri pari.

3. Determina una formula che dia la somma dei primi n numeri naturali multipli di 3.

4. Determina una formula che dia la somma dei quadrati dei primi n numeri pari.

L'algoritmo per la divisione dei polinomi

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	La divisione dei polinomi.	Numeri e algoritmi	

Contesto
Calcolo algebrico.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del secondo biennio, quando gli alunni affrontano l'argomento della divisione dei polinomi.

Descrizione dell'attività
L'attività si propone di tradurre in un programma di calcolo l'algoritmo euclideo (delle sottrazioni successive) per la divisione dei polinomi. Tale algoritmo si basa sul seguente teorema:
"Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definiti su uno stesso campo numerico **F** (che solitamente è il campo **Q** dei numeri razionali o il campo **R** dei numeri reali), con $B(x) \neq 0$, esiste un'unica coppia di polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ (detti *quoziente* e *resto*, rispettivamente) tali che si abbia:

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x) \qquad (1)$$

dove $R(x)$ ha grado minore del grado di $B(x)$."

Osservazione. Quando il grado di $A(x)$ è maggiore o uguale al grado di $B(x)$ il grado del quoziente $Q(x)$ è uguale alla *differenza* dei gradi di $A(x)$ e $B(x)$. Se il grado di $A(x)$ è minore del grado di $B(x)$, allora, banalmente, risulta $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$.

Si illustra innanzi tutto l'algoritmo con un esempio concreto che può essere il seguente. Si vuole eseguire la divisione con resto del polinomio:

$$A(x) = x^3 + 2x + 3$$

per il polinomio:

$$B(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Si esegue la divisione tra il termine di grado massimo di $A(x)$ e il termine di grado massimo di $B(x)$, chiamando $Q_1(x)$ il quoziente. Risulta:

$$Q_1(x) = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x\,.$$

Si calcola ora il primo resto parziale: si moltiplica $B(x)$ per $Q_1(x)$ e si sottrae il prodotto da $A(x)$; il polinomio ottenuto è il primo resto parziale $R_1(x)$. Nel caso in esame si ottiene:

$$A(x) - B(x)\cdot\frac{1}{2}x = x^3 + 2x + 3 - (2x^2 - 3x + 1)\cdot\frac{1}{2}x = x^3 + 2x + 3 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = R_1(x)$$

$R_1(x)$ non può essere il resto della divisione in quanto il suo grado *non* è minore del grado del polinomio divisore $B(x)$. Si possono, allora, ripetere, con le opportune modifiche, i passaggi precedenti. Si calcola il secondo quoziente parziale $Q_2(x)$, dividendo i termini di grado massimo di $R_1(x)$ e $B(x)$. Si ottiene:

$$Q_2(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2}{2x^2} = \frac{3}{4}.$$

Si determina poi il secondo resto parziale moltiplicando $B(x)$ per $Q_2(x)$ e sottraendo tale prodotto da $R_1(x)$. Si ottiene:

$$R_1(x) - B(x)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 - (2x^2 - 3x + 1)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} = R_2(x)$$

Ora il procedimento ha termine perché il grado di $R_2(x)$ è inferiore al grado di $B(x)$. Sommando membro a membro le due relazioni si ha:

$$A(x) - B(x)\cdot\frac{1}{2}x = R_1(x)$$

$$R_1(x) - B(x)\cdot\frac{3}{4} = R_2(x)$$

e semplificando, si ottiene:

$$A(x) - B(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = R_2(x) = \frac{15}{4}x + \frac{9}{4}.$$

È, pertanto, naturale assumere il polinomio $\frac{15}{4}x + \frac{9}{4}$ come *resto* $R(x)$ e il polinomio $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, somma dei quozienti parziali $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$, come *quoziente* $Q(x)$ della divisione di $A(x)$ per $B(x)$.

Di solito a questi calcoli si dà un assetto che ne facilita l'esecuzione. L'esempio che è stato appena svolto può essere, infatti, così esposto:

$x^3 + 0\cdot x^2 + 2x + 3$	$2x^2 - 3x + 1$
$-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$	
$-\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}$	
$\frac{15}{4}x + \frac{9}{4}$	

Alcuni programmi di calcolo simbolico, come DERIVE e MAPLE, possiedono delle funzioni che forniscono immediatamente il quoziente e il resto della divisione tra polinomi. In particolare, nel caso di DERIVE, sono presenti le funzioni QUOTIENT e REMAINDER che, applicate all'esempio precedente, forniscono il seguente risultato

```
#1:   QUOTIENT(x^3 + 2·x + 3, 2·x^2 - 3·x + 1)
```

$$\#2: \quad \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

```
#3:   REMAINDER(x^3 + 2·x + 3, 2·x^2 - 3·x + 1)
```

$$\#4: \quad \frac{15\cdot x}{4} + \frac{9}{4}$$

Risulta, comunque, interessante utilizzare tale programma (che resta uno dei più utilizzati a livello didattico) per simulare il procedimento che si esegue manualmente. Definendo opportune funzioni e utilizzandole nei passaggi, diventa più facile capire l'algoritmo della divisione. Ripetendo con DERIVE il precedente esempio, si ottiene come primo resto:

#1: $A(x) := x^3 + 2 \cdot x + 3$

#2: $B(x) := 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$

#3: $Q1(x) := \dfrac{x^3}{2 \cdot x^2}$

#4: $\dfrac{x}{2}$

#5: $B(x) \cdot Q1(x)$

#6: $x^3 - \dfrac{3 \cdot x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$

#7: $R1(x) := A(x) - B(x) \cdot Q1(x)$

#8: $\dfrac{3 \cdot x^2}{2} + \dfrac{3 \cdot x}{2} + 3$

e, iterando il procedimento, si ottiene, come previsto:

#9: $Q2(x) := \dfrac{\frac{3}{2} \cdot x^2}{2 \cdot x^2}$

#10: $\dfrac{3}{4}$

#11: $B(x) \cdot Q2(x)$

#12: $\dfrac{3 \cdot x^2}{2} - \dfrac{9 \cdot x}{4} + \dfrac{3}{4}$

#13: $R2(x) := R1(x) - B(x) \cdot Q2(x)$

#14: $\dfrac{15 \cdot x}{4} + \dfrac{9}{4}$

#15: $Q(x) := Q1(x) + Q2(x)$

#16: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$

Si vuole ora vedere come tradurre in un programma per una calcolatrice grafico-simbolica l'algoritmo precedentemente illustrato. Si comincia con l'osservare che un polinomio di grado n:

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

è univocamente determinato dalla sequenza ordinata dei suoi $n + 1$ coefficienti. L'algoritmo per la divisione dei polinomi opera appunto su tali sequenze, che in gergo informatico sono dette *liste*. Occorre dunque munirsi innanzi tutto di una funzione che prenda in ingresso un dato polinomio e fornisca in uscita la relativa lista dei coefficienti: la funzione *pcoef* provvede a tale compito. Le figure seguenti mostrano come costruire tale funzione utilizzando una calcolatrice grafico-simbolica, predisposta a lavorare in modalità esatta, onde evitare che la funzione entri in un ciclo

infinito. Come si può notare, è trattato a parte il caso in cui sia introdotto il polinomio nullo, per evitare un funzionamento scorretto della funzione.

Figura 1

Figura 2

Dall'esame delle due figure si può osservare che i diversi coefficienti sono determinati uno alla volta partendo dal termine noto (che abbiamo precedentemente indicato con a_0). Infatti si comincia a porre uguale a zero il valore della variabile (che possiamo, per semplicità, indicare con x) e si determina in tal modo a_0. Poi si sottrae a_0 e si divide per x, ottenendo in tal modo un polinomio di grado $n - 1$. Nel polinomio così ottenuto si pone $x = 0$ e si determina a_1. Si procede, quindi, allo stesso modo fino ad aver determinato tutti i coefficienti.
Muniti della funzione *pcoef*, si può tradurre l'algoritmo cercato nella funzione *quores* che prende in ingresso i due polinomi *dividendo* e *divisore* e fornisce in uscita i due polinomi *quoziente* e *resto*. Il programma che realizza tale funzione è riportato nelle figure seguenti:

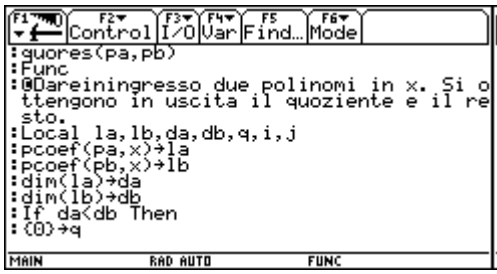


Figura 3

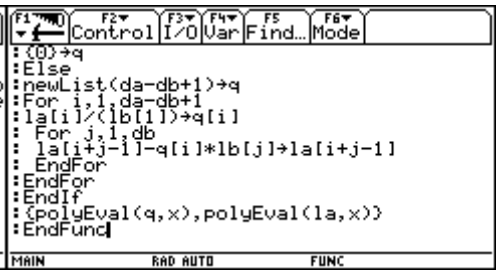


Figura 4

Come si può osservare i due cicli *For* innestati determinano sostanzialmente a ogni iterazione i quozienti e i resti parziali visti nel precedente esempio. Inoltre tale programma utilizza il comando *polyEval*, che interpreta gli n elementi di una lista come i coefficienti di un polinomio di grado $n - 1$. Nel caso dei polinomi precedentemente utilizzati si ottiene il seguente risultato:

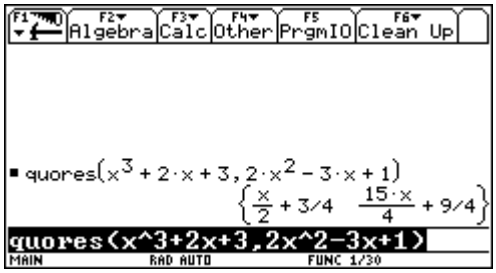


Figura 5

che, ovviamente, coincide con quanto ottenuto precedentemente.
Gli strumenti di calcolo simbolico producono il quoziente e il resto della divisione dei polinomi attraverso lo "sviluppo" della frazione polinomiale come somma di fratti semplici.

Ma dove si azzera?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scrivere un numero in notazione scientifica. Stimare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Equazioni polinomiali, numero delle soluzioni e loro approssimazioni.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	Informatica

Contesto
Risoluzione delle equazioni algebriche.

Nell'ambito del contesto indicato si utilizza il foglio elettronico evidenziandone l'utilità al fine di rendere veloci calcoli laboriosi e consentire tempo per la riflessione e il confronto tra i dati ottenuti.
Quest'attività può essere introdotta in un secondo biennio, dopo che gli studenti hanno acquisito familiarità con le funzioni e la loro rappresentazione grafica, nonché con la ricerca degli zeri di una funzione in relazione alle soluzioni delle equazioni associate.

Descrizione dell'attività
Si sa che l'approccio ai numeri irrazionali nel primo biennio è essenzialmente rivolto alla conoscenza della radice quadrata, alla sua costruzione geometrica e rappresentazione sull'asse reale.
Nel secondo biennio, a partire da queste conoscenze, si vuole generalizzare l'argomento utilizzando un metodo di per sé intuitivo, che si serve della conoscenza del grafico di funzioni elementari quali ad esempio la parabola, e, procedendo per induzione, favorisce la comprensione del comportamento delle radici di indice $n > 2$.

Prima fase
È dedicata a considerazioni di carattere preliminare che richiamano i concetti matematici portanti, utili poi per la costruzione dell'algoritmo.
Lo studente, che ha già acquisito familiarità con la rappresentazione grafica di una funzione matematica e con le relative equazioni, è portato a rivolgere la sua attenzione a funzioni del tipo:

$$y = x^2 - 4, \qquad y = x^2 - 9,$$

e più in generale a:

$$y = x^3 - 1, \qquad y = x^3 - 8, \qquad y = x^3 - 27,$$

per arrivare a:

$$y = x^n - r, \qquad r > 0\ ^{[1]},\ n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Potrà disegnarne il grafico, utilizzando intervalli opportunamente scelti nella parte positiva del dominio della funzione.

[1] La limitazione $r > 0$ è necessaria, perché, com'è noto, è possibile calcolare la radice di ordine pari solo nel caso in cui il numero di cui si cerca la radice è non negativo.

Si consideri per esempio la funzione $y = x^2 - 4$; si sa che rappresenta una parabola con la seguente caratteristica: il semiasse positivo dell'asse delle *x* taglia il grafico della funzione esattamente nel punto $P(2;0)$.

Si ricorda, però, che i valori che annullano la funzione $y = x^2 - 4$ sono $\pm\sqrt{4} = \pm 2$, ovvero gli zeri sono 2 e –2.

Analoghe considerazioni più generali possono essere fatte per le funzioni del tipo:

$$y = x^3 - r, \qquad y = x^4 - r, \qquad y = x^5 - r, \ldots, y = x^n - r$$

in cui la soluzione aritmetica è rispettivamente $\sqrt[3]{r}$, $\sqrt[4]{r}$, … , $\sqrt[n]{r}$.

Si può a questo punto capire per quale motivo si preferisca limitare la discussione solo alla parte positiva del dominio delle funzioni $y = x^n - r$:

- per *n* pari, la funzione è pari; infatti $f(-x) = f(x)$ e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y; in tal caso è sufficiente studiare la funzione per valori non negativi della x;
- per *n* dispari, $y = x^n - r$ assume valori sempre negativi per $x < 0$ e $r > 0$, pertanto non si annulla.

Per facilitare l'apprendimento delle questioni sopra esposte può essere utile l'uso di una calcolatrice grafico-simbolica o del programma Derive, che consentono di tracciare immediatamente il grafico di una funzione; in tal caso, facendo più tentativi relativi a funzioni di secondo grado e a quelle di terzo grado, è possibile cogliere l'andamento particolare riferito al primo quadrante all'aumentare dell'esponente, comunque sempre crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

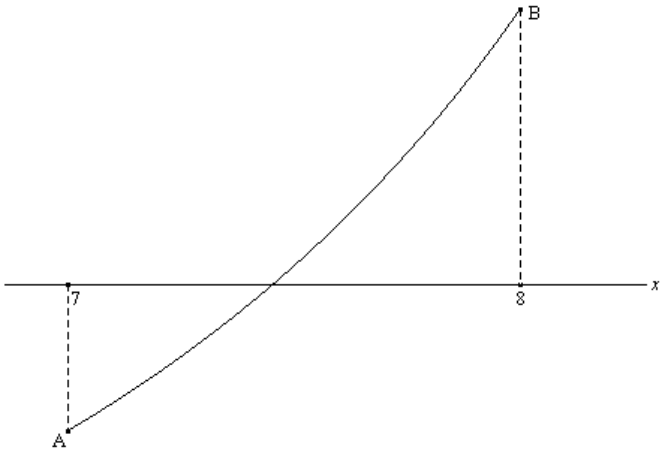
<u>Seconda fase</u>

È dedicata alla descrizione del metodo di bisezione e alla scrittura dell'algoritmo.

Il problema della valutazione dello zero della funzione $y = x^n - r$ si pone quando r non è un quadrato perfetto (o un cubo perfetto, …).

Le considerazioni che seguono riguardano solo la funzione $y = x^2 - r$ con $r \in \mathbf{R}$, ma si può procedere analogamente per tutte le funzioni del tipo $y = x^n - r$ con $r \in \mathbf{R}$ e $n = 2, 3, \ldots$.

Si considera, a titolo di esempio, la funzione $y = x^2 - 56$. Trovare la soluzione positiva ossia lo zero della funzione $y = x^2 - 56$ relativo al semiasse positivo delle *x*, equivale a calcolare la $\sqrt{56}$, che è compresa tra 7 e 8. Si focalizza, allora, l'attenzione sul grafico nell'intervallo [7; 8], come indicato nella seguente figura.



L'intervallo considerato è piuttosto ampio e occorre restringerlo per fornire una migliore approssimazione. Si valuta l'ascissa del punto medio dell'intervallo [7; 8], che è precisamente $7{,}5$ e si calcola il valore della funzione $y = x^2 - 56$ nel punto di ascissa $7{,}5$. Si osserva che il segno di $f(7)$ è negativo. Se il segno di $f(7{,}5)$ è negativo, la funzione non si annulla nell'intervallo [7; 7,5], ma nell'intervallo [7,5; 8]. Nel caso specifico risulta $f(7{,}5) > 0$, per cui lo zero della funzione si trova nell'intervallo [7; 7,5], come mostrato nella Figura 2.

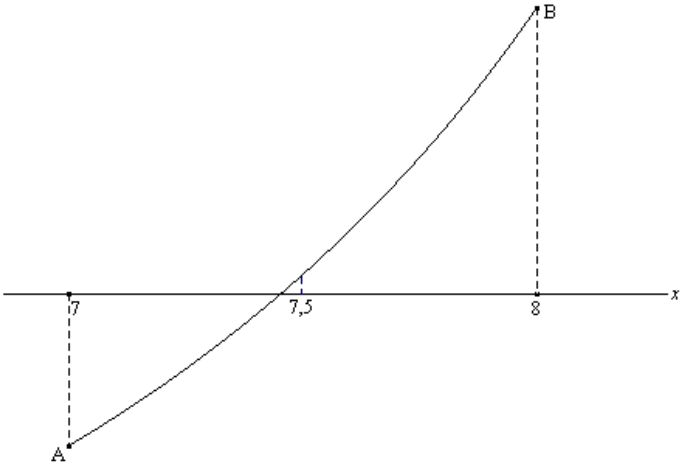


Figura 2

Una volta individuato l'intervallo "più stretto" in cui si è certi che la funzione si annulla, si calcola l'ascissa del suo punto medio, che nel caso considerato è $7{,}25$. Si valuta nuovamente la funzione in quel punto e, a seconda del segno di $f(7{,}25)$, si "restringe" nuovamente l'intervallo. Stabilito il nuovo intervallo, se ne calcola l'ascissa del punto medio, si trova il valore della funzione in quel punto e così via …

Ad ogni iterazione si approssima $\sqrt{56}$ al valore dell'ascissa del punto medio considerato.

Alla *n*-esima iterazione, il risultato appartiene ad un intervallo di ampiezza $\frac{b-a}{2^n}$ (dove *a* e *b* sono i valori degli estremi dell'intervallo relativi alla *n*-esima iterazione).

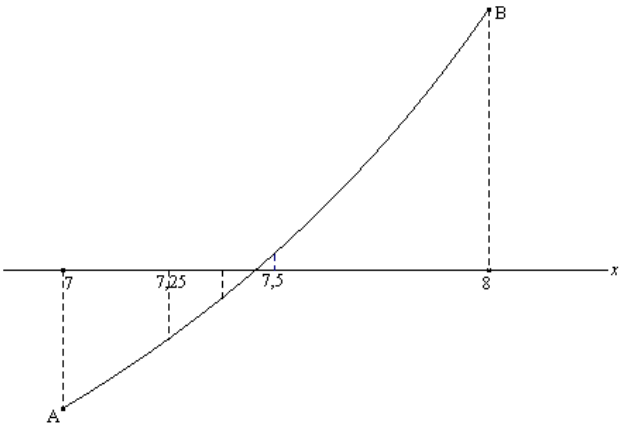


Figura 3

Terza fase

Ha senso, a questo punto, fornire anche un semplice esempio di processo di calcolo, come quello precedentemente illustrato, eseguito con il Programma Excel.

Il programma proposto mostra il calcolo della radice di un numero attraverso successive iterazioni, utilizzando il metodo di bisezione.

Esempio:

Utilizzo del foglio elettronico per risolvere l'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ con il metodo di bisezione.

Si ricorda, in primo luogo, che il metodo di bisezione consente di risolvere equazioni della forma $f(x) = 0$ e che, per poterlo applicare, bisogna conoscere un intervallo $[a, b]$ in modo tale che la $f(x)$ assuma, negli estremi a e b, valori di segno opposto: questo garantisce che nell'intervallo è contenuta almeno una radice.

Nel caso in esame un intervallo opportuno è [1, 2] in quanto:

$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$

$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$

Si organizza il foglio elettronico in 5 colonne: la colonna *A* contiene l'indice n degli elementi a_n e b_n delle successioni delle approssimazioni della soluzione; tali elementi, a loro volta, sono contenuti nelle colonne *B* e *C*. In particolare, si pongono nella colonna *B* le approssimazioni a_n tali che $f(a_n) < 0$ e nella colonna *C* le approssimazioni b_n tali che $f(b_n) > 0$.

Si osserva, inoltre, che ai fini dell'applicazione del metodo non ha alcuna importanza sapere se risulta $a_n < b_n$ oppure $a_n > b_n$.

Nella colonna *D* compare il valore m del punto medio dell'intervallo (a_n, b_n) e nella colonna *E* il valore di $f(m)$. Nella colonna *G*, infine, sono posti i valori delle approssimazioni iniziali a_0, b_0.

Per realizzare la tabella sopra descritta occorre procedere per passi:

- Aprire un foglio elettronico (Microsoft Excel)
- Scrivere le intestazioni
- Scrivere 0 nella cella *A3*
- Nella cella *A4* occorre scrivere la formula:

  = A3 + 1

  e copiarla nelle sottostanti celle appartenenti tutte alla colonna *A*.
- Nella cella *B3* bisogna, invece, far comparire il valore a_0, immesso in precedenza in *G1*, cioè bisogna scrivere la formula:

  = G1
- Nella cella *C3* deve, invece, comparire il valore b_0, immesso in precedenza in *G2*, cioè bisogna scrivere la formula:

  = G2
- In *D3* si vuol far comparire la media m dei valori contenuti nelle corrispondenti celle delle colonne *B* e *C*. Si scrive, pertanto, la formula:

  = (B3 + C3)/2
- In *E3* si vuol inserire il valore che la funzione assume quando alla variabile x si dà il valore m contenuto in *D3*. Si scrive, cioè, la formula:

  = (D3)^3 – D3 – 1
- Se il valore $f(m)$, calcolato in cella *E3*, è negativo, allora nella cella *B4* va immesso il valore di m presente in *D3*, mentre in *C4* va immesso il valore di b_n contenuto nella cella soprastante.

  Se, invece, il valore $f(m)$, calcolato in cella *E3*, è positivo, allora nella cella *B4* va immesso il valore di a_n contenuto nella cella soprastante, mentre in *C4* va immesso il valore di m presente in *D3*.
- Si utilizza, pertanto, nelle celle *B4* e *C4* la funzione SE del foglio elettronico, che ha la seguente sintassi: SE(condizione; formula 1; formula 2). Il foglio elettronico verifica se sussiste la

condizione specificata come primo argomento: se ciò è vero allora, nella cella in cui è scritta tale funzione, compare il valore dato dalla *formula 1*, altrimenti il valore dato dalla *formula 2*.
Si scrive, pertanto, in *B4* la seguente formula: = SE (E3 < 0; D3; B3)
e in *C4* la seguente formula: = SE (E3 > 0; D3; C3)

- Per completare il foglio è ora sufficiente copiare tali formule nelle sottostanti celle delle colonne *B* e *C*: appaiono, così, le approssimazioni successive desiderate.
- Se poi si vuole risolvere un'altra equazione è sufficiente immettere nelle celle *G1* e *G2* i nuovi valori di a_0 e b_0, scrivere in *E4* la nuova espressione di $f(x)$ e copiarla nelle celle della colonna *E*.

A ***n***	***B*** ***a_n (f(x)<0)***	***C*** ***b_n (f(x)>0)***	***D*** ***m***	***E*** ***f(m)***	***F*** ***a_0•f(a_0)<0; a_0 = b_0•f(b_0)>0; b_0 =***	***G*** ***1*** ***2***
0	1	2	1,5	0,875		
1	1	1,5	1,25	-0,296875		
2	1,25	1,5	1,375	0,224609375		
3	1,25	1,375	1,3125	-0,051513672		
4	1,3125	1,375	1,34375	0,082611084		
5	1,3125	1,34375	1,328125	0,014575958		
6	1,3125	1,328125	1,3203125	-0,018710613		
7	1,3203125	1,328125	1,32421875	-0,002127945		
8	1,32421875	1,328125	1,326171875	0,00620883		
9	1,32421875	1,326171875	1,325195313	0,002036651		
10	1,32421875	1,325195313	1,324707031	-4,65949E-05		
11	1,324707031	1,325195313	1,324951172	9,94791E-04		

Tabella 1

Elementi di prove di verifica

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali le coordinate del punto medio *M* del segmento *AB*, *A*(8,25; 0) e *B*(8,5; 0), sono:

a) *M*(8,45; 0) b) *M*(8,4; 0) c) *M*(8,35; 0) d) *M*(8,375; 0)

2. Osserva il grafico della funzione di secondo grado rappresentato nella Figura 4 e stabilisci qual è la sua equazione fra quelle elencate. Esso rappresenta una delle equazioni indicate nelle risposte. Quale?

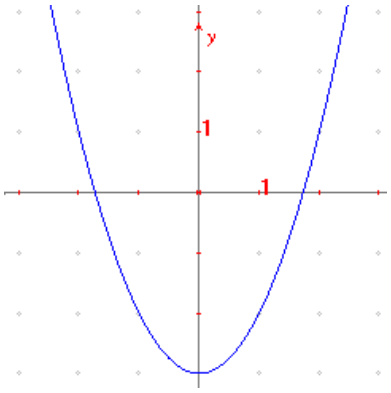


Figura 4

a) $y = x^2 - 1$ *b)* $y = x^2 - 3$ *c)* $y = x^2$ *d)* $y = x^2 + 1$

3. Osserva la seguente tabella che rappresenta le successive approssimazioni della radice quadrata di 74, ottenute col metodo di bisezione mediante il foglio elettronico.

Scrivi nella cella A5 l' indice della radice da calcolare
Puoi scrivere un numero intero positivo da 2 a 30
2
Scrivi nella cella A8 la radice da calcolare
Puoi scrivere un numero positivo minore o uguale a 1000000000
74
risultato del p.c.
8,602325267

a	b	f(a)	f(b)	radice (a+b)/2	f[(a+b)/2]	Iter.
8	9	-10	7	8,5	-1,75	1
8,5	9	-1,75	7	8,75	2,5625	2
8,5	8,75	-1,75	2,5625	8,625	0,390625	3
8,5	8,625	-1,75	0,390625	8,5625	-0,68359375	4
8,5625	8,625	-0,68359375	0,390625	8,59375	-0,14746094	5
8,59375	8,625	-0,14746094	0,390625	8,609375	0,121337891	6
8,59375	8,609375	-0,14746094	0,121337891	8,6015625	-0,01312256	7
8,6015625	8,609375	-0,01312256	0,121337891	8,60546875	0,054092407	8
8,6015625	8,60546875	-0,01312256	0,054092407	8,603515625	0,02048111	9
8,6015625	8,603515625	-0,01312256	0,02048111	8,602539063	0,003678322	10
8,6015625	8,602539063	-0,01312256	0,003678322	8,602050781	-0,00472236	11
8,602050781	8,602539063	-0,00472236	0,003678322	8,602294922	-0,00052208	12
8,602294922	8,602539063	-0,00052208	0,003678322	8,602416992	0,001578107	13
8,602294922	8,602416992	-0,00052208	0,001578107	8,602355957	0,000528011	14
8,602294922	8,602355957	-0,00052208	0,000528011	8,602325439	2,96626E-06	15
8,602294922	8,602325439	-0,00052208	2,96626E-06	8,602310181	-0,00025956	16

Tabella 2

Il valore di $\sqrt{74}$, fornito dall'algoritmo all'iterazione n° 9, è 8,603515625. Il numero 8,6015625:

a) approssima la $\sqrt{74}$ per difetto,

b) approssima la $\sqrt{74}$ per eccesso,

c) è la radice quadrata esatta di 74,

d) approssima la $\sqrt{74}$ con un errore $e < 10^{-4}$.

4. Osserva la tabella dell'esercizio 3 e stabilisci qual è la posizione, a destra della virgola, dell'ultima cifra decimale esatta dell'iterazione n° 12.

a) la seconda b) la quarta c) la terza d) la prima

5. Osserva la tabella dell'esercizio 3. Se dico che $\sqrt{74} = 8{,}60229$ e confronto questo valore con quello fornito dal computer $\sqrt{74} = 8{,}602325267$, commetto un errore *e:*

a) $e < 10^{-7}$ b) $e < 10^{-6}$ c) $e < 10^{-5}$ d) $e < 10^{-4}$

6. Osserva la tabella dell'esercizio 3 ed in particolare l'iterazione n° 13, che attribuisce a $\sqrt{74}$ il valore 8,602416992; tenendo conto che la colonna **a** dà le approssimazioni per difetto e la colonna **b** quelle per eccesso, l'approssimazione migliore di $\sqrt{74}$ è:

a) quella per eccesso b) quella per difetto c) nessuna delle due d) non si può dire

Una regola pazza e geniale

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale, prodotto scalare.	Numeri e algoritmi Lo spazio e le figure Argomentare, congetturare e dimostrare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Geometria analitica.

Nell'ambito del contesto indicato l'attività proposta presenta i vettori come "semplificatori di problemi geometrici", specialmente dal punto di vista del calcolo. Sottolinea, inoltre, la dualità tra le regole del calcolo letterale e le proprietà geometriche, indotta dalle coordinate cartesiane.

Descrizione dell'attività
Si risolvono dei problemi elementari nel piano cartesiano, con i vettori proposti come differenza tra lettere: punto medio di un segmento, baricentro di un triangolo, quarto vertice di un parallelogramma. Poi si propongono alcuni problemi nello spazio che con questa tecnica si risolvono agevolmente.

"Se si indicano i punti con delle lettere e si fanno i calcoli con queste lettere secondo le regole dell'algebra classica, i risultati che si ottengono hanno un significato geometrico" (Grassmann)

Prima fase
Nel piano il vettore $\overrightarrow{AB}$ è la differenza tra il vettore $\overrightarrow{OB}$ ed il vettore $\overrightarrow{OA}$: più semplicemente possiamo scrivere $B - A$.

- Cerchiamo le coordinate del punto medio del segmento AB.

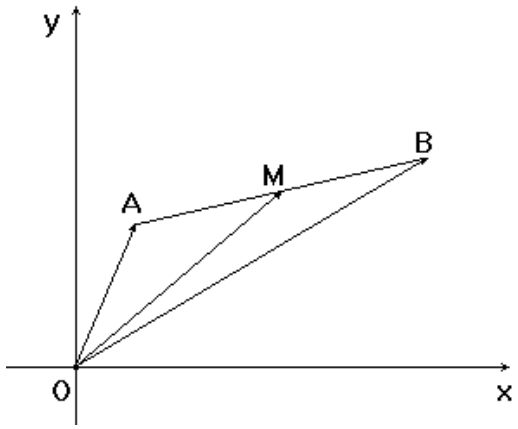


Figura 1

$B - O = M - O + \frac{B - A}{2}$; $B = M + \frac{B - A}{2}$; $M = B - \frac{B - A}{2}$; $M = \frac{2B - B + A}{2}$; $M = \frac{B + A}{2}$

che è la relazione tra le coordinate del punto medio e quelle degli estremi.

- Cerchiamo le coordinate del baricentro di un triangolo.

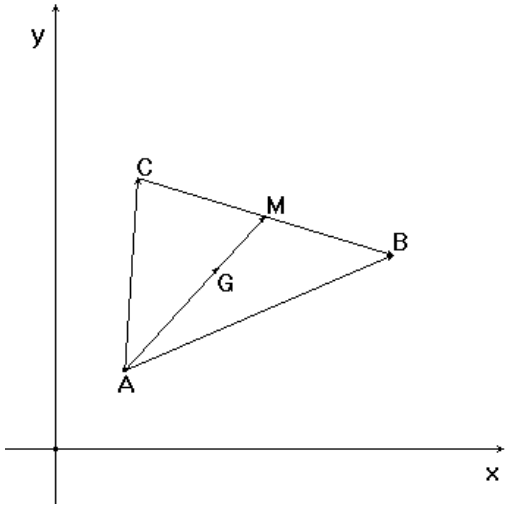


Figura 2

$G - A = \frac{2}{3}(M - A) = \frac{2}{3}(B - A - \frac{B - C}{2})$; $G = \frac{2}{3}(\frac{2B - 2A - B + C}{2}) + A$; $G = \frac{B - 2A + C}{3} + A$;

$G = \frac{B - 2A + C + 3A}{3}$; $G = \frac{A + B + C}{3}$.

Quest'ultima uguaglianza fornisce la relazione tra le coordinate del baricentro e quelle dei vertici.

- Cerchiamo le coordinate del quarto vertice di un parallelogramma di cui sono note quelle dei primi tre.

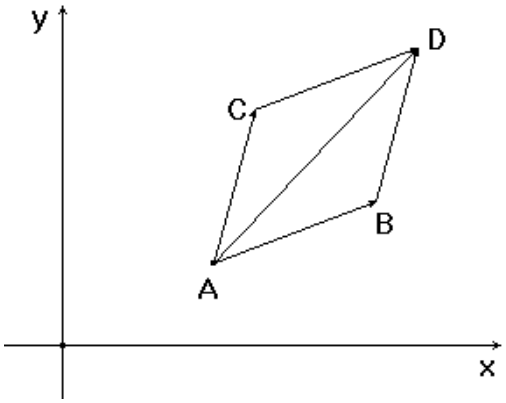


Figura 3

$B - A + C - A = D - A$; $B - A + C = D$.

Quest'ultima uguaglianza fornisce la relazione tra le coordinate del quarto vertice e quelle degli altri tre.

Elementi di prove di verifica

1. *OABCDE* è un prisma a base triangolare (vedi Figura 4) con:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\8\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}.$$

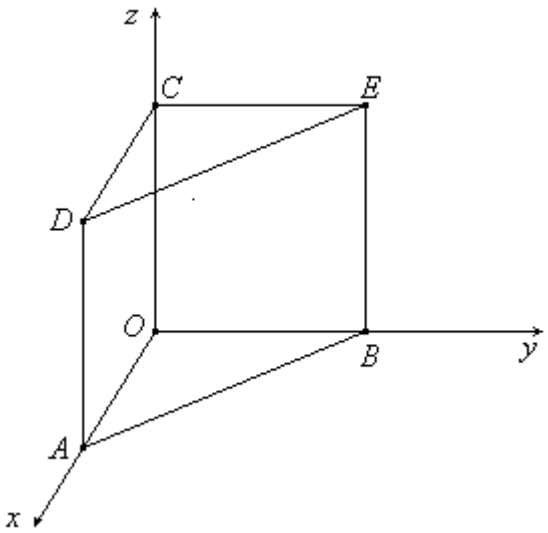


Figura 4

(*a*) *i*) Determinare i vettori posizione dei punti *D* ed *E*.
ii) Determinare i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{DE}$.

(*b*) Indicato con *M* il punto medio del segmento *AB* a con *N* il punto medio del segmento *DE:*
i) Determinare i vettori posizione dei punti *M* ed *N*.
ii) Determinare i vettori $\overrightarrow{AN}$ ed $\overrightarrow{ME}$.
iii) Spiegare cosa notate nei risultati ottenuti.

Griglia di soluzione

(*a*) (*i*) $\overrightarrow{OD}=\begin{bmatrix}6\\0\\10\end{bmatrix}$ (*ii*) $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=\begin{bmatrix}-6\\8\\0\end{bmatrix}$

(*b*) (*i*) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}$ (*ii*) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}-3\\4\\10\end{bmatrix}$

(*iii*) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ME}$, che è quanto ci si deve aspettare poiché *AN* è parallelo a *ME* e di uguale lunghezza.

2. *OABCDE* rappresenta il tetto di una casa (vedi Figura 5). *OABC* è un rettangolo con il lato *OA* di lunghezza 8 m e il lato *OC* di lunghezza 10 m. Lo spigolo *DE* è disposto in modo simmetrico 3 metri sopra il rettangolo.
(*a*) Con gli assi disposti come in Figura 5, determinare i vettori posizione dei punti *A*, *B*, *C*, *D* ed *E*.
(*b*) Determinare i vettori $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{CE}$, che rappresentano gli spigoli inclinati del tetto.
(*c*) Dire qual è la lunghezza di uno spigolo inclinato.

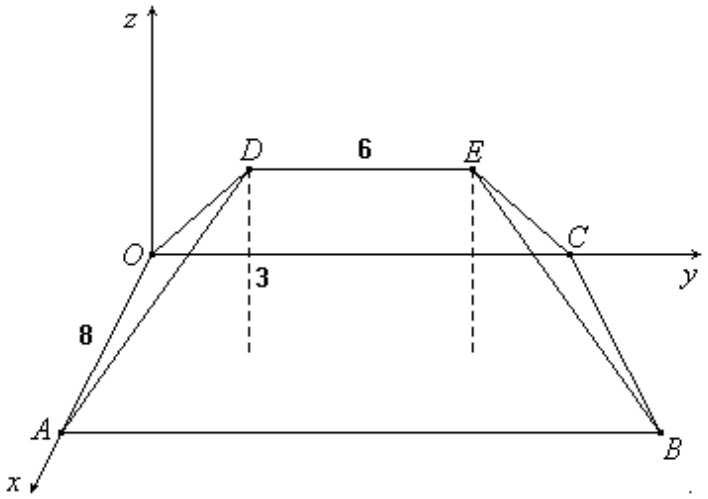


Figura 5

3. *OAB* è un triangolo le cui altezze condotte dai vertici *A* e *B* si intersecano in *H* come indicato in Figura 6. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OH}$ si indicano con **a**, **b** e **h**.

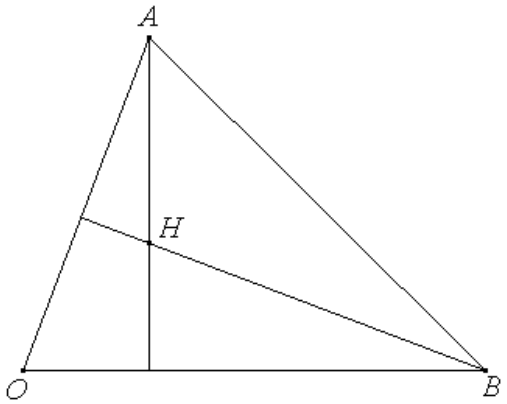


Figura 6

(*a*) Perché risulta $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{h}) = 0$?
(*b*) Scrivere un'equazione analoga che coinvolga $\mathbf{a}-\mathbf{h}$.
(*c*) Formalizzare il fatto che le altezze di un triangolo sono concorrenti.

Segui la freccia

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale.	Numeri e algoritmi Lo spazio e le figure Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Geometria analitica.

Nell'ambito del contesto indicato è presentata un'applicazione dei vettori in matematica, assai diversa dalle applicazioni in fisica, che mette in evidenza, senza formalizzare troppo, la loro caratteristica di classe di equivalenza. Apre anche una finestra sullo spazio dove il metodo classico non è più utilizzabile, mentre l'equazione vettoriale si estende senza difficoltà.
Questa attività può essere proposta nella terza o nella quarta classe sia come complemento alla teoria classica sia come teoria principale.

Descrizione dell'attività
Partendo dal piano si ricava l'equazione vettoriale di una retta per l'origine; con la regola del parallelogrammo si passa in modo naturale alla retta che non passa per l'origine. Si pone l'accento sul vettore che indica la direzione della retta. Usando le coordinate dei punti si trova l'equazione parametrica e da questa, con semplici passaggi algebrici, quella cartesiana. A questo punto si ricorda che una retta è individuata da due punti. Si chiede agli studenti di individuare il vettore che indica la direzione della retta che passa per i punti dati: si ritrovano così le equazioni precedenti osservando la formula classica della retta per due punti da un nuovo angolo. L'estensione allo spazio avviene in modo naturale, semplicemente aggiungendo una coordinata.

Prima fase
Si scrive l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $A(3;2)$. Essa è fatta da multipli del vettore $A - O = \boldsymbol{v}$, per cui la sua equazione può essere scritta $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{v}$.
Se una retta non passa per l'origine, ma è parallela alla retta precedente (ovvero ha la stessa direzione del vettore $\boldsymbol{v}$), la regola del parallelogrammo ci fa intuire che un suo qualsiasi punto ha come vettore posizione $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, dove $\boldsymbol{w}$ è un vettore posizione di un qualsiasi punto della retta.
Ad esempio:

Se $\boldsymbol{v} = (3;2)$ e $\boldsymbol{w} = (4;5)$, l'equazione $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ diventa il seguente sistema $\begin{cases} x = 3k + 4 \\ y = 2k + 5 \end{cases}$

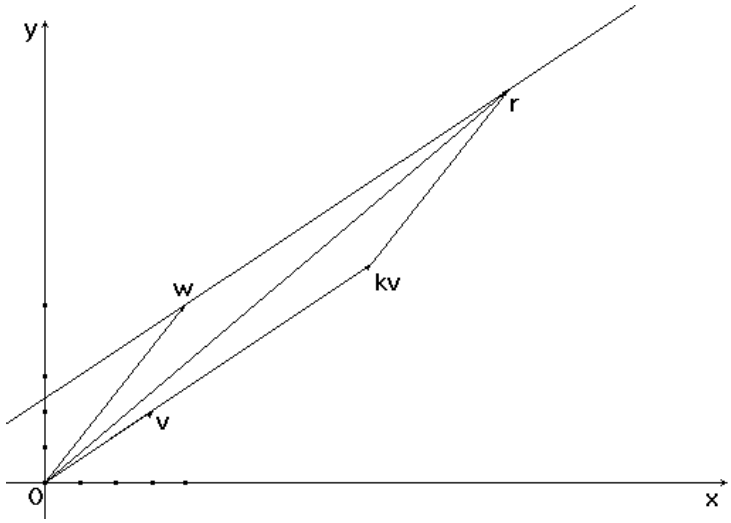


Figura 1

Seconda fase

Si sa che una retta è individuata da due punti. Si vuole trovare l'equazione cartesiana della retta individuata dai punti $A(2; 4)$, $B(3; 7)$. È importante far notare che questa retta ha la direzione del vettore $B - A = \boldsymbol{v} = (1; 3)$ e passa per il punto A.
Si può verificare che cambiando l'ordine di A e B l'equazione della retta non cambia.
Si scriva ora l'equazione cartesiana esprimendo k in funzione di x e di y ed uguagliando.
Cosa c'è al denominatore di queste due frazioni?
Si può generalizzare la questione mettendo coordinate generiche di punti, $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$, e arrivando così alla formula della retta per due punti, letta in un modo diverso.

Possibili sviluppi

1. Si può trasferire la questione allo spazio: i punti sono individuati da tre coordinate, i vettori hanno, rispetto alla base canonica, 3 componenti.
Che cosa cambia?
2. Si possono ripetere gli esercizi della parte precedente nello spazio semplicemente estendendo le formule ad una terza coordinata.

Elementi di prove di verifica

1. Trovare l'equazione della retta che ha la direzione del vettore $\boldsymbol{v} = (-1;5)$ e passa per il punto $B(-2;4)$.

2. Trovare l'equazione della retta parallela alla retta $\begin{cases} x = k + 2 \\ y = -2k - 3 \end{cases}$ e passante per il punto $C(1; -4)$.

3. Trovare l'equazione della retta perpendicolare alla retta $\begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = k - 3 \end{cases}$ e passante per il punto $D(-2; -3)$.

4. Nei casi precedenti trovare l'equazione cartesiana delle rette (basta ricavare k e sostituire)

5. L'equazione cartesiana della retta è del tipo $ax + by + c = 0$. Che relazione c'è tra il vettore di componenti $a;b$ e il vettore direzione della retta? Qual è la distanza della retta $ax + by + c = 0$ dall'origine? Qual è la distanza della retta $ax + by + c = 0$ da un punto $P(x_0; y_0)$?

Riferimenti bibliografici

Barozzi, G.C. (1997). *Aritmetica, un approccio computazionale*, Ed. Zanichelli, Bologna.

Barozzi, G.C. (1996-97) *Applicazioni informatiche e Analisi numerica*, MIUR, Quaderni della Direzione Classica, Analisi matematica, 24, 36-69.

Barozzi, G.C. (2001). *Polinomi e liste*, MIUR, Quaderni della Direzione Classica, Labclass, 45, 15-22.

Barozzi, G.C., Cappuccio, S. (1997). *Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, Pitagora, Bologna.

Boieri P. (1986). *Rappresentazione dei numeri e operazioni in virgola mobile: un'applicazione del calcolatore nell'insegnamento della matematica,* Periodico di matematiche, Mathesis, 4.

Boieri, P. (2003). *Derive, Laboratorio informatico per la matematica,* Loescher, Torino.

Boieri, P., Blunda, N., Gobetto, M. (2003). *Excel, Laboratorio informatico per la matematica,* Loescher, Torino.

Di Bona, L. (1958). Enciclopedia dello studente Vol. I, Confalonieri M., Milano.

Dissoni, A., Salsa, S. (1989). *Antico algoritmo benedettino* - Matematica e Laboratorio 1, teoria algoritmi e applicazioni per computer,1, Ghisetti e Corvi, Padova.

Impedovo, M. (1999). *Matematica: insegnamento e computer algebra,* Springer, Milano.

Santarossa, R. (2000). *Questioni didattiche sul calcolo scientifico,* Atti del Convegno Nazionale Mathesis.

Scaglianti, L., Varagnolo, L., Zwirner, G. (1987). *Lezioni di Matematica, Algebra Informatica*, 1, CEDAM, Milano.

Siti Web (2003)

Songia Eugenio - http://space.tin.it/edicola/esongi/calenda.htm

Il Calendario - http://www.ciaoumbria.it

Frequently Asked Question about Calendars - http://www.tondering.dk/claus/calendar.html

Il Calendario - http://www.cosediscienza.it/tempo.htm
http://www.apav.it/eugeninfo2003/
http://matmedia.it

Laboratorio a distanza "Matmedia", MIUR - www.matmedia.it

SPAZIO e FIGURE

Spazio e figure

La scelta del nome del nucleo tematico *Spazio e figure*, rispetto a quello tradizionale di *Geometria*, vuole proporre un insegnamento non settoriale e non "separato" degli argomenti che le sono propri, in modo da collegare e integrare il più possibile, in una visione che si potrebbe dire "fusionista", la geometria piana con quella dello spazio, l'approccio sintetico con quello della geometria analitica e con la trigonometria, oltre che con gli altri nuclei tematici e di processo. Il nome, inoltre, è lo stesso presente nei curricoli della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado, a significare che lo studio della geometria nel secondo ciclo va condotto in continuità con quanto è stato acquisito dallo studente durante il primo periodo scolastico, a partire dalla presa di coscienza della realtà dello spazio fisico nel quale l'uomo vive la sua esperienza. In tale ottica è bene mirare a omogeneizzare, correggere e rinforzare gli elementi di intuizione spaziale che gli studenti hanno acquisito, esaminando in un primo momento intuitivamente le figure fondamentali che caratterizzano lo studio della geometria dello spazio e analizzando i problemi di reciproca posizione che queste presentano. Ciò costituirà, tra l'altro, stimolo e motivazione per lo studio razionale e sistematico della geometria del piano, che a questo livello va avviato. In tale ottica è bene condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e dalla scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale, partendo da un'attività di esplorazione di situazioni significative collegate alla realtà e procedendo allo sviluppo di limitate catene di deduzioni. In tale sviluppo è necessario, tuttavia, che ogni ipotesi e ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento. La geometria concorrerà, in modo significativo, alla maturazione di una consapevolezza argomentativa. Si proporranno agli allievi attività di rappresentazione e di esplorazione di situazioni geometriche atte a favorire la produzione di congetture, con l'aiuto di strumenti operativi di volta in volta più significativi nello specifico contesto, da quelli più tradizionali quali piegatura della carta, uso di riga e compasso, "macchine matematiche", a quelli che la recente tecnologia mette a disposizione, come i software di geometria. Questi ultimi potranno giocare un ruolo determinante per ravvivare lo studio della geometria e per riproporla agli studenti in forma più accattivante e motivante.

Successivamente gli argomenti saranno ripresi dando una visione più sistematica del tema. Lo sviluppo degli argomenti sarà anche condotto in modo da stabilire un rapporto tra la realtà e la geometria con le sue applicazioni – nel disegno, nell'architettura, nell'ingegneria, nell'arte, nelle scienze sperimentali – interpretando il discorso geometrico come momento di rappresentazione e di modellizzazione della realtà.

Con l'introduzione del metodo delle trasformazioni e di quello delle coordinate saranno disponibili nuovi strumenti utili per rappresentare, studiare e risolvere vari problemi geometrici, che potranno così essere affrontati nel modo più opportuno in relazione all'espressività e alla semplicità che tali metodi offrono nei singoli casi particolari presi in esame.

La geometria è inoltre, uno dei settori della matematica dove la riflessione filosofica si affaccia storicamente in modo esplicito sin dall'antichità: è opportuno segnalare i diversi aspetti storici, filosofici e culturali in forma integrata con il percorso didattico specifico di ogni indirizzo.

In maniera sintetica, e forse più incisiva, si possono così indicare le idee salienti che sono alla base del curricolo di geometria proposto:

- Continuità con il curricolo di matematica del primo ciclo scolastico.
- Svolgimento integrato, quando possibile, tra la geometria dello spazio e la geometria del piano, tra la geometria sintetica, la geometria analitica e la trigonometria (queste ultime proposte in una forma sobria ed essenziale, per scoraggiare "cattive" pratiche didattiche ripetitive su tali argomenti).
- Rafforzamento e rivalutazione della geometria dello spazio. In questa proposta di curricolo "tutto parte dallo spazio", inizialmente in forma intuitiva, e "tutto ritorna allo spazio".

- Indicazione rivolta a preferire l'introduzione di "limitate catene di deduzioni", più che una costruzione sistematica della geometria.
- Invito a porre l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà geometriche, da realizzare mediante l'uso delle nuove tecnologie, accanto a quelle più tradizionali.
- Attenzione ai collegamenti tra lo studio della geometria e il mondo reale, in particolare alle applicazioni nelle scienze, nella tecnica, nell'arte.
- Importanza attribuita allo studio delle trasformazioni geometriche, in contesti motivanti e con problemi scelti opportunamente e, contemporaneamente, all'uso del metodo analitico, sviluppato, quando è possibile, in parallelo con la trattazione sintetica.
- Presenza di spunti storici, come occasione di riflessione epistemologica e filosofica.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
1° biennio	Le opere del Palladio: forme geometriche e simmetrie	Analisi di costruzioni architettoniche	Arte, Disegno	
1° biennio	Tassellazioni del piano	Configurazioni geometriche nel piano	Arte, Disegno, Scienze	
1° biennio	Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia	Storia della matematica	Italiano, Storia	
1° biennio	Origami, riga e compasso, software geometrico	Regolarità e simmetrie nel piano	Disegno, Arte	
1° biennio	Problemi di minimo nel piano	Geometria sintetica e analitica	Fisica	
1° biennio	Simmetrie nei poliedri	Figure del piano e dello spazio	Arte, Disegno, Storia, Scienze	
2° biennio	Le circonferenze di Fermat	Configurazioni geometriche del piano		
2° biennio	Alla ricerca del rettangolo più bello	Trasformazioni geometriche nel mondo reale	Arte, Musica, Scienze, Disegno	
2° biennio	Tutte le parabole sono simili?	Coniche e trasformazioni geometriche		
2° biennio	Le coniche come luoghi: un percorso costruttivo	Dalle coniche come sezioni e come luoghi alle loro equazioni	Storia, Disegno, Arte, Fisica, Astronomia	
2° biennio	Circonferenze e parabole: dal grafico all'equazione	Coniche e loro equazioni	Fisica	
2° biennio	Triangoli equilateri e parabole	Geometria e aritmetica		
2° biennio	La trigonometria e il mondo reale	Trigonometria e applicazioni	Storia, Geografia fisica e astronomica, Topografia	
2° biennio	Equivalenza nello spazio	Equivalenza: dal piano allo spazio	Disegno, Fisica, Storia	

Le opere del Palladio: forme geometriche e simmetrie

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano.	Dallo spazio al piano: nozioni intuitive. Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Storia Latino

Contesto
Analisi di costruzioni architettoniche

Primo approccio con la geometria dello spazio attraverso un confronto con il mondo reale, visitando monumenti o analizzando loro fotografie o rappresentazioni tridimensionali in ambienti virtuali. Studio delle isometrie piane attraverso l'analisi di piante o sezioni di edifici.

Descrizione dell'attività
Il lavoro prevede l'osservazione di fotografie di edifici di Andrea Palladio (1508-1580) con successiva lettura e analisi di disegni tratti dai suoi libri.
È stata scelta, in questa attività, l'opera del Palladio perché ricca di spunti in ambito geometrico, ma l'insegnante può fare riferimento anche ad opere architettoniche presenti nel territorio in cui si trova la scuola.
Durante questa attività gli studenti hanno l'opportunità di osservare esempi di figure geometriche dello spazio e del piano in un contesto reale e di individuare isometrie piane.
È opportuno, prima di affrontare il lavoro, che si svolge all'inizio della scuola secondaria, rendere omogenee le conoscenze pregresse acquisite in geometria e la relativa terminologia, ciò al fine di evitare una incomprensione dei concetti matematici interessati, causata da fraintendimenti linguistici sul significato di alcune parole.
Sono descritte di seguito due attività. Attraverso la prima gli studenti consolidano le conoscenze geometriche e la capacità di visione nello spazio a tre e a due dimensioni; con la seconda imparano a riconoscere nel mondo reale le diverse isometrie e le figure geometriche a loro già note.
Le attività si basano su fasi che da operative tendono a diventare astratte: dall'operare concreto alla sintesi delle osservazioni e delle analisi effettuate, al conseguimento della capacità di utilizzare le competenze apprese. Gli oggetti matematici presentano, infatti, una natura complessa e l'uso di "oggetti fisici", nell'iter di apprendimento, ne può facilitare la comprensione.
I modelli fanno riferimento allo stretto legame che gli oggetti geometrici hanno con la realtà. Nello stesso tempo la conoscenza, che parte dall'esperienza, deve arrivare ad un livello teorico: attraverso l'analisi ed il superamento dei dati ottenuti con la percezione giungere all'astrazione, fino a consolidarsi in forma consapevole e fondata razionalmente. Dagli aspetti empirici si tende a guidare gli studenti all'acquisizione di quelli formali, dalle descrizioni alle definizioni, dalle osservazioni alle eventuali dimostrazioni

Prima attività

L'insegnante illustra l'attività che intende proporre e presenta agli studenti fotografie e disegni di opere del Palladio e, se decidesse di esplorare il territorio dove gli studenti vivono, mostra loro quali edifici andranno a visitare e quali riproduzioni o eventuali plastici analizzeranno.

Un ruolo importante ha la scelta delle opere da considerare: devono essere ricche di elementi geometrici di facile lettura per non disorientare eccessivamente gli studenti.

Questa attività ha essenzialmente lo scopo di verificare quali figure geometriche gli studenti conoscono e sanno riconoscere. Attraverso tale attività gli studenti acquisiscono anche consapevolezza delle proprie conoscenze.

L'insegnante fornisce una scheda guida per le osservazioni, da utilizzare sia per l'attività in classe che all'esterno.

Si riporta, di seguito l'immagine di un edificio (Figura 1, Andrea Palladio, *La Malcontenta,* Venezia) che si ritiene significativo per questa esperienza ed una proposta di scheda per la lettura delle opere presentate o dei monumenti visitati.

Figura 1

Esempio di scheda:

Figura analizzata (identificare con un numero la figura o fotografia scelta)	Solidi presenti	Caratteristiche principali del solido individuato	Figure piane	Caratteristiche principali della figura individuata
Fig.1 La Malcontenta	Cilindri, …	Il cilindro presenta una superficie rotonda ..	Triangoli isosceli	I triangoli sono isosceli se ……
	Cubi			
	Ci sono figure a cui non sei riuscito ad attribuire un nome? Quali sono? (indicale con un numero sulla illustrazione proposta). Secondo te è possibile descriverle? Prova a descriverle riferendoti agli elementi di geometria che ti sono noti?			
Fig.2…				

L'insegnante, dopo che gli studenti hanno compilato le schede, guida la discussione in classe ed inizia a rendere più omogeneo il linguaggio e ad avere alcune informazioni sulle conoscenze pregresse degli studenti.
L'insegnante può proporre agli studenti la lettura del libro *Flatlandia* di Abbott per sollecitare una riflessione sui problemi della dimensione.

Seconda attività
Prima fase
L'insegnante descrive agli studenti la nuova attività, precisando che l'intento è quello di studiare le isometrie. È però importante accertare, anche in questo caso, che cosa gli studenti conoscano già dalla scuola media.
Se l'insegnante non ha proposto una prova d'ingresso, o in essa non vi erano quesiti relativi a questo argomento, può presentare ora alcune domande finalizzate ad accertare le conoscenze in loro possesso in relazione alle isometrie.
Si riportano alcuni esempi di quesiti che possono risultare utili.
Le domande hanno diversa tipologia (domande aperte, test a risposta multipla, tabelle,...) e difficoltà a vari livelli. Nei testi proposti sono introdotti termini che gli studenti potrebbero non conoscere o non comprendere. Conviene, perciò, riservare in fondo alla prova uno spazio dove gli studenti possono indicare quali sono per loro le parole "difficili" o "ignote" che hanno incontrato.
Il test va completato con qualche domanda sulle simmetrie centrali e sulle rotazioni. Le domande vanno diversamente ordinate.

Completa la seguente tabella e indica con una crocetta se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

	V	F
a) in una traslazione, coppie di punti corrispondenti si trovano su rette parallele		
b) una traslazione è un'isometria		
c) una traslazione possiede punti uniti		
d) se A e A', B e B' sono coppie di punti corrispondenti in una traslazione, il quadrilatero AA'BB' è un parallelogramma		
e) figure corrispondenti in una traslazione sono direttamente uguali		
f) una traslazione non conserva le lunghezze		

- In una simmetria assiale il segmento che unisce due punti corrispondenti:
  a) è parallelo all'asse
  b) è perpendicolare all'asse
  c) è incidente all'asse
  d) può avere qualsiasi direzione
- Due rette parallele hanno la stessa direzione?
  E due rette perpendicolari?
- Due rette incidenti possono avere la stessa direzione?
  Se considerate tutte le rette passanti per un punto, avete tutte le possibili direzioni di un piano? Giustificate le vostre risposte.
- Il quadrato ha assi di simmetria?
  Quanti?
- Hai sentito parlare del termine "isometria" ?
  In caso di risposta affermativa, descrivi con parole tue il suo significato.

Al termine della fase esplorativa l'insegnante dovrebbe avere riferimenti più precisi relativamente alle conoscenze degli studenti.

Seconda fase

L'insegnante ora può procedere ad un ripasso delle isometrie o allo svolgimento dell'argomento, a seconda delle indicazioni date dai risultati della prova. Quanto di seguito riportato sarà perciò adeguato e realizzato in relazione alle situazioni in cui ci si trova ad operare.

L'insegnante propone agli studenti un percorso di analisi e di ricerca di isometrie attraverso rappresentazioni significative. Le isometrie sono presenti nel mondo che ci circonda; soprattutto in architettura sono sempre stati presenti motivi e ritmi che si ripetono.

Si propongono di seguito alcune opere palladiane che risultano particolarmente significative nell'ambito di questa attività.

Palladio nelle sue opere sceglie consapevolmente rapporti e ritmi geometrici; conosce l'architettura classica sia attraverso l'opera di Vitruvio sia per lo studio degli edifici classici fatto a Roma; pubblica nel 1570 un trattato architettonico dal titolo *Quattro libri dell'architettura*. In esso indica alcune norme precise che tiene presenti quando progetta ed esige, nei suoi progetti, una sala posta sull'asse centrale dell'edificio e un'assoluta simmetria tra gli ambienti minori situati ai lati. Scrive "..E si deve avvertire, che quelle stanze dalla parte destra rispondano, e siano uguali a quelle di sinistra: la fabbrica sia in una parte come nell'altra" (dai *Quattro libri*).

Può essere opportuno far presente agli studenti il grande successo che questo tipo di progettazione ha ottenuto, in Italia e all'estero, dando origine al cosiddetto palladianesimo.

Di seguito sono proposte alcune piante e prospetti di ville del Palladio. L'insegnante presenta agli studenti queste ed altre immagini, su cui lavoreranno, evidenziando particolarità e spiegando come in esse potranno individuare trasformazioni geometriche particolari.

Nella figura 2 (A. Palladio - Villa Almerico detta "*La Rotonda*", Vicenza) gli studenti possono rilevare simmetrie assiali (rispetto a assi diversi) e rotazioni nella pianta dell'edificio e simmetrie di struttura attraverso lo "spaccato" verticale, osservando come sia stato affrontato il problema della visione spaziale.

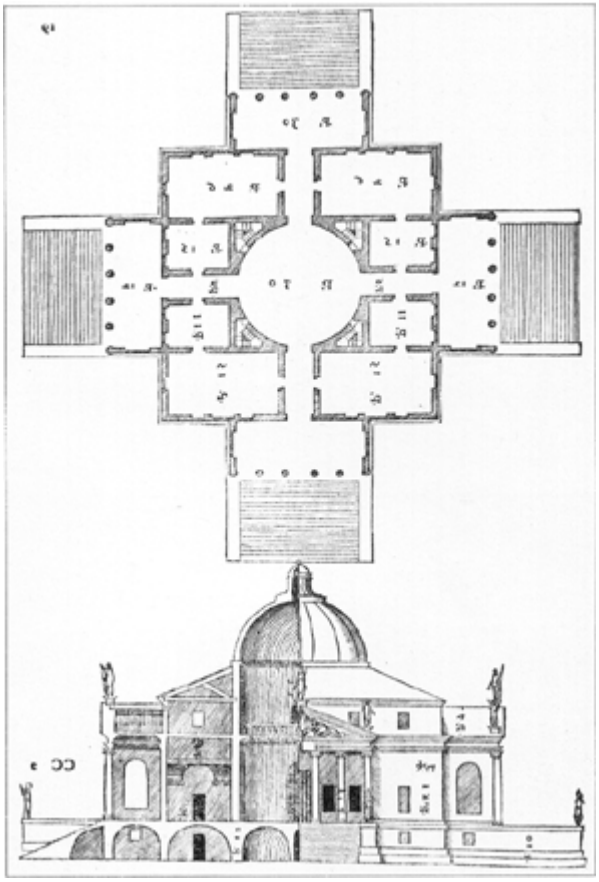


Figura2

Nella della figura 3 (A. Palladio, *Villa Cornaro*, Piombino Dese, Padova) gli studenti possono individuare e studiare le simmetrie della pianta, di alcuni ambienti e della facciata

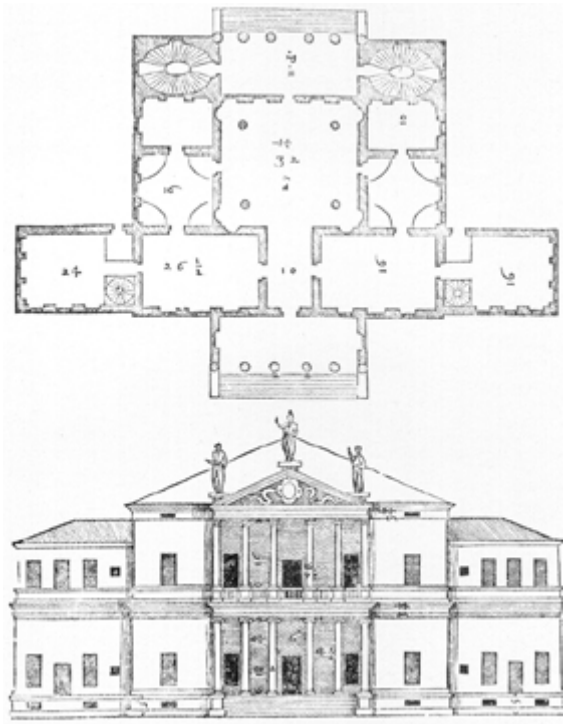


Figura 3

Altri esempi significativi sono:
- la *Basilica palladiana di Vicenza,* nella cui facciata si individuano elementi ripetuti per traslazione o per simmetrie. Nella pianta è facile essere tratti in inganno da *false* simmetrie;
- le chiese de *Il Redentore* e di *San Giorgio Maggiore* a Venezia che consentono analisi di isometrie.

L'insegnante può presentare agli studenti il ruolo fondamentale che la simmetria, la traslazione e la rotazione hanno avuto, in generale, nell'architettura rinascimentale.

Terza fase

L'insegnante organizza la classe in piccoli gruppi e suddivide tra essi i materiali di lavoro mostrati nella fase precedente (con consegne diverse per ogni gruppo). Invita gli studenti a individuare le trasformazioni isometriche presenti in ciascuna figura.
La verifica della presenza della trasformazione può esser fatta, da parte degli studenti, in vari modi, utilizzando carta da lucido o trasparenti o piegature di un foglio non opaco. Anche in questo caso può essere consegnata agli studenti una scheda di osservazione.
Al termine del lavoro ogni gruppo espone all'insegnante e ai compagni i risultati cui è pervenuto, dandone opportuna motivazione.

Quarta fase

Sempre a gruppi, gli studenti elaborano, in base a quanto finora osservato, una propria proposta di pianta o di facciata che presenti caratteristiche analoghe a quelle viste in precedenza. Possono anche ricercare altre opere architettoniche o piante significative di città (per esempio Palmanova) o, eventualmente, analizzare disegni famosi, quali, per esempio, quelli di Escher o i mosaici dell'Alhambra a Granada (Spagna). In quest'ultima attività è bene che l'insegnante operi con gli studenti per una scelta di immagini che non comportino eccessive difficoltà di lettura o non siano coerenti con la proposta di lavoro.

L'importante è che gli studenti, con la loro fantasia o aiutandosi con opere esistenti, cerchino di realizzare disegni in cui sono presenti le diverse trasformazioni. In questa fase può essere utile avvalersi anche di un software di geometria.
Gli studenti devono domandarsi se la ripetitività di alcuni elementi architettonici consente di individuare una sorta di "modulo" che si conserva secondo certe "regole" che in genere variano da figura a figura.
Gli studenti annotano in una griglia quali sono gli elementi che rimangono invariati.

Quinta fase
L'insegnante sintetizza le osservazioni emerse dagli studenti e i risultati cui sono giunti. Li guida ad organizzare i contenuti, ad individuare con chiarezza gli elementi che si conservano nelle trasformazioni esaminate e mette in luce le proprietà invarianti delle figure piane rispetto alle isometrie.

Ulteriori sviluppi
- Simmetrie nello spazio
- Proiezioni ortogonali

Elementi di prove di verifica

1. Osservare una fotografia (un ritratto, un paesaggio, un interno, ...) e studiare se e con quali soggetti si è in grado di accorgersi se nella stampa il negativo è stato inavvertitamente ribaltato.
2. Studiare le lettere dell'alfabeto maiuscolo classificandole rispetto alle loro eventuali simmetrie. Cercare parole che lette allo specchio non si modificano (per esempio OTTO).
3. Studiare le simmetrie delle carte da gioco.
4. Individuare le simmetrie nelle seguenti figure:
   a) un rombo;
   b) un rettangolo,
   c) un parallelogramma;
   d) un pentagono regolare;
   e) un esagono regolare;
   f) un cerchio;
   g) una retta;
   h) due rette parallele;
   i) due rette perpendicolari;
   j) due rette incidenti non perpendicolari.
5. Date tre rette parallele a, b, c, determinare un triangolo equilatero che abbia i vertici A,B,C, rispettivamente su a, b, c.
6. Il problema di Erone: dati i punti A e B dalla stessa parte rispetto ad una data retta r, determinare il minimo cammino che va da A a B toccando r.
7. Siano H, K, L punti non allineati: si vuole determinare un triangolo XYZ che abbia i punti H, K, L come punti medi dei lati.

Tassellazioni del piano

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.	Spazio e figure Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Scienze

Contesto
Configurazioni geometriche nel piano.

L'attività viene proposta nel primo biennio, nella classe prima, e riguarda un'utilizzazione particolarmente significativa delle isometrie del piano in un contesto motivante quale quello delle configurazioni geometriche del piano.
Gli studenti devono conoscere la definizione di poligono regolare. Inizialmente si tratta di scoprire che il piano si può tassellare con tre tipi di poligoni regolari: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare (Figura 1). Dato poi un triangolo qualsiasi come "piastrella", sarà facile scoprire che si può sempre piastrellare il piano con esso. Si proporrà poi il caso dei quadrilateri e successivamente quello di altri semplici poligoni. La tassellazione del piano mediante poligoni fornisce anche un esempio di problema che ha una facile formulazione, ma che può portare a molti approfondimenti. Su questo argomento, addirittura, ci sono ancora diversi problemi irrisolti nella ricerca matematica. È un esempio di attività in cui lo studente può usare concretamente le trasformazioni isometriche del piano e anche rendersi conto della loro importanza nella risoluzione di un problema. L'obiettivo è quello di scoprire proprietà invarianti in certe configurazioni geometriche. L'argomento si presta facilmente a un collegamento interdisciplinare con il Disegno, la Storia dell'arte e le Scienze e ha diversi legami con il mondo reale.

Descrizione dell'attività
Fase 1
Inizialmente si presenta il problema di tassellare il piano con un poligono regolare analizzando esempi tratti dal mondo reale: i favi delle api, i pavimenti delle case, ….
Si osserva che tutti gli elementi della tassellazione sono uguali, ogni elemento aderisce perfettamente all'altro senza lasciare neanche il più piccolo spazio e non c'è sovrapposizione tra gli elementi.
L'attività procede con un software di geometria in cui siano presenti gli "strumenti" traslazione, simmetria centrale, rotazione; in questo modo l'argomento assume un aspetto più costruttivo e la rapidità nell'esecuzione dei disegni è maggiore, oltre a poter esplorare in modo dinamico tantissime

situazioni concrete. In alcune tassellazioni occorre individuare le traslazioni (e quindi i vettori) che caratterizzano un fregio oppure le simmetrie centrali che caratterizzano una data composizione. In questo contesto si possono usare, con riferimento a situazioni concrete, alcune semplici nozioni riguardanti la somma di due vettori e il multiplo di un vettore.

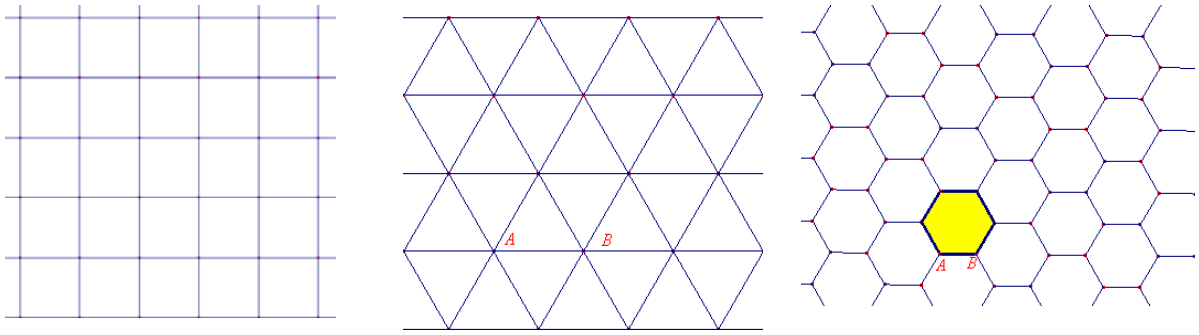


Figura 1

Fase 2

Si propongono inizialmente delle schede di lavoro guidato per gli studenti nelle quali si chiede di individuare le tassellazioni del piano tramite poligoni regolari, un solo tipo per volta, con l'obiettivo di far scoprire che le uniche tassellazioni possibili del tipo richiesto sono quelle fatte con il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.

Successivamente si chiede se è possibile tassellare il piano con triangoli e quadrilateri qualunque. Si scoprirà che questa pavimentazione del piano è possibile con qualunque triangolo e con qualunque quadrilatero non intrecciato. Nella figura 2 è rappresentata una tassellazione del piano proposta agli allievi: si disegna un triangolo ABC e il punto medio di un lato, ad esempio BC. Si chiede agli allievi di procedere nel disegno dei primi passi della tassellazione e di descrivere il procedimento seguito.

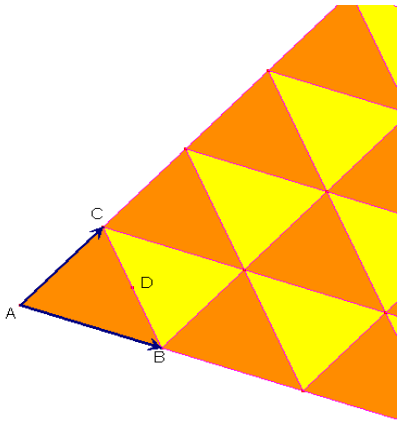


Figura 2

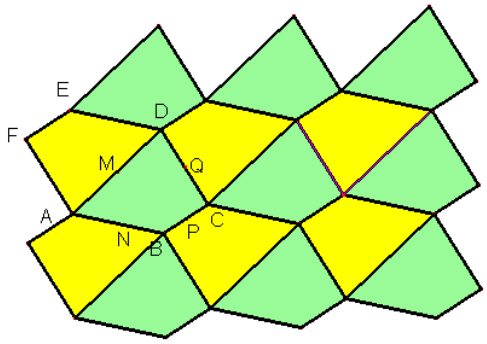


Figura 3 a

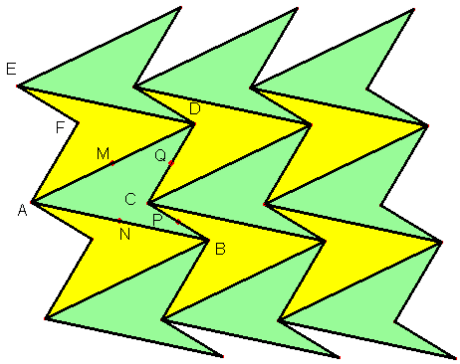


Figura 3 b

Nello stesso modo si scoprirà che anche con un quadrilatero, convesso o no, è sempre possibile tassellare il piano. Si disegna un quadrilatero ABCD convesso (Figura 3a) o concavo (Figura 3b) ma non intrecciato, e il quadrilatero simmetrico di ABCD rispetto al punto medio di uno dei lati. Si ottiene un esagono particolare, come quello in Figura 4, che pavimenta il piano tramite traslazioni. La tassellazione è generata dall'esagono ottenuto unendo ABCD con il suo simmetrico rispetto al punto O, punto medio di AB; si noti il parallelismo delle coppie di lati corrispondenti nella simmetria centrale. Quindi c'è un legame tra la pavimentazione ottenuta con un quadrilatero e quella realizzata con questi esagoni particolari, così come è stato scoperto lo stesso legame tra le tassellazioni ottenute con un triangolo e un parallelogramma. Si chiede agli studenti di individuare le trasformazioni (traslazioni, rotazioni) che servono per ottenere la tassellazione del piano (figura 4).

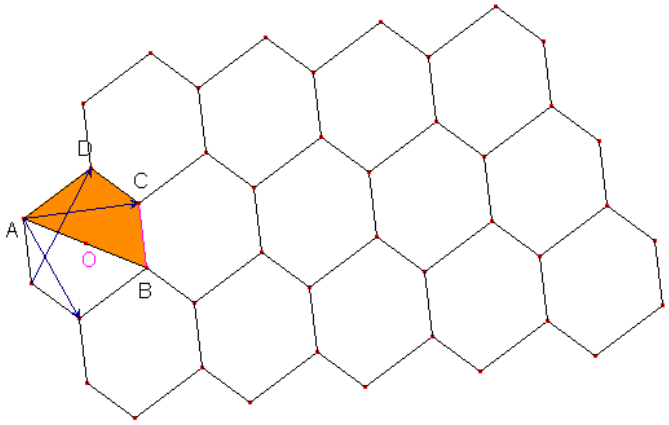


Figura 4

Fase 3

Nella fase 1 si è visto che non è possibile pavimentare il piano con pentagoni regolari tutti uguali. Si propone agli studenti di trovare un possibile ricoprimento usando, oltre al pentagono regolare, un altro poligono. Si può proporre agli studenti la Figura 5 e se ne chiede la descrizione oppure come approfondimento si può far realizzare la costruzione e scoprire le particolarità della tassellazione. Un'attività analoga si può realizzare a partire dall'ottagono regolare (Figura 6).

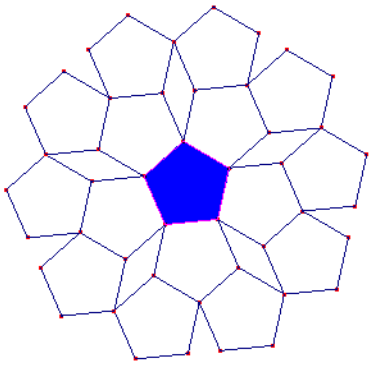


Figura 5

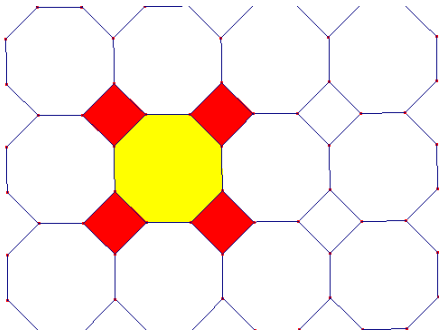


Figura 6

Possibili sviluppi

Inizialmente si è lavorato con un solo tipo di "mattonelle", tutte tra loro uguali. In questa fase si può proporre qualche semplice caso di pavimentazione ottenuta usando due o più tipi di mattonelle a forma di poligono regolare (queste pavimentazioni sono dette *semiregolari*; un esempio è quello

della figura 6). L'obiettivo è sempre quello di riconoscere proprietà invarianti per trasformazioni isometriche nel piano.

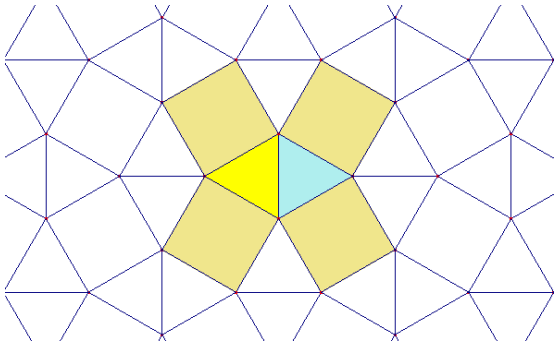


Figura 7

In momenti successivi si potranno proporre e illustrare delle tassellazioni ottenute da più tipi di mattonelle "regolari" e non, che si possono studiare con procedimenti analoghi a quelli utilizzati nelle precedenti fasi dell'attività didattica.
Nella figura 8, si mette in evidenza una particolare pavimentazione del piano ottenuta a partire da un pentagono che si ottiene dividendo in quattro parti uguali una croce greca.

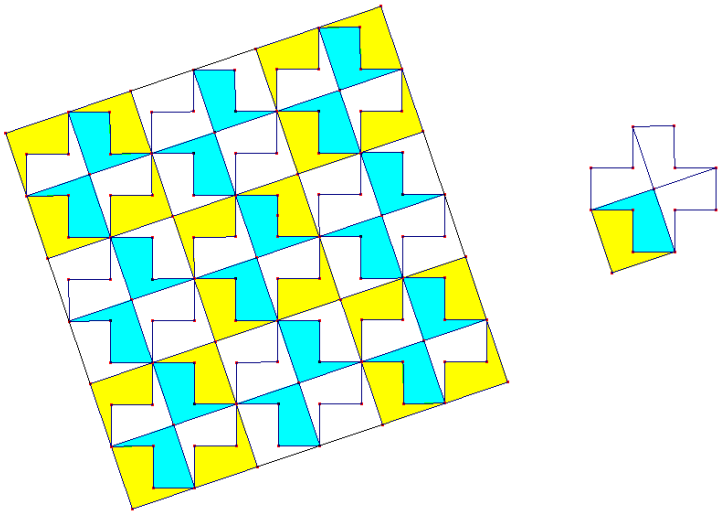


Figura 8

Alcuni esempi sono riportati nelle seguenti figure presenti nei disegni di M.C. Escher ispirati a pavimentazioni presenti nel palazzo dell'Alhambra di Granada (Spagna).

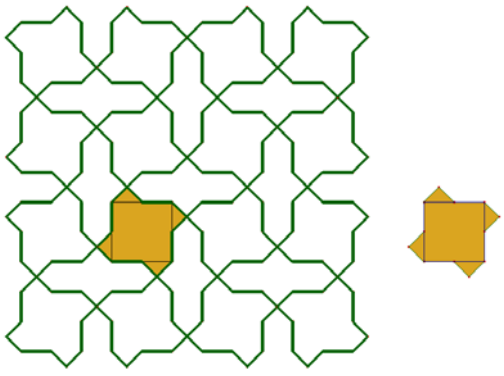


Figura 9

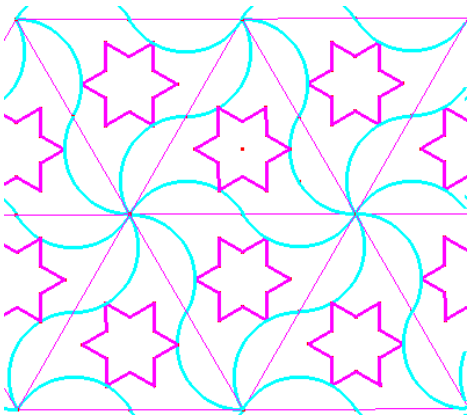


Figura 10

Elementi di prove di verifica

1. È possibile una tassellazione del piano formata da pentagoni regolari?
2. Si può realizzare una tassellazione del piano accostando dodecagoni regolari e triangoli equilateri?
3. Descrivere la pavimentazione del piano indicata nella Figura 11.

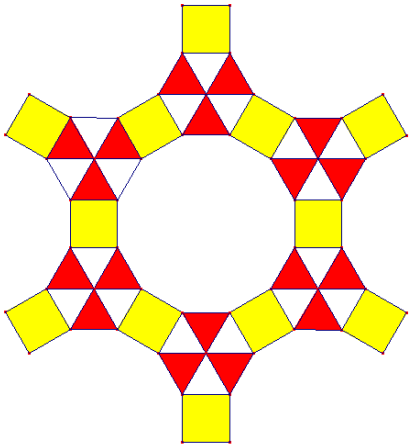


Figura 11

4. In alcune vetrate del XVI secolo si trovano esagoni regolari e parallelogrammi di cui due lati sono doppi degli altri due. Descrivere le proprietà dei parallelogrammi e la tassellazione ottenuta (Figura 12).

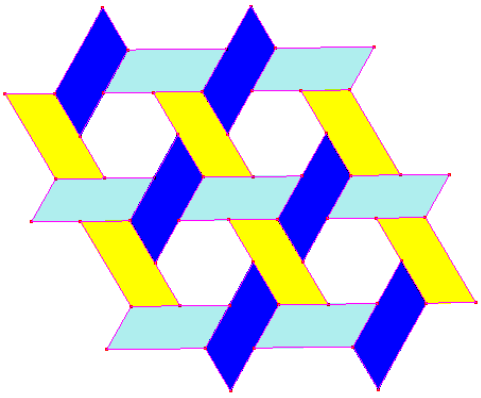


Figura 12

5. (Attività di gruppo in laboratorio di matematica). Costruire un pentagono convesso ABCDE che verifichi le seguenti condizioni: l'angolo in A è di 60°, gli angoli in B e in C sono di 120°, AB=AE e CB=CD (queste condizioni non determinano un pentagono unico, ma una famiglia di pentagoni). Con l'uso di un software di geometria, costruire la tassellazione del piano partendo da rotazioni di 60° del pentagono ottenuto attorno al punto A.

Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti.	Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.	Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare	Storia

Contesto
Storia della matematica.

L'attività può essere introdotta alla fine della prima classe, quando gli studenti sanno riconoscere e costruire poligoni equiscomponibili. Il contesto è quello della storia della matematica.
La proposta prende lo spunto dalla lettura di un racconto in cui si parla del teorema di Pitagora, "Una perla pericolosa" da *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (pseudonimo del matematico brasiliano Jùlio César de Mello e Souza), per suscitare o rinnovare negli studenti l'interesse per questo teorema e per la sua dimostrazione.
L'insegnante guida gli studenti a comprendere il corretto significato di verifica di una congettura in casi particolari, giungendo poi a saper distinguere, consapevolmente, tra verifica e dimostrazione.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta non solo offre una ripresa e un approfondimento di contenuti noti agli studenti, che infatti nella scuola media hanno già conosciuto e applicato il teorema di Pitagora, ma li guida anche ad argomentare correttamente.

Prima fase
L'insegnante inizia con la lettura di una parte del racconto.
"Siamo assai impazienti", continuò lo Sceicco, "che tu ci aiuti a rispondere a una domanda posta dal principe Cluzir Shah. In quale modo gli indiani hanno contribuito al progresso della matematica e chi sono i geometri indiani che maggiormente si sono distinti in questa scienza?"
"Generoso Sceicco!", rispose Beremiz, "Il compito che tu mi affidi richiede cultura e obbiettività: cultura, per conoscere nei particolari la storia della scienza, obbiettività per analizzarla e giudicarla con criterio. D'altra parte, o Sceicco, ogni tuo desiderio è per me un ordine. Racconterò quindi a questa eletta compagnia, quale piccolo omaggio al principe Cluzir Shah, le poche cose che conosco sullo sviluppo della matematica nel paese del Gange."
"Nove o dieci secoli prima di Maometto viveva nell'India un famoso bramino di nome Apastamba. Questo sapiente, per istruire i preti sulla costruzione di altari e sul progetto di templi, scrisse un'opera chiamata Salvasūtra he contiene molti esempi matematici. È improbabile che questo trattato sia stato influenzato dalle teorie pitagoriche, dal momento che gli studiosi indiani non seguivano i metodi di indagine dei greci. Nelle sue pagine si trovano comunque numerosi teoremi e

regole per costruzioni geometriche. Per spiegare la costruzione di un altare, Apastamba propone di tracciare un triangolo rettangolo, i cui lati misurino rispettivamente 39, 36 e 15 centimetri; per risolvere il problema egli applica un teorema attribuito al greco Pitagora: "L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sugli altri due lati". E, rivolgendosi allo sceicco Iezid, che ascoltava attentamente: "Sarebbe più facile spiegare questa famosa regola con un disegno". Lo Sceicco fece un cenno ai servitori, e subito due schiavi portarono una larga scatola piena di sabbia, sulla cui liscia superficie Beremiz si mise a tracciare figure e a effettuare calcoli per il Principe di Lahore, servendosi di una canna di bambù. "Ecco un triangolo rettangolo. Il suo lato maggiore si chiama ipotenusa. Costruiamo adesso un quadrato su ciascuno dei suoi lati: è facile dimostrare che il quadrato grande disegnato sull'ipotenusa ha esattamente la stessa area della somma degli altri due quadrati, confermando così la giustezza del teorema di Pitagora." (Figura 1).

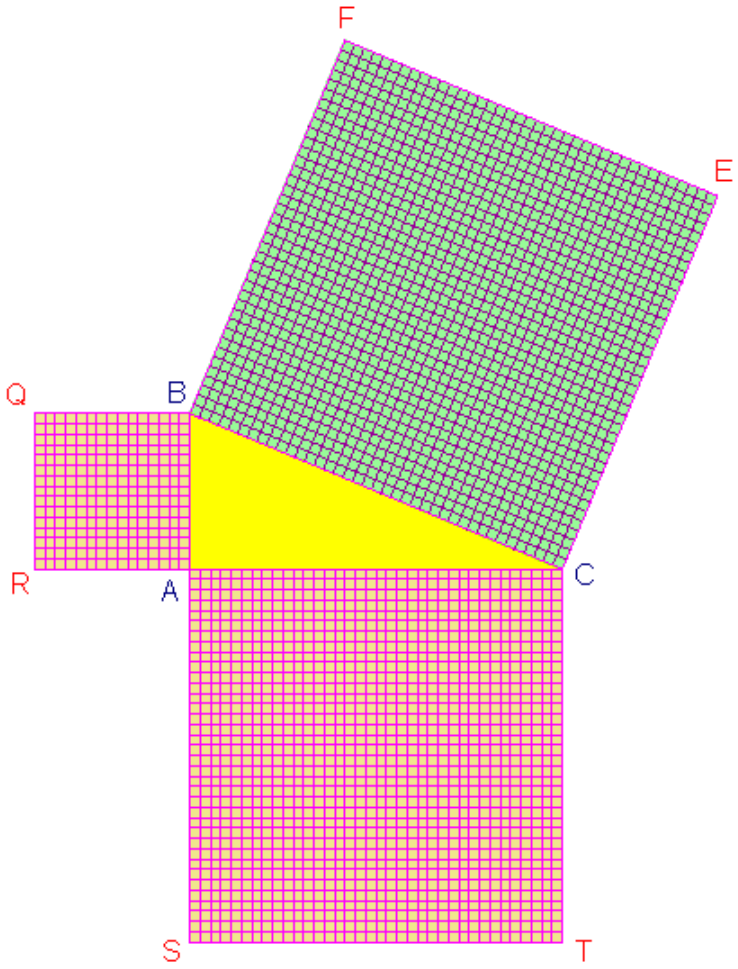


Figura 1

L'insegnante apre la discussione allo scopo di guidare gli studenti ad analizzare quanto viene descritto nel testo e a verificarlo con strumenti grafici o con un software di geometria.
Invita poi a ricercare e a costruire casi analoghi, ovvero triangoli rettangoli in cui i lati hanno misure espresse da numeri interi.

<u>Seconda fase</u>
L'insegnante prosegue proponendo agli studenti la lettura di un altro passo del racconto:
Il Principe chiese se la stessa regola fosse valida per tutti i triangoli. Al che Beremiz rispose solennemente: "È vera e costante per tutti i triangoli rettangoli. Posso affermare, senza tema di

smentita, che la legge di Pitagora esprime una verità eterna. Ancor prima che il sole splendesse nel firmamento, ancor prima che ci fosse aria da respirare, il quadrato dell'ipotenusa era uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati." Affascinato dalle spiegazioni di Beremiz, il Principe si rivolse con calore al poeta Iezid: "Come è meravigliosa la geometria, amico mio! Che scienza interessante! Dalle sue spiegazioni emergono due qualità atte a impressionare anche l'uomo più umile e sprovveduto: la chiarezza e la semplicità". E, sfiorando leggermente la spalla di Beremiz con la mano sinistra, gli chiese: "Questa scoperta degli antichi greci compare anche nel Salvasūtra di Apastamba?" Beremiz non esitò a rispondere. "Certamente, mio Principe!" disse. "Anche se il cosiddetto teorema di Pitagora compare nel Salvasūtra in una forma un po' diversa. Fu leggendo l'Apastamba che i preti appresero l'arte di costruire santuari, mettendo in relazione i triangoli rettangoli con i relativi quadrati".

L'insegnante sollecita la discussione allo scopo di suscitare le seguenti domande:
Tale proprietà vale per tutti i triangoli rettangoli o solo per quelli che hanno i lati con particolari misure? Attraverso quanto verificato si può rispondere a tale domanda?
Si vuole giungere in tal modo a far emergere la necessità di trovare altre vie per accertare la validità della proprietà per tutti i triangoli rettangoli.

Terza fase

Si propongono alcune dimostrazioni della validità del Teorema di Pitagora (esse non fanno ovviamente riferimento a misure particolari dei lati del triangolo).
a) L'insegnante propone di disegnare (Figura 2a) il triangolo rettangolo ACB, di costruire il quadrato BCKH sull'ipotenusa BC ed il quadrato AEFL che ha un angolo coincidente con l'angolo retto del triangolo rettangolo e i lati passanti per i vertici del quadrato BCKH.
Si invitano gli studenti a dimostrare l'uguaglianza dei quattro triangoli rettangoli.
Si procede poi a disegnare (Figura 2b) il triangolo ABC uguale al precedente, a completare il rettangolo ACSB, a costruire i quadrati ABRN e BSPQ, a completare il quadrato NCPT e a tracciare la diagonale TB del rettangolo RBQT.
Gli studenti dimostrano l'uguaglianza dei triangoli rettangoli, osservano che i quadrati AEFL e NCPT sono uguali. Deducono da ciò che il quadrato BCKH (Figura 2a) ha l'area uguale alla somma delle aree dei quadrati ABRN e BSPQ (Figura 2b).

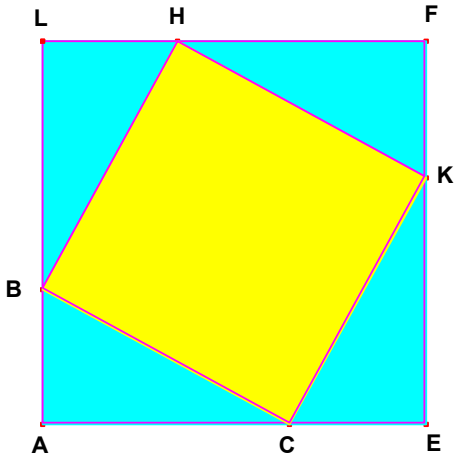


Figura 2a

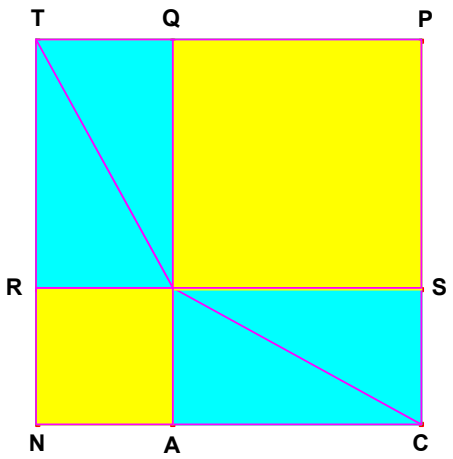


Figura 2b

b) Facendo riferimento alla Figura 2a, si può dare anche una dimostrazione che utilizza il calcolo algebrico.
Se a, b, c sono rispettivamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti del triangolo ABC allora l'area del quadrato AEFL è $(b+c)^2$, che si può anche ottenere come somma delle aree dei quattro triangoli rettangoli uguali a ABC e del quadrato costruito sull'ipotenusa BC, ovvero $4\ (bc/2) + a^2$.

Uguagliando le espressioni algebriche che esprimono l'area del quadrato AEFL si ottiene l'uguaglianza $b^2 + c^2 = a^2$.

c) Si propone poi una dimostrazione attribuita al matematico arabo Thabit Ibn Qurra.

L'insegnante invita gli studenti a disegnare (Figura 3a) il triangolo rettangolo ACB, a costruire il quadrato BCEF sull'ipotenusa BC, a costruire i segmenti EN e FQ perpendicolari ad AC e il segmento BS perpendicolare a FQ.

Invita poi gli studenti a dimostrare che i triangoli CNE e FLE sono uguali a ACB e che i quadrilateri AQSB e QNEL sono quadrati con i lati uguali ai cateti di ACB.

Gli studenti disegnano ora la Figura 3b, uguale alla precedente, ma colorata in modo diverso facendo notare l'equivalenza tra il quadrato BCEF e i quadrati AQSB e QNEL.

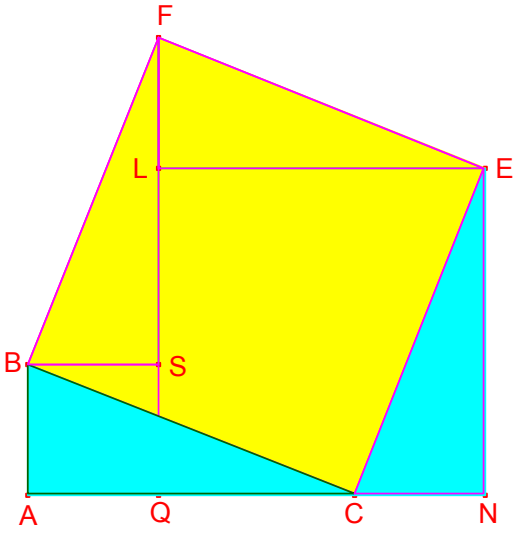


Figura 3a

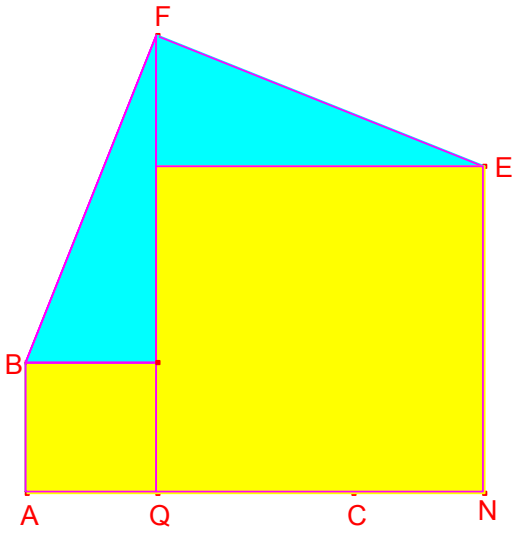


Figura 3b

d) L'insegnante può anche proporre la seguente dimostrazione (figura 4).

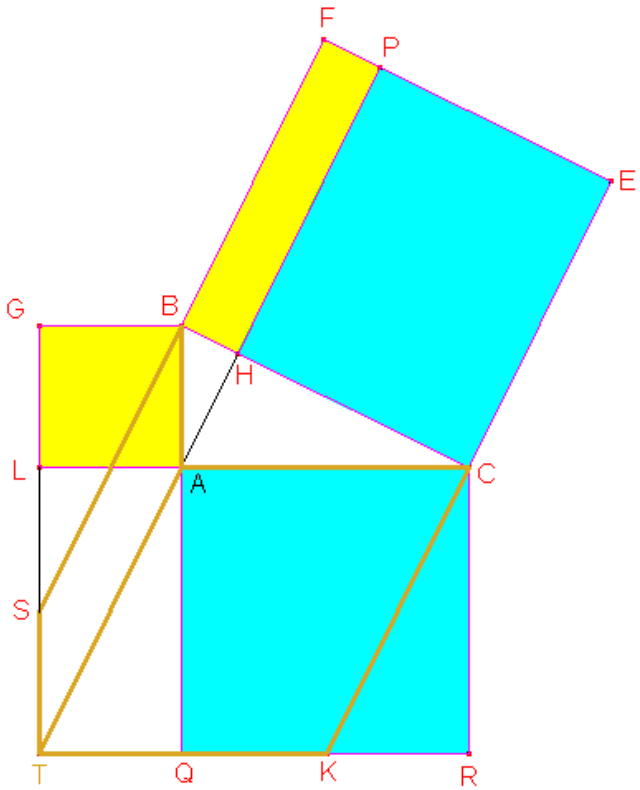


Figura 4

È dato il triangolo rettangolo ACB; si costruiscono i quadrati sui cateti e sull'ipotenusa, si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa che interseca BC in H e FE in P.
Sapendo che il quadrato LABG è equivalente al rettangolo BHPF, perché entrambi sono equivalenti al parallelogramma ABST (primo teorema di Euclide) e che il quadrato AQRC è equivalente al rettangolo HCEP, perché entrambi equivalenti al parallelogramma TKCA, si ottiene la tesi.

Quinta fase
L'insegnante racconta agli studenti del modo in cui si dice che gli Egiziani costruissero gli angoli retti, avvalendosi di cordicelle con nodi equidistanti in numero uguale a quelli di terne pitagoriche, per esempio 3, 4, 5.
Facevano 11 nodi su una corda a distanza uguale tra loro. Fissavano quindi a terra i due capi della corda e, tenendo la corda tesa, la fissavano al terreno nel terzo e settimo nodo.

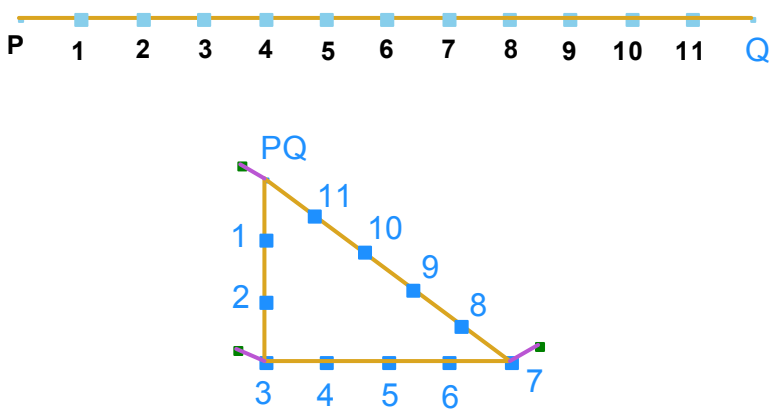


Figura 5

Si può chiedere agli studenti se ritengono questo procedimento equivalente a quanto visto finora o se osservano qualche differenza.
L'insegnante li guida a concludere che quanto fatto dagli Egiziani rappresenta l'operazione inversa. Le attività svolte in precedenza conducono alla dimostrazione di una proprietà dei triangoli rettangoli (il teorema di Pitagora), mentre il modo di procedere degli Egiziani si fonda sull'enunciato inverso: se i lati di un triangolo hanno misure tali che la somma dei quadrati di due è uguale al quadrato della terza allora il triangolo è rettangolo.

Sesta fase
Si vuole dimostrare l'inverso del teorema di Pitagora.
L'insegnante invita gli studenti a disegnare un triangolo (per esempio il triangolo ACB della Figura 6) che abbia i lati con misure tali che:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

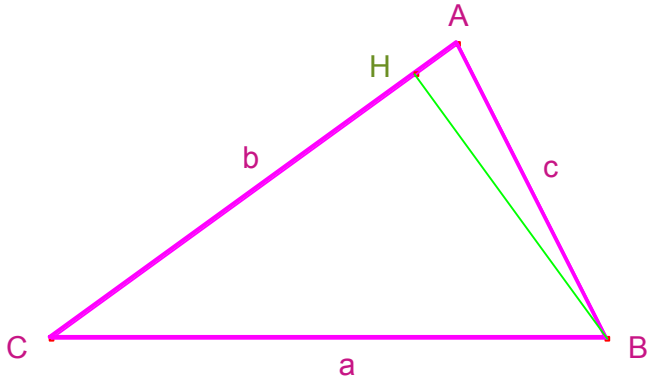


Figura 6

Se l'angolo in A formato dai lati minori non è retto (nella Figura 6 si suppone acuto), allora si può tracciare da uno dei vertici del lato più lungo (B) la perpendicolare al lato opposto (AC); si ottiene così un triangolo rettangolo (CBH), ma si viene a formare anche un triangolo rettangolo (AHB) in cui, applicando il teorema di Pitagora (dimostrato in precedenza), il cateto (BH) ha lunghezza uguale all'ipotenusa (AB) e questo non è possibile. L'angolo (in A) formato dai lati minori del triangolo dato deve essere retto.

Possibili sviluppi

I) Teorema di Pitagora sostituendo figure simili ai quadrati.

La proprietà espressa dal teorema di Pitagora è ulteriormente generalizzabile: non si verifica solo nel caso in cui vengano costruiti quadrati sui lati del triangolo rettangolo, ma vale anche in tutti quei casi in cui si costruiscono figure che hanno le aree proporzionali al quadrato del segmento su cui vengono opportunamente costruite. Ciò accade a figure tra loro simili come, per esempio, poligoni simili, poligoni regolari, parti simili di cerchio opportunamente costruite sui lati del triangolo rettangolo.

II) Terne pitagoriche.

Costruire triangoli rettangoli i cui lati abbiano come misura numeri naturali, ovvero guidare alla generazione di terne pitagoriche.

Origami, riga e compasso, software geometrico

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà.	Spazio e figure Argomentare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Disegno

Contesto
Regolarità e simmetrie nel piano.

Il contesto di riferimento per questa attività è quello scolastico della geometria elementare, ma anche quello di esperienze legate al piegamento della carta, all'osservazione di regolarità e simmetrie in oggetti del mondo reale e, quindi, un contesto anche determinato da esperienze di carattere empirico e percettivo.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. Nella prima vengono presentate due costruzioni con la piegatura della carta di un pentagono regolare (una approssimata e una, in teoria, esatta). Nella seconda fase viene presentata una costruzione del pentagono regolare con riga e compasso; nella terza la costruzione del pentagono regolare è effettuata in un ambiente di software di geometria. Tutte e tre le fasi vengono realizzate in un contesto di "apprendistato cognitivo", con l'insegnante che propone le costruzioni, evidenziando i momenti più significativi delle stesse e gli studenti che imparano osservando e imitando l'insegnante. L'obiettivo è quello di far nascere negli studenti la domanda "perché?", ossia l'esigenza di dimostrare perché una data costruzione funziona. In questo caso il ruolo della dimostrazione non è tanto quello di convincere che una costruzione è corretta, quanto quello di spiegare perché è corretta. L'insegnante può limitarsi a fornire alcune idee che evidenzino le caratteristiche delle costruzioni effettuate, preparando la strada per un approccio sistematico al problema di trovare la dimostrazione che potrà essere risolto solo nel secondo biennio.
Qui di seguito vengono presentate le tre fasi con una breve descrizione delle azioni che l'insegnante può compiere nella conduzione dell'attività.

Prima fase

Il pentagono da un foglio quadrato.

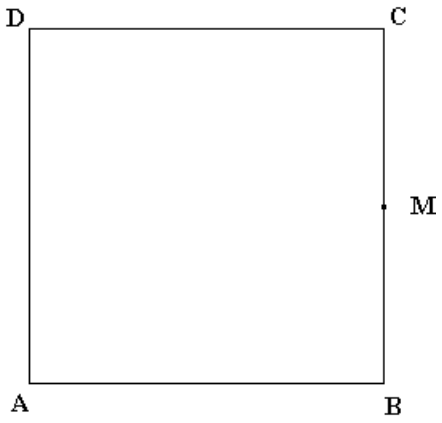


Figura 1

Quando mostro le operazioni di piegatura della carta non mi serve un linguaggio particolarmente curato. La comunicazione si basa sui gesti e i termini "questo" e "quello" abbondano. Quando invece voglio descrivere in un testo la costruzione, il linguaggio si deve precisare e diventa inevitabile introdurre notazioni.

La Figura 1 è un foglio quadrato: con gli allievi è interessante discutere sui modi possibili di "squadrare" un foglio qualsiasi. I vertici del quadrato sono indicati con lettere maiuscole. Il punto M è il punto medio del lato BC ottenuto piegando la carta in modo da far coincidere il vertice C con B.

Si piega il quadrato lungo la diagonale AC in modo da far coincidere i vertici B e D. Nelle notazioni dei testi di origami si usano simboli specifici per indicare l'orientamento delle pieghe (a valle, a monte …) di solito elencati in premessa. Qui può bastare la figura per rendere esplicito il tipo di piega richiesto (Figura 2).

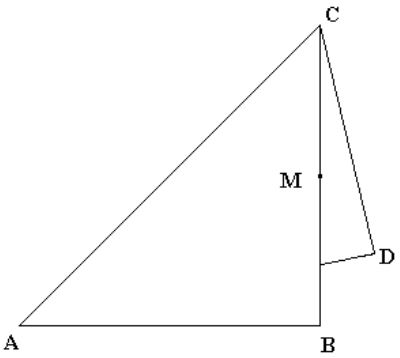


Figura 2

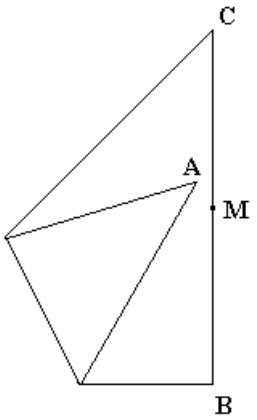


Figura 3

Portiamo ora il vertice A a coincidere con il punto M (Figura 3).

Pieghiamo il lato KM portando il vertice C verso il retro (Figura 4) e, successivamente, l'angolo HKM sul davanti in modo da sovrapporre la nuova piega con KC (Figura 5).

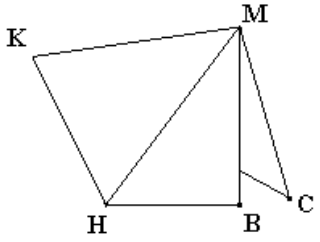


Figura 4

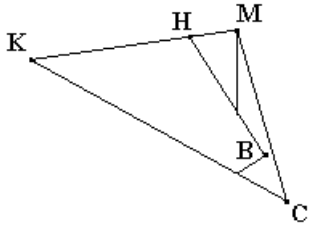


Figura 5

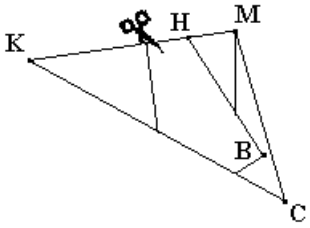


Figura 6

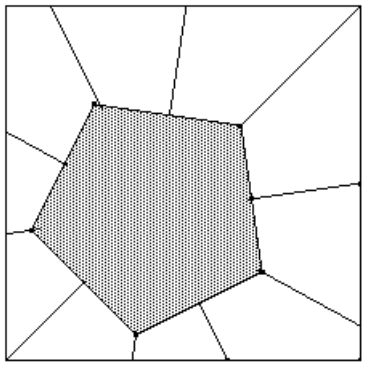


Figura 7

Dopo aver marcato una piegatura perpendicolare al lato KM (per far questo basta far coincidere nel piegare il triangolo KCM il lato KM con se stesso), la si ritagli come in Figura 6. Riaprendo il quadrato compare il pentagono in negativo (Figura 7); naturalmente il pentagono positivo è lo sviluppo del triangolo ritagliato.
Ma si tratta proprio di un pentagono regolare? La figura ottenuta lo sembra proprio, se si è fatta la costruzione con buona cura e usando un foglio di carta non troppo spesso.

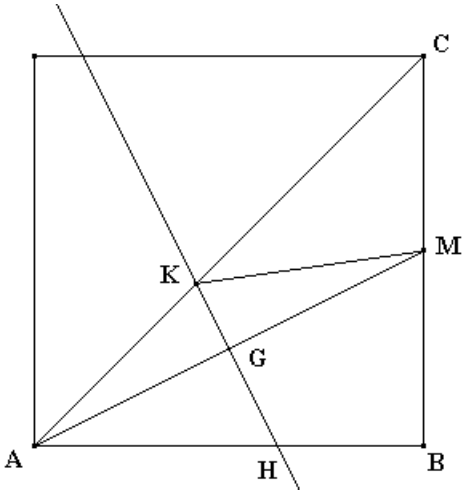


Figura 8

La costruzione non è esatta, anche se produce un "buon" pentagono la cui regolarità dipende piuttosto dalla cura con cui lo si costruisce.
Osserviamo la figura: M è punto medio di BC e la retta HK è asse del segmento AM (per costruzione). Gli angoli (uguali) AKG e GKM sono angoli al cento del pentagono e quindi dovrebbero misurare 72°.
Nel triangolo ABM, la tangente dell'angolo BAM è ½ e quindi l'angolo misura 26,5651°.
Per differenza, l'angolo GAC misura (45-26,5651)°=18,4346° e quindi AKG, suo complementare, è di 71,5651° con un errore inferiore al mezzo grado.

La dimostrazione del fatto che la costruzione non è esatta fa uso della trigonometria, dato che si calcola l'angolo con l'arcotangente, e quindi non è proponibile a questo livello scolastico, ma potrà essere ripresa come simpatica applicazione nel secondo biennio. Per ora ci si può accontentare di una verifica operativa. Dopo aver ritagliato il pentagono si può verificare subito se è "sufficientemente" regolare: si aprono il quadrato e il pentagono e si cerca di riposizionare la parte ritagliata nel foro. Si osserverà che le due figure combaciano solo in una posizione, mentre ci sarà una differenza anche marcata quando si ruota il pentagono.
Ecco ora una costruzione "teoricamente" esatta, ma che nella pratica può dare risultati meno apprezzabili della precedente: il pentagono dal nastro (striscia di carta a bordi paralleli).
Per ottenere il pentagono si annoda una striscia di carta come è descritto (in tre passi) dalle figure seguenti (nella prima è indicato con un tratteggio il pentagono obiettivo della costruzione).

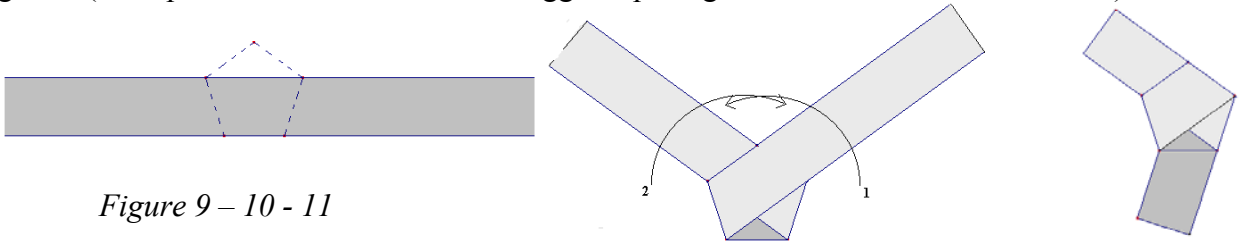


Figure 9 – 10 - 11

Seconda fase

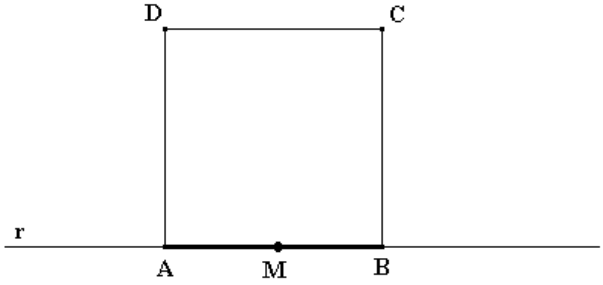


Figura 12

È dato il segmento AB; si costruiscono la retta r, il quadrato ABCD e M punto medio del segmento AM.

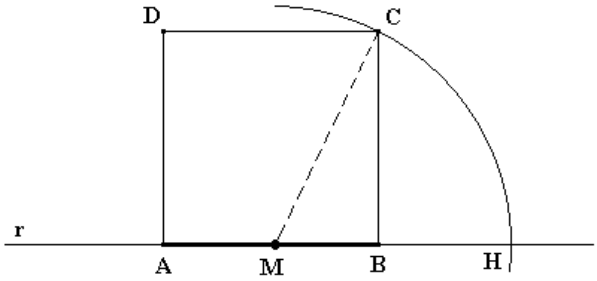


Figura 13

Puntando il compasso in M, con apertura MC, si porta la circonferenza ad intersecare la retta r in H.

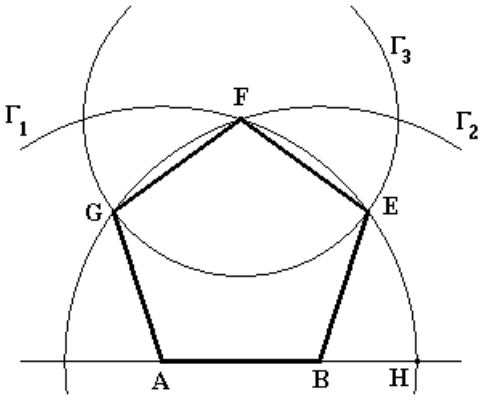


Figura 14

Con il compasso di apertura AH, si tracciano le circonferenze Γ_1 e Γ_2. Sia F il punto di intersezione delle due circonferenze.
Puntando in F, con apertura del compasso AB, si traccia la circonferenza Γ_3 che interseca le due precedenti nei punti E e G.
I punti A, B, E, F, G sono vertici di un pentagono regolare.

Anche in questo caso ci si ferma a livello operativo, lasciando la dimostrazione come esercizio da proporre nel secondo biennio quando saranno disponibili le equazioni di secondo grado.
Senza giungere a formalizzare la dimostrazione della costruzione, si può far osservare agli allievi il fatto che AB è "parte aurea" del segmento AH. Infatti, considerando la seconda figura di questa costruzione, possiamo esprimere le relazioni:

$$\overline{AH} = \overline{AM} + \overline{MH}, \quad \overline{BH} = \overline{AH} - \overline{AB}$$

$$\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2$$

Posto $\overline{AM} = x$, possiamo verificare che vale la relazione del "rapporto aureo" per AB su AH.

$$(x + x\sqrt{5}) : 2x = 2x : (x\sqrt{5} - x)$$

Da questo segue, per la costruzione fatta nella figura 14, che le diagonali del pentagono ABEFG, e cioè AE, AF, BF e BG sono uguali tra loro e hanno come "parte aurea" il lato AB.

Fase 3. Il pentagono con un software geometrico
La costruzione proposta parte da due punti: il centro della circonferenza circoscritta al pentagono e un vertice del pentagono.

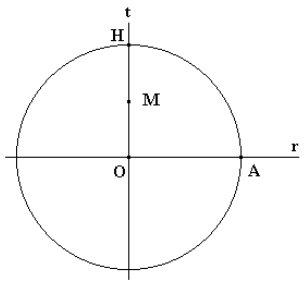


Figura 15

O è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono, A un suo vertice.
Si traccia la circonferenza di centro O e raggio OA.
Si disegna la retta r passante per OA.
Per O si porta la perpendicolare t ad r. La retta t interseca la circonferenza in H.
Si disegna il punto M, medio del segmento OH.

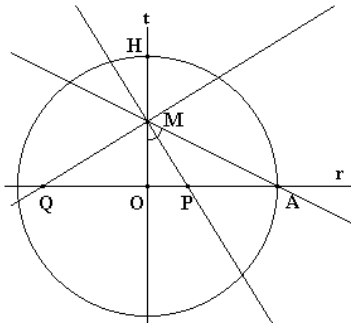


Figura 16

Si disegnano le bisettrici, interna ed esterna, dell'angolo OMA. Le due bisettrici intersecano la retta r nei punti P e Q.

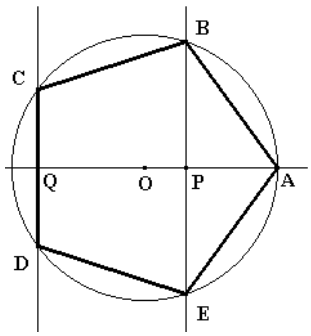


Figura 17

Per i punti P e Q si portano le perpendicolari alla retta r; queste intersecano la circonferenza nei punti B, C, D ed E. I punti A, B, C, D ed E sono vertici di un pentagono regolare.
La costruzione ora descritta può essere definita come procedura che, a partire da due punti dati, produce l'intera sequenza dei vertici. La procedura "pentagono" può essere usata per una prima conferma che il pentagono ottenuto è regolare: basta riapplicarla ai punti O e B e osservare che vengono nuovamente riottenuti gli stessi vertici.

Che cosa offre in più il software geometrico che non si può ottenere con le costruzioni manuali o con la riga e il compasso? L'esempio seguente mostra un'attività che non sarebbe possibile senza uno strumento che disegni "di colpo" un pentagono, dati centro e vertice.

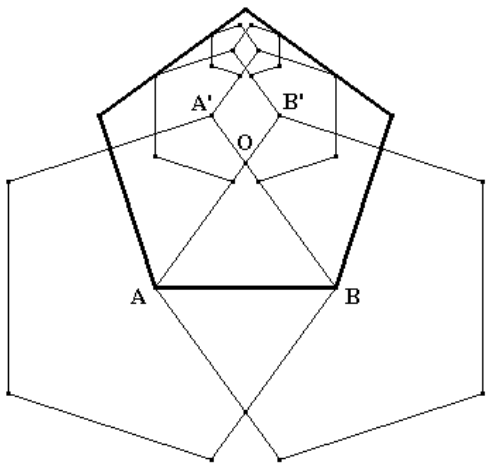


Figura 18

Si parte da due punti A e B. Si costruiscono i pentagoni "contrapposti" di centro A e vertice B e, viceversa, di centro B e vertice A. Nei due pentagoni costruiti si individuano i vertici A' e B' con i quali si ripete la costruzione. Il processo può essere ripetuto più volte: si ottengono due belle successioni di pentagoni che "convergono".
Ma, *sorpresa*, se prendiamo il punto O intersezione dei lati AB' e BA' e disegniamo il pentagono di centro O e vertice B, il pentagono ha lato AB e, soprattutto, *inscatola* le due sequenze di pentagoni.
Per questo livello scolare è sufficiente osservare e congetturare, ma la figura può essere un esercizio interessante sulle omotetie nel secondo biennio.

Possibili sviluppi

- Altri confronti tra costruzioni con piegatura della carta, con riga e compasso e con software di geometria.
- Cenni di dimostrazione di correttezza delle più semplici costruzioni proposte.
- Riflessioni sul ruolo della riga e del compasso come strumenti teorici nella geometria euclidea.

Elementi di prove di verifica

1. Poligoni con numero di lati pari a potenze di due

Dato un foglio di carta qualsiasi, piegare il foglio una volta, piegare di nuovo il foglio facendo coincidere la piega. Riaprire il foglio: come sono le due pieghe? Come mai?

Richiudere il foglio secondo le piegature; tagliare il foglio piegato in modo da ottenere un triangolo rettangolo, riaprire. Che figura geometrica si ottiene? Se a foglio ripiegato si taglia il triangolo rettangolo in modo che sia isoscele, quale figura si otterrà una volta aperto?

Con un foglio piegato come sopra, si piega nuovamente in modo che i due lati coincidano (angolo al vertice di 45°). Ritagliare perpendicolarmente ad uno dei due lati (in due modi) e in maniera da avere un triangolo isoscele. Quali figure si ottengono nei tre casi?

Come si può ottenere con la piegatura della carta un poligono di 16 lati? E di 32?

2. Quadrati e triangoli con riga e compasso

Costruire un quadrato con riga e compasso. Sempre con riga e compasso costruire un triangolo equilatero con lo stesso lato all'interno del quadrato. Sul lato adiacente del quadrato, costruire all'esterno del quadrato il triangolo equilatero di stesso lato. Tracciare la retta che passa per i vertici costruiti dei due triangoli equilateri: che cosa si osserva?

3. Il foglio punteggiato con un software geometrico

Dati due punti presi come estremi del lato di un quadrato, definire la procedura che costruisce gli altri due vertici.

Con questa procedura si costruiscano punti del piano a partire sempre da punti costruiti in precedenza. Come sono i punti ottenuti?

Problemi di minimo nel piano

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, …). Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	Spazio e figure Numeri e algoritmi. Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Geometria sintetica e analitica.

L'attività può essere svolta nel primo biennio alla fine del primo anno oppure agli inizi del secondo anno.
Gli strumenti di cui ci si avvale sono la carta e la riga, un software di geometria dinamica e le calcolatrici grafico-simboliche.
Lo studente per affrontare questa attività deve avere una adeguata conoscenza delle simmetrie assiali, delle traslazione, del piano cartesiano, e inoltre deve sapere tabulare numericamente una relazione tra due grandezze. L'obiettivo è quello di utilizzare le proprietà della simmetria assiale e di applicarla in un contesto concreto.

Descrizione dell'attività
Prima fase
L'insegnante distribuisce un foglio su cui sono disegnati una retta e due punti A e B situati nello stesso semipiano rispetto alla retta data, come mostrato nella Figura 1, gli studenti disegnano e misurano con il righello, ordinano numeri.

Consegna 1
Disegnare sulla retta i punti D, E, F, G, misurare la lunghezza delle spezzata ADB, AEB, AFB, AEG con un righello, ordinare le misure effettuate in modo crescente.

Figura 1

Dopo aver raccolto e ordinato le misure, gli studenti osservano che la lunghezza delle spezzate dipende dalla posizione del punto sulla retta e che si può scegliere tra i punti disegnati quello che rende minima la lunghezza della spezzata.

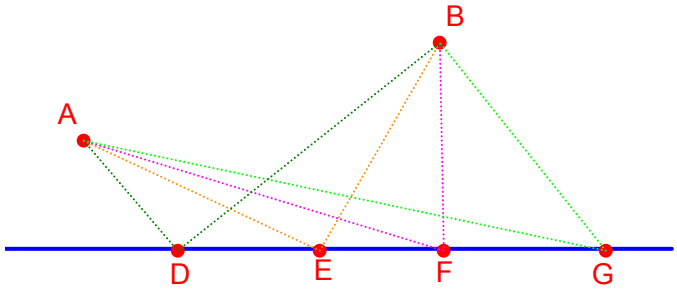
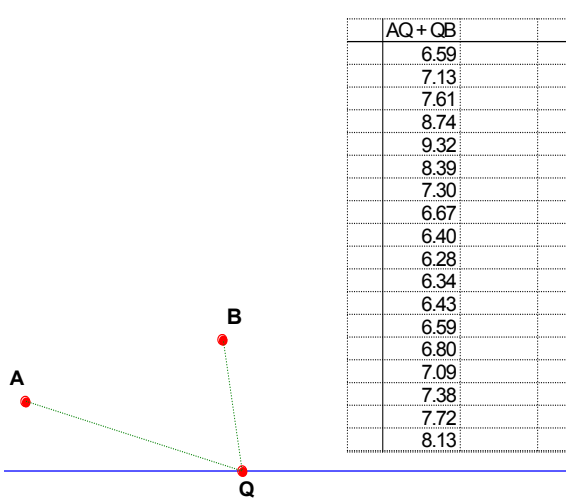


Figura 2

L'insegnante chiede a ognuno di comunicare il valore più piccolo trovato. I valori vengono scritti alla lavagna e si determina il valore più piccolo tra quelli comunicati.
Osservazioni. L'attività precedente permette agli studenti di riflettere sul significato di valore minimo, sulla possibilità di individuarlo tra gli elementi di un insieme finito e comprendere che il valore determinato può non essere quello cercato poiché i casi analizzati non esauriscono tutti i casi possibili.

Seconda fase
Gli studenti, divisi in gruppi, utilizzano tutti lo stesso disegno fatto con un software di geometria, tabulano i valori delle lunghezze dei percorsi sfruttando lo strumento "Tabella" del software di geometria oppure una calcolatrice grafico simbolica.
Consegna 2
Rappresentare i percorsi da A a B che toccano la retta nel punto Q, tabulare i valori trovati in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.
Gli studenti leggono la tabella per trarre informazioni (Figura 3), determinano il valore minimo tra quelli tabulati, inoltre, riescono a individuare graficamente la zona in cui il percorso ha lunghezza minima.
L'insegnante chiede agli studenti di rappresentare graficamente l'andamento della lunghezza dei percorsi.
Consegna 3
Costruire, con l'ausilio dello strumento "Luogo" del software di geometria, il grafico della variazione della lunghezza dei percorsi AQB in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.
Gli studenti costruiscono il luogo di punti, imparano a interpretare le informazioni date dal grafico, congetturano che esiste almeno un punto Q, sulla retta, corrispondente al percorso di minima lunghezza (Figura 4).



AQ + QB
6.59
7.13
7.61
8.74
9.32
8.39
7.30
6.67
6.40
6.28
6.34
6.43
6.59
6.80
7.09
7.38
7.72
8.13

Figura 3

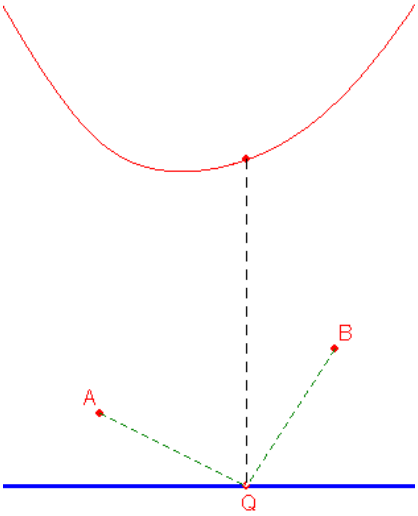


Figura 4

Terza fase

Realizzazione di un'esperienza concreta con gli specchi (per osservare la riflessione delle immagini sugli specchi piani e intuire la caratterizzazione geometrica del percorso di lunghezza minima).

Consegna 4

Analizzare con il software di geometria l'immagine che riproduce la riflessione di un foglio di carta sul quale sono disegnati due punti posto perpendicolarmente allo specchio. Tracciare e misurare i segmenti che uniscono i punti. Descrivere quello che si osserva.

Gli studenti osservano sulla riproduzione della foto quattro punti (Figura 5a), quelli disegnati sul foglio e quelli ottenuti come loro immagini nella riflessione.

Tracciano i segmenti che uniscono rispettivamente il punto A con il punto A', riflesso del punto A, e con il punto B', riflesso del punto B, e i segmenti che uniscono rispettivamente il punto B con il punto B', riflesso del punto B, e con il punto A', riflesso del punto A (Figura 5b).

La discussione porta gli studenti a osservare che:

- i segmenti AB' e A'B si intersecano in un punto P;
- i segmenti AA' e BB' sembrano essere perpendicolari al bordo del foglio appoggiato contro lo specchio;
- il punto P sembra appartenere all'asse di riflessione.

Inoltre, dopo aver misurato i segmenti, il punto P sembra essere equidistante da A e dal suo riflesso e così anche da B e dal suo riflesso.

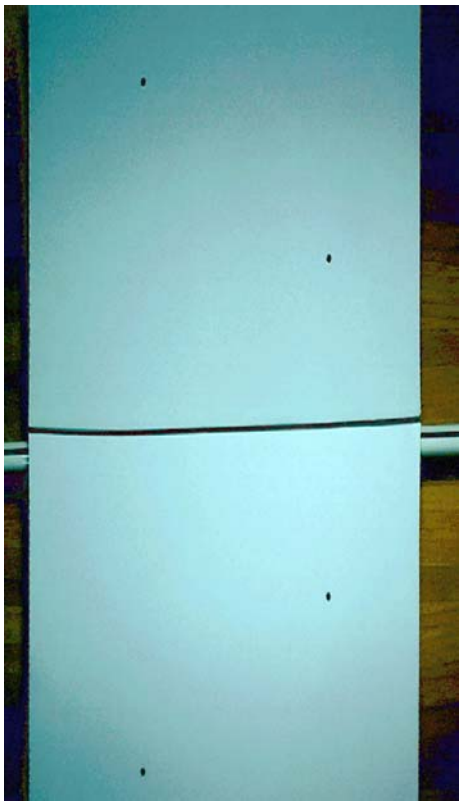


Figura 5a

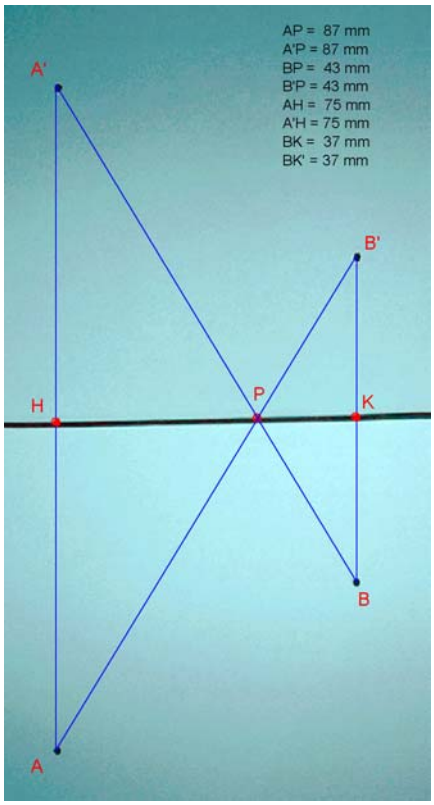


Figura 5b

Si termina con la formulazione della congettura che segue:
l'immagine ottenuta con lo specchio si può costruire mediante la simmetria assiale che ha per asse la retta che passa per P ed è perpendicolare ai segmenti AA' e BB'.

Quarta fase

Gli studenti rappresentano con il software di geometria quanto osservato nella consegna precedente (Figura 6a).

Consegna 5

Riprodurre con il software di geometria la configurazione dei punti A e B e dei loro riflessi A' e B'.

Quinta fase

Gli studenti riconoscono che APB è uno dei possibili percorsi che collega il punto A con il punto B. Individuano, con l'aiuto dell'insegnante, le proprietà che caratterizzano il punto della retta che rende minimo il percorso che collega il punto A al punto B toccando la retta.

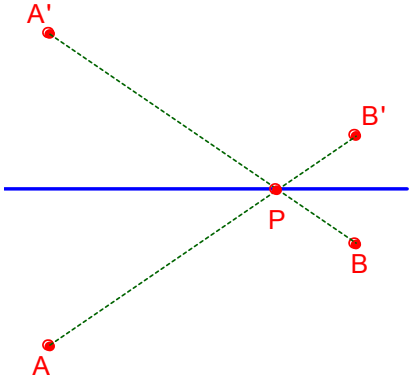


Figura 6a

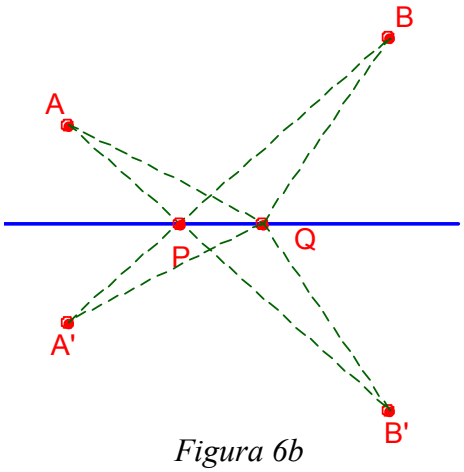


Figura 6b

Consegna 6
Prendere sull'asse di riflessione un punto Q diverso dal punto P e collegarlo con il punto A, con il punto B e con il punto B' (Figura 6b). Misurare il percorso APB, AQB, AQB'. Descrivere quello che si osserva.
Questa fase di congettura e scoperta permette agli studenti, servendosi della possibilità offerta dal software, di modificare la configurazione trascinando il punto Q. In questo modo individuano la proprietà che caratterizza la posizione del punto che rende minimo il percorso.
Congettura:
Il punto di minimo percorso corrisponde al punto P intersezione del segmento AB' con l'asse di riflessione.
Consegna 7
Dimostrare o confutare la congettura precedente.
Gli studenti utilizzano le conoscenze acquisite nel corso dell'attività per svolgere una dimostrazione in geometria.
Per le proprietà della simmetria assiale la lunghezza del percorso AQB' è uguale alla lunghezza del percorso AQB. Quindi il percorso APB è quello di lunghezza minima.
L'insegnante chiede agli studenti di confrontare le ampiezze degli angoli che l'asse di riflessione forma rispettivamente con il segmento AQ e con il segmento BQ.

Consegna 8
Misurare, con l'aiuto del software di geometria, l'angolo AQX e l'angolo AQY. Trascinare il punto Q sull'asse di riflessione (Figura 7). Descrivere quello che si osserva.

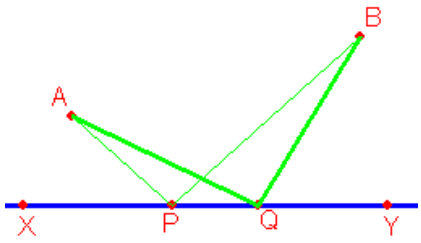


Figura 7

Gli studenti osservano che se Q coincide con P gli angoli sono uguali, formulano la seguente congettura: Gli angoli APX e BPY hanno la stessa ampiezza.
Consegna 9
Dimostrare o confutare che APX e BPY sono angoli uguali.
Gli studenti osservano nuovamente la costruzione fatta nella Consegna 6: l'ampiezza dell'angolo APX è uguale all'ampiezza dell'angolo XPA', in quanto corrispondenti nella simmetria assiale. Inoltre l'ampiezza dell'angolo XPA' è uguale all'ampiezza dell'angolo BPY perché angoli opposti al vertice. Ne segue che l'ampiezza dell'angolo APX è uguale all'ampiezza dell'angolo BPY.

Sesta fase

Gli studenti sono ora in grado di descrivere il fenomeno della riflessione in termini matematici
Consegna 10
Descrivere il fenomeno della riflessione rispetto a uno specchio piano.

Settima fase
Gli studenti descrivono con l'uso delle coordinate il percorso di minima lunghezza.

Consegna 11
Dato il punto A(0, 1) e B(1, 2) determinare il punto A' corrispondente di A rispetto alla simmetria il cui asse è l'asse delle ascisse. Scrivere l'equazione della retta *r* passante per i punti A e B.

Determinare il punto P di intersezione della retta *r* con l'asse *x*. Scelte a piacere le coordinate del punto A e del punto B, determinare le coordinate del punto P come nel caso precedente.
Gli studenti utilizzano la definizione sintetica di simmetria assiale e individuano le coordinate del punto A'.
Risolto questo problema, l'attenzione è rivolta alla strategia risolutiva; quindi, con l'aiuto di una calcolatrice grafico-simbolica, utilizzata come "scatola nera", determinano l'equazione della retta e il suo punto di intersezione con l'asse *x* (Figura 7a e Figura 7b).
Assegnati alle coordinate dei punti A e B nuovi valori, con le ordinate positive, ottengono, con l'istruzione della calcolatrice di "assegnazione di valore a una variabile", il ricalcolo dei vari passi.
Dopo questa attività, acquisita la consapevolezza della procedura di soluzione, gli studenti possono affrontare il caso generale.

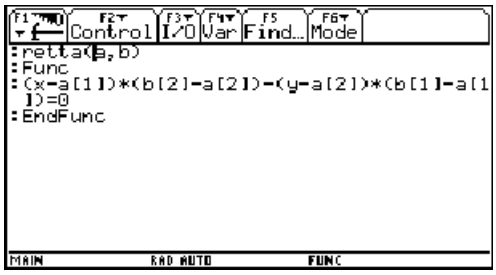


Figura 7a

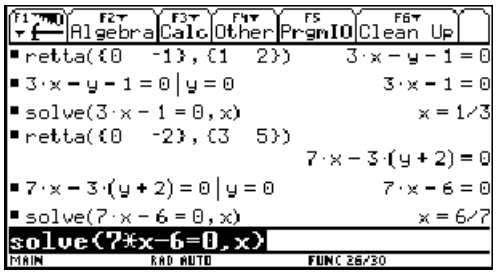


Figura 7_b

Consegna 12
Determinare le coordinate del punto P sull'asse delle ascisse che determina il percorso di minima lunghezza congiungente il punto A(a_1, a_2) al punto B(b_1, b_2). Descrivere l'algoritmo che ha come dato iniziale le coordinate dei punti A e B e come dato finale le coordinate del punto P.
Gli studenti traducono formalmente le scelte fatte nella consegna precedente: devono saper scrivere la condizione di appartenenza allo stesso semipiano dei punti A e B rispetto all'asse delle ascisse.
Risolto questo problema determinano, sempre con l'aiuto della calcolatrice grafica, l'ascissa del punto che individua il percorso di minima lunghezza tra A e B (Figura 8a) e discutono alcuni casi particolari (Figura 8b).

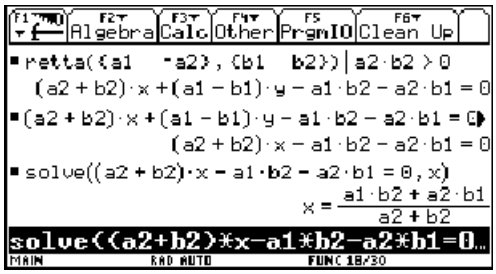


Figura 8a

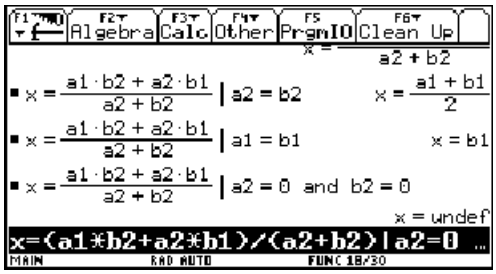


Figura 8b

Analizzano il caso in cui i punti A e B appartengono a semipaini opposti rispetto all'asse delle ascisse e determinano, anche in questo caso, l'ascissa del punto che individua il percorso di minima lunghezza.
A questo punto gli studenti, dopo aver acquisito padronanza sull'uso delle istruzioni condizionali "se … allora … altrimenti …" e sulla rappresentazione dei vettori di dimensione due, descrivono l'algoritmo per determinare il punto che rende minima la lunghezza del percorso (Figura 9a e Figura 9b).

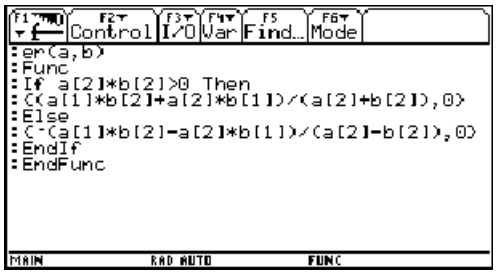


Figura 9a

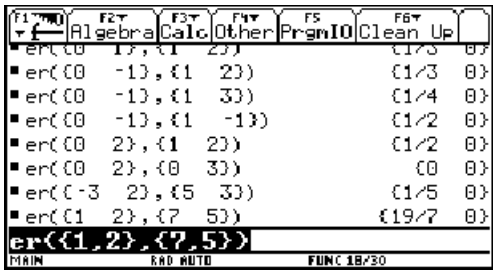


Figura 9b

Come approfondimento si può affinare l'algoritmo precedente aggiungendo l'analisi del caso in cui almeno uno dei due punti ha ordinata uguale a zero.

Possibili sviluppi

1. Date due località A e B da parti opposte rispetto alla riva di un fiume dall'andamento rettilineo, individuare dove collocare un ponte sul fiume in modo da rendere minima la lunghezza del percorso che collega la località A alla località B (Si suppone che le sponde siano parallele e che il ponte venga costruito perpendicolarmente alle sponde).
2. Date due rette *l*, *m* e due punti P ed S situati come nella Figura 10, determinare il percorso di minima lunghezza che va da P a S toccando prima la retta *l* e poi la retta *m*.

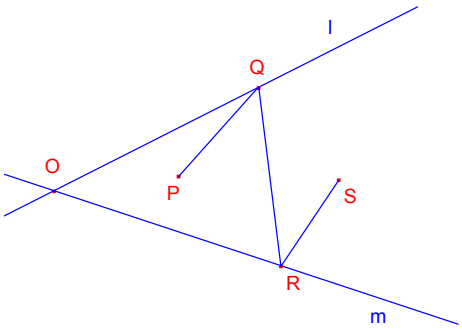


Figura 10

3. Determinare, fra tutti i triangoli PQR aventi l'area assegnata e un lato assegnato c = PQ, quello per cui è minima la somma degli altri lati a = PR e b = RQ.
4. Dati il triangolo acutangolo ABC, determinare i tre punti R, S e T, appartenenti ordinatamente ai suoi tre lati, in modo che il perimetro del triangolo RST sia minimo.

Simmetrie nei poliedri

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure. geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri. Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, …). Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. Simmetrie nei poliedri regolari.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Storia Scienze

Contesto
Figure del piano e dello spazio.

L'attività si colloca alla fine del primo biennio, quando gli studenti hanno già chiare le proprietà di simmetria delle figure nel piano. Il contesto è quello delle figure del piano e dello spazio. Infatti, dalle simmetrie dei poligoni nel piano si passa ad affrontare le proprietà di simmetria delle figure nello spazio.
Si indaga su come estendere, in forma intuitiva, ai poliedri le proprietà di simmetria dei poligoni fino ad arrivare ai concetti di piano di simmetria, di centro di simmetria, di asse di simmetria, di asse di rotazione. L'obiettivo è quello di far vedere come nello spazio non si possono trasferire automaticamente le proprietà studiate nel piano. Uno dei punti fondamentali dell'attività consiste nel giungere a una descrizione corretta e condivisa di poliedro regolare.
Attraverso questo lavoro gli studenti affinano le loro capacità di visione nello spazio tridimensionale in modo non "separato" da quanto è stato già visto nel piano.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Costruzione di modelli fisici di solidi (cartoncino, cannucce, …), che possono avere o non avere proprietà di simmetria.
Gli studenti sono invitati a costruire, con strumenti diversi, alcuni dei poliedri più semplici (prisma retta a base regolare, piramide regolare, cubo, ottaedro regolare, tetraedro regolare,…) che poi verranno analizzati dal punto di vista delle simmetrie.
Si può anche procedere, nei casi più semplici, alla visualizzazione di poliedri tramite riflessioni su specchi o combinazioni di specchi (caleidoscopio tridimensionale).
Si chiede ora agli studenti di individuare, fra tutte le configurazioni (connesse) che si possono ottenere affiancando 6 quadrati, lato contro lato, quelle che rappresentano possibili sviluppi di cubo.

Si chiede ad esempio di esaminare la figura 1 e di scegliere quelle che possono rappresentare lo sviluppo piano di un cubo.

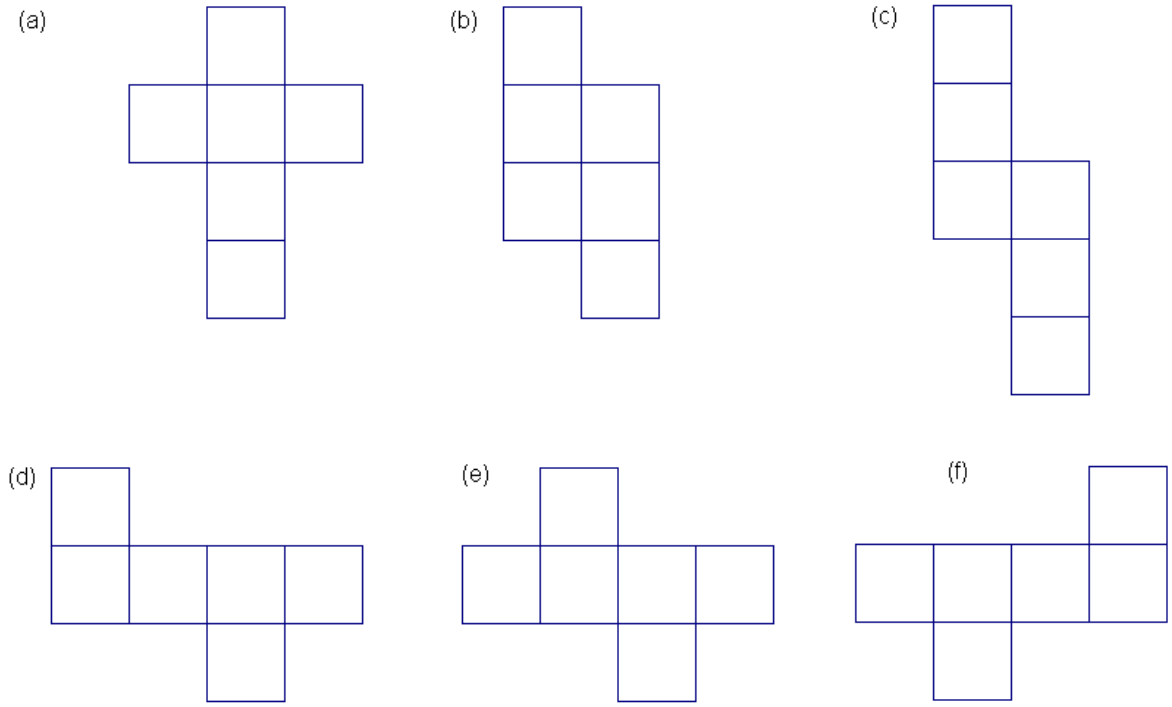


Figura 1

Si passa, quindi:
- alla discussione su cosa si debba intendere per "sviluppi diversi";
- alla discussione sui pregi di questo o di quell'altro sviluppo;
- a colorare con lo stesso colore, a partire dal disegno di uno sviluppo piano del cubo, le coppie di spigoli che nella ricostruzione vanno a coincidere.

<u>Seconda fase</u>
Riconoscimento di simmetrie in oggetti tridimensionali.
Si svolge una discussione sulle osservazioni fatte in classe e ci si avvicina gradualmente, facendole emergere da osservazioni concrete, alle definizioni di piano di simmetria, centro di simmetria, asse di rotazione, asse di simmetria (ci si può avvalere di modelli fisici, software di geometria o di figure tridimensionali prelevate dalla rete,…) a partire da casi semplici: cubo, tetraedro regolare, ottaedro regolare,…

<u>Terza fase</u>
Determinazione di assi, piani e centri di simmetria.
In questa fase sarà richiesto di determinare tutti gli assi di simmetria del cubo; la stessa domanda si può fare per i piani di simmetria e per il centro di simmetria, scoprendo legami tra i vari movimenti che trasformano in sé il poliedro; nello stesso modo si indaga su altri semplici poliedri: ottaedro regolare, tetraedro regolare,… (Figura 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8).

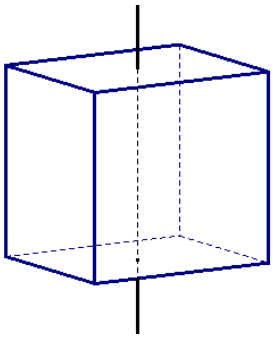


Figura 2

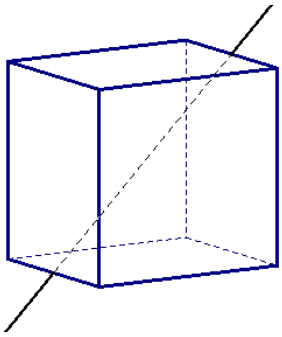


Figura 3

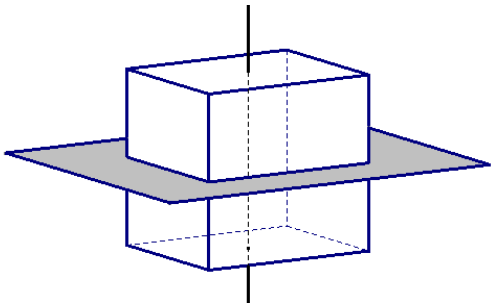


Figura 5

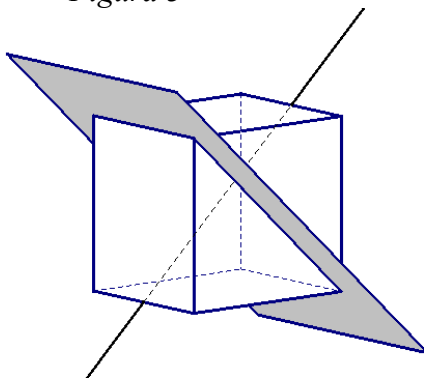


Figura 6

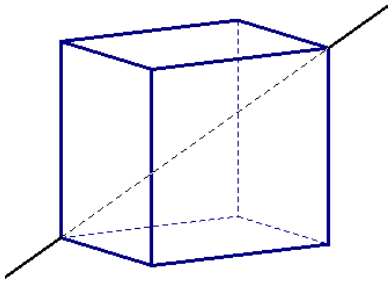


Figura 7

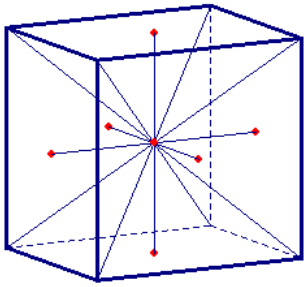


Figura 8

Quarta fase

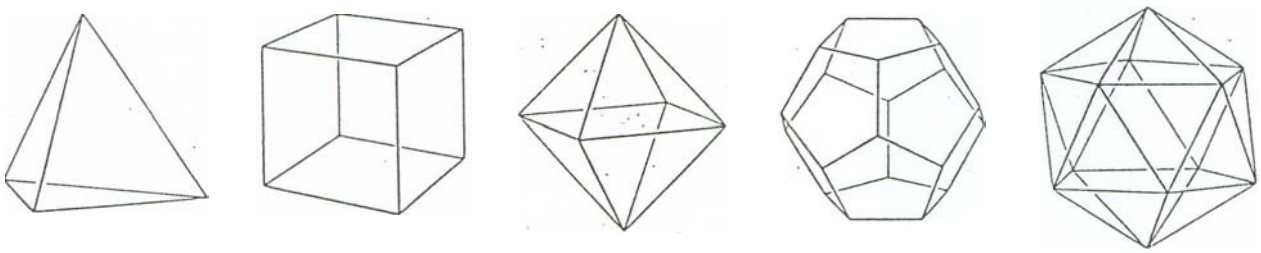
Descrizione dei poliedri regolari.

In questa fase, dalle osservazioni precedenti si arriva alla descrizione dei poliedri regolari, in modo che la definizione venga "costruita" attraverso un percorso di tipo intuitivo e osservativo. Non è il caso, in questo momento, di dare una definizione formale di poliedro regolare, con il rischio di un apprendimento puramente meccanico.

Si possono anche esaminare le relazioni tra il cubo e l'ottaedro regolare che ha i vertici nel centro delle facce del cubo e scoprire che le simmetrie trovate per il cubo sono le stesse dell'ottaedro regolare. In questo modo, si ha il vantaggio di poter estendere le proprietà di simmetria di un poliedro a quello del poliedro duale. Analoghe considerazioni si possono fare, come possibile approfondimento, per il dodecaedro regolare e l'icosaedro regolare. Si può fare anche notare che il tetraedro ha come duale se stesso.

Possibili sviluppi

1. Conteggio del numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di vari poliedri (in presenza o in assenza di un modello fisico). Come approfondimento ulteriore si può proporre un'attività per arrivare, in forma intuitiva, alla formula di Eulero (o di Cartesio-Eulero).



Tetraedro regolare | Cubo | Ottaedro regolare | Dodecaedro regolare | Icosaedro regolare

Figura 9

Si può chiedere inizialmente di completare la seguente tabella mediante l'osservazione di modelli fisici di poliedri regolari.

Poliedro	Tetraedro regolare	Cubo (esaedro regolare)	Ottaedro regolare	Dodecaedro regolare	Icosaedro regolare
Numero delle facce*: F*					
Numero degli spigoli: *S*					
Numero dei vertici: *V*					

Dopo aver completato la tabella, cercare una relazione tra *F*, *V*, *S* per questi solidi.

2. Si può anche arrivare, in modo intuitivo, a rispondere alla seguente domanda: perché esistono solo cinque tipi di poliedri regolari? Inizialmente si prende in considerazione il vertice di un poliedro regolare e si fa osservare che in ogni vertice convergono almeno tre facce; si può chiedere agli studenti qual è la somma degli angoli che convergono nello stesso vertice. Una volta osservato che tale somma è sempre minore di un angolo giro si possono esaminare le varie situazioni possibili.
   Un approfondimento storico da proporre: i solidi platonici.
3. Individuazione dei tipi di figure geometriche che si possono ottenere sezionando un cubo mediante un piano.
4. Quali, tra i poliedri regolari, consentono un riempimento dello spazio? (Si deve ipotizzare di riempire completamente, senza lasciare "buchi", tutto lo spazio, usando un solo tipo di poliedro regolare). Discutere la domanda e scrivere tutto quello che si è pensato.
5. Quali poligoni regolari si possono ottenere sezionando un cubo con un piano?
6. Quali poliedri ammettono un centro di simmetria?
7. Considerare un cubo di spigolo *l*. Individuare il minimo cammino sulla superficie cubica per andare dal vertice A al vertice opposto E (vedi figura 12).
8. Quante sono le direzioni e quante le giaciture individuate rispettivamente dagli spigoli e dalle facce di un ottaedro regolare. (Per rispondere conviene pensare i sei vertici dell'ottaedro come i centri delle facce di un cubo, come in figura 10).

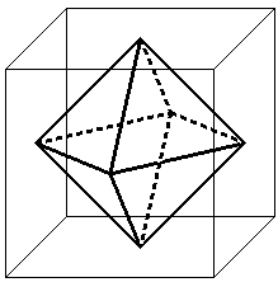


Figura 10

Elementi di prove di verifica

1. Qui a fianco è disegnato un cubo in assonometria. Il cubo ha uno spigolo di 8 cm. Lo si taglia in due prismi retti, sezionandolo secondo il piano DBFH. Disegnare, con le dimensioni reali, la faccia DBFH comune a questi due prismi.

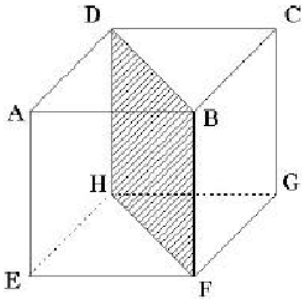


Figura 11

2. Costruire un tetraedro regolare ABCD in cartoncino oppure usando cannucce da bibita. Immaginando di congiungere in tutti i modi i centri delle facce, descrivere il poliedro che si ottiene.

3. Si seziona il cubo disegnato in Figura 12 con il piano passante per i vertici B, C, D.

a) Di che tipo è il triangolo BCD? Perché?
b) Che tipo di poliedro è quello individuato dai vertici B, C, D, E? Perché?
c) Se I e J sono i punti medi dei segmenti BC e BD allora la retta IJ è parallela alla retta CD? Perché?
d) Di che tipo è il triangolo AIB? Perché?

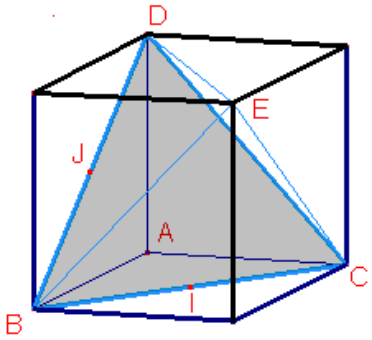


Figura 12

4. Si considera un cubo ABCDEFGH. Il punto I è il punto di intersezione dei segmenti [FC] e [GB].
Il punto J è il punto di intersezione dei segmenti [HF] e [EG].
Rispondere alle seguenti domande.

- Il triangolo EGB è rettangolo in G?	V	F
-·Il triangolo IAJ è isoscele?	V	F
- Il triangolo AEJ è rettangolo in E?	V	F
- Il triangolo AEJ è isoscele?	V	F

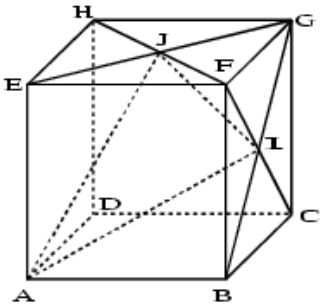


Figura 13

5. Disegnare uno sviluppo piano di uno dei solidi che si ottengono sezionando un cubo con un piano diagonale (Un piano diagonale è un piano che passa per le diagonali parallele di due facce opposte o, se si preferisce, per due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia).

6. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un cubo?

7. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un ottaedro regolare?

8. Disegnare uno sviluppo piano della piramide ABCD ottenuta a partire da un cubo, come illustrato in figura 14.

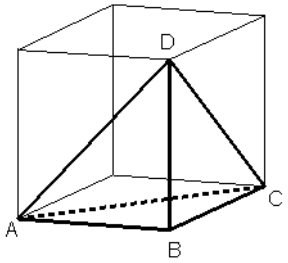


Figura 14

9. Nella figura 14, si disegni il centro di simmetria O del cubo e la piramide simmetrica di ABCD rispetto a O.

Le circonferenze di Fermat

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili.	Spazio e figure. Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Configurazioni geometriche del piano.

Questa attività può viene proposta nel primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle configurazioni geometriche del piano.
Gli strumenti di cui avvalersi sono un software di geometria che permette agevolmente di esplorare le varie proprietà relative alla circonferenza e dei poligono inscrivibili. È necessario che gli studenti conoscano le proprietà dei triangoli e sappiano utilizzare un software di geometria.
Si propone dunque un approccio per problemi (problem solving) in ambito matematico e si pone particolare attenzione anche al modo in cui inizialmente viene posto il problema. Questo verrà affrontato in forma "aperta" (problem posing), in modo da suscitare una motivazione consapevole all'ascolto e una predisposizione ad un apprendimento attivo da parte dello studente.

Descrizione dell'attività
L'attività procede a partire delle proprietà angolari relative alla circonferenza fino ad affrontare, nell'ultima fase, il teorema sulle circonferenze di Fermat.

Prima fase
Si propone agli studenti di esplorare le proprietà di alcune figure costruite usando un software di geometria. Viene data la seguente
Consegna 1
Disegnare due punti A e B, un triangolo equilatero di lato AB, la circonferenza c ad esso circoscritta, il suo centro O, un punto P sulla circonferenza c e le corde AP e BP.
Cosa possiamo dire sull'ampiezza dell'angolo APB?
Gli studenti con l'ausilio del software misurano l'ampiezza di APB, muovono il punto P sulla circonferenza e notano che l'angolo APB misura 120° oppure 60° (Figure 1 e 2).
Gli studenti sono guidati a formula la seguente congettura:
Dato un triangolo equilatero ABC e dato un punto P sulla circonferenza ad esso circoscritta, si ha che l'angolo APB misura 120° oppure 60°.
Ciò va dimostrato o confutato. Si è di fronte ad un problema didattico significativo: l'insegnante deve far notare agli studenti che ciò che il software geometrico visualizza non è una dimostrazione.

In altre parole ci si deve rendere conto che il software geometrico ha permesso solo di formulare una congettura, ma non di dimostrare un teorema. Perché la congettura si trasformi in un teorema è necessario fornirne una dimostrazione.
Nelle fasi successive viene fornita la dimostrazione.

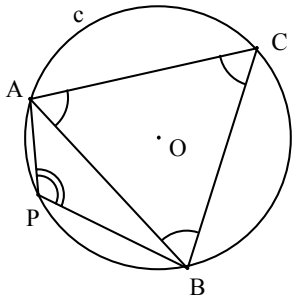


Figura 1

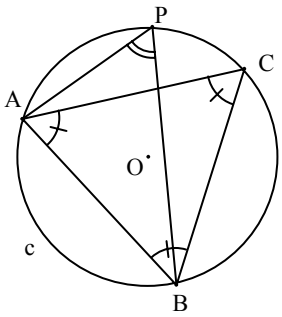


Figura 2

Seconda fase
Si affronta l'analisi del seguente problema:
Consegna 2. Imporre al punto P di appartenere, anziché a tutta la circonferenza c, all'arco della circonferenza c delimitato da A e B non contenente il punto C.
Cosa si può dire sugli angoli formati dalla diagonale AB del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?
Disegnare la diagonale PC del quadrilatero APBC.
Cosa si può dire sugli angoli formati dalla diagonale PC del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?
Gli studenti osservano che la diagonale AB forma con i lati del quadrilatero APBC gli angoli BAC e ABC, i quali misurano 60° (sono angoli di un triangolo equilatero), e gli angoli BAP e ABP, i quali hanno misura variabile al variare del punto P (gli studenti misurano gli angoli avvalendosi del software). Misurano quindi gli angoli APC e CPB, facendo muovere il punto P sull'arco AB considerato. Notano che tali angoli misurano sempre 60° e formulano la seguente congettura:
Sia dato un triangolo equilatero ABC e la sua circonferenza circoscritta c. Sia P un punto dell'arco di circonferenza AB non contenente C. La diagonale PC del quadrilatero APBC è bisettrice dell'angolo APB.
Viene fornita la dimostrazione di tale congettura.
Gli studenti osservano che, invece, la stessa diagonale PC non è bisettrice dell'angolo ACB. Infatti la misura dell'angolo ACP cresce da 0° a 60° quando il punto P si muove da A a B. La misura dell'angolo BCP invece decresce contemporaneamente da 60° a 0° (Figura 3).

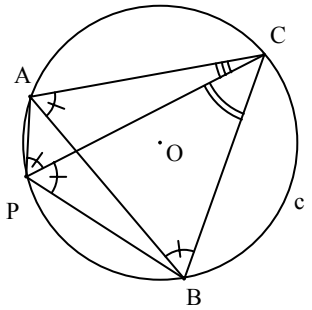


Figura 3

Gli studenti notano, infine, che gli angoli ACP e BCP sono uguali se e solo se il punto P coincide con il punto D simmetrico di C rispetto ad O.

Dimostrano quanto hanno osservato in precedenza.
Si è così dimostrato il seguente teorema:
Sia dato un triangolo equilatero ABC e la sua circonferenza circoscritta c. Sia P un punto dell'arco di circonferenza AB non contenente C. Allora la diagonale CP del quadrilatero APBC è bisettrice dell'angolo APB, qualunque sia il punto sull'arco considerato, mentre è bisettrice dell'angolo ACB se e solo se il punto P coincide con il punto D, simmetrico di C rispetto ad O.

Terza fase

Gli studenti passano quindi a esaminare il caso particolare in cui PA è uguale a PB, quindi P ≡ D.
Consegna 3. Nella Figura 3 sostituire il punto P con il punto D simmetrico di C rispetto a O.
Disegnare il quadrilatero ADBC e le sue diagonali. Disegnare i segmenti AO e OB.
Cosa si può dire sui triangoli AOD e BOD?
Cosa si può dire sulle distanze del punto D dai vertici del triangolo ABC?
Dalla misure risulta che i triangoli AOD e BOD sono equilateri.

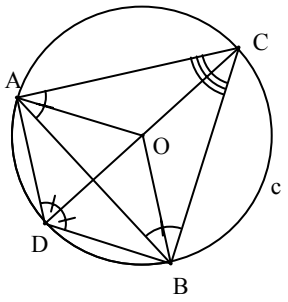


Figura 4

Si ha quindi il seguente teorema:
Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza ad esso circoscritta, O il suo centro e D il punto simmetrico di C rispetto a O. Allora i triangoli AOD e BOD sono equilateri.

Dal teorema precedente segue immediatamente che i triangoli ABD e ACO sono uguali, quindi

$$DC = DO + OC = DA + DB.$$

Si è così dimostrato che:
Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza circoscritta ad esso, O il suo centro e D il punto di c simmetrico di C rispetto ad O. Si ha allora: DC = DA+DB.

Quarta fase

Si propone agli studenti di tentare una generalizzazione del precedente teorema ponendo il seguente problema:
Consegna 4. Il precedente teorema può essere generalizzato al caso in cui il punto D sia sostituito da un qualsiasi punto appartenente all'arco della circonferenza c, delimitato dai punti A e B e non passante per il punto C?
Non ci sono a prima vista elementi per confutare o dimostrare l'affermazione del problema.
Gli studenti, aiutandosi con il software, possono misurare le distanze del punto P da A, da B e da C, al variare del punto P sull'arco.
Si può, per esempio, ottenere la Figura 5.

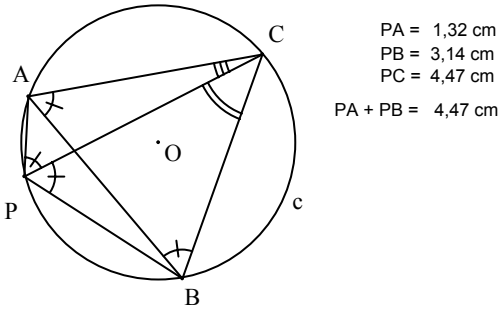


Figura 5

Sommando le misure di PA e di PB e confrontando il risultato con la misura di PC si ottiene lo stesso valore. È facile vedere che tale relazione continua a valere al variare del punto P sull'arco considerato.
È bene sottolineare ancora una volta che tutto ciò che si è osservato con il software non è sufficiente a enunciare una proprietà generale senza averne dato una dimostrazione.
In questo caso la dimostrazione non è assolutamente facile.
Consegna 5. Dimostrare che per qualunque punto P sull'arco AB considerato si ha PC = PA + PB. (Viene dato il seguente suggerimento: considerare il triangolo equilatero APP' con P' interno alla circonferenza).

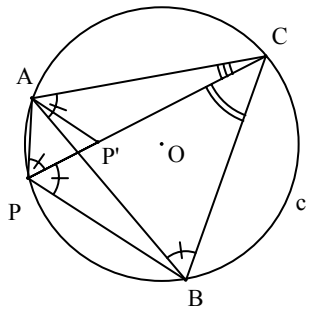


Figura 6

Nonostante il suggerimento, non sempre gli studenti riescono a rispondere alla consegna data. L'insegnante può allora fornire, ad esempio, la seguente dimostrazione:
Per costruzione si ha AP = PP'. Se si riesce a dimostrare che si ha PB = P'C, si deduce:

$$PC = PP' + P'C = PA + PB,$$

che è quel che si vuole dimostrare.
In effetti, dalla Figura 6 appare che i triangoli APB e AP'C sono uguali.
La dimostrazione di ciò è semplice: essi hanno uguali due lati (AP = AP' e AB = AC) e i tre angoli (ABP = ACP' perché insistono sullo stesso arco e APB = AP'C perché entrambi misurano 120° l'angolo AP'C è supplementare dell'angolo AP'P).
L'appartenenza di P' al segmento PC, più volte assunta, è giustificata dal fatto che gli angoli APC e APP' misurano entrambi 60°.
In tal modo si è dimostrato il seguente teorema:
Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza ad esso circoscritta e sia P un punto appartenente all'arco di estremi A e B non contenente C, allora:

$$PC = PA + PB\ .$$

Quinta fase
A questo punto si può affrontare il seguente problema sulle circonferenze di Fermat.

Consegna 6. Dato un triangolo ABC, costruire sul lato AB il triangolo equilatero ABR esterno al triangolo e la circonferenza c_1 ad esso circoscritta; ripetere la stessa operazione sul lato BC e sul lato AC. Si ottengono i triangoli equilateri BCP e ACQ e le circonferenze c_2 e c_3 ad essi circoscritte. Quali proprietà suggerisce la figura?
Le circonferenze c_1, c_2 e c_3 sono dette circonferenze di Fermat.

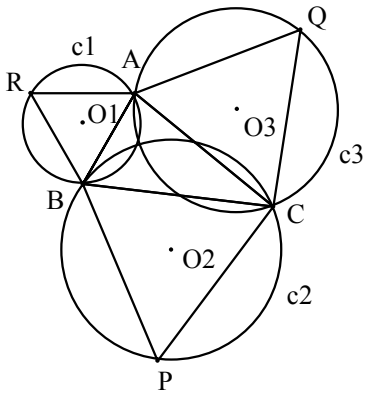


Figura 7

Utilizzando gli strumenti messi a disposizione dal software di geometria, gli studenti osservano che le tre circonferenze sembrano intersecarsi in un punto. Si enuncia pertanto la congettura:
Le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto (Figura 7).
Naturalmente tale affermazione va dimostrata.
Può anche accadere che l'evidenza della figura spinga gli studenti a dare per scontato che le tre circonferenze si intersechino in un punto e a non formulare pertanto la congettura precedente.
In tal caso è l'insegnante a proporre di dimostrare o confutare la congettura prima enunciata.
Una possibile dimostrazione consiste nel considerare le circonferenze c_1 e c_2. Esse si intersecano nel punto B e in un punto che chiamiamo F (Figura 8). Si vuole dimostrare che il punto F appartiene anche alla circonferenza c_3 circoscritta al triangolo equilatero ACQ. In altre parole si vuole dimostrare che il quadrilatero FCQA è inscrivibile in una circonferenza.

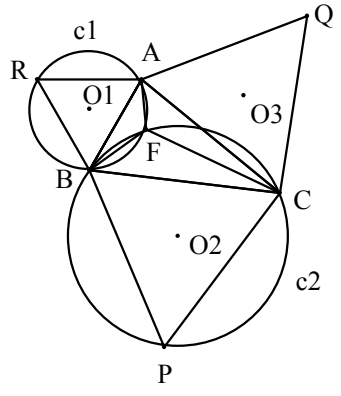


Figura 8

Si nota che in questo caso i punti F e Q si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e C. Pertanto si deve dimostrare che l'angolo AFC misura 120°. In effetti, l'angolo AFC misura 120° perché gli angoli AFB e BFC, per come sono stati costruiti, misurano 120°.
A prima vista appare che la congettura sia stata dimostrata: le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto. Questa è anche la prima risposta degli studenti. Ma se si riguarda con attenzione la dimostrazione effettuata, si comprende che essa si basa sul fatto che gli angoli AFB e

BFC misurino 120° e che i punti F e Q si trovino in semipiani distinti rispetto alla retta passante per A e C. Ciò sicuramente avviene quando F è interno al triangolo ABC. Si è pertanto dimostrato il seguente teorema:
Se il punto F, punto di intersezione di c_1 e c_2 distinto da B, è interno al triangolo ABC, allora esso appartiene anche alla circonferenza c_3. Le tre circonferenze di Fermat si intersecano quindi in uno stesso punto.

Possibili sviluppi

1. Individuare e studiare il caso in cui il punto di Fermat è esterno al triangolo (Figura 9).

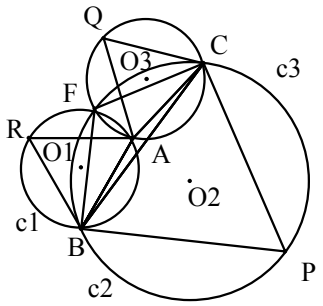


Figura 9

2. (Teorema di Napoleone) Dato un triangolo ABC, costruire sui lati ed esternamente ad esso i triangoli equilateri di lato AB, BC e CA. Osservare le proprietà del triangolo individuato da O_1, O_2 e O_3, centri delle circonferenze di Fermat.
3. Dato un triangolo con gli angoli minori di 120°, un punto P interno al triangolo, trovare la posizione del punto P che rende minima la somma delle sue distanze dai vertici.

Alla ricerca del rettangolo più bello

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine e descrivere le figure con la terminologia specifica. Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini.	Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze. Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia.	Spazio e figure Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Musica Scienze Disegno

Contesto
Trasformazioni geometriche nel mondo reale.

Questa attività viene proposta nel secondo biennio, all'inizio della classe terza. Il contesto è quello delle trasformazioni geometriche nel mondo reale. Gli strumenti di cui avvalersi sono, oltre ad un software di geometria, immagini e fotografie di edifici, di costruzioni antiche e moderne, …Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle trasformazioni isometriche del piano, delle similitudini e delle equazioni di secondo grado. L'obiettivo principale dell'attività è quello di riconoscere in contesti reali - arte, architettura, tecnica - figure simili e di individuare negli strumenti della tecnica (computer, software, stampanti, fotocopiatrici, macchine fotografiche,…) le applicazioni delle similitudini.

Descrizione dell'attività
Prima fase
Viene proposta un'analisi preliminare dei formati dei fogli di quaderni, libri, fogli da disegno, fogli di formato A4 (il "formato A4" ha le dimensioni di 210 mm x 297 mm.), … Si calcola il rapporto tra i due lati delle forme rettangolari considerate. La stessa attività viene proposta studiando le facciate di alcuni monumenti ed edifici storici, come per esempio, il frontone del *Partenone* di Atene (Figura 1), l'*Arco di Costantino* a Roma, ….

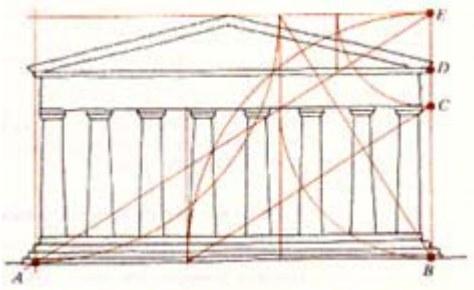


Figura 1

Dopo questa analisi si focalizza l'attenzione degli studenti sul quadrato, sul foglio A4 e sul rettangolo aureo (il rettangolo aureo ha uno dei lati uguale alla sezione aurea dell'altro).
Inizialmente si consegna agli studenti una scheda dove sono disegnati una decina di rettangoli di forma diversa, tra i quali almeno un "rettangolo A4", un quadrato e un rettangolo aureo.
Si chiede di individuare, tra i rettangoli disegnati nella scheda, quello ritenuto di aspetto più gradevole e si discutono in classe le risposte ottenute, che sono di tipo diverso, supportate da motivazioni talvolta oggettive, talvolta di tipo personale.

Seconda fase

Con la grande diffusione delle stampanti e delle fotocopiatrici, siamo abituati al foglio A4; ma qual è la storia del foglio A4 e, soprattutto, perché si usa un tale formato di carta piuttosto di altri formati?
Un foglio A4 è un rettangolo costruito in modo che piegandolo a metà rispetto al lato maggiore si ottiene un altro rettangolo simile a quello di partenza che viene indicato come foglio A5. Se si raddoppia un foglio A4, affiancandone due per il lato più lungo, si ottiene il foglio A3 simile al foglio A4 (Figura 2).

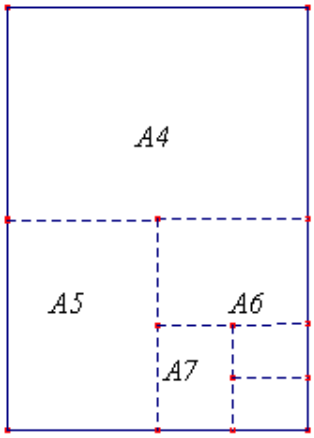


Figura 2

Chiamato a il lato maggiore e x il lato minore di un rettangolo, si vuole determinare il rapporto tra a e x in modo che piegando il foglio secondo la linea tratteggiata di Figura 3 si ottenga un rettangolo simile a quello dato. Ciò si traduce nella seguente proporzione:

$$a : x = x : \frac{a}{2}.$$

Da cui si ottiene: $\frac{a}{x} = \sqrt{2}$.

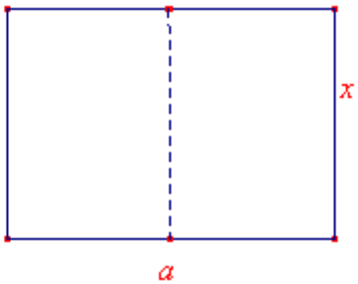


Figura 3

Quindi in un foglio A4 il rapporto tra i lati dovrebbe essere $\sqrt{2}$.
Eseguendo il rapporto tra le lunghezze dei lati (297 mm x 210 mm) si ottiene: 1,4142857….che è un'approssimazione di $\sqrt{2}$ con quattro cifre decimali esatte, $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373\ldots$

In molte fotocopiatrici il massimo dell'ingrandimento lineare ottenibile è di 1,41%. Si chiede agli studenti di provare a motivare questo fatto.
Il foglio A3 ha per dimensioni 297 mm e 420 mm.

Terza fase

La sezione aurea e il rettangolo aureo: un'applicazione della similitudine.

Per introdurre la sezione aurea, in una classe terza di scuola secondaria superiore, si può partire da un rettangolo e ritagliare da esso un quadrato (Figura 4). Se il rettangolo "rimasto" è simile a quello di partenza allora quello iniziale è detto "aureo". Per ragioni misteriose viene considerato il rettangolo più "bello" anche se attualmente siamo più abituati al formato A4 piuttosto che al rettangolo aureo.

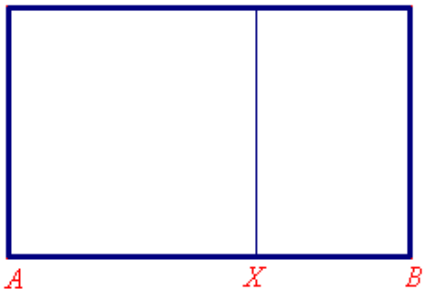


Figura 4

Il rapporto tra il lato maggiore e il lato minore di questo rettangolo si dice "rapporto aureo" (in inglese, "golden ratio"; in francese "nombre d'or"). Il *rapporto aureo* di solito è indicato con la lettera greca *tau* τ. Il matematico Luca Pacioli (circa 1445-1509) ha chiamato tale rapporto *divina proportione* e, ispirato da Piero della Francesca (circa 1416 - 1492), ha scritto su di esso un trattato dal titolo *De divina proportione* (1509).

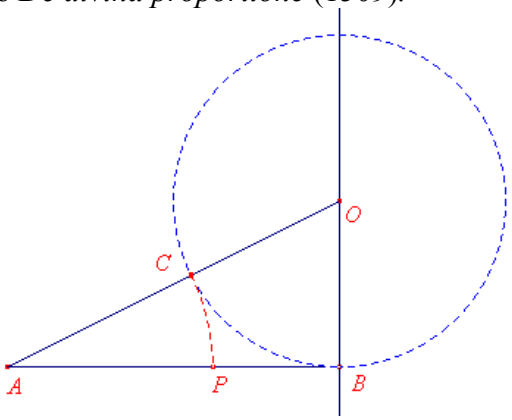


Figura 5

Nella figura 5 è indicata la costruzione della sezione aurea di un segmento AB:

- si traccia la perpendicolare ad AB per B;
- si prende il punto O in modo che OB sia la metà di AB;
- si traccia la circonferenza di centro O e raggio OB;
- si congiunge O con A;
- si interseca OA con la circonferenza e si trova il punto C;
- si riporta OC su AB, trovando il punto P.

La sezione aurea di AB è AP.

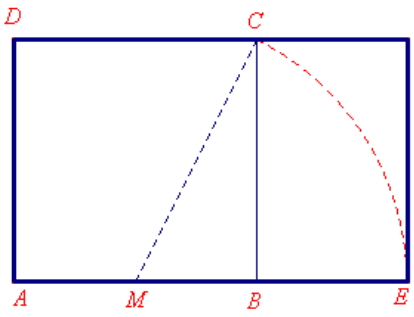


Figura 6

Nella figura 6 è rappresentata la costruzione di un rettangolo aureo a partire da un quadrato iniziale di lato AB (costruzione detta di Leon Battista Alberti, 1404-1472).
Considerato il quadrato di lato AB, si disegna il punto medio M di AB. Con apertura del compasso AB, si riporta a partire da M il segmento MC sul prolungamento di AB, ottenendo il punto E.
AB è la sezione aurea di AE.

La costruzione della figura 5 si trova negli *Elementi* di Euclide e rappresenta la soluzione geometrica della equazione

$$x^2 = a(a-x)$$

ottenuta dalla proporzione:

$$a : x \;=\; x : (a-x),$$

la quale esprime la similitudine tra il rettangolo di partenza (di lato maggiore *a*) e quello che rimane togliendo un quadrato (di lato *x*).
Se poniamo $a = 1$, si ottiene l'equazione quadratica:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

la cui radice positiva è il numero cercato

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Un rettangolo in cui il lato minore sia la sezione aurea dell'altro lato si chiama "rettangolo aureo". Il rapporto *a/x* (Figura 4) del rettangolo aureo è il numero:

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,61803398...$$

Quindi $x = \frac{1}{\tau}$.

Dall'equazione $x^2 + x - 1 = 0$, si ottiene: $x^2 + x = 1$, ovvero: $x + 1 = \frac{1}{x}$, che fornisce la notevole proprietà: $1 + \frac{1}{\tau} = \tau$ (*).

Moltiplicando per τ, si ottiene: $\tau + 1 = \tau^2$ e ancora

$$\tau^2 + \tau = \tau^3$$
$$\tau^3 + \tau^2 = \tau^4$$
$$\ldots\ldots$$

cioè ogni potenza ad esponente intero di τ è somma delle due potenze precedenti. Qui osserviamo una proprietà che "assomiglia" a quella che definisce la celebre successione dei numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ….. .
Con sorpresa si scopre che in realtà vi è un legame più stretto con la successione dei numeri di Fibonacci. Si può anche fare osservare, mediante una esplorazione numerica, che il rapporto tra due numeri di Fibonacci successivi, al crescere di *n*, tende al rapporto aureo, ovvero: $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \tau$, dove F_n è l'ennesimo numero di Fibonacci.
La relazione (*) è rappresentata nella figura del rettangolo, dove l'altezza del rettangolo aureo è unitaria, la base *AB* misura τ e il segmento *XB* misura 1/τ. Questa relazione ci dice che se si toglie un quadrato da un rettangolo aureo, il rettangolo rimasto è ancora aureo. Continuando si può ottenere la Figura 7 e la spirale "quasi aurea" della Figura 8 (formata da archi di circonferenza).

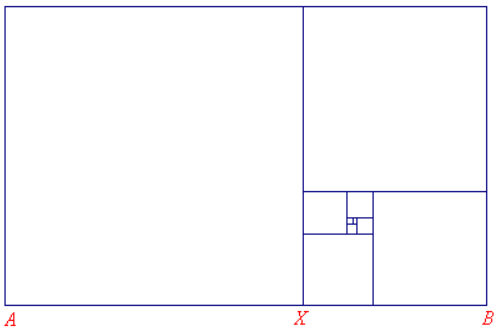


Figura 7

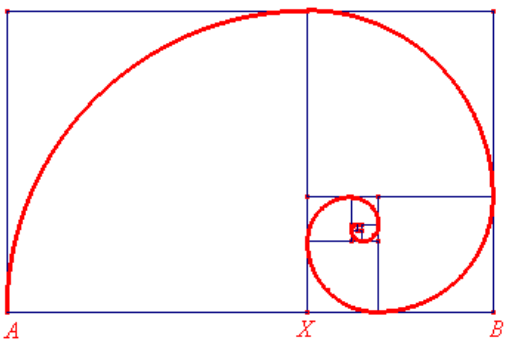


Figura 8

Quarta fase

Si dimostra che il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta (Figura 9 e Figura 10). Se r è la misura del raggio della circonferenza, allora la misura del lato del decagono regolare inscritto è:

$$l_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2} \ .$$

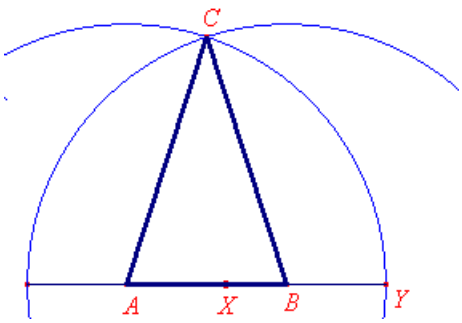


Figura 9

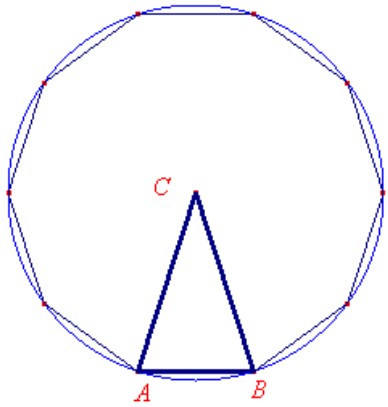


Figura 10

Determinato il lato del decagono regolare, si può costruire il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza.

Il lato del pentagono regolare è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza circoscritta al pentagono e la sua sezione aurea (lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza).

Si possono proporre le seguenti costruzioni:

1. Data una circonferenza costruire il pentagono regolare inscritto nella circonferenza. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare il seguente teorema: il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza e la sezione aurea del raggio.
2. Dato il segmento AB costruire il pentagono regolare di lato AB. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare la seguente proprietà: il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea della sua diagonale

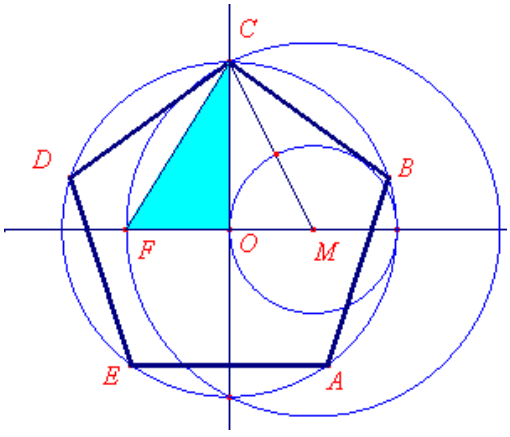


Figura 11

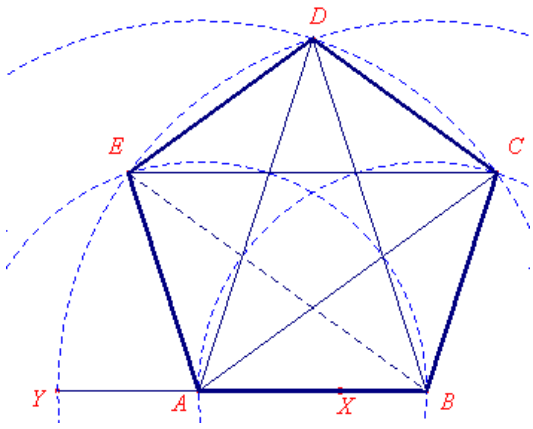


Figura 12

Possibili sviluppi

1. Il pantografo.
   Si illustra l'azione del pantografo (sarebbe bene portarne uno in classe).
   Si considerano due semirette di origine il punto O. Si considera un poligono e un punto P su di esso. Il punto P descrive il contorno della figura da ingrandire; nel punto P' si mette una matita. Si ottiene un ingrandimento tramite una omotetia.

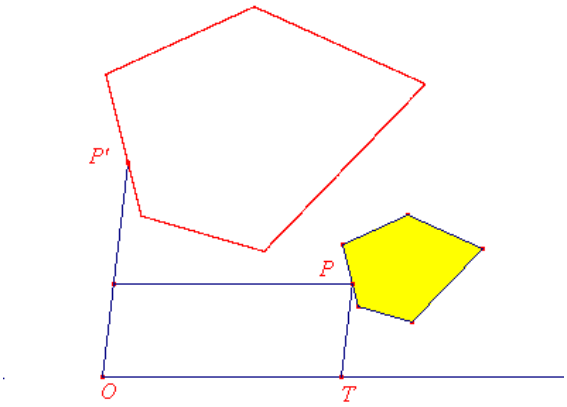


Figura 13

2. Il triangolo dei punti medi.
   Si consideri il triangolo avente per vertici i punti medi MNQ dei lati del triangolo ABC. Tale triangolo ha lo stesso baricentro G del triangolo ABC. Il baricentro G è il centro di una omotetia. Trovare il rapporto di omotetia.

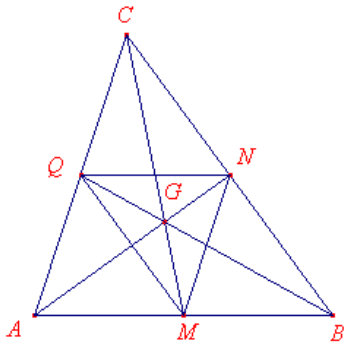


Figura 14

3. La media geometrica.
   Dati due segmenti di misura a e b si vuole costruire un segmento di lunghezza x in modo che il quadrato costruito su esso sia equivalente al rettangolo di lati i segmenti dati: si ha: $x = \sqrt{ab}$. Il modo più facile di eseguire la costruzione è di utilizzare il secondo teorema di Euclide, come nella figura indicata di seguito.

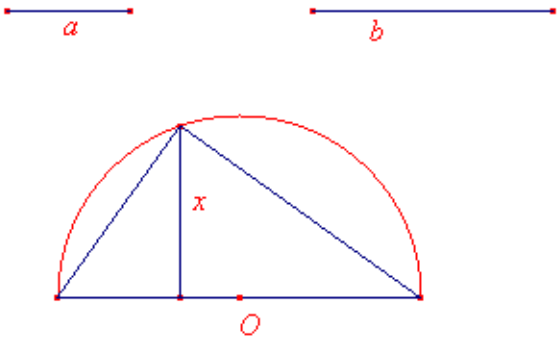


Figura 15

Tutte le parabole sono simili?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini. Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze. Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia. Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	Spazio e figure Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Coniche e trasformazioni geometriche.

L'attività viene proposta per il 2° biennio, all'inizio della quarta classe. Strumento privilegiato per svolgere il lavoro previsto è un software di geometria che permette facilmente di costruire e visualizzare le coniche, in particolare le parabole. Il contesto è quello delle coniche e delle trasformazioni geometriche.
Prerequisiti necessari sono la conoscenza delle isometrie, delle similitudini, del piano cartesiano e delle equazioni delle coniche in opportuni sistemi di riferimento.
Si è quindi in un contesto matematico e si propone un'attività in cui si evidenzia come l'intuizione, che pure è alla base della scoperta di molti concetti matematici, talvolta può indurre in affermazioni errate.
In questa attività si utilizzano le funzionalità del software per una verifica immediata di una proprietà che inizialmente non è così evidente dal punto di vista intuitivo; successivamente si convalida l'affermazione mediante una verifica analitica.

Descrizione dell'attività

Prima fase
Viene proposta una scheda preliminare che contiene varie figure: poligoni, circonferenze, figure mistilinee e alcune parabole.
Si chiede agli studenti di individuare se tra quelle proposte esistono figure simili. Gli studenti, probabilmente individueranno dei poligoni simili, … e diranno che le circonferenze sono tutte simili. L'insegnante proporrà alla discussione il caso delle parabole, che non è affatto evidente.
Nella figura 1 sono rappresentate alcune parabole che hanno lo stesso vertice e lo stesso asse, collocate nello stesso semipiano rispetto alla retta tangente nel vertice. Nella scheda si chiede agli studenti se queste parabole hanno la stessa "apertura" (qui usiamo in modo informale il termine

"apertura"; alla fine dell'attività si dovrebbe invece discutere e mettere in crisi questa concezione intuitiva).

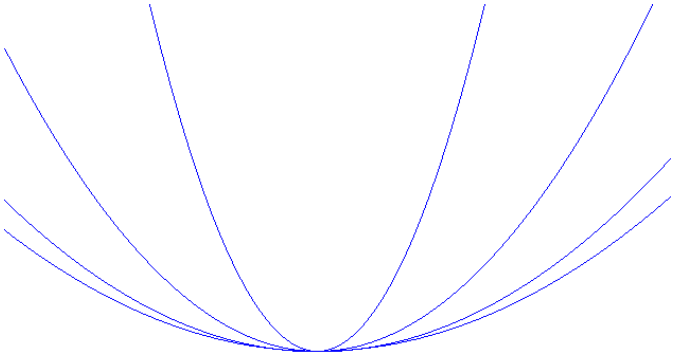


Figura 1

Seconda fase

Si prende in considerazione il caso in cui le due parabole sono disposte in modo qualunque nel piano. E' sempre possibile, mediante un'isometria, ricondurle ad avere vertici coincidenti e ad appartenere allo stesso semipiano rispetto alla comune tangente nei vertici. Si discutono le osservazioni degli allievi emerse nella scheda proposta nella fase 1. L'attività prosegue con l'ausilio di un software di geometria: si propone la Figura 2 e si chiede di individuare l'isometria che trasforma le parabole come descritto precedentemente.

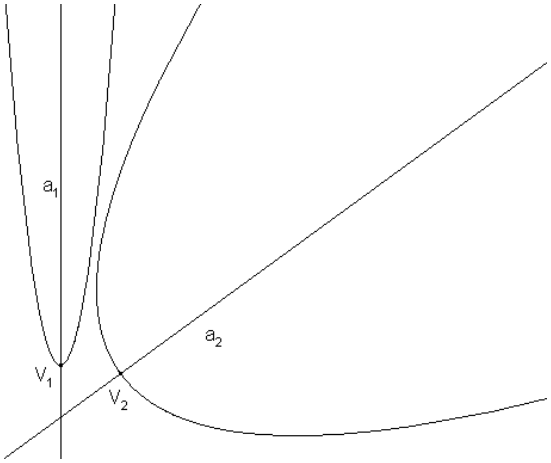


Figura 2

Si chiede ora agli studenti di verificare analiticamente che le due parabole si possono ottenere una dall'altra mediante una omotetia avente come centro l'origine degli assi e rapporto da determinare. Con lo strumento "verifica proprietà", presente nel software di geometria, si "scopre" che il segmento P_1Q_1 è parallelo a P_2Q_2, per ogni coppia di rette passanti per il vertice O (Figura 3).
Introducendo un sistema di assi cartesiani di origine coincidente con il vertice e asse delle ordinate coincidente con l'asse delle parabole, considerata una generica retta passante per il punto O, questa interseca le parabole nei punti P_1 e P_2. Si verifica che il rapporto $\frac{OP_2}{OP_1}$ è costante e non dipende dalla retta scelta. Questo dimostra che due generiche parabole sono tra loro simili.
Il calcolo può essere eseguito usando un programma di manipolazione simbolica. Chiamate $y = a_1x^2$ e $y = a_2x^2$ le equazioni delle due parabole, intersecando con una generica retta $y = mx$, si ottiene:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a_1 x^2 \end{cases}$$

che fornisce i punti O e P_1, con $P_1\left(\frac{m}{a_1}, \frac{m^2}{a_1}\right)$.

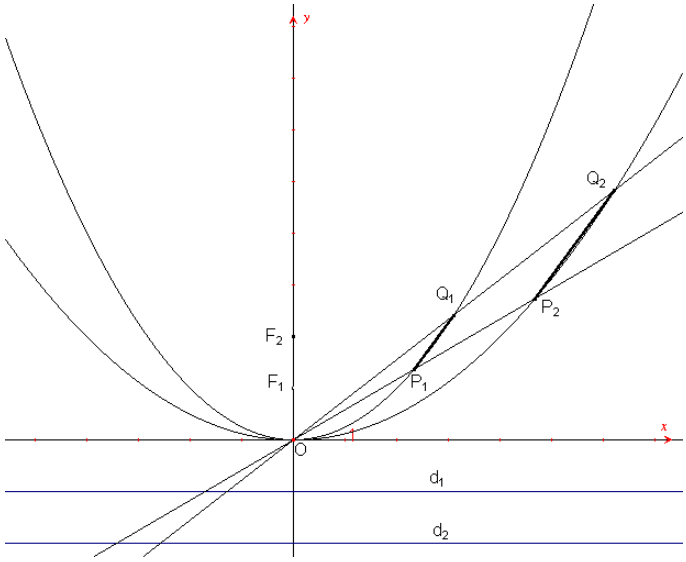


Figura 3

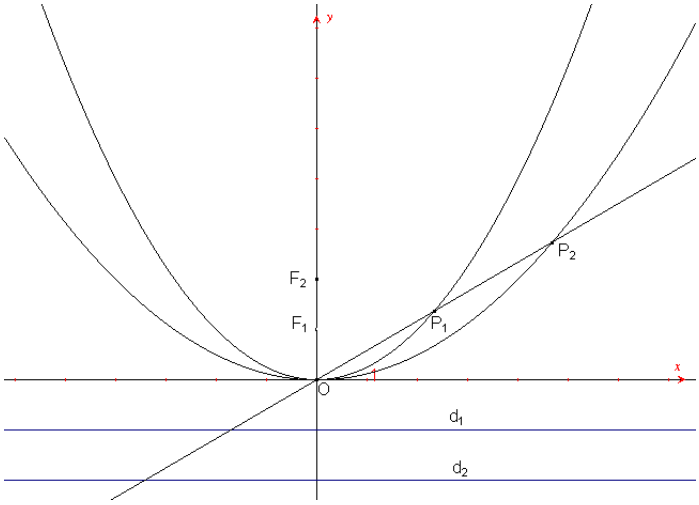


Figura 4

Analogamente, intersecando la seconda parabola con la stessa retta si ottiene:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a_2 x^2 \end{cases}$$

che fornisce i punti O e P_2, con $P_2\left(\frac{m}{a_2}, \frac{m^2}{a_2}\right)$.

Si arriva, dopo alcuni calcoli, alla relazione:

$$\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Quindi le due parabole sono omotetiche e il rapporto di omotetia vale $\frac{a_1}{a_2}$.

Il calcolo tuttavia contrasta con l'osservazione della Figura 1. Per ottenere una figura che sia "convincente" anche dal punto di vista intuitivo occorre prendere in considerazione la Figura 5, nella quale sono disegnate le due parabole, i fuochi e per ciascuna parabola il *lato retto*, cioè la corda della parabola ottenuta intersecando la parabola con la retta perpendicolare all'asse e passante per il fuoco. Nella Figura 5, il lato retto della prima parabola è A_1B_1 e quello della seconda parabola è A_2B_2. I due triangoli OA_1B_1 e OA_2B_2 sono omotetici.

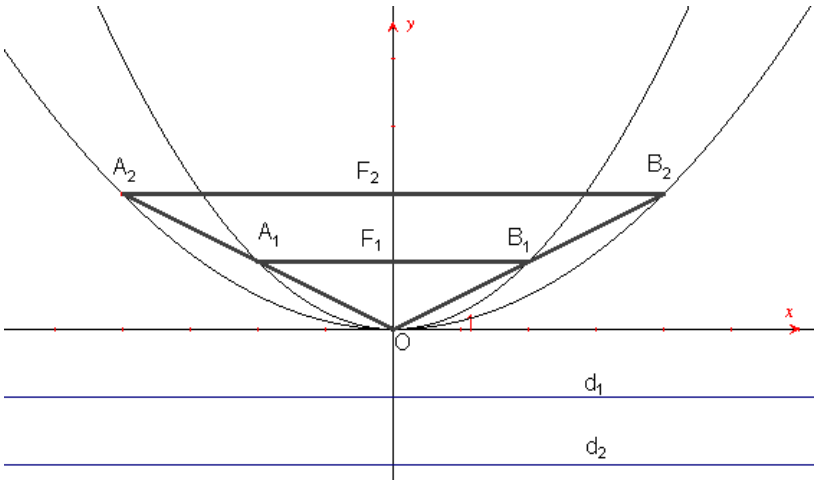


Figura 5

Possibili sviluppi

Si analizza rispetto alla similitudine il caso dell'ellisse e dell'iperbole. Ci si può soffermare, in particolare, sulle iperboli equilatere e scoprire che anche queste sono tutte simili tra loro (Figura 6).

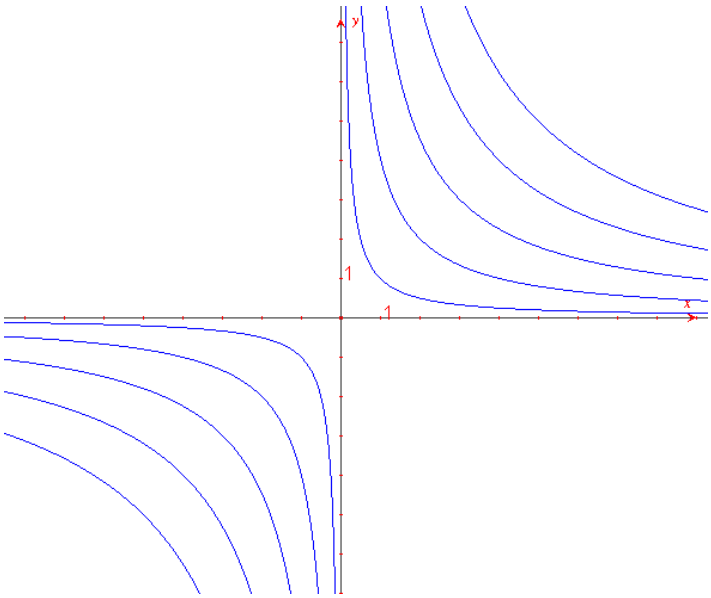


Figura 6

Possiamo infine porre le seguenti domande:

- Quando due ellissi sono simili? (Figura 7)
- Quando due iperboli sono simili? (Figura 6)

La discussione può essere svolta facendo uso di un software di geometria.

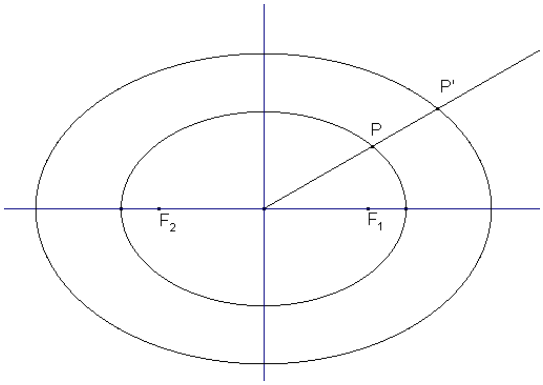


Figura 7

Per una risposta completa alle domande poste, occorre introdurre la nozione di eccentricità di una conica.

Le coniche come luoghi: un percorso costruttivo

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia Disegno Storia dell'arte Fisica Astronomia

Contesto
Dalle coniche come sezioni e come luoghi alle loro equazioni.

L'attività è proposta per il primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle coniche e delle trasformazioni geometriche.
Strumento privilegiato per svolgere il lavoro previsto è un software di geometria, che permette facilmente di costruire e visualizzare le coniche.
Prerequisiti necessari sono la conoscenza delle equazioni di primo e di secondo grado, del piano cartesiano e dell'equazione della retta.
Il contesto iniziale è quindi quello matematico, ma nello sviluppo dell'attività è possibile stabilire significativi collegamenti con la Fisica, l'Astronomia e Storia dell'arte.
Con l'aiuto del software di geometria viene proposto un percorso costruttivo che è basato sulla rivalutazione, anche nello studio delle coniche, degli aspetti intuitivi e di geometria sintetica in modo che queste curve non siano viste dagli studenti soltanto come particolari equazioni.

Descrizione dell'attività
Prima fase
Nello studio della geometria analitica accade spesso che l'aspetto sintetico delle figure venga messo da parte, dando una netta prevalenza al metodo analitico. Questo si verifica in particolare per il tema delle coniche nel quale prevale, già all'inizio, l'aspetto analitico, fino a "nascondere" quasi del tutto le proprietà geometriche di queste curve.
Un software di geometria, per la facilità che permette nel tracciare le coniche, può consentire di recuperare questo aspetto geometrico molto importante che tra l'altro storicamente è stato il primo. Questa impostazione evidenzia meglio le proprietà delle coniche e rivaluta le costruzioni sintetiche, oltre a rendere conto del nome dato a queste curve. In tale contesto gli allievi quindi possono operare meglio una sintesi tra il metodo analitico e quello della geometria sintetica, che costituisce la particolarità della geometria analitica.
Le potenzialità del software geometrico permettono di presentare in modo costruttivo e dinamico, come se si avesse a disposizione una "macchina matematica", tali proprietà. In questa fase, durante l'attività in classe, si possono anche presentare figure animate, nelle quali le coniche sono generate come sezioni di un cono a doppia falda (Figura 1).

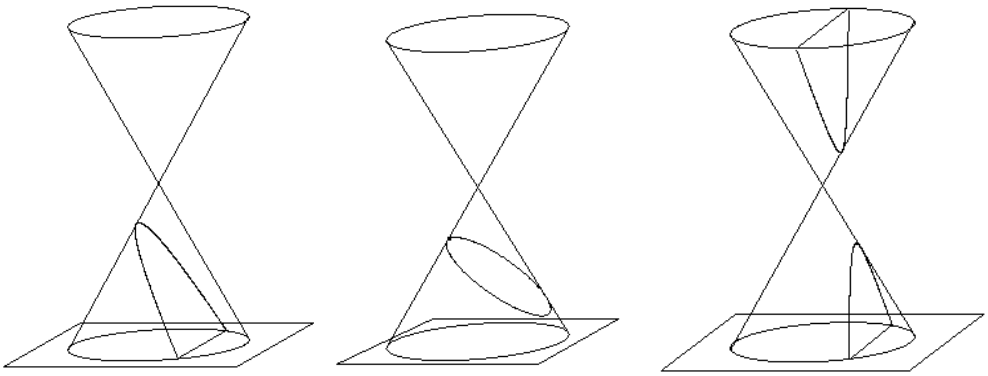


Figura 1

Seconda fase

In questa fase le coniche vengono definite come luoghi geometrici nel piano. Occorre accennare al fatto che dalla definizione delle coniche come sezioni di un cono non sarebbe difficile, soprattutto usando le attuali tecnologie, ricavare la definizione di conica come luogo geometrico, collegando così due definizioni che di solito vengono date in modo separato in quasi tutti i libri di testo.

Dopo questa parte introduttiva gli studenti, utilizzando le funzionalità presenti nel software geometrico, costruiscono la parabola, l'ellisse (con il caso particolarmente importante, che conviene svolgere per primo, della circonferenza) e l'iperbole come luoghi geometrici. Si analizzano le proprietà delle coniche; in particolare si possono anche presentare quelle collegate ai fuochi e alle direttrici, senza fare però riferimento al concetto di eccentricità (almeno in certi indirizzi di studio).

Sulla circonferenza, ad esempio, è possibile presentare alcune attività preliminari prima di arrivare all'equazione della circonferenza, in modo da collegare e integrare gli aspetti di geometria sintetica con quelli di geometria analitica.

Per la parabola, conviene presentare la costruzione a partire dal fuoco e dalla direttrice (Figura 2). Per esercizio si può proporre agli studenti di costruire la parabola a partire dal vertice e dal fuoco, oppure dal vertice e dalla direttrice.

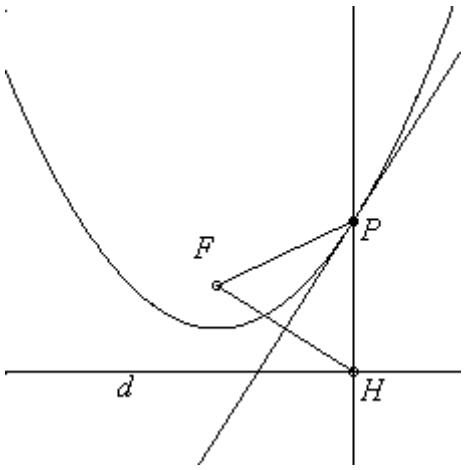


Figura 2

Una prima costruzione dell'ellisse (Figura 3), valida anche per l'iperbole (Figura 4), è la seguente: si disegna una circonferenza di centro un punto F_1 e raggio a piacere ed un punto interno alla circonferenza F_2. Preso un punto A sulla circonferenza si traccia la retta AF_1 e l'asse del segmento AF_2. Il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse. Si dimostra inoltre che l'asse del segmento AF_2 è tangente all'ellisse.

Analogamente per l'iperbole si disegna una circonferenza di centro un punto F_1 e raggio a piacere

ed un punto esterno alla circonferenza F_2. Preso un punto A sulla circonferenza si traccia la retta AF_1 e l'asse del segmento $A\ F_2$. Il loro punto di intersezione P appartiene all'iperbole (figura 4).

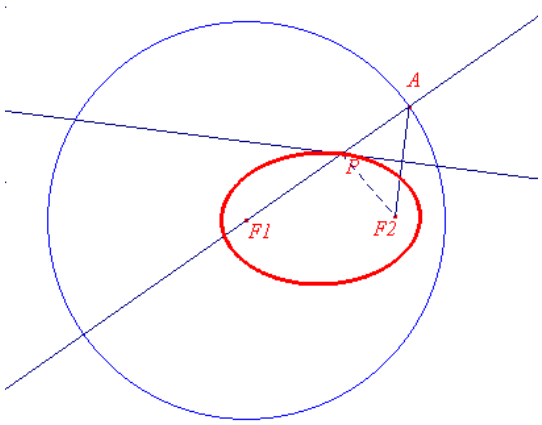


Figura 3

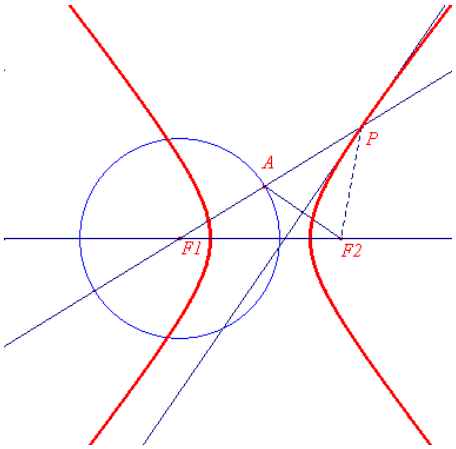


Figura 4

Le costruzioni proposte nelle figure 2, 3 e 4, possono essere riproposte, oltre che con l'uso di un software didattico, anche con macchine matematiche che usano dei fili oppure con la piegatura della carta. Con quest'ultima tecnica, per ottenere una parabola, come inviluppo di "pieghe", si parte da un foglio di carta nel quale è disegnata una retta d e un punto P. Si piega il foglio, molte volte, in modo da far "sovrapporre" il punto P alla retta d. L'inviluppo delle "pieghe" sarà allora una parabola. Analogamente si procede per ottenere l'ellisse e l'iperbole: si disegnano su un foglio, in questo caso, una circonferenza γ e un punto P e si ripete la stessa procedura, "sovrapponendo" più volte, con delle piegature del foglio, il punto P alla circonferenza γ.
Si può anche proporre un'ulteriore costruzione dell'ellisse ("metodo del giardiniere"): dato il segmento AB di misura k si considera un punto P di AB e si definiscono i segmenti AP, PB. Si considerano le due circonferenze di centri F_1, F_2 e raggi AP e BP. I punti di intersezione P e P' (due se $k > \overline{F_1F_2}$) appartengono all'ellisse (Figura 5).

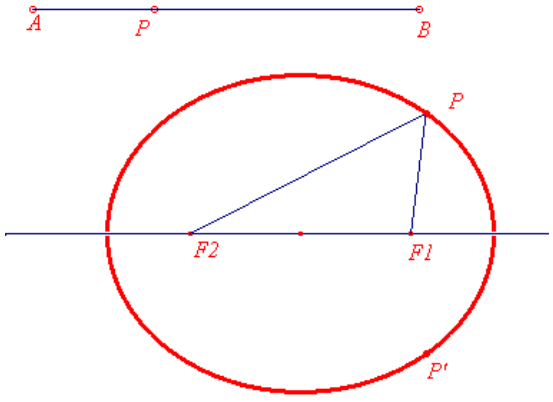


Figura 5

Le costruzioni presentate possono essere facilmente trasformate in procedure che rendono automatico, a partire dagli elementi che la individuano univocamente, la rappresentazione grafica delle coniche.

Terza fase

In questa fase, utilizzando le definizioni delle coniche date come luoghi geometrici, vengono

determinate, in opportuni sistemi di riferimento, l'equazione della circonferenza e quella della parabola. La ricerca delle equazioni può essere effettuata anche con l'uso del software geometrico in collegamento con altri sistemi di calcolo simbolico (Computer Algebra Systems). Nella determinazione delle equazioni della circonferenza e della parabola conviene ricavare inizialmente le equazioni: $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = a\,x^2$ e poi utilizzare una traslazione per ricavare le equazioni in casi più generali.
In ogni occasione si potranno stabilire collegamenti con problemi presi dal mondo reale che si riconducono alle coniche o all'intersezione di rette e coniche. Importante è anche il collegamento continuo con il tema delle funzioni.

Quarta fase
Si presentano problemi e applicazioni riconducibili alla circonferenza e alla parabola e, più in generale, a semplici coniche o intersezioni di rette e coniche.

Ulteriori sviluppi
Si propongono alcuni esercizi, da svolgere con l'uso di un software di geometria, che servono a rafforzare il concetto di luogo geometrico e a collegarlo con la geometria analitica.

1. Trovare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti dati.
2. Trovare il luogo dei punti medi delle corde di stessa lunghezza di una circonferenza data.
3. Date due rette parallele *r* ed *s* e un punto *A* su *r* e un punto *B* su *s*, trovare il luogo dei punti medi descritti dal punto medio del segmento *AB*.
4. Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due date circonferenze concentriche.
5. Dato un triangolo inscritto in una circonferenza, trovare il luogo geometrico descritto dal baricentro *G* al variare di un vertice *C* sulla circonferenza.
6. Dato un punto *Q* e una circonferenza γ, determinare il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti *QP* al variare di *P* su γ.
7. Si considerano due semirette di origine il punto *O*. Si considera una circonferenza di centro *C* ed un punto *P* su di essa. Da *P* si mandano le parallele alle due semirette date (pantografo).

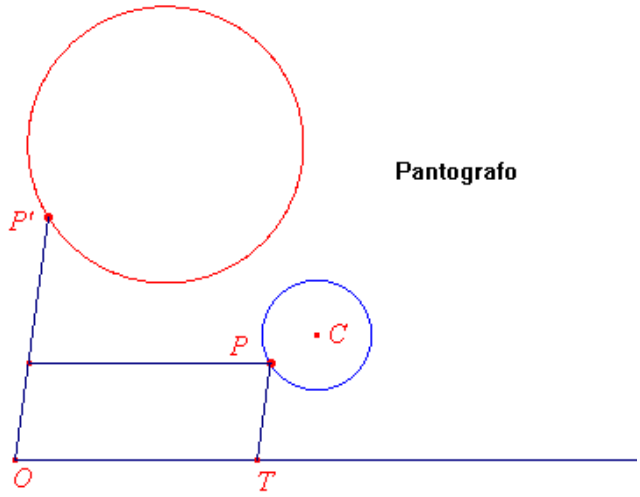


Figura 6

8. Si consideri una circonferenza *γ,* una retta *r* e un punto *M* di γ. Costruire le circonferenze tangenti alla retta *r* e tangenti nel punto *M* alla circonferenza γ. Determinare al variare di *M* su γ il luogo descritto dai centri di tali circonferenze. Variare la posizione della retta rispetto alla circonferenza e osservare come variano i luoghi.

9. Siano γ una circonferenza di centro *O* e raggio *r* e *A* un punto non appartenente a γ. Sia *M* un punto di γ. Si costruisca il quadrato *AMPN,* in senso antiorario, di centro *I*, e sia *Q* il punto di intersezione della retta *AP* e dell'arco minore di cerchio di centro *A* e di estremi *M* e *N*. Determinare i luoghi descritti da punti *N, Q, I, P* .
10. Si consideri un segmento costante *AK* ed un punto *B* su di esso; si mandi la perpendicolare ad *AK* per il punto *B* e si costruisca un rettangolo di base *AB* ed altezza *BC*, con *BC* = *BK*.
    Si ottengono così infiniti rettangoli isoperimetrici. Come varia l'area?
    Costruire una tabella con i valori di *AB*, di *BC* e dell'area. Che relazione esiste tra *AB* e *BC* se *ABCD* ha area massima?

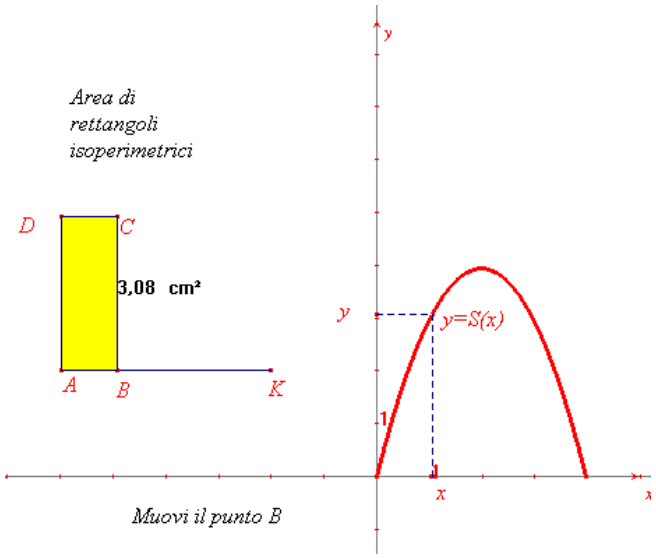


Figura 7

11. Tra tutti i triangoli rettangoli i cui cateti hanno somma 20, determinare quello che ha area massima.
12. Tra i rettangoli che hanno la stessa area, trovare quello di perimetro minimo.
13. Si consideri un triangolo rettangolo *ABC* ed un punto *P* appartenente ad *AB*; per *P* si mandi la parallela al cateto *BC*. Studiare l'area del triangolo *APQ* in funzione di *x* (misura di *AP*).

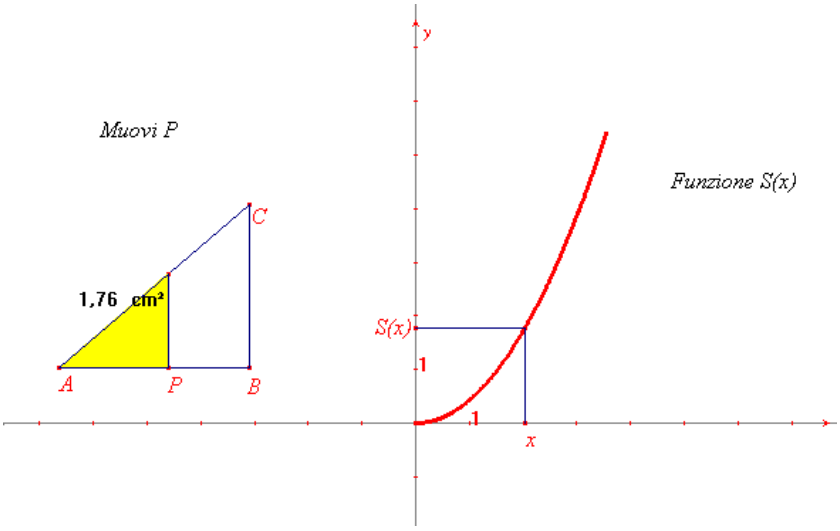


Figura 8

14. Determinare le dimensioni del rettangolo di area massima che si può inscrivere in un triangolo isoscele di base 10 e altezza 4.

15. Si consideri un quadrato di lato dato e si inscriva nel quadrato un altro quadrato di lato x. Studiare l'area del quadrato inscritto come una funzione di x.

Circonferenze e parabole: dal grafico all'equazione

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza. Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	Spazio e figure Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Coniche e loro equazioni.

Questa attività viene proposta per il primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle coniche e delle loro equazioni.
L'attività si avvale dell'uso di un software di geometria e consiste in un percorso di ricerca delle equazioni di circonferenze e parabole in opportuni riferimenti cartesiani.

Descrizione dell'attività

Prima fase
Attività con un software di geometria.

Consegna 1
Disegnate sullo schermo una circonferenza e misuratene il raggio. Fissate un sistema di riferimento (asse delle ascisse, asse delle ordinate e origine O). Riuscite a trovare un'equazione che lega l'ordinata di un generico punto della vostra circonferenza alla relativa ascissa ?
Obiettivi della consegna

- Capire che si sta affrontando un problema nuovo: dati una funzione o una curva ed un ben determinato sistema di riferimento, si deve trovare l'equazione che soddisfano le ascisse e le ordinate dei punti della curva.
- Capire che ad una curva a volte è associata una funzione numerica che riesce a "descriverla tutta", mentre altre volte sono richieste più funzioni, racchiuse magari in un'unica equazione; in questo modo si introduce il problema della possibilità o meno dell'esplicitazione di una variabile rispetto all'altra.
- Individuare i parametri del problema: nel caso in cui l'asse delle ascisse passi per il centro della circonferenza e l'origine O sia posta nel centro stesso, si ha soltanto il raggio della circonferenza come parametro.
- Capire che l'equazione ottenuta è valida per tutti i punti della circonferenza e non solo per quelli utilizzati per ricavarla (M_1, M_2, M_3) e cogliere il ruolo dei termini in x^2 e y^2 come caratterizzanti l'equazione determinata.

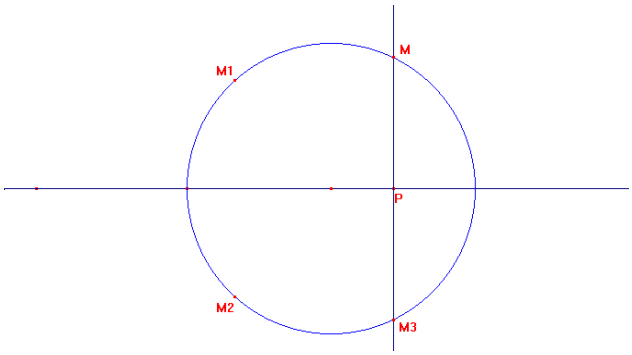


Figura 1

Osservazioni

In base all'esperienza effettuata in classe si è osservato che alcuni studenti provano a scegliere l'asse delle ascisse non passante per il centro e rischiano di non arrivare a niente; dopo vari tentativi, alla fine, pressoché tutti gli studenti lavorano con l'asse delle ascisse passante per il centro della circonferenza, con l'origine collocata proprio in tale punto, e si servono del teorema di Pitagora per ottenere l'equazione. Quasi tutti gli studenti, inoltre, non partono da un punto M sulla circonferenza, ovvero dalla relativa ordinata per ricavare l'ascissa, ma al contrario partono da quest'ultima, ottenuta con un punto vincolato all'asse x (come P in Figura 1) o trasportando una misura numerica su tale asse nei due versi possibili a partire da O, al fine di descrivere anche i valori negativi dell'ascissa x.

I risultati ottenuti dagli studenti vengono discussi in classe. Si può in seguito procedere nell'attività per arrivare all'equazione di una circonferenza in un riferimento generico.

Consegna 2

Determinare l'equazione di una circonferenza nei seguenti sistemi di riferimento, in cui RS è l'asse delle ascisse ed O è il punto origine.

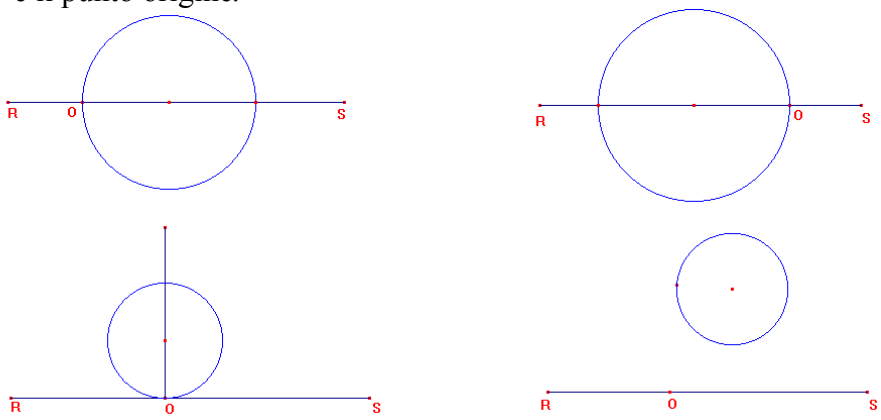


Figura 2

Obiettivi della consegna

- Capire che l'equazione di una curva dipende dal sistema di riferimento scelto.
- Ottenere l'equazione di una circonferenza di raggio r in un sistema di riferimento in cui l'ascissa e l'ordinata del centro sono x_c ed y_c, partendo da alcuni casi particolari.
- Individuare i parametri del problema.
- Sapersi inventare il testo di un problema relativo alla situazione data. Ad esempio, per la prima situazione si può avere: "Determinare l'equazione di una circonferenza di raggio 3 in un sistema di riferimento in cui l'ascissa del centro è 3 e l'ordinata del centro è 0".
- Capire che l'equazione determinata va bene per tutti i punti della circonferenza e non solo per quelli che si sono utilizzati per determinarla e cogliere il ruolo dei termini $(x-x_c)^2$ e $(y-y_c)^2$ come caratterizzanti l'equazione trovata.

Osservazioni
In generale si è osservato che gli studenti adoperano di nuovo il teorema di Pitagora, anche se si può trovare qualcuno che sfrutta il secondo teorema di Euclide applicato, ad esempio, al triangolo HKM (Figura 3).

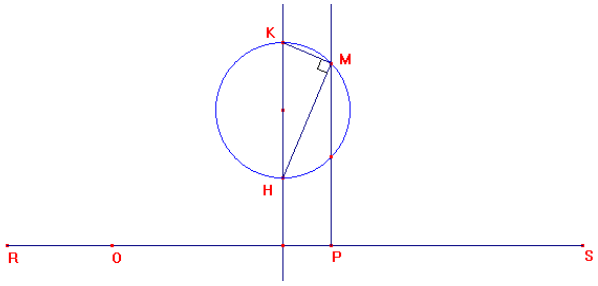


Figura 3

Una volta analizzati e discussi i risultati trovati, deve essere chiaro agli studenti che una circonferenza possiede un'equazione del tipo $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$.

Consegna 3
Individuate il sistema di riferimento in cui una circonferenza ha equazione $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ e determinate la misura del suo raggio.
Obiettivo della consegna

- Arrivare all'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ partendo da quella fino ad ora conosciuta, ovvero $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$, e ricavare dal confronto tra le due equazioni le formule: $x_c=\frac{-a}{2}$, $y_c=\frac{-b}{2}$ e $x_c^2+y_c^2-r^2=c$, che permettono di ricavare l'ascissa e l'ordinata del centro e la misura del raggio per poter introdurre il sistema di riferimento opportuno e tracciare la curva.

Una volta corretta in classe la precedente consegna, si suggerisce l'applicazione dei concetti finora introdotti sulla circonferenza mediante i seguenti esercizi.
1) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e la misura del suo raggio.
2) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e le coordinate di un suo punto.
3) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e sapendo che passa per l'origine degli assi cartesiani. (Da questo esercizio si prende lo spunto per dimostrare che non è un caso che nelle circonferenze che passano per l'origine degli assi cartesiani il termine noto sia uguale a 0).
4) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate di tre suoi punti. (In questo caso è bene rimarcare il fatto che, poiché per tre punti passa una ed una sola circonferenza, l'equazione che si determina è unica, con coefficienti numerici ben determinati e senza parametri).

Per casa si possono assegnare esercizi analoghi a quelli svolti in classe ed in più è opportuno dare il seguente esercizio:

Determinare le equazioni delle infinite circonferenze che passano per due punti dei quali si conoscono le coordinate.

Dal momento che si è già notato nei precedenti esercizi come siano sempre necessarie tre condizioni per determinare l'equazione corrispondente ad una circonferenza univocamente individuata, l'esercizio serve per mettere ancora meglio a fuoco il ruolo dei parametri nell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e comprendere quali implicazioni possiede il fatto che tali parametri siano esattamente tre.

Osservazione
Durante la risoluzione di tutti gli esercizi è importante sottolineare la corrispondenza tra la circonferenza ed i punti che le appartengono e la corrispondenza tra l'equazione della circonferenza, ottenuta dopo aver fissato un certo sistema di riferimento, e le coordinate dei punti che le appartengono. Il punto chiave consiste nel far interiorizzare agli studenti la proprietà secondo cui, se un punto appartiene ad una curva, allora le sue coordinate cartesiane devono verificare l'equazione della curva stessa e viceversa.

Seconda fase
Consegna 1. Assegnati una retta ed un punto ad essa esterno, costruite 5 punti equidistanti dalla retta e dal punto dati.
Osservazioni
L'esperienza ha mostrato che normalmente gli studenti tra i cinque punti richiesti individuano con facilità il punto medio V del segmento di perpendicolare FH condotto dal punto assegnato F alla retta data e quasi tutti riescono a trovare gli altri due punti M_1 e M_2 (Figura 4).
In generale essi non riescono sempre ad iterare il procedimento di costruzione in relazione ad una distanza generica, diversa da FH. Qualcuno può anche avere l'idea di adoperare due opportune rette bisettrici, sempre nel caso particolare della distanza (dal punto e dalla retta assegnati) uguale a FH (Figura 5).

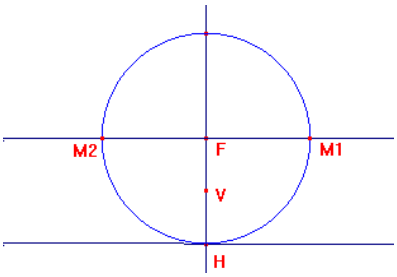


Figura 4

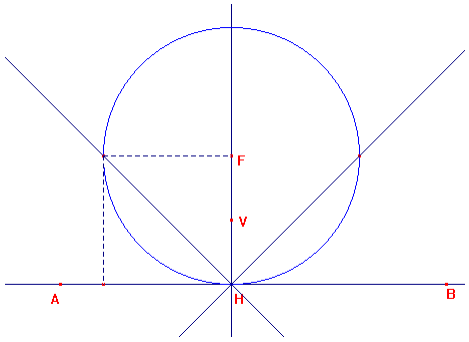


Figura 5

Osservazioni
La discussione relativa ai risultati della consegna 1 deve essere svolta con cura ed ha come scopo primario il passaggio alla costruzione di una parabola come luogo geometrico mediante il software di geometria. In più di un caso si è rilevato che, per affrontare la consegna 1, molti studenti partono prendendo una circonferenza di raggio scelto a caso (pertanto variabile) e costruiscono due punti aventi la proprietà di equidistanza voluta intersecando tale circonferenza con la retta parallela alla retta data, posta ad una distanza da essa uguale al raggio della circonferenza tracciata. Dopo aver analizzato in classe con attenzione tale procedimento di costruzione, è opportuno invitare gli studenti ad applicare il comando del software denominato "Traccia" ai due punti determinati. Il software descrive la traccia dei due punti costruiti, in relazione alla variazione del raggio della circonferenza utilizzata. Dopo che è emerso il fatto decisivo che in realtà sono infiniti i punti che soddisfano la proprietà geometrica richiesta nella consegna 1, si può porre il problema di come determinare l'insieme di tali punti con il comando del software denominato "Luogo". Ciò richiede di rappresentare un'opportuna grandezza variabile "vincolata" ad un'altra grandezza variabile, cosicché il software possa interpretare il comando "Luogo" nel senso corretto di tracciare sullo schermo l'insieme delle posizioni che assume un punto variabile in funzione delle posizioni che assume un altro punto variabile, entro un possibile insieme di configurazioni. Tale problema può essere risolto prendendo ad esempio un punto variabile su una semiretta generica ed utilizzando di conseguenza il segmento che lo congiunge con l'origine della semiretta per individuare il raggio (variabile) della circonferenza della costruzione. Si realizza così il luogo generato dai due punti di volta in volta costruiti, al variare sulla semiretta fissata del punto che determina il raggio della

circonferenza necessaria per la costruzione stessa. Alla fine si attribuisce la denominazione di parabola al luogo di punti così ottenuto e si introducono con gli usuali significati i termini fuoco, direttrice, vertice. Riconosciuta poi l'evidente proprietà di simmetria del suddetto luogo, è opportuno dare la definizione di asse di una parabola**:** si chiama asse della parabola di fuoco F e direttrice d, la retta perpendicolare a d passante per F.
Si possono ora proporre agli studenti una serie di situazioni da studiare, per consolidare quanto appreso.

Consegna 2
Determinate le equazioni di una parabola nei seguenti sistemi di riferimento.

- L'asse delle ascisse RS coincide con la direttrice della parabola e l'origine O è il punto d'intersezione tra l'asse e la direttrice (Figura 6).

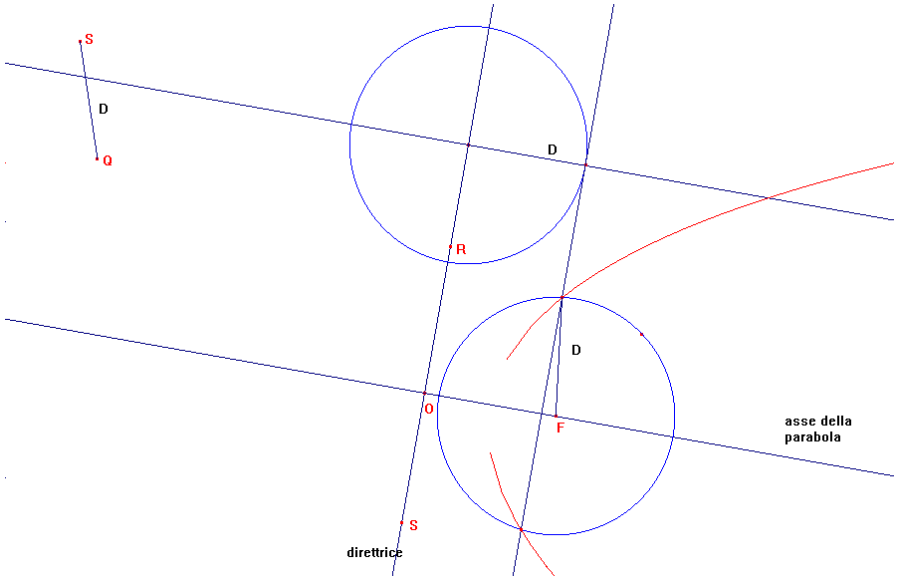


Figura 6

(Risposta: $x^2 + (y_F - y)^2 = y^2$ ovvero $y = \frac{1}{2y_F}x^2 + \frac{y_F}{2}$)

- L'asse delle ascisse RS coincide con l'asse della parabola e l'origine O è il punto d'intersezione tra l'asse e la direttrice (Figura 7).

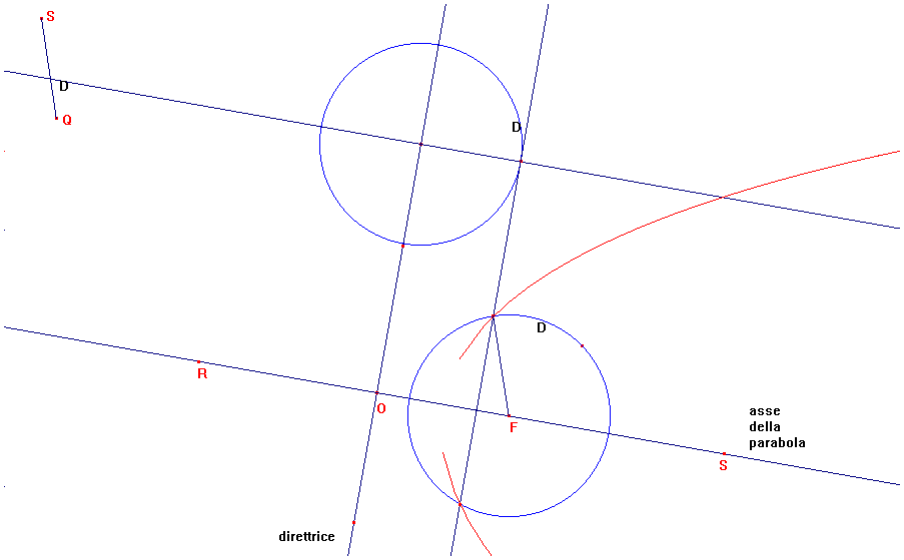


Figura 7

(Risposta: $y^2+(x-x_F)^2=x^2$ ovvero $x=\frac{1}{2y_F}y^2+\frac{y_F}{2}$ ma $y=\pm\sqrt{2xx_F-x_F^2}$)

- L'asse delle ascisse RS è parallelo alla direttrice e passa per il vertice V della parabola e l'origine O coincide con il vertice V (Figura 8).

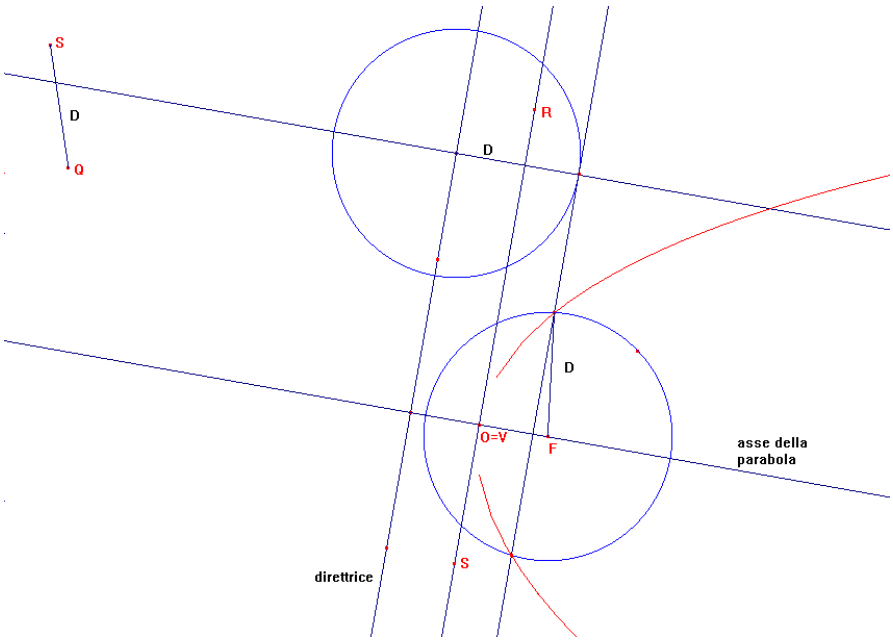


Figura 8

(Risposta $x^2+(y-y_F)^2=(y+y_F)^2$ ovvero $y=\frac{1}{4y_F}x^2$)

- L'asse delle ascisse RS è l'asse della parabola e l'origine O coincide con il vertice V (Figura 9).

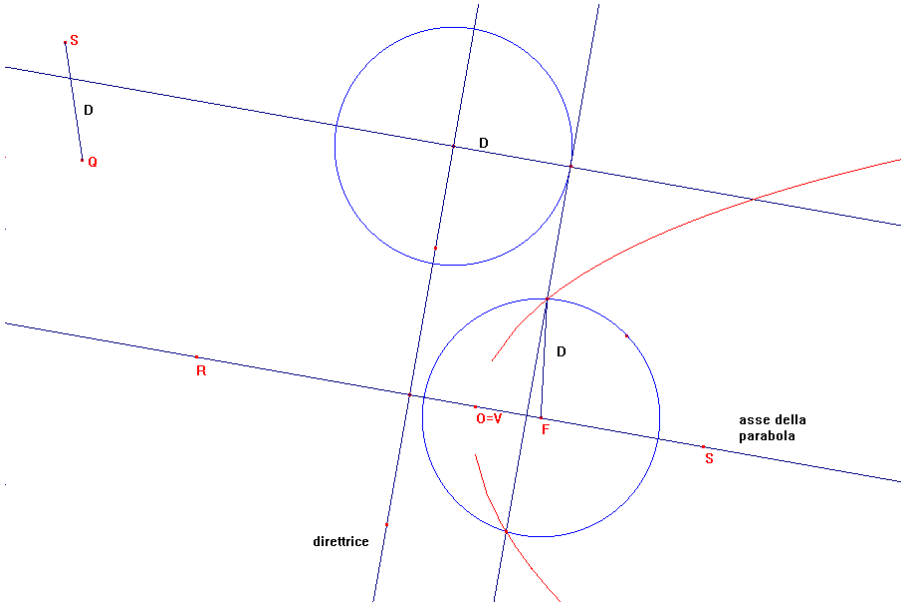


Figura 9

(Risposta: $y^2+(x-x_F)^2=(x+x_F)^2$ ovvero $x=\frac{1}{4x_F}y^2$ ma $y=\pm\sqrt{4xx_F^2}$).

Osservazioni
Durante la discussione sui precedenti esercizi,

1) si deve fare il punto sulle diverse equazioni ottenute, mettendo bene in evidenza il fatto che una stessa equazione vale per tutti i punti della parabola in ciascuno dei casi analizzati;
2) si deve osservare che nel primo e nel terzo caso, poiché ad ogni punto sull'asse delle ascisse RS corrisponde un unico punto sulla parabola, è possibile individuare un'equazione per la parabola che rappresenti una funzione numerica del tipo $y = f(x)$; vale la pena ribadire che ciò equivale alla proprietà algebrica che si può esplicitare la variabile y rispetto alla variabile x;
3) si deve mettere in evidenza che nel secondo e nel quarto caso, poiché ad ogni punto sull'asse delle ascisse RS non corrisponde un unico punto sulla parabola, non è possibile individuare un'equazione per la parabola che rappresenti una funzione numerica del tipo $y = f(x)$; è bene in questo caso ribadire che non si può esplicitare la variabile y rispetto alla variabile x in un unico modo; per ciascuna delle due parabole servono due diverse funzioni numeriche del tipo $y = f(x)$ per descrivere tutti i loro punti.
Si passa quindi alla terza consegna della seconda fase.

Consegna 3

Individuate il sistema di riferimento in cui una parabola ha equazione $y = 2x^2$ e descrivetelo; disegnate la parabola assegnata dopo averne trovato il fuoco e la direttrice.

Obiettivi

- Riconoscere che un'equazione del tipo $y = ax^2$ rappresenta una parabola in un sistema di riferimento in cui l'origine O coincide con il vertice V della parabola e l'asse delle ascisse RS è perpendicolare all'asse della parabola in V.
- Capire che da un'equazione del tipo $y = ax^2$ si ricava la formula $y_F = \frac{1}{4a}$ per l'ordinata del fuoco e che quindi si possono individuare nel riferimento scelto le coordinate del fuoco stesso e l'equazione della direttrice della parabola.

A questo punto si propongono alcuni esempi di semplici esercizi da introdurre in un'eventuale prova di verifica scritta sui contenuti dell'intera attività.

Elementi di prove di verifica

1. Considerate la costruzione, qui sotto riprodotta, di due punti di una parabola in modo da sfruttare la retta parallela alla direttrice, posta a distanza D da essa, e la circonferenza di centro il fuoco e di raggio D (Figura 10).

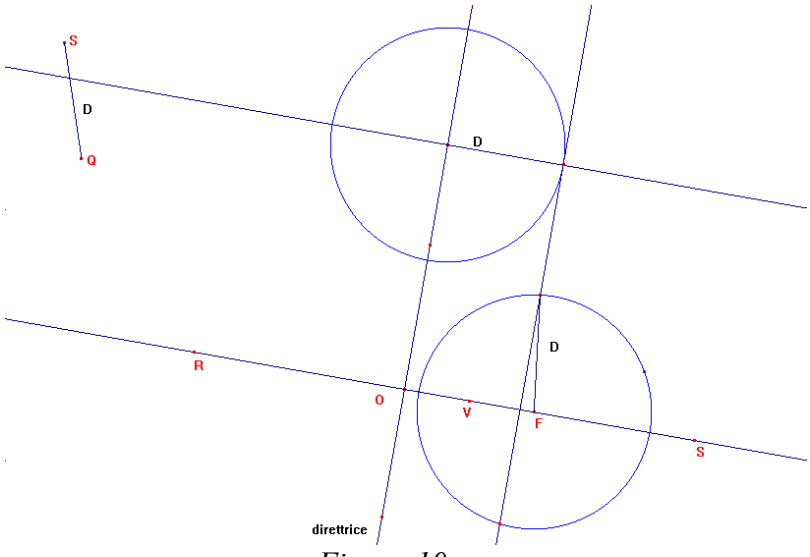


Figura 10

a) Dite quali punti appartengono alla parabola motivando la risposta.
b) Scelti la retta OF come asse delle ascisse ed il punto O come origine, è possibile definire una funzione numerica di cui la parabola sia il grafico? Nel caso in cui ciò sia possibile, ricavate tale equazione.
c) Scelti ancora la retta OF come asse delle ascisse ed il punto medio V tra O e F come origine, è possibile definire una funzione numerica di cui la parabola sia il grafico? Nel caso in cui ciò sia possibile, ricavate tale equazione.

2. Sono date le seguenti equazioni:

d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$;

e) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$;

f) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Rappresentate le curve associate alle equazioni assegnate in un unico riferimento *xOy* di ascisse ed ordinate.

Triangoli equilateri e parabole

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	Spazio e figure Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Geometria e aritmetica.

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, nella seconda classe del secondo biennio, quando gli studenti hanno già acquisito una certa abilità nella rappresentazione analitica di oggetti geometrici, nella rappresentazione delle successioni e nell'uso di software di geometria e di manipolazione simbolica. Il contesto è quello della geometria e dell'aritmetica.
L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. La soluzione del problema richiede la capacità da parte degli studenti di applicare in un unico contesto conoscenze e abilità diverse.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di applicare e approfondire i seguenti temi:
- il teorema di Pitagora,
- le proprietà dei triangoli equilateri,
- le proprietà sintetiche e analitiche della parabola,
- la somma dei primi *n* numeri dispari,
- la nozioni di funzione (in particolare la scrittura formale di una successione),
- la scelta di un sistema di riferimento cartesiano.

Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica "lunga", tipica del laboratorio di matematica.
La compresenza di approcci di tipo grafico, di tipo numerico e di tipo formale rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, in particolare dei software di geometria e dei programmi di manipolazione simbolica.
Si consiglia di proporre l'attività suddividendo la classe in piccoli gruppi di studenti, richiedendo di riportare successivamente la discussione avvenuta all'interno del gruppo classe relativamente alle

strategie risolutive. L'insegnante deve poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti suddivisi in gruppi il seguente problema.

Problema.

Costruire dei triangoli equilateri lungo una retta, come mostrato nella Figura 1, con i lati di lunghezza 1, 3, 5, 7, …, 2n−1, …

Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta.

Determinare l'equazione della curva.

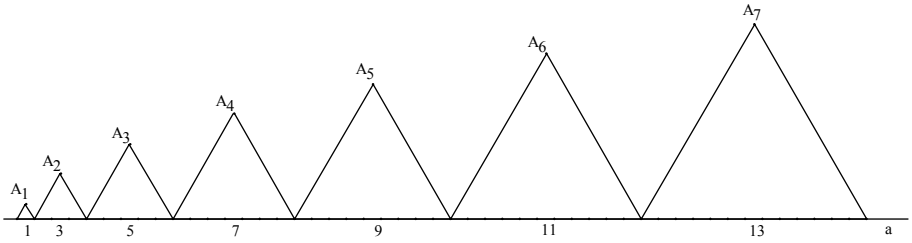


Figura 1

L'insegnante presenta e commenta il problema alla classe servendosi della Figura 1.

Seconda fase

Gli studenti disegnano con l'aiuto di un software di geometria e formulano congetture per descrivere la curva.

Consegna 1

Fissato un segmento unitario costruire i triangoli equilateri e i segmenti A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, …; variare la lunghezza del segmento unitario e descrivere quello che si osserva.

Si costruisce lavorando in gruppi la Figura 2, si discutono le osservazioni dell'attività di esplorazione; alla fine del confronto gli studenti congetturano che la curva sembra essere una parabola. L'insegnante propone la discussione della congettura.

Consegna 2

Costruire, con lo strumento "Conica" del software di geometria, la conica per i cinque punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e descrivere quello che si osserva.

Gli studenti disegnano la conica costruita dal software di geometria (Figura 3): è una parabola che sembra passare per tutti i punti costruiti e che ha per asse la retta *a*.

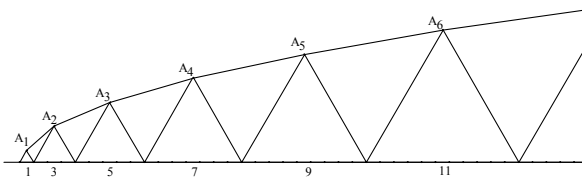


Figura 2

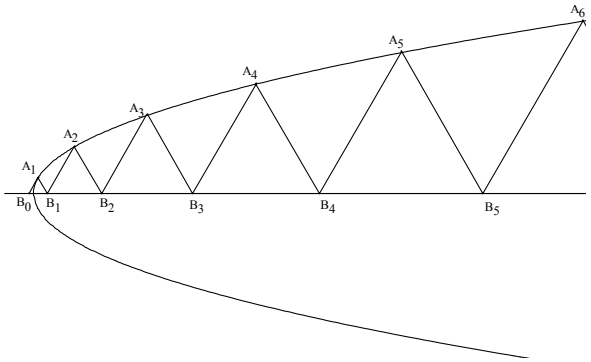


Figura 3

Terza fase

Gli studenti devono descrivere la parabola.

Consegna 3

Costruire con lo strumento "Luogo" del software di geometria le parabole che passano per il punto A_1 e hanno per asse la retta *a*. (Utilizzare la Figura 3).

Gli studenti devono utilizzare la definizione di parabola in modo consapevole: devono, ad esempio, fissare sulla retta *a* un punto qualsiasi F, costruire la retta *d* perpendicolare ad *a* tale che la distanza di A_1 da *d* sia uguale a A_1F e la parabola come luogo dei punti equidistanti da F e da *d* (Figura 4).

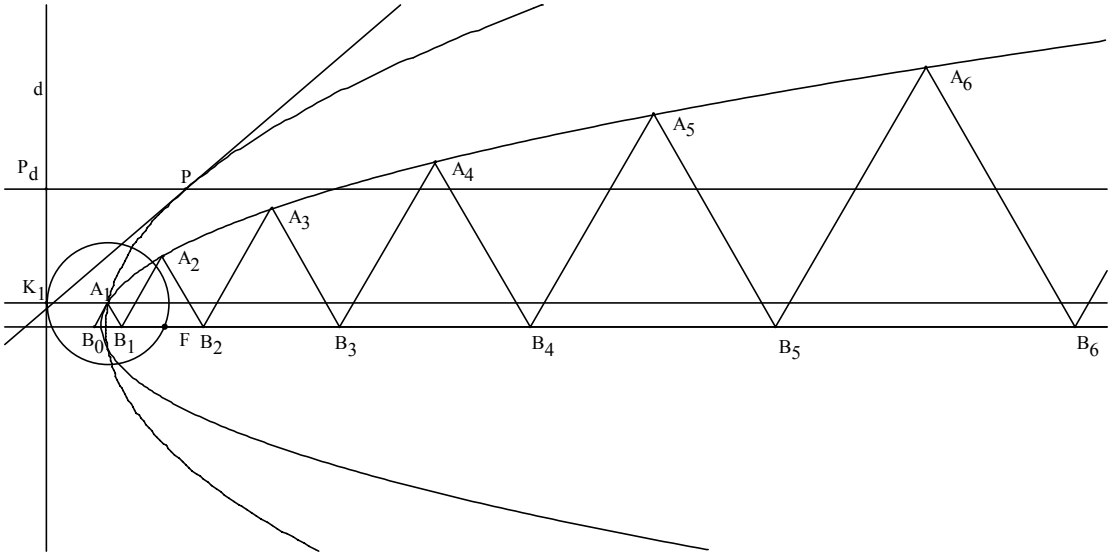


Figura 4

Consegna 4

Trascinare il punto F sulla retta a, descrivere quello che si osserva.

Gli studenti trascinano il punto F sulla retta a scoprono che la parabola disegnata come luogo di punti coincide con la parabola per i punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 se F coincide con il punto B_1 (Figura 5).

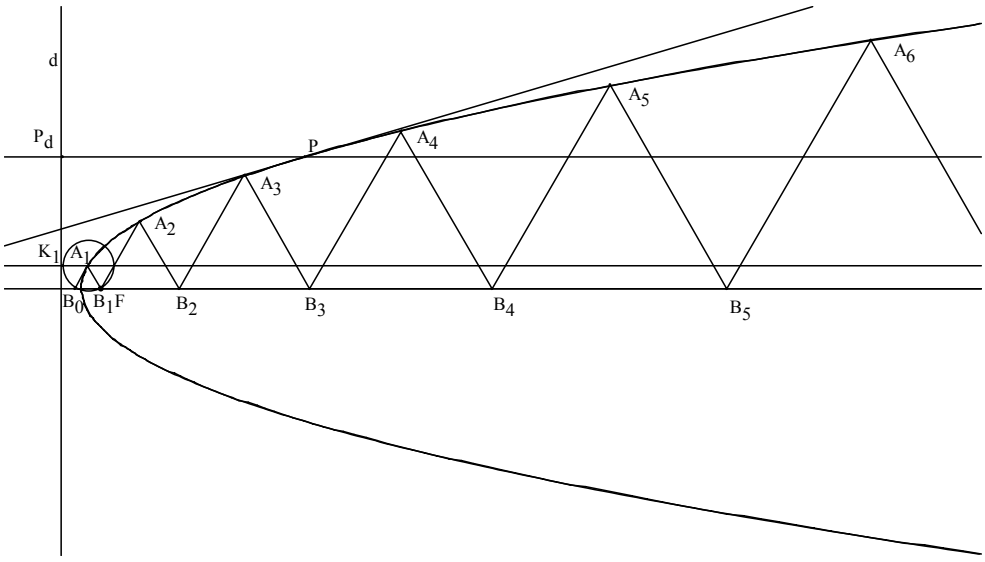


Figura 5

Con quest'ultima attività si conclude la fase di esplorazione e congettura sulla forma della parabola.

Quarta fase

Gli studenti devono dimostrare o confutare utilizzando per i calcoli anche un programma di manipolazione simbolico o una calcolatrice la seguente

Congettura

I punti A_2, A_3, A_4, …, appartengono alla parabola che ha il fuoco nel punto B_1 e passa per il punto A_1.

Devono quindi dimostrare o confutare che $A_nK_n = A_nF$, per ogni n.

Consegna 5

Determinare la distanza dei punti A_2, A_3, A_4, … dalla retta d.

L'insegnante può eventualmente suggerire il seguente procedimento (Figura 6):

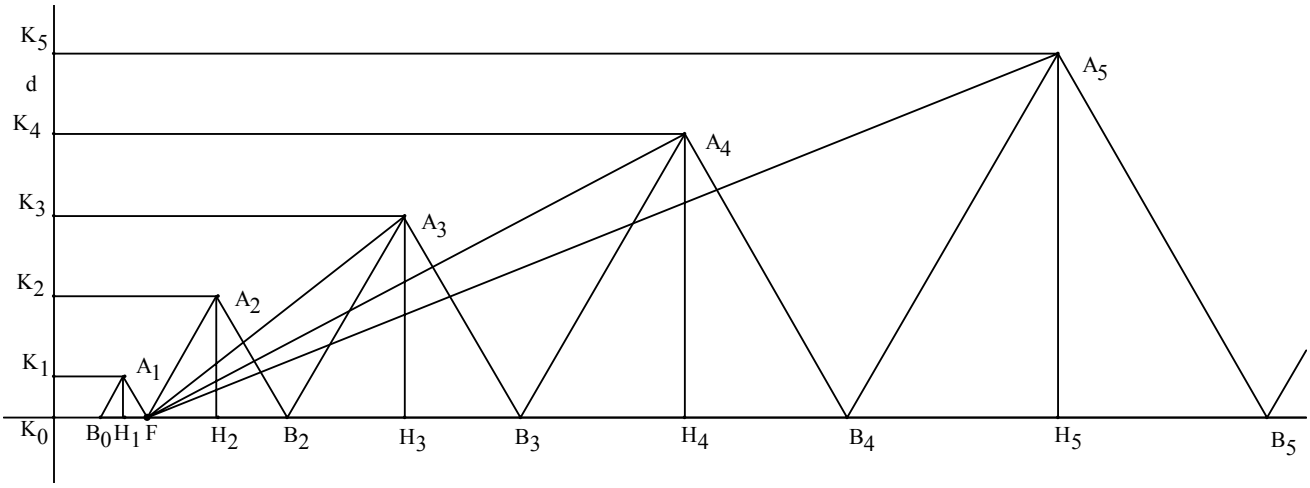


Figura 6

Il punto A_1 dista 1 dalla direttrice, infatti

$$K_1A_1 = K_0B_0 + B_0F - H_1F = 1/2 + 1 - 1/2,$$

il punto A_2 dista dalla direttrice 3, infatti:

$$K_2A_2 = K_0B_0 + B_0F + B_1B_2 - H_2B_2 = 1/2 + 1 + 3 - 3/2$$

il punto A_3 dista dalla direttrice 7, infatti

$$K_3A_3 = K_0B_0 + B_0F + B_1B_2 + B_2B_3 - H_3B_3 = 1/2 + 1 + 3 + 5 - 5/2.$$

Gli studenti utilizzano l'indicazione per calcolare la distanza del punto A_n da *d*.

Devono quindi scrivere la somma

$$K_nA_n = 1/2 + 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) - (2n - 1)/2,$$

e osservare che si deve determinare la somma dei primi *n* numeri dispari

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$$

calcolarla, anche con l'aiuto di una calcolatrice grafico simbolica (Figura 7):

$$K_nA_n = 1/2 + n^2 - (2n - 1)/2 = (1 + 2n^2 - 2n + 1)/2 = n^2 - n + 1.$$

Consegna 6

Determinare la lunghezza dei segmenti FH_2, FH_3, …, FH_n .

Gli studenti devono ripetere le considerazioni fatte nella consegna precedente e con alcune variazioni ottengono (Figura 7):

$$FH_n. = 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) - (2n - 1)/2 = n^2 - 1 - (2n - 1)/2 = n^2 - n - 1/2.$$

Consegna 7

Determinare la lunghezza dei segmenti A_2H_2, A_3H_3, …, A_nH_n.

Gli studenti determinano la lunghezza utilizzando le proprietà dei triangoli equilateri:

$$A_2H_2 = (3/2)\sqrt{3}\,,\ A_3H_3 = (5/2)\sqrt{3}\,,\ \ldots,\ A_nH_n = [(2n - 1)/2]\sqrt{3}\,.$$

Consegna 8
Determinare la lunghezza dei segmenti A_2F, A_3F, …, A_nF.
La distanza di ciascun vertice dal fuoco può essere calcolata mediante il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli A_nH_nF. Si ottiene allora (Figura 8):

$$A_nF = \sqrt{\left(n^2 - n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = |n^2 - n + 1|.$$

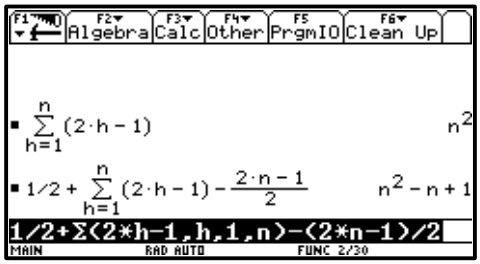


Figura 7

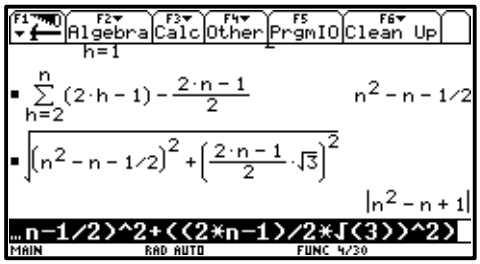


Figura 8

Gli studenti verificano, dunque, che l'ennesimo punto A_n è equidistante dalla direttrice e dal fuoco se

$$n^2 - n + 1 = |n^2 - n + 1|.$$

L'uguaglianza è vera, infatti i punti di coordinate (n, n^2-n+1) appartengono alla parabola di equazione $y = x^2 - x + 1$ il cui grafico è situato nel semipiano delle ordinate positive.
Quindi tutti i punti appartengono alla parabola che ha per asse la retta *a*, per fuoco il punto F coincidente con il punto B_1 e per direttrice la retta *d* che dista 1 dal punto A_1.

Quinta fase
Gli studenti a questo livello scolare possono anche tradurre il problema in modo analitico.
Gli studenti, lavorando individualmente, devono affrontare i seguenti problemi:
a) scegliere in maniera opportuna il sistema di riferimento;
b) determinare le coordinate dei vertici dei triangolo utilizzando le esperienza fatte nelle attività precedenti;
c) determinare l'equazione della parabola per tre punti,
d) verificare per via analitica che il punto A_n appartiene alla parabola.

Il punto a) è abbastanza delicato, perché gli studenti potrebbero avere difficoltà a effettuare la scelta del sistema del riferimento cartesiano più opportuno.
Si discute questo problema con tutti gli studenti suggerendo di far coincidere, per esempio, l'asse delle ascisse con la retta *a* e l'origine degli assi con il punto H_1.
I punti b), c), d) sono analizzati con l'ausilio di una calcolatrice grafico simbolica, si demanda a questi strumenti lo sviluppo dei calcoli (Figura 9).

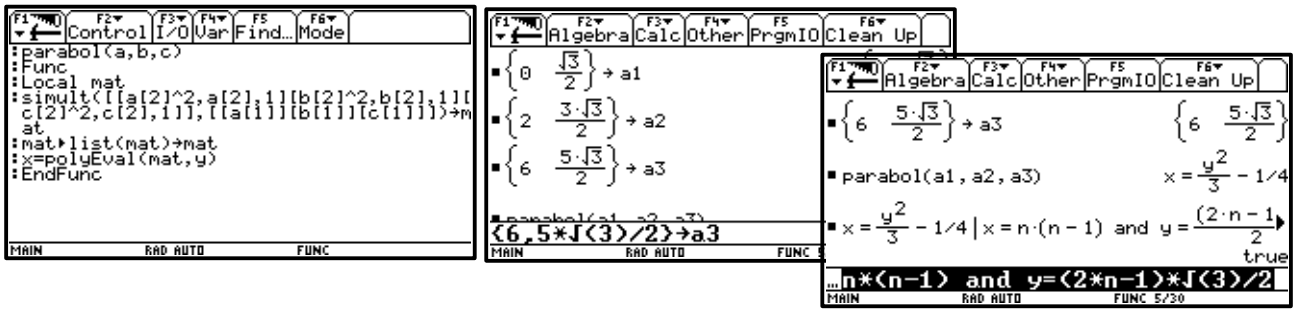


Figura 9

L'uso della calcolatrice grafico-simbolica impegna gli studenti nella ricerca di diverse strategie: ad esempio fissare l'asse delle ordinate coincidente con la retta *d* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *a*, scrivere rispetto a questo sistema le coordinate dei punti, determinare l'equazione della parabola e verificare l'appartenenza dei punti alla parabola; oppure ancora determinare l'equazione della parabola utilizzando le coordinate del fuoco e della direttrice. La ricchezza di approcci e la possibilità di discuterli tutti in tempi ragionevoli durante l'attività in classe può incoraggiare gli studenti alla partecipazione attiva, al confronto e alla collaborazione.

Possibili sviluppi

1. Dimostrare o confutare che i punti A_1, A_2, A_3, …, A_n,… appartengono al grafico della funzione $y = h\sqrt{x}$ per una scelta opportuna del parametro *h*.
2. Costruire su una retta una successione di triangoli equilateri con il lato di lunghezza 2, 4, 6, …. $2n$. Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta. Determinare l'equazione della curva.
3. Costruire su una retta una successione di triangoli isosceli simili con la base di lunghezza 1, 3, 5, 7, …, $2n-1$. Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta. Determinare l'equazione della curva.

La trigonometria e il mondo reale

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli. Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari.	Seno, coseno e tangente di un angolo. Coordinate polari. Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo.	Spazio e figure. Risolvere e porsi problemi.	Astronomia, Fisica, Topografia, Geografia della terra.

Contesto
Trigonometria e applicazioni.

Questa attività può essere proposta nel secondo biennio, quando gli studenti conoscono gli elementi fondamentali di geometria piana in particolare le similitudini. Il contesto è quello della trigonometria e delle sue applicazioni.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in quattro fasi e prevede l'introduzione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto, la loro applicazione alla risoluzione dei triangoli rettangoli e alla risoluzione di semplici problemi legati al mondo reale.

Prima fase
L'insegnante presenta agli studenti le finalità dell'attività evidenziando che si introdurranno alcune nozioni utili a risolvere problemi di misura di grandezze.
Analizzando la Figura 1 l'insegnante fa notare che, dato un angolo acuto AOB (indicato con α), preso sul lato OB un punto P, considerata la proiezione Q di P su OA, i tre rapporti tra i segmenti PQ e OP, OQ e OP, e PQ e OQ rimangono costanti al variare di P.

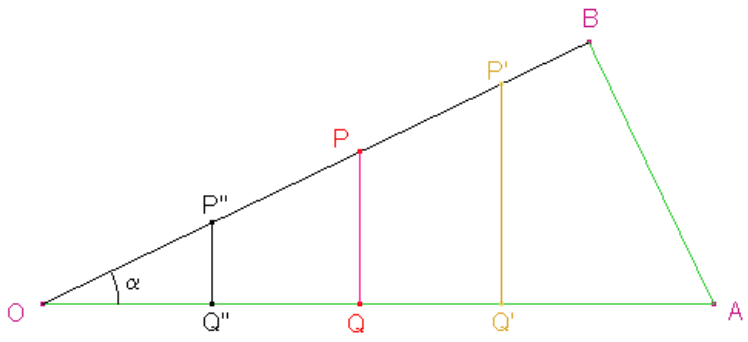


Figura 1

I valori di tali rapporti variano solo al variare dell'angolo α e sono univocamente determinati per ogni sua ampiezza. Si può dunque dire che variano in funzione dell'angolo ovvero che sono funzioni dell'angolo α, indicati rispettivamente con $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$.

L'insegnante può anche proporre agli studenti di esplorare la situazione attraverso misure effettuate su carta millimetrata con righello e goniometro o usando un software di geometria.
Questa prima fase porta all'introduzione delle nozioni di seno, coseno e tangente di un angolo acuto e consente di iniziare a proporre semplici esercizi di risoluzione di triangoli rettangoli.
La familiarità con i valori delle funzioni seno, coseno e tangente può essere ottenuta anche considerando triangoli rettangoli particolari, come quelli ottenuti dividendo a metà un triangolo equilatero o un quadrato. In questi casi, infatti, gli studenti devono solo applicare le loro conoscenze per ricavare i rapporti che caratterizzano le diverse situazioni.

Seconda fase

L'insegnante mette in evidenza la relazione tra seno, coseno, tangente e il valore associato dell'angolo e invita a riflettere sulle difficoltà che si presentano nel calcolare, in generale, tali valori, chiedendo, per esempio, "qual è il seno dell'angolo di ampiezza 7 gradi ?".
Tutto ciò può anche essere utilizzato come spunto motivante per un approfondimento storico sull'evoluzione degli strumenti di calcolo: dalle tavole alle calcolatrici, al software di geometria. Gli studenti, a questo punto, possono elaborare una tabella attraverso cui esaminare come, al variare dell'angolo, varino seno, coseno e tangente.
È utile sottoporre alla riflessione degli studenti i problemi che si presentano quando si deve calcolare il valore di tali funzioni cercando di operare opportune approssimazioni con l'uso di strumenti di calcolo.

Terza fase

L'insegnante, dopo aver suddiviso la classe in piccoli gruppi, propone i seguenti problemi. I problemi riportati sono presentati per argomento: i primi due propongono delle attività di scoperta di proprietà di figure, gli altri trattano questioni legate al mondo reale.

1. Teorema della corda.

   La lunghezza L di una corda AB di una circonferenza è sempre data da $L = 2r \sin\alpha$, in cui r è il raggio della circonferenza, α è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda AB e che sono inscritti nell'arco maggiore tra quelli individuati da AB (Figura 2).

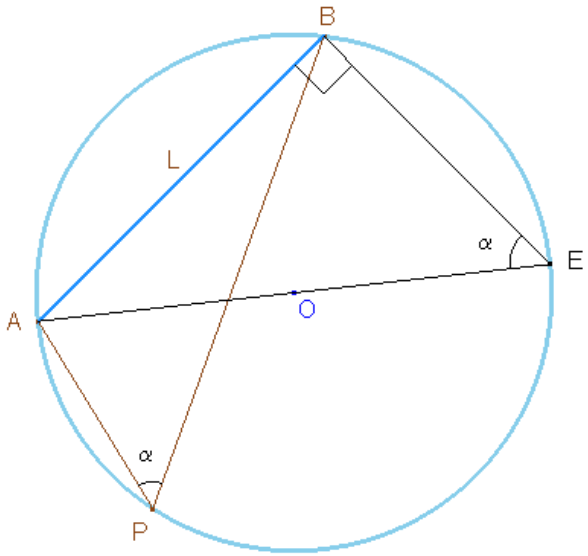


Figura 2

   L'estensione di questo teorema anche agli angoli inscritti nell'arco minore verrà fatta dopo aver generalizzato le funzioni goniometriche ad un angolo qualunque.

2. L'area di un triangolo ABC di cui sono noti due lati, AC e AB, e l'angolo compreso α, si può ottenere come semiprodotto fra i due lati e il seno dell'angolo compreso. Individuare una strategia per giungere a questa relazione (Figura 3).
   L'insegnante guida gli studenti a osservare come l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB sia il cateto del triangolo rettangolo ACH che è opposto all'angolo α e a esprimere l'area cercata come

$$S = \frac{1}{2} bc\,\mathrm{sen}\,\alpha\,.$$

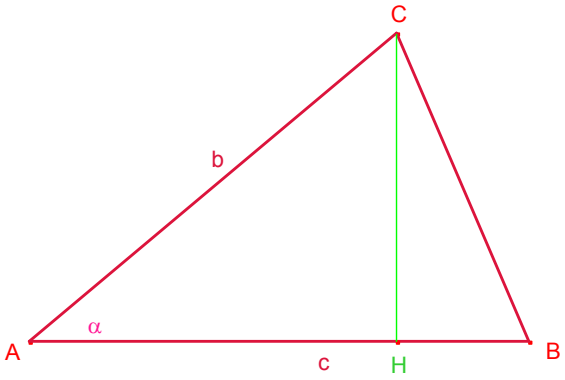


Figura 3

3. Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro in modo da toccarlo ad un'altezza di 3,6 m. Quale angolo forma la scala con il pavimento ? …e con il muro ?
4. Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore a quello della latitudine del luogo (trovandosi Roma alla latitudine di 41°, il pannello dovrà essere inclinato di 31°). A che altezza dal pavimento della terrazza arriverà la sommità del pannello ?
5. Quando una strada sale di 20 m, su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Quanto vale l'angolo di inclinazione della strada (rispetto all'orizzontale)?
6. Aristarco di Samo nel III secolo a. C. affronta il seguente problema: "Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante (90°); quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna ?"
   Il problema si può schematizzare con un triangolo LAS, rettangolo in L, di cui si conosce l'angolo
   Â = 87° e si vuol ricavare il rapporto AS/AL?
   Risolvere i seguenti quesiti:
   a. calcolare il rapporto AS/AL con l'angolo Â = 87°;
   b. calcolare il rapporto AS/AL, con le attuali misure che forniscono Â = 89° 51';
   c. confrontare i risultati ottenuti.

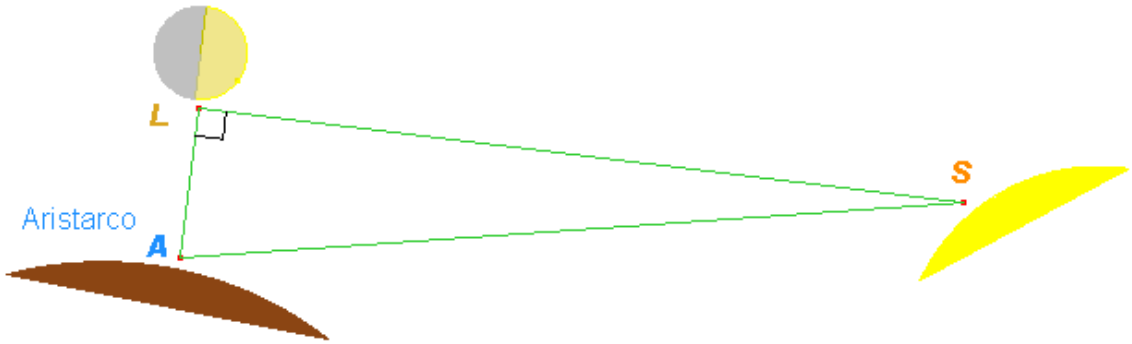


Figura 4

7. Dalla cima di una scogliera alta 50 m si vede una nave sotto un angolo di 20° rispetto all'orizzontale. Quanto dista la nave dalla scogliera?
8. Un ponte lungo 80 m attraversa un fiume formando un angolo di 50° con le sponde; qual è la larghezza del fiume?
9. Un faro è posto su un'isola. Elaborare una strategia per stimare la distanza del faro dalla spiaggia.
10. Quale strategia per la misura della profondità di un pozzo ?
11. Quale strategia per la misura dell'altezza della torre di Pisa ?

Quarta fase

Finora sono state analizzate situazioni relative ad angoli acuti, ma se l'angolo fosse ottuso? Per ampliare l'argomento e anche per introdurre le coordinate polari si può proporre agli studenti lo studio del radar, strumento indispensabile per la navigazione aerea e marittima, ma di cui spesso si ignora il funzionamento.

L'insegnante propone agli studenti la fotografia di un radar oppure lo mostra "funzionante" ricorrendo ai giochi di simulazione per il computer. Quando il radar è in funzione, una semiretta "spazza" lo schermo girando in senso antiorario; la presenza di un ostacolo che si trova nella direzione in cui punta la semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.

Il problema da porsi è: come individuare la posizione dell'ostacolo?

Si può schematizzare la situazione nel seguente modo (Figura 5):

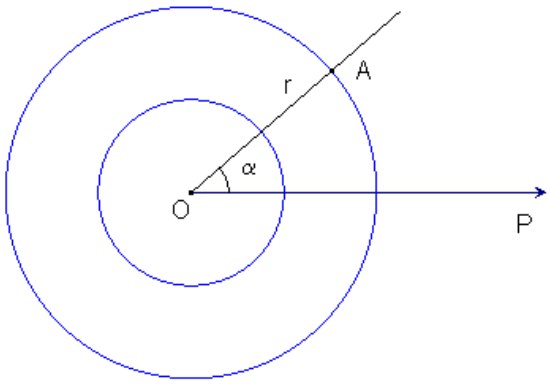


Figura 5

Sullo schermo si leggono direttamente due numeri: la distanza OA = r e l'angolo α che ha descritto la semiretta OA, a partire dalla posizione OP.

L'insegnante sottolinea perciò agli studenti che la posizione del punto A sullo schermo è quindi individuata da r e α, detti raggio e anomalia; precisa che il punto O è detto *polo* e la semiretta OP *asse polare*.
Dalla localizzazione del punto mediante tale coppia di numeri, legata al funzionamento del radar si può poi passare ad esprimere la posizione su una carta geografica, ricorrendo alle più consuete latitudine e longitudine: si traducono, dunque, le coordinate polari in coordinate cartesiane. L'asse polare viene fatto coincidere con il semiasse positivo delle *x* e gli studenti possono ora esprimere la posizione del punto considerato con le coordinate polari. Da questo o da altri esempi simili l'insegnante può prendere spunto per introdurre anche i valori di seno, coseno e tangente per angoli maggiori di 90°, senza limitarsi al I quadrante.
Dopo queste osservazioni il seno e il coseno di un angolo sono definiti per angoli compresi fra 0° e 360°, ovvero per un angolo qualunque.
A questo punto l'insegnante guida gli studenti al passaggio dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane con l'introduzione della circonferenza goniometrica.

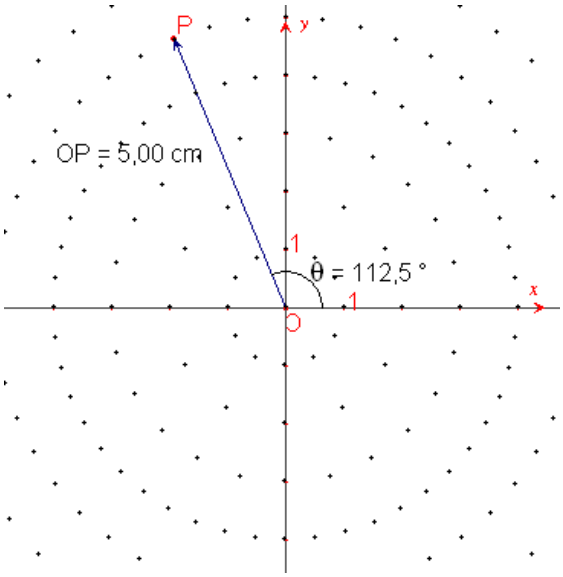


Figura 6

Possibili sviluppi

1. Misura del raggio terrestre (Eratostene).
2. Problematiche delle misurazioni a distanza: ieri e oggi.
3. Riflessione e rifrazione della luce.
4. Introduzione storica alla trigonometria.

Equivalenza nello spazio

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolare aree e volumi di solidi.	Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi. Proprietà dei principali solidi geometrici.	Spazio e figure Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Disegno Fisica

Contesto
Equivalenza: dal piano allo spazio.

Questa attività è proposta per il secondo biennio, alla fine della classe quarta.
Gli strumenti di cui avvalersi sono, oltre ad un software di geometria, modelli fisici di solidi, recipienti di forme diverse e ugual volume, …
Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle proprietà dei solidi geometrici e conoscere il problema dell'equivalenza e dell'equiscomponibilità nel piano.
L'obiettivo principale dell'attività è di comprendere la necessità di stabilire un principio iniziale, il principio di Cavalieri, per arrivare alla misura dell'estensione dei solidi elementari, preliminare ad un approccio più generale al problema della misura e allo studio di altri strumenti matematici che potranno essere oggetto di studi successivi.

Descrizione dell'attività

Prima fase
Si discute in classe sulla rappresentazione nel piano di figure che stanno nello spazio, con carta e matita e con l'uso di strumenti informatici.
Una buona rappresentazione prospettica di una figura solida presuppone conoscenze matematiche e tecniche grafiche non indifferenti. Si può accennare al metodo della assonometria e a quello della prospettiva, almeno nella rappresentazione dei solidi più semplici.
Le potenzialità dei software di geometria sono maggiormente utilizzate per l'insegnamento della geometria piana. Tali software, però, possono essere degli ottimi strumenti anche per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria dello spazio. Occorre inizialmente avere qualche nozione di disegno in modo da poter rappresentare nel piano delle figure che stanno nello spazio. Per questo si può usare in modo intuitivo una semplice rappresentazione come l'assonometria cavaliera. L'uso di un software di geometria permette di vedere in maniera dinamica, date le caratteristiche di variabilità delle figure che si possono tracciare, le proprietà delle figure dello spazio.

Di solito le figure nello spazio sono più difficili da realizzare rispetto a quelle piane e richiedono maggiori abilità. Non è quindi facile, con il disegno a mano libera, ottenere figure che visualizzino e rispettino le richieste dei problemi che possono nascere in geometria, ma anche in fisica o nelle altre scienze. Inoltre anche quando si utilizzano gli strumenti da disegno, e si costruisce una figura chiara e corretta con gli strumenti classici, tale figura, nella sua staticità, è ben lontana dalle possibilità offerte da una figura che si può manipolare. Usando le potenzialità dinamiche e interattive di un software di geometria e soprattutto la possibilità di creare facilmente delle animazioni sui fatti più importanti della geometria dello spazio, è possibile, invece, cambiare facilmente il punto di vista e variare tutti gli elementi di una data figura, esaminandola sotto vari aspetti.
Per disegnare correttamente nel piano una figura tridimensionale, si può usare il metodo dell'assonometria cavaliera, che è uno dei più semplici. Gli assi assonometrici, *x, y* e *z* sono situati in modo che due di essi sono fra loro ortogonali (assi *y* e *z*) e il terzo diretto arbitrariamente (l'asse *x*), purché non sul prolungamento dei precedenti. L'unità di misura sarà uguale sui primi due assi coordinati e arbitraria sul terzo (di solito, su questo asse, si sceglie la metà dell'unità di misura scelta sugli altri due assi).
L'assonometria cavaliera è un'assonometria obliqua perché si immagina di proiettare la figura solida su un piano, tramite un fascio di raggi paralleli (ad es. i raggi del sole).
Riferiamo lo spazio alla terna trirettangola *Oxyz,* facendo coincidere l'asse delle *y* con la cosiddetta "linea di terra". L'oggetto da rappresentare si suppone di solito contenuto nel triedro dei semiassi positivi.

Seconda fase

Si rivede l'equivalenza nel piano con un altro approccio (di Cavalieri), come introduzione intuitiva allo stesso metodo applicato alle figure nello spazio. Gli studenti conoscono la proprietà che dice: due parallelogrammi compresi tra due rette parallele sono equivalenti se hanno le basi uguali. Questo fatto di solito viene introdotto elementarmente usando l'equiscomponibilità. Ma si può anche affrontare l'argomento da un punto di vista più generale, che fa uso della teoria degli "indivisibili" di Cavalieri (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647). Esaminiamo la figura 1, dove sono disegnati due parallelogrammi aventi basi uguali e altezze uguali, e immaginiamo di spostare il punto *A'* e con esso la retta *A'B'* parallela ad *AB*. Dall'uguaglianza tra i segmenti *A'B'* e *E'F'*, segue l'equivalenza tra i due parallelogrammi. L'equivalenza tra figure del piano viene quindi ricondotta alla uguaglianza tra segmenti, *A'B'* e *E'F'* nella figura, che Cavalieri chiamava "indivisibili".

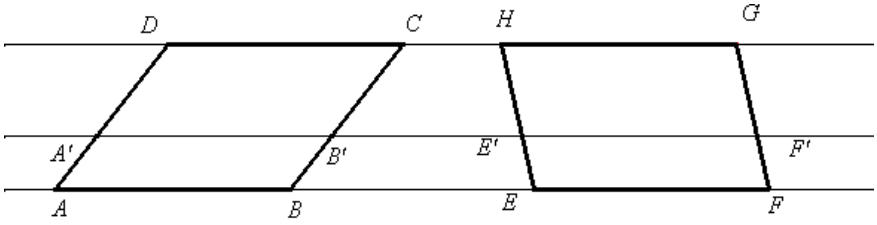


Figura 1

La precedente figura potrebbe essere generalizzata come nella seguente figura 2, ottenibile facilmente con un software di geometria.

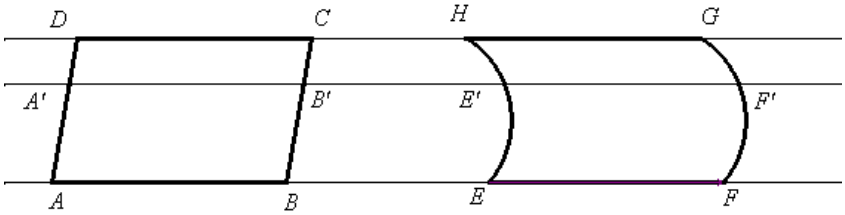


Figura 2

Analoghi ragionamenti possono essere fatti per triangoli aventi rispettivamente le basi e le altezze uguali.

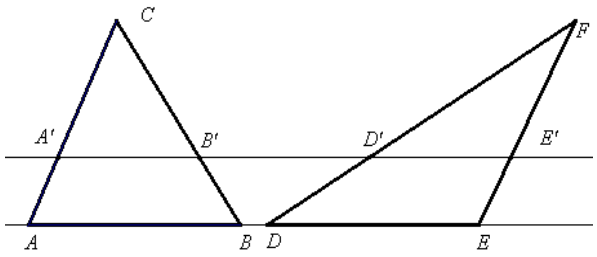


Figura 3

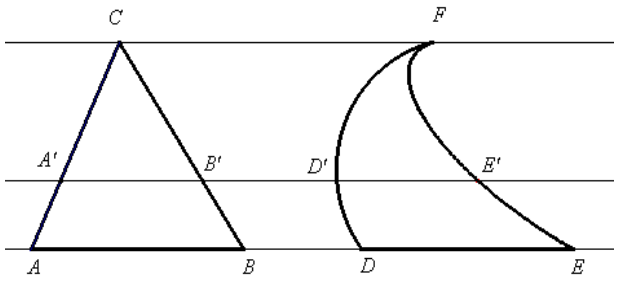


Figura 4

Terza fase

In questa fase dell'attività, dalle precedenti considerazioni sull'equivalenza nel piano, si passa all'equivalenza tra figure nello spazio, dove si osserva che l'equivalenza tra solidi equiscomponibili è un metodo piuttosto limitato e non sono generalizzabili i risultati trovati nel piano. Si possono, infatti, presentare solidi equivalenti che non sono equiscomponibili). Per arrivare alla misura dell'estensione dei solidi notevoli occorre quindi introdurre il "principio di Cavalieri".

Si può dire, in modo intuitivo, che con il principio di Cavalieri si stabilisce, per postulato, l'equivalenza tra due figure solide comprese tra due piani paralleli se un qualunque piano parallelo al piano di base le seziona secondo due figure tra loro equivalenti. In questo modo si riconduce l'equivalenza nello spazio all'equivalenza nel piano.

Un software di geometria si presta particolarmente bene per visualizzare il principio di Cavalieri, proposizione che comunque si deve assegnare come postulato per sviluppare la teoria dell'equivalenza tra figure nello spazio.

Un primo disegno si ottiene rappresentando in assonometria due prismi aventi basi equivalenti e altezze uguali. Si ottiene la Figura 5 che può essere utilizzata per meglio comprendere l'idea che sta alla base di questo metodo per stabilire l'equivalenza tra due prismi.

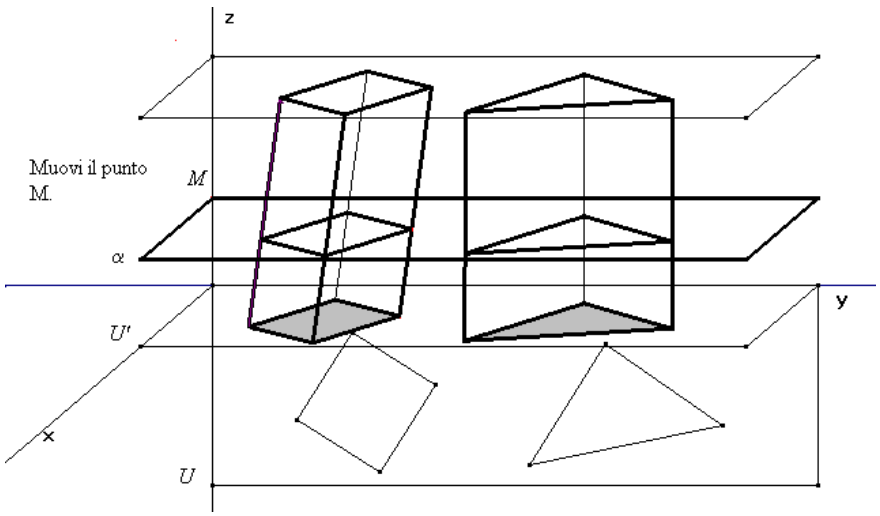


Figura 5

I poligoni di base sono equivalenti e possono essere modificati nella figura, mantenendo però la loro equivalenza. Tali poligoni si possono modificare, spostandone i vertici; analogamente il piano che seziona i prismi, parallelo al piano di base, può essere spostato parallelamente a se stesso, muovendo il punto *M*. I prismi possono mutare la loro altezza o diventare retti od obliqui, trascinando un punto base della figura.

In modo del tutto simile è stata ottenuta la Figura 6 su cui si possono fare le stesse osservazioni

viste in precedenza e dove è presente un solido più generale del prisma

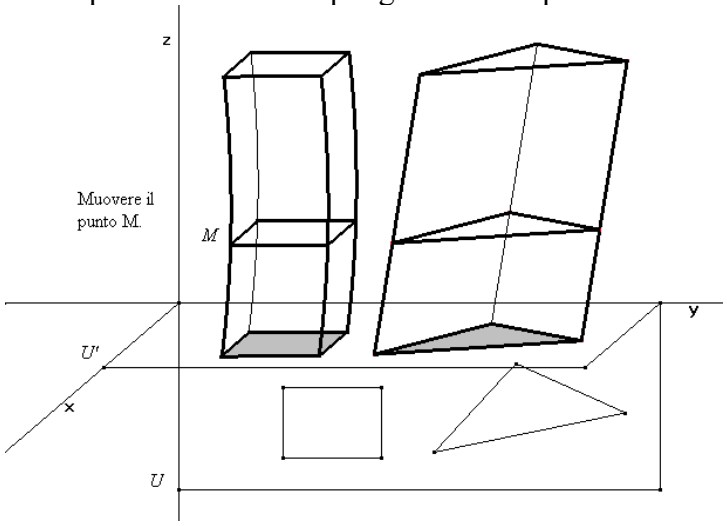


Figura 6

Analoga attività si può ripetere con una coppia di piramidi aventi basi equivalenti e la stessa altezza come mostrato nella Figura 7.

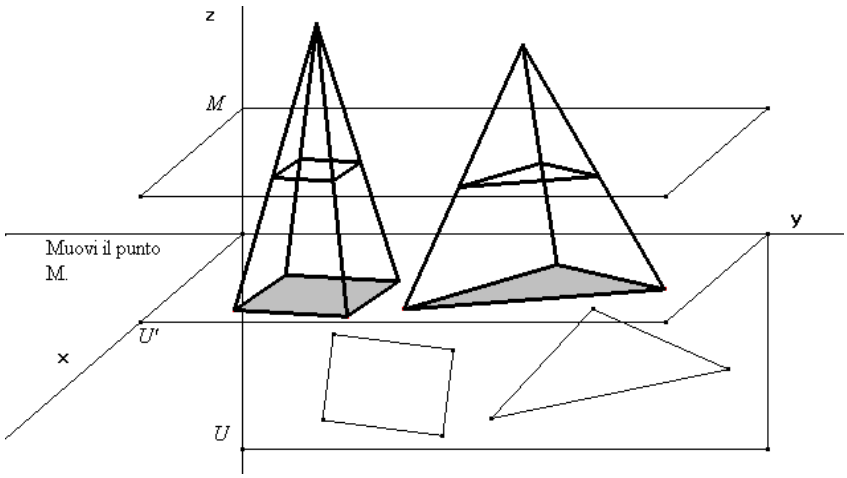


Figura 7

Una delle proposizioni più importanti nello studio del volume delle figure dello spazio afferma l'equivalenza tra un prisma a base triangolare e tre piramidi tra loro equivalenti.

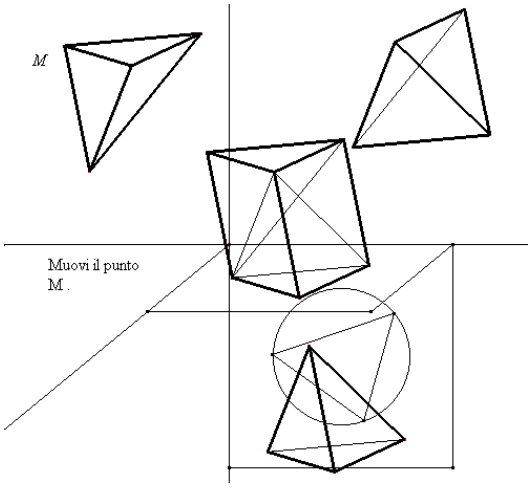


Figura 8

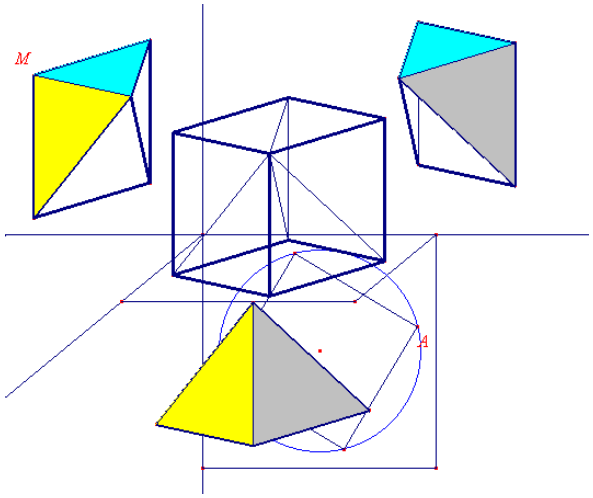


Figura 9

Per visualizzare questa proposizione si possono usare dei modelli fisici dei solidi geometrici oppure un software di geometria, con la possibilità di modificare interattivamente le caratteristiche del prisma e conseguentemente delle piramidi (Figura 8 e Figura 9).
Un'altra bella applicazione del principio di Cavalieri riguarda la determinazione del volume della sfera per via elementare. Si tratta della dimostrazione che fa uso della cosiddetta "scodella di Galileo" e che di solito viene svolta nelle classi dove non si ha a disposizione il calcolo integrale. Si dimostra che la sfera è equivalente alla figura detta "anticlessidra". L'anticlessidra si ottiene togliendo da un cilindro equilatero una "clessidra" formata da due coni uguali opposti al vertice O. Un cilindro circolare retto si dice "equilatero" se il diametro di base è uguale all'altezza. I coni che formano la clessidra hanno quindi l'altezza uguale al raggio di base.

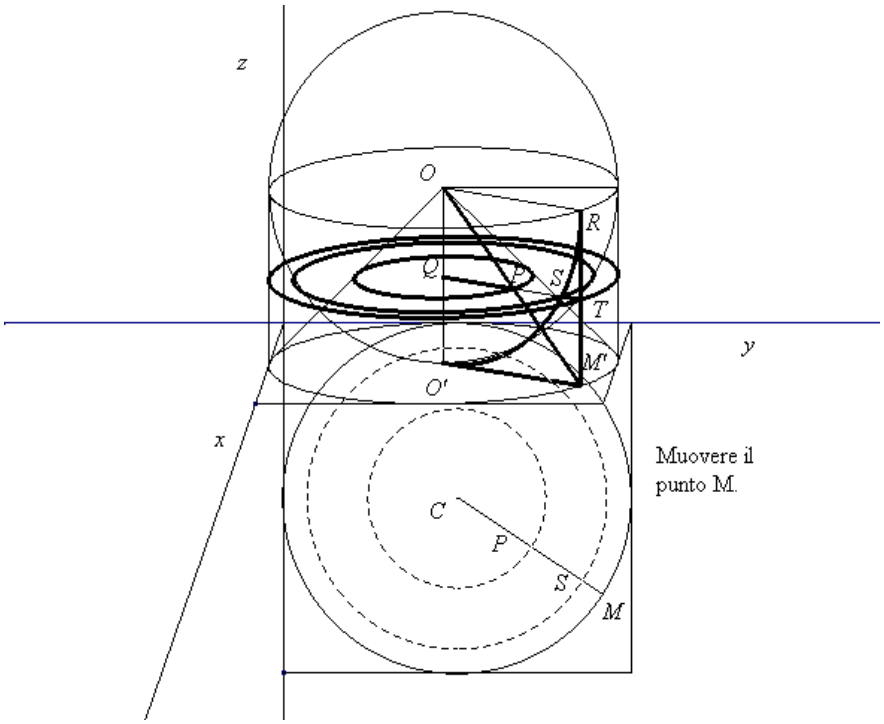


Figura 10

Nella dimostrazione citata viene usato il principio di Cavalieri per trovare l'equivalenza tra la "scodella di Galileo" e uno dei coni che formano la clessidra.
La dimostrazione è basata sull'equivalenza tra il cerchio di raggio *QP* e la corona circolare generata dal segmento *ST* in una rotazione completa attorno al punto *Q*.
Anche tale dimostrazione può essere visualizzata in modo dinamico con un software di geometria, spostando il punto *T* (Figura 10) si può visualizzare il variare del cerchio di raggio *QP* e della corona circolare generata da *ST*.

Possibili sviluppi

1. Determinazione del volume dell'ottaedro regolare, del volume del tetraedro regolare, …
2. Dal volume della sfera alla formula per la superficie della sfera; il "grande teorema" di Archimede (cilindro equilatero e sfera). Questa attività consente di presentare alcune questioni e approfondimenti anche con un approccio storico (il problema della misura; la "scodella" di Galileo; la nascita del calcolo integrale; …).

Elementi di prove di verifica

1. Disegna due poliedri equiscomponibili, ma che non siano nella relazione di Cavalieri.
2. Dato un cubo di spigolo *l* determina lo spigolo del cubo di volume doppio.
3. Dimostra che in un tetraedro le aree delle sue facce sono inversamente proporzionali alle relative altezze.
4. Trovare il volume di un ottaedro regolare di spigolo *l*.
5. Osservando la Figura 11, verifica che il volume di un tetraedro regolare è 1/4 del volume di un ottaedro che ha lo stesso lato.

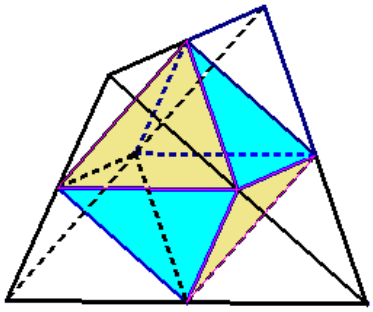


Figura 11

6. Un rettangolo di dimensioni *a* e *b* viene fatto ruotare di un giro completo attorno a uno dei suoi lati e genera così due cilindri. Hanno lo stesso volume?
7. I "tetrapack" (Figura 12), contenitori a forma di tetraedro regolare, sono costruiti a partire da un cilindro. Se il diametro del cilindro è 10 cm, trovare il volume del "tetrapak".

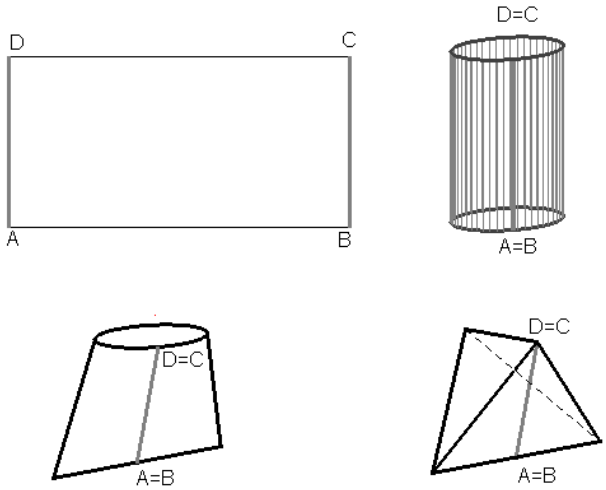


Figura 12

8. Un problema di Galileo sul cilindro (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*). Curvando in forma diversa due fogli rettangolari uguali (Figura 13), si ottengono due cilindri con lo stesso volume? I contadini del tempo di Galileo avevano capito che se con un pezzo di tela "più lungo per un verso che per l'altro", si costruisce la superficie laterale di un sacco, allora il sacco più basso e più largo contiene una maggiore quantità di grano.

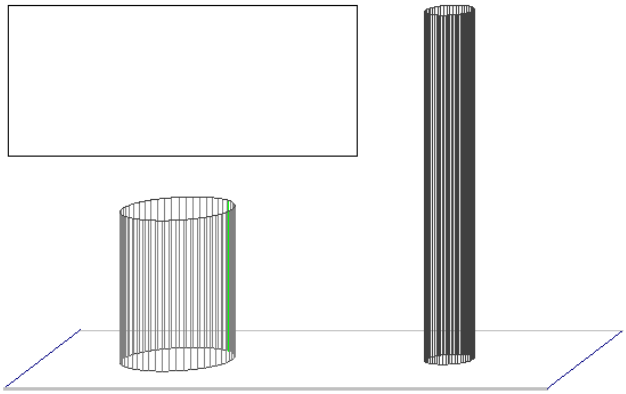


Figura 13

Riferimenti bibliografici

AA.VV., *Esplorare la Geometria con Cabri II*, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna 1998.

G. Accascina, G. Margiotta, *Alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri (Parte prima)*, Progetto Alice, n. 8, vol. III, 2002.

S. Bernecoli, L. Tomasi, *I poliedri regolari: un tema di geometria dello spazio rivisitato con Cabri-géomètre,* Quaderno n. 12 di CabrIrrsae, Bologna 1997.

A. Beutelspacher, *Matematica da tasca. Dall'abaco allo zero,* Ponte delle Grazie, Milano 2002.

P. Boieri (a cura di), *Fare geometria con Cabri,* Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", G. Battagin Editore, 1996.

P. Boieri (a cura di), *Fare geometria con Cabri,* Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", G. Battagin Editore, 1996.

P. Boieri, A. Ramassotto , *Da Cabri 1.7 a Cabri II,* CABRIRRSAE, Bollettino degli utilizzatori di Cabri-géomètre, n. 12, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna, Giugno 1997.

E. Castelnuovo, *Documenti di un'esposizione di matematica*, Boringhieri, Torino 1972.

E. Castelnuovo, M. Barra, *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino 1976.

E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *La matematica nella realtà,* vol. 1, La Nuova Italia, Firenze 1985.

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Boringhieri, Torino, 2002.

E. Crespina, "Tassellazioni come ambiente di esercizi", in *La geometria da un glorioso passato a un brillante futuro* (a cura di C. Marchini, F. Speranza e P. Vighi), Parma, 1992.

M. Dedò, *Forme*, Decibel-Zanichelli, Bologna, 1999.

W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica*, Zanichelli, Bologna 1992.

M. Gardner, *L'universo ambidestro*, Zanichelli, Bologna.

M. Impedovo, *Matematica, insegnamento e computer algebra*, Springer, Milano, 1999.

S. Lang, *La bellezza della matematica*, Boringhieri, Torino 1991.

L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, vol. 3°, Principato, Milano 1979.

L. Mancini Proia, M. Menghini, Coniche in cielo e in terra, in *Progetto Alice*, 2000 II, vol. I, n. 2.

W. Maraschini, M. Palma, *Format Spe, La formazione matematica per il liceo scientifico sperimentale,* vol. 3°, Paravia, Torino 2001.

G. Margiotta (a cura di), *Matematica e software didattico*, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna 1999.

G. Prodi, *Matematica come scoperta*, vol. I, G. D'Anna, Messina-Firenze, 1986.

G. Prodi, E. Magenes, *Elementi di analisi matematica*, G. D'Anna, Messina-Firenze 1986.

B. Scimemi, *Triangoli equilateri*, Cabrirrsae n. 18, 1998.

B. Spotorno, V. Villani, *Matematica. Idee e metodi,* La Nuova Italia, Firenze, 1979.

H. Steinhaus, *Matematica per istantanee,* Zanichelli, Bologna 1994.

L. Tomasi, *L'equivalenza nello spazio, resa dinamica e interattiva con Cabri II*, in CabriIrrsae n. 22, Bollettino degli utilizzatori di Cabri-géomètre, Bologna , Dicembre 1999; pp. 2-6;

L. Tomasi, *Geometria dello spazio con Cabri-géomètre e CabriJava: alcune possibilità didattiche in classe e nel Web*, in Notiziario dell'UMI, Ottobre 2001, Supplemento al n. 10, Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della Matematica, Salsomaggiore (PR) 13-14-15 aprile 2000, pp. 73-78;

V. Villani, "Aree, volumi e il terzo problema di Hilbert", in *Archimede*, n. 2/2001.

V. Villani, *La geometria: dallo spazio al piano*, Quaderno del CNR, Dipartimento di Matematica, Pisa, 1985.

Siti Web (2003)

Per gli argomenti di geometria si consiglia
il sito della rivista di CabrIrrsae, Bologna:
http://www.fardiconto.it

e il sito in lingua francese, adatto agli insegnanti, di "AbraCAdaBRI" :
http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/ConiquesGene.html

Sulle coniche e sui poliedri si consiglia di visitare il sito di Geneviève Tulloue (Università di Nantes, Francia):
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Coniques/Index_coniques.html

Sul punto di Fermat si possono trovare molte spiegazioni in questa pagina, in lingua inglese:
http://www2.evansville.edu/ck6/tcenters/class/fermat.html

Un sito molto vasto e di livello adatto agli insegnanti, in lingua inglese:
http://mathworld.wolfram.com

Sulle trasformazioni geometriche e sui gruppi dei fregi si consiglia il sito:
http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/

Sito "Cut-the-knot" di Alexander Bogomolny; sito adatto agli insegnanti, in lingua inglese:
http://www.cut-the-knot.com/content.html

RELAZIONI e FUNZIONI

Relazioni e funzioni

Il nucleo "Relazioni e funzioni" ha come contenuti principali le funzioni elementari, le equazioni e le disequazioni.
Le relazioni stesse sono appena accennate come contenuto. Si ritiene, infatti, che le relazioni, in particolare quelle d'ordine, non vadano presentate come argomento a sé, ma riconosciute e considerate durante l'esame delle proprietà dei vari insiemi numerici e delle funzioni elementari, in risposta al bisogno di cogliere i caratteri classificatori di concetti che nascono come generalizzazioni successive di proprietà note.
L'osservazione di relazioni tra grandezze rimane però il "substrato" del tema.
Uno dei maggiori obiettivi didattici di questo nucleo è, infatti, l'acquisizione da parte degli alunni di un "pensiero funzionale" [1]. Come lo si può favorire?
Con una forte connessione fra il grafico di una funzione, l'interpretazione dell'andamento, il collegamento di questo con l'espressione algebrica della funzione, gli aspetti numerici, e l'analisi di momenti particolari di questo andamento che corrispondono agli zeri (cioè alle equazioni), al segno (cioè alle disequazioni). Il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue è un teorema non dimostrato ma presente in tutto il percorso come "teorema in atto".
Ciò non vuol dire che non si possa parlare di equazioni e sistemi indipendentemente dallo studio delle funzioni, ma che, laddove possibile, si cerchi di favorire l'interazione con la rappresentazione geometrica.
Momenti particolari dell'andamento del grafico sono anche i massimi e i minimi, la crescenza e la decrescenza, il comportamento in prossimità di valori particolari; questa non è l'analisi matematica, perlomeno non è l'analisi matematica in senso classico. È lo studio qualitativo di un fenomeno.
La considerazione dei fenomeni a livello qualitativo deve diventare un'abitudine mentale degli alunni e degli insegnanti, se si vuole fare in modo che le tecniche che l'alunno imparerà nel corso degli anni non siano mai oggetto di applicazione meccanica, ma frutto di riflessione sui significati nei diversi contesti proposti. Ad esempio l'insegnante farà osservare i massimi e i minimi, la crescenza o la decrescenza di un andamento tutte le volte che si presenterà l'occasione, senza che il curricolo preveda un momento espressamente dedicato a questo argomento. Analogamente ci saranno situazioni che portano a risolvere equazioni esponenziali o goniometriche, senza che queste abbiano uno spazio dedicato esclusivamente alla loro trattazione.
Il bagaglio culturale che il cittadino potrà portare con sé alla fine del ciclo scolastico è quel "pensiero funzionale" che porta a riconoscere e utilizzare vari registri interpretativi di una stessa situazione.
Sono illustrate nove attività nel dettaglio, altre sono suggerite come possibili sviluppi o come prove di verifica. Si noterà che alcune di esse (in particolare la n. 2, la n. 4 e la n. 5) sono legate all'esperienza quotidiana o della vita sociale. Non si vuole con questo intendere che la matematica del cittadino sia solo quella applicata alla vita reale, ma piuttosto presentare esempi di modi di lavorare che consentano agli alunni stessi di reperire i dati necessari alla soluzione di un problema.
Non possono invece essere definiti davvero "reali" molti dei problemi presentati nell'attività 3. In quest'attività lo scopo didattico non è la matematizzazione del reale, bensì la formalizzazione di un problema, la traduzione del linguaggio naturale in linguaggio algebrico.
Nel secondo biennio i problemi "concreti" diventano un punto di partenza per avvicinare concetti più astratti quali quello di parametro, di successione ricorsiva, di limite.
Tuttavia, per quello che riguarda lo studio di funzioni, si ritiene importante mantenere un legame, se non con l'esperienza quotidiana, almeno con un problema di partenza. Si può arrivare a funzioni più complicate, ma solo se l'andamento del loro grafico può essere interpretato come modello di un fenomeno.

[1] Questo termine fu usato da Felix Klein come parola d'ordine per la sua proposta di riforma curricolare europea degli inizi del '900.

Alcune delle attività si configurano come attività di Laboratorio, come la n. 4, la n. 8. Ma ci si accorge facilmente che la distinzione fra le attività di Laboratorio e le altre è difficile. Infatti, da un lato quasi tutte le attività fanno uso di strumentazioni informatiche, dall'altro il Laboratorio non è solo l'uso di strumenti informatici, ma un modo di lavorare. Tutte le attività che qui vengono descritte sono in linea di massima oggetto di "didattica lunga".
La presenza di nuclei trasversali con attività proprie fa sì che molti argomenti che riguardano questo nucleo si possano trovare tra le attività dei nuclei "Misurare" , "Risolvere e porsi problemi", "Argomentare, congetturare, dimostrare".

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
1° biennio	Dalle espressioni algebriche alle funzioni	Numeri e algebra		
1° biennio	Risparmiare sulla bolletta del telefono	Esperienza quotidiana	Il marketing. I messaggi pubblicitari.	
1° biennio	La “traduzione” dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell’algebra.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico	Lingua italiana	
1° biennio	Redditi e tasse	Vita sociale	Diritto ed economia	
1° biennio	Diete alimentari	Alimentazione	Scienze	
2° biennio	La fabbrica dei cioccolatini	Vita sociale	Economia	
2° biennio	L’area dei rettangoli isoperimetrici	Figure geometriche		
2° biennio	La concentrazione di un farmaco nel sangue	Educazione alla salute	Scienze	
2° biennio	Moto di un proiettile	Applicazioni goniometriche	Fisica	

Dalle espressioni algebriche alle funzioni

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (per esempio variazione di una grandezza in funzione di un'altra; semplici successioni). Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare relazioni e funzioni.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti. Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita.	Relazioni e funzioni Numeri ed algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	

Contesto
Numeri e algebra.

Nello studio dell'algebra i polinomi, e più in generale le espressioni algebriche, sono visti in modo "statico" come oggetti e non come processi di calcolo. L'attività qui presentata favorisce una diversa concezione delle stesse espressioni e avvia al pensiero funzionale.
Ci si propone di calcolare il valore di un'espressione in una data variabile (che potremmo chiamare ad esempio x), modificando i valori di tale variabile. Non è necessario aver già introdotto il concetto di funzione, anzi, questo esempio di attività è propedeutico a tale argomento e rappresenta un primo approccio con i concetti più importanti che si incontreranno nello sviluppo di questo nucleo: zeri ed equazioni, segni e disequazioni, soluzioni approssimate.
Questa attività, che solo nei primi più semplici esempi può essere effettuata manualmente, è resa possibile dall'uso di uno strumento di calcolo che può essere: una calcolatrice grafica, un programma di elaborazione simbolica, un foglio elettronico o anche un qualunque linguaggio di programmazione.
La situazione ideale è che tutti gli studenti abbiano a disposizione, da soli o a coppie, uno strumento di calcolo (computer o calcolatrice grafica); in mancanza di questo può essere sufficiente che l'insegnante disponga di un dispositivo di proiezione per mostrare all'intera classe ciò che appare sullo schermo del suo computer o calcolatrice. Le attività potranno essere svolte, a seconda dei casi, utilizzando schede consegnate individualmente agli studenti oppure attraverso una lezione frontale dialogata.

Negli esempi mostrati qui di seguito viene utilizzata una calcolatrice grafica.

Descrizione dell'attività
Si vuole valutare il valore di una espressione algebrica in una sola lettera (ad esempio x) che varia, a partire da un valore iniziale incrementato con un passo fissato, in un insieme numerico definito.
Esaminando la seconda colonna della tabella di Figura 1 appare evidente che l'espressione cambia valore, assumendo valori positivi, negativi, nulli o impossibili. In un secondo momento potranno essere approfonditi gli aspetti relazionali e funzionali.

Prima fase

Si inizia lavorando con una tabulazione di valore iniziale zero, passo uno e con espressioni che presentino eventuali zeri o valori impossibili in corrispondenza di valori interi della variabile, facendo scorrere, se necessario, i valori della tabella nelle due direzioni.

Esempio 1

Ad esempio ecco come appare la tabulazione della funzione (che per il momento chiameremo "espressione") $\frac{x-2}{x-5}$ con un valore iniziale $x = 0$ e passo 1.

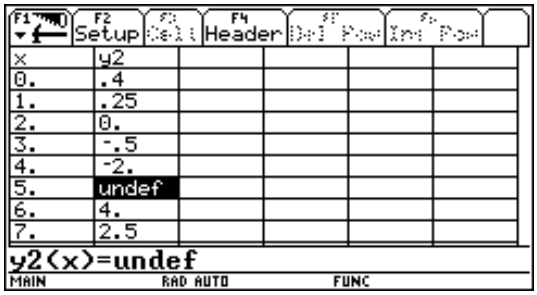


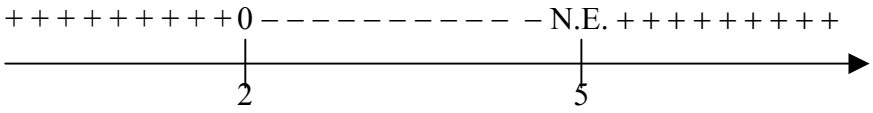
Figura 1

La prima colonna riporta i valori di x, la seconda i corrispondenti valori dell'espressione. Si noti che l'espressione si annulla per $x = 2$, risulta positiva in corrispondenza di certi valori, negativa in corrispondenza di altri; perde di significato se $x = 5$.

In questa fase esplorativa si può lavorare con qualunque tipo di espressione in una variabile; successivamente, quando si comincerà a parlare esplicitamente di funzione, si lavorerà con leggi che esprimono proporzionalità diretta, inversa e quadratica, passando poi via via agli altri tipi di funzioni.

Inizialmente può essere opportuno operare con funzioni a zeri interi e quindi immediatamente individuabili nella tabella se la variabile x ha un valore iniziale intero e passo 1.

Se l'insegnante lo riterrà opportuno, il modello "tabulare" potrà essere affiancato da un modello "geometrico" che traduce i medesimi risultati utilizzando un altro formalismo, ad esempio il seguente:



(N.E. sta per "non esiste" ovvero "impossibile")

Saranno poi possibili "esplorazioni" dirette scorrendo la tabella dei valori o modificando il passo di variazione della variabile.

Seconda fase

Si propongono esplorazioni più ardue, con espressioni che presentano zeri, o valori esclusi dal dominio, che sono numeri razionali esprimili con decimali limitati aventi un numero "ragionevolmente piccolo" di cifre dopo la virgola. Questa fase è caratterizzata dalla presenza di zeri individuabili solo dopo una modifica del passo.

Esempio 2

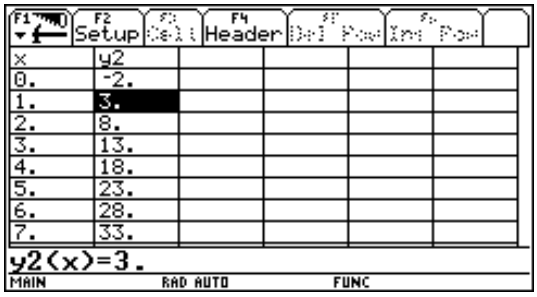


Figura 2. La tabulazione dell'espressione $5x - 2$ con passo 1 suggerisce la presenza di uno zero tra 0 ed 1.

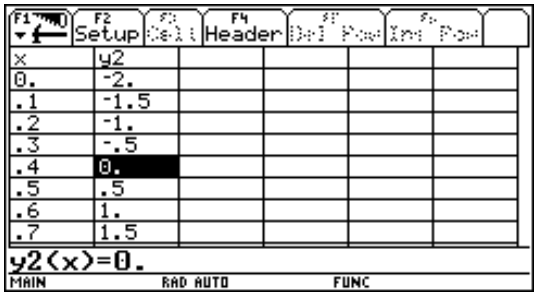


Figura 3. Una "rete a maglie più fitte" (cioè una scansione con passo 0,1) ci permette di individuare lo zero cercato.

Terza fase

In questa fase sono proposti esempi con zeri "inafferrabili" perché irrazionali.

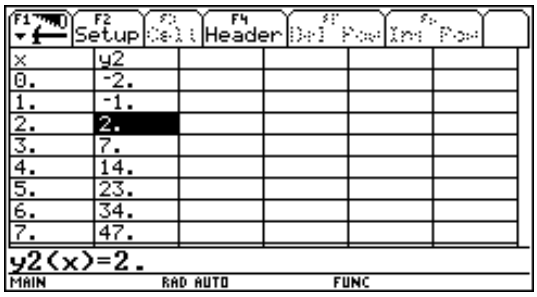


Figura 4. Un'esplorazione della tabella dei valori del polinomio $x^2 - 2$ suggerisce la presenza di uno zero tra 1 e 2. Ovviamente l'esistenza dello zero è assicurata solo in situazione di continuità della funzione nel suo insieme di definizione. A questi livelli però la cosa può essere data per scontata e ripresa solo in tempi successivi.

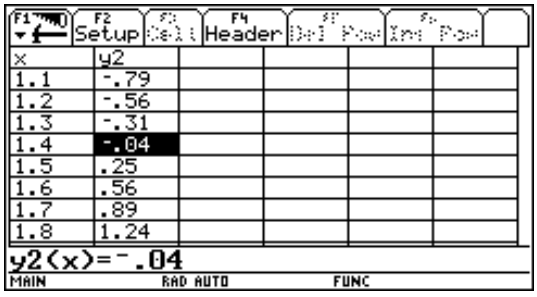


Figura 5. Una scansione con passo 0,1 permette di ipotizzare la presenza dello zero tra 1,4 e 1,5.

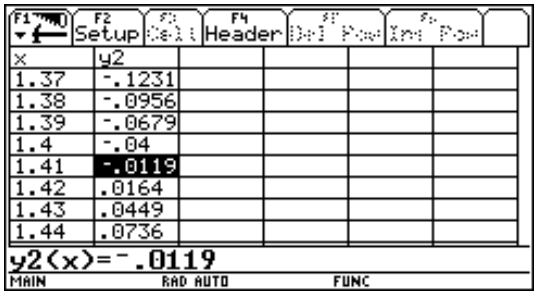


Figura 6. Una scansione ancora più fine ci indica l'intervallo di estremi 1,41 e 1,42.

Lo zero (irrazionale in questo caso) è inafferrabile con la nostra "rete a maglie necessariamente razionali"; non riusciremo quindi mai a individuarlo ma solo a circoscriverlo in intervalli via via più ristretti.

E' da sottolineare che al momento in cui si svolgono queste attività gli studenti non hanno ancora gli strumenti algebrici per risolvere equazioni e disequazioni; infatti l'obiettivo di queste attività è, come si è detto, offrire un modello mentale dando una percezione numerica e dinamica "globale" delle espressioni algebriche.

Questo tipo di attività può essere svolta in poche lezioni, più ovviamente il tempo necessario per la padronanza dello strumento che si utilizza. Una calcolatrice grafica normalmente possiede già un apposito ambiente di tabulazione e quindi non richiede che pochi minuti di addestramento per la creazione, la modifica e la scansione di una tabella; altri strumenti come un foglio elettronico o un sistema di elaborazione simbolica (che in questo contesto è opportuno usare in *modalità approssimata*) richiedono un tempo di preparazione molto maggiore.

Da queste esplorazioni sorgeranno poi spontaneamente i limiti di tale modo di agire: ad esempio la difficoltà che talora si presenta nell'individuare gli zeri (si pensi alla tabulazione dell'espressione $5x^2 - 1$) o i valori in corrispondenza dei quali l'espressione $\frac{7x-8}{6x-7}$ assume valori negativi.
Si presenta così la necessità di un procedimento esatto che permetterà di individuare gli zeri o di studiare il segno di una espressione e si potranno quindi introdurre il concetto di equazione e di disequazione e le relative tecniche di calcolo.

Possibili sviluppi
Questo metodo di lavoro può diventare abituale per gli studenti anche negli anni successivi e diventare un modello mentale utile per altre attività come:

- Grafici di funzioni
- Studio di funzioni nel secondo biennio
- Equazioni e disequazioni trascendenti
- Comportamento delle funzioni per valori molto grandi o prossimi a determinati valori (asintoti)
- Introduzione al concetto di limite
- Differenze finite e pendenza

Risparmiare sulla bolletta del telefono

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (per esempio variazione di una grandezza in funzione di un'altra). Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, il grafico. Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, le funzioni costanti. Funzioni lineari Sistemi lineari e loro interpretazione geometrica.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Porsi e risolvere problemi	Il marketing I messaggi pubblicitari

Contesto
Esperienza quotidiana.

Si vuole affrontare una situazione reale, partendo da dati reali, in modo tale che a mano a mano che ci si addentra nel problema si scoprano le difficoltà di districare e "linearizzare" una situazione che è volutamente complessa, come nei problemi di scelta reali. Sarà l'insegnante a guidare il lavoro, semplificando e riducendo eventualmente l'indagine a casi particolari.
Questa attività può essere utilizzata come primo approccio allo studio delle funzioni lineari.

Descrizione dell'attività
È opportuno lavorare con piccoli gruppi e organizzare momenti di confronto frequenti. Per le modalità di gestione dei lavori di gruppo e, più in generale, delle dinamiche di interazione sociale, si rimanda alla premessa del laboratorio di matematica.
Nell'attività i momenti essenziali sono un'indagine su Internet, o sui giornali, sulle diverse offerte di tariffe telefoniche di una stessa società o di società diverse; la selezione di tre o quattro offerte che presentano, rispetto alla scelta condivisa (telefonia fissa o mobile, collegamenti a Internet, ..), le caratteristiche a cui si è più interessati; raccolta e catalogazione di dati; discussione guidata per arrivare alla costruzione, per ciascuna tariffa, di una funzione che esprima il costo in relazione ai consumi.
La difficoltà di costruire un modello che rappresenti una situazione così complessa suggerisce di fornire alcune bollette tipo per scegliere dati standard (per esempio rispetto al numero di chiamate).
L'uso di tecnologie informatiche, in particolare di un foglio elettronico, è fortemente consigliato per la tabulazione dei dati e la loro rappresentazione grafica.

L'attività offre l'opportunità di avviare una discussione sul ruolo delle variabili in un modello (in un primo tempo si considera costante il numero delle chiamate e variabile il numero dei minuti di conversazione; in un secondo momento, possono essere considerati costanti i minuti e variabile il numero delle chiamate).
Si può anche evitare la ricerca su Internet iniziale; in tal caso sarà l'insegnante a farsi carico di procurare le prime informazioni. A nostro avviso la ricerca dei dati, pur richiedendo un tempo considerevole, ha il pregio di coinvolgere maggiormente gli studenti nella risoluzione dei problemi proposti.

Prima fase
Si avvia la ricerca per "trovare i dati" relativi all'indagine che si è proposta. Si selezionano quindi alcune tariffe, per esempio quelle che sono descritte in modo più chiaro e sono più semplici da leggere. Analizzando i dati verrà fuori che non è facile tenere presente tutti i tipi di chiamate (verso telefoni fissi, verso cellulari, collegamenti a Internet, telefonate interurbane e telefonate internazionali). È opportuno quindi scegliere solo alcuni casi (si può poi lasciare come esercizio l'analisi di altre situazioni al momento non prese in considerazione). Come esempio, qui si è scelto di analizzare quattro tariffe della stessa società tenendo conto solo delle chiamate urbane e interurbane (telefoni fissi) e dei collegamenti a Internet.

Tariffa A
Urbane e interurbane 1,49 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.
Con il collegamento a Internet: 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.
Costo mensile: € 5,58, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55).

Tariffa B
Nazionali: costo mensile fisso di € 39, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55). Le telefonate sono gratuite senza limiti di tempo.
Con il collegamento a Internet: 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.

Tariffa C
Locali e interurbane a € 0 al minuto + costo di chiamata 12,50 centesimi, IVA inclusa.
Con il collegamento a Internet: 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.
Costo mensile: € 5,58, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55).

Tariffa D
Urbane e interurbane in numero illimitato senza limiti di tempo.
Con il collegamento a Internet: 20 ore mensili gratuite, ore successive 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.
Costo mensile: € 55,15, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55).

Seconda fase
Si discute collettivamente sulla natura del lavoro da fare. Eventualmente l'insegnante per stimolare la discussione può porre alcune domande come, per esempio, "*che cosa dobbiamo considerare per valutare il costo di una chiamata? Quali informazioni ci servono per poter confrontare i costi mensili delle diverse offerte? Quante volte dobbiamo considerare lo scatto alla risposta? Quali sono le costanti nella spesa di una telefonata e quali quantità invece variano col passare del tempo? Quant'è la spesa dovuta a Internet?*".

Per semplificare il problema si distinguono due casi:

a) si fissa il numero delle chiamate e si fa variare il tempo;
b) resta fisso il tempo di ogni chiamata e si fa variare il numero di chiamate.

Nell'esempio che si propone si analizza in un primo tempo il caso di una persona che fa, ogni mese, circa 300 telefonate e si collega per 20 ore a Internet con 80 collegamenti da 15 minuti ciascuno[1]. In questo modo l'unica variabile è il tempo (i minuti di conversazione). La consegna è quella di determinare il costo della bolletta in funzione dei minuti di conversazione.
In un secondo momento si determina, per ognuna delle quattro tariffe telefoniche, l'andamento del costo della bolletta in funzione del numero di scatti alla risposta (cioè del numero di chiamate con risposta), supponendo di conoscere il tempo medio di ogni chiamata (espresso in minuti), il numero di scatti per il collegamento a Internet e i minuti di collegamento a Internet.
Si suppone che il tempo medio di ogni chiamata sia 4 minuti; il numero di scatti per il collegamento a Internet 80; i minuti di collegamento a Internet 1200 (20 ore).
In una esperienza precedente gli studenti hanno avuto a disposizione il foglio elettronico e lo hanno utilizzato per tabulare e rappresentare i dati.
Indicando con $y = f(t)$ il costo della bolletta in funzione del tempo di conversazione, si ha (per un numero fisso di 300 telefonate con scatto alla risposta):

Tariffa A
$y = (5{,}5800 + 16{,}5500) + 300 \cdot 0{,}0619 + 0{,}0149 \cdot t + 80 \cdot 0{,}0619 + 1200 \cdot 0{,}0092 \Rightarrow$
$y = 0{,}0149 \cdot t + 56{,}6920.$

Tariffa B
$y = (39{,}0000 + 16{,}5500) + 80 \cdot 0{,}0619 + 1200 \cdot 0{,}0092 \Rightarrow y = 71{,}5420.$

Tariffa C
$y = (5{,}5800 + 16{,}5500) + 300 \cdot 0{,}1250 + 80 \cdot 0{,}0619 + 1200 \cdot 0{,}0092 \Rightarrow y = 75{,}6220.$

Tariffa D
$y = (55{,}1500 + 16{,}5500) \Rightarrow y = 71{,}7000.$

Indicando con $y = f(n)$ il costo della bolletta in funzione del numero di scatti alla risposta, si ottiene (per una durata media di 4 minuti a telefonata):

Tariffa A
$y = (5{,}5800 + 16{,}5500) + n \cdot 0{,}0619 + 4 \cdot 0{,}0149 \cdot n + 80 \cdot 0{,}0619 + 1200 \cdot 0{,}0092 \Rightarrow$
$y = 0{,}1215 \cdot n + 38{,}1220.$

Tariffa B
$y = (39{,}0000 + 16{,}5500) + 80 \cdot 0{,}0619 + 1200 \cdot 0{,}0092 \Rightarrow y = 71{,}5420.$

Tariffa C
$y = (5{,}5800 + 16{,}5500) + 0{,}1250 \cdot n + 80 \cdot 0{,}0619 + 1200 \cdot 0{,}0092 \Rightarrow y = 0{,}1250 \cdot n + 38{,}1220.$

Tariffa D
$y = (55{,}1500 + 16{,}5500) \Rightarrow y = 71{,}7000.$

[1] Questi dati sono emersi dalle bollette telefoniche portate in classe dagli studenti ai quali l'attività è stata proposta. Si è scelto di considerare come dato generico standard di riferimento non una media fra i vari dati disponibili, ma la moda relativa alle diverse distribuzioni.

Terza fase

Si raccolgono i lavori di gruppo e si illustrano collettivamente i risultati, cercando di giungere a una versione condivisa. Nel caso in cui i lavori degli studenti siano incompleti, l'insegnante integra e commenta le soluzioni. Da questo momento il problema si riduce a un classico problema di scelta (l'offerta più vantaggiosa rispetto alla situazione considerata e ai dati a disposizione). Per la discussione di questo problema l'insegnante utilizza tre diversi registri: quello numerico, quello grafico (disegno delle rette corrispondenti) e quello formale (equazione della funzione).

CONFRONTO TRA TARIFFE TELEFONICHE PER MINUTI DI CONVERSAZIONE				
Numero di scatti alla risposta 300		Numero di scatti per il collegamento ad Internet 80		Minuti di collegamento ad Internet 1200
Tempo di conversazione (in minuti)	tariffa A	tariffa B	tariffa C	tariffa D
11	56,8559	71,5420	75,6220	71,7000
201	59,6869	71,5420	75,6220	71,7000
501	64,1569	71,5420	75,6220	71,7000
1201	74,5869	71,5420	75,6220	71,7000
1331	76,5239	71,5420	75,6220	71,7000

Tabella 1

CONFRONTO TRA TARIFFE TELEFONICHE PER NUMERO DI SCATTI ALLA RISPOSTA				
Tempo medio di ogni chiamata (in minuti) 4		Numero di scatti per il collegamento ad Internet 80		Minuti di collegamento ad Internet 1200
Numero di scatti alla risposta	tariffa A	tariffa B	tariffa C	tariffa D
10	39,3370	71,5420	39,3720	71,7000
100	50,2720	71,5420	50,6220	71,7000
202	62,6650	71,5420	63,3720	71,7000
301	74,6935	71,5420	75,7470	71,7000
349	80,5255	71,5420	81,7470	71,7000

Tabella 2

Possibili sviluppi

- La complessità delle singole proposte darà la possibilità di aprire la discussione con altri insegnanti sulle questioni legate al marketing e ai messaggi pubblicitari. Lo stesso tipo di indagine può essere riferita ad altri tipi di prodotti o servizi.
- Problemi di programmazione lineare.

Elementi di prove di verifica

1. Il cellulare di Pierino.
Pierino ha ricevuto in regalo un telefono cellulare. Ora sta cercando di capire quale sia il profilo tariffario che gli conviene maggiormente e, per questo, ha cercato e poi trovato alcune tariffe che ha selezionato. Aiutiamolo nella scelta! Le tariffe sono queste:

	TARIFFA A	TARIFFA B	TARIFFA C	TARIFFA D
Tipo	Scheda prepagata	Scheda prepagata	Abbonamento del costo di € 12 al mese	Scheda prepagata
Scatto alla risposta	Senza scatto alla risposta	Con scatto alla risposta del costo di 15 centesimi di euro	Senza scatto alla risposta	Senza scatto alla risposta
Tariffazione	Per secondi di effettiva conversazione	Per secondi di effettiva conversazione	Per secondi di effettiva conversazione	Per secondi di effettiva conversazione
Costo della conversazione	24,6 cent. / min.	20,4 cent. / min.	16,2 cent. / min.	25,8 cent. / min.
Costo SMS	15 centesimi	15 centesimi	15 centesimi	14 centesimi

Tabella 3

Per decidere quale sia la tariffa più conveniente nei vari casi, rispondete a queste domande, cominciando, per ciascuna domanda, col formalizzare la situazione, aiutandovi anche con grafici.

1) Considerando le tariffe senza abbonamento, con e senza scatto alla risposta, qual è la durata minima di una telefonata (in minuti e secondi), perché sia più conveniente la tariffa con scatto alla risposta?
2) Considerando le tariffe senza scatto alla risposta, con e senza abbonamento, quanti secondi (o minuti) totali di conversazione in un mese sono necessari perché convenga la tariffa con abbonamento?
3) Il papà regala a Pierino ogni mese una ricarica di € 25 di traffico utile. Se Pierino invia ogni mese 150 SMS, quale tariffa, tra la A e la D, gli permette di conversare più a lungo? E se inviasse solo 60 SMS?

2. Temperatura e calore
Sul manuale di fisica viene proposta la seguente situazione:
"Una massa m_f di ferro viene portata a una temperatura t_1= 200°C e poi viene immediatamente posta in un contenitore pieno d'acqua che si trova (prima che il blocco di ferro venga introdotto) a una temperatura t_0 = 18°C. Se non vi sono dispersioni di calore con l'ambiente esterno, il blocco di ferro cede calore alla massa d'acqua m_a, fino a che la massa d'acqua e il blocco di ferro raggiungono la stessa temperatura di equilibrio t_x. La quantità di calore Q (espressa in calorie) ceduta o acquistata da un corpo è data da $Q= mc(t_f-t_i)$, dove m è la massa del corpo, c il suo calore specifico, t_f e t_i, rispettivamente, le temperature finale e iniziale"

a) Assumendo uguale a 1 il calore specifico c dell'acqua, indica come varia la temperatura t dell'acqua in funzione del calore ceduto dalla massa m_f di ferro alla massa m_a di acqua.
b) Determina la temperatura t_x di equilibrio indicando con c_f il calore specifico del ferro.

La traduzione" dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura. Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita. Sistemi lineari. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite.	Relazioni e funzioni Numero ed algoritmi Risolvere e porsi problemi Argomentare, congetturare, dimostrare	Lingua italiana

Contesto
Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.

Questa attività può essere introdotta nella prima classe; è centrata sulla traduzione dal linguaggio naturale, in cui sono formulate le situazioni problematiche, a quello algebrico, che ne permette la matematizzazione e l'eventuale soluzione. Il contesto è prettamente linguistico: infatti, affronta le difficoltà che lo studente incontra nel passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico; sposta il fulcro dell'attenzione didattica dagli algoritmi risolutivi alla traduzione e messa in formula dei problemi. È qui che si concentrano le maggiori difficoltà degli studenti: la matematica viene da loro percepita come puro strumento operativo; si tratta, invece, di presentarla come strumento di pensiero, mettendo in luce anche gli aspetti concettuali; infatti la matematica può maggiormente contribuire a rispondere a questa esigenza se la si concepisce come arte del ragionamento e non come puro ricettario di calcolo.

Descrizione dell'attività
Con questa attività l'insegnante propone agli studenti di *tradurre*[1] problemi enunciati nella lingua italiana in equazioni, verificando se sono buoni traduttori di un testo dal linguaggio naturale a quello algebrico. Tale attività è fondamentale per la comprensione e l'utilizzo delle equazioni.

[1] La traduzione è un processo che parte da un testo (A), per arrivare a un altro testo (B).
Nella scuola la traduzione è percepita comunemente come un'operazione che riguarda le lingue, classiche e moderne; ad esempio nello studio delle lingue classiche (Greco e Latino) la traduzione costituisce la prova di verifica più frequente.
Invece la traduzione è utilizzata anche in ambito matematico; in particolare, è evidente la sua funzione nella costruzione di formule ed enunciati che rappresentano definizioni, proposizioni e teoremi.
Infatti tali enunciati devono possedere due elementi fondamentali: *tradurre* in *linguaggio specifico* il *linguaggio naturale* e *riassumere* la *natura*, la *forma* o altre *caratteristiche* e *proprietà* degli *oggetti* e *concetti* matematici a cui si applicano.

Per procedere con ordine nella traduzione si suggerisce di dividere la pagina in due colonne: a sinistra si scrive il problema in modo che risultino chiare le parti in cui il suo testo può essere suddiviso, a destra si scrivono le formule.
In tal modo si produce una prima rielaborazione del testo; è importante che si tratti di una rielaborazione fedele, altrimenti il problema può cambiare.
Dopo avere suddiviso il testo nelle sue varie parti, si passa alla seconda fase del lavoro: tradurre in linguaggio algebrico il testo scritto nella colonna di sinistra. Per fare questo si devono, naturalmente, individuare le variabili cui riferire il testo.
Si tratta di un compito particolarmente delicato: la buona individuazione dei dati, delle incognite e dei relativi legami è infatti determinante per ottenere una traduzione fedele e semplice del problema, in modo da poterlo risolvere usando opportunamente le regole dell'algebra. Si noti che il numero delle incognite non è predeterminato ma dipende dalla traduzione.
Una cattiva traduzione o una individuazione delle variabili meno immediata può infatti rendere faticoso il successivo lavoro algebrico e favorire gli errori.
Il compito richiesto in questa fase è quindi di comprensione di un testo e in questo senso occorre mobilitare le risorse!

Esempio 1: un'eredità

Un padre di tre figli morì lasciando in eredità 1600 monete d'oro. Il testamento precisava che il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo e che al secondo a sua volta spettavano 100 monete più dell'ultimo. Si domanda la quota di ciascuno.

Le fasi da seguire per ottenere una buona traduzione sono:

1. Comprensione
   - *Quali sono le incognite, cioè quello che si vuole sapere?*

   Ovviamente si tratta delle somme che spettano ai tre figli (ci sono quindi tre incognite: le somme che spettano al maggiore, al medio e al minore dei tre figli).
   - *Che cosa è dato?*

   La quantità di monete lasciata in eredità dal padre, cioè 1600 monete.
   - *Quali condizioni legano il dato alle incognite o le incognite tra di loro?*

   La prima incognita è la seconda aumentata di 200; la seconda è pari alla terza aumentata di 100.

A questo punto, si scrivono nella colonna di sinistra le parti in cui risulta diviso il testo del problema:

Incognite Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli	
Dati Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	
Condizioni Il testamento precisava che: ➢ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1ª condizione); ➢ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2ª condizione).	

Nella traduzione dal testo originale al testo in tabella che abbiamo scelto, compaiono nell'ordine: le incognite, i dati, e infine le condizioni, mentre, in italiano corrente, prima ci sono i dati, poi le condizioni e infine le incognite. Questo non deve stupire; capita spesso nelle traduzioni sia nella stessa lingua che da una lingua all'altra di non poter copiare passo passo il testo ma di doverlo in qualche modo adattare al contesto che si considera o alla lingua straniera. In questo caso la lingua straniera è il linguaggio algebrico della matematica.

Si passa ora alla traduzione vera e propria in *"algebrichese"*.
La prima cosa da fare per riempire la colonna di destra è abolire le parole e passare alle formule.
Il linguaggio della matematica, in questo caso l'algebra, non è fatto di parole ma di simboli, o meglio, le parole della matematica non sono quelle della lingua italiana, ma segni che si combinano tra loro per costituire formule più o meno complicate secondo regole ben precise, quelle dell'algebra. Del resto ogni linguaggio tecnico usa termini specifici di cui si richiede la comprensione.
Iniziamo allora a riempire lo spazio delle incognite usando opportuni segni che possono essere arbitrari, ma che conviene scegliere in modo che siano facili da ricordare e riconoscere. Per le incognite utilizziamo qui le ultime lettere dell'alfabeto.
Consideriamo poi il dato che in questo caso semplicemente costituito dal numero 1600 (le monete d'oro).

Incognite	Incognite
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli:	
quota del maggiore	x
quota del medio	y
quota del minore	z
Dati	Dati
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	1600
Condizioni	
Il testamento precisava che: ➢ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1ª condizione); ➢ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2ª condizione).	

2. Ricerca delle condizioni
Studiamo ora tutte le condizioni o relazioni che legano tra loro dati e incognite, notando che queste ultime sono numeri che soddisfano le condizioni del problema, quindi su esse si può operare allo stesso modo in cui si opera sui dati.
Apparirà allora naturale tradurre le frasi:
- "Il maggiore dei tre deve avere 200 monete più del secondo" nella formula algebrica: $x = 200 + y$
- "Al secondo spettano 100 monete più dell'ultimo" nella formula algebrica: $y = 100 + z$.

Incognite	Incognite
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli:	
quota del maggiore	x
quota del medio	y
quota del minore	z
Dati	Dati
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	1600
Condizioni	Condizioni
Il testamento precisava che: ➢ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1ª condizione); ➢ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2ª condizione).	$x = 200 + y$ $y = 100 + z$

Si noti che il numero delle incognite non è determinato a priori. Ad esempio, per diminuirne il numero si può usare una traduzione diversa che tenga conto di una condizione e indicare la quota del medio direttamente con x-200.

A questo punto si osserva che si hanno relazioni che legano le incognite tra di loro, ma nessuna condizione che leghi il dato (1600) alle incognite.
In realtà è scontato che la somma delle tre quote spettanti ai figli sia di 1600 monete: ciò compare implicitamente nel problema, per il significato della parola eredità; ma non è stato tradotto nel linguaggio algebrico!
Basta considerare che è $x+y+z=1600$, condizione implicita nel testo italiano del problema, ma che va esplicitata quando si passa alla sua traduzione nel linguaggio algebrico.

3. Esplicitazione delle relazioni nascoste
Si passa quindi a formulare, secondo le modalità indicate nella seguente tabella, le condizioni già esplicite e quelle implicite nel testo:

Incognite	Incognite
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli:	
quota del maggiore	x
quota del medio	y
quota del minore	z
Dati	Dati
1600 monete d'oro	1600
Condizioni	Condizioni
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro.	$x+y+z=1600$
Il testamento precisava che:	
➢ Il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo	$x = 200 + y$
➢ Al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo	$y = 100 + z$

Nel testo originale del problema, le 1600 monete compaiono con un doppio significato, che viene esplicitato nella formulazione matematica:
1. Dato (è un dato che si parli di 1600 monete);
2. Condizione (le 1600 monete sono l'eredità per i tre figli: c'è quindi una relazione tra dati e incognite).

E' tipico della matematica che i suoi segni significhino una sola cosa per volta e mai più di una cosa alla volta (come invece succede spesso in italiano). Del resto capita anche nelle traduzioni in una lingua straniera di dover esplicitare o ripetere parole (ad esempio pronomi) che in italiano non compaiono.

4. L'uso del linguaggio algebrico per risolvere il problema
Il lavoro di traduzione dalla lingua naturale al linguaggio algebrico non è sempre facilissimo.
Le regole date possono aiutare, ma solo la pratica rende bravi traduttori, così come la conoscenza delle regole grammaticali è di aiuto per fare traduzioni tra due lingue, ma da sola non basta.
Una volta che il problema è tradotto in linguaggio algebrico corretto, si possono utilizzare le regole di calcolo per determinare la soluzione, che in questo caso è: $x = 700$; $y = 500$; $z = 400$.

Esempio 2: Viaggio aereo
Le linee aeree permettono a ciascun passeggero di portare in franchigia (cioè senza costi aggiuntivi) un bagaglio non superiore ad un certo peso, oltre il quale deve pagare per il trasporto in ragione dei chilogrammi in eccedenza. Il sig. Carlo e sua moglie fanno un viaggio in aereo con un bagaglio che complessivamente pesa 54 kg e devono pagare € 21 per i chilogrammi oltre la franchigia. Il sig. Carlo pensa che se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli (suoi e della moglie) dovrebbe invece pagare € 51.
Si chiede qual è il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia.

Analogamente a quanto visto nel precedente esempio, impostiamo la seguente tabella:

Incognite Il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia	Incognite x
Dati Il bagaglio complessivamente pesa 54 kg devono pagare € 21 per i kg oltre la franchigia (insieme) se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli dovrebbe pagare € 51	Dati 54 21 51
Condizioni .	Condizioni

E per le condizioni? Occorre esplicitare le relazioni nascoste.

Quando i viaggiatori sono due hanno diritto ad una franchigia di $2x$ (kg) e pagano per questo € 21; se il sig. Carlo fosse solo avrebbe diritto ad una franchigia di x kg e dovrebbe pagare € 51.
Se P è il prezzo che la compagnia aerea fa pagare per ogni chilogrammo di bagaglio oltre la franchigia, si possono scrivere le condizioni:

1. $P \cdot (54-2x) = 21$

2. $P \cdot (54-x) = 51$

Infatti, quando sono in due, i coniugi pagano solo per i chilogrammi oltre la franchigia, cioè per il peso $54- 2x$; quando il signor Carlo è solo, il bagaglio pesa sempre 54 kg, ma la franchigia è ridotta a x kg.
Possiamo allora scrivere:

Incognite Il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia Il prezzo per ogni chilogrammo di bagaglio oltre la franchigia	Incognite x P
Dati Il bagaglio complessivamente pesa 54 kg devono pagare € 21 per i kg oltre la franchigia (insieme) se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli dovrebbe pagare € 51	Dati 54 21 51
Condizioni Il prezzo quando sono in due è di € 21 Il prezzo se il sig. Carlo è solo è di € 51.	Condizioni $P \cdot (54-2x) = 21$ $P \cdot (54-x) = 51$

Impostazione dell'equazione

Nell'ultima cella della seconda colonna il prezzo P compare due volte:

$$(1)\ P = \frac{21}{54-2x};$$

$$(2)\ P = \frac{51}{54-x}$$

Si possono allora eguagliare i secondi membri di (1) e (2); si ottiene l'equazione:

$$(3)\quad \frac{21}{54-2x} = \frac{51}{54-x}$$

L'equazione (3) viene trasformata nelle seguenti equazioni:

$$21(54 - x) = 51(54 - 2x)$$

$$1134 - 21x = 2754 - 102x$$

$$102x - 21x = 2754 - 1134$$

$$81x = 1620$$

$$x = 20$$

La soluzione è 20 chilogrammi, volendo si può calcolare anche P(€ 3,50) ma non è richiesto dal problema.

Si sintetizzano nella tabella seguente le fasi fondamentali nel processo di traduzione di un problema:

1. Comprensione Cercare di capire bene: a) che cosa bisogna trovare (Incognita o Incognite) b) che cosa è dato o conosciuto (Dati) c) in che modo i dati e le incognite sono legati tra loro (Condizione o Condizioni)
2. Ricerca delle condizioni Esaminare ancora il problema nel modo più naturale, considerandolo risolto e cercando di vedere con chiarezza, in ordine conveniente, tutte le relazioni che devono intercorrere fra le incognite e i dati, in rapporto alle condizioni.
3. Esplicitazione delle relazioni nascoste In matematica, e in algebra in particolare, il linguaggio è più semplice di quello naturale: non sono ammessi i sottintesi. Occorre tradurre le parole in formule e cercare di esprimere una stessa quantità in due modi diversi, ottenendo così un'equazione.
4. Uso del linguaggio algebrico per risolvere il problema Usare le regole del calcolo algebrico per trasformare le equazioni date in altre ad esse equivalenti, ma in cui è immediato riconoscere la soluzione.

Elementi di prove di verifica

1. In pizzeria
In una pizzeria del centro il sabato la pizza margherita costa 1 Euro in più rispetto ai giorni infrasettimanali. Con la stessa somma il sabato si possono mangiare 5 pizze mentre nei giorni infrasettimanali se ne possono mangiare 6, quanto costa la pizza il sabato?
Prova a costruire problemi analoghi con l'acquisto di gelati: coni grandi o piccoli.

2. L'età di mia madre
La mia età è 11/16 di quella di mia madre e quattro anni fa ne era i 2/3. Quanti anni ha mia madre?
Prova a costruire un problema per far scoprire al tuo compagno di banco l'età di tua madre.

3. Euro
Marta e Claudio possiedono insieme la somma di x euro. Se Claudio dà a Marta y euro, la somma che gli rimane è i 2/3 di quella in possesso di Marta. Quanti euro aveva ciascuno di loro inizialmente?
Prova a costruire un problema analogo con gli euro che avete in tasca tu e una tua compagna.

4. Triangolo
Quanto misura il lato di un triangolo equilatero sapendo che la somma della base con l'altezza misura b?
Prova a pensare a un problema che chiede la misura di un lato di un triangolo che non sia equilatero, cosa succede? Puoi ancora calcolarne un lato conoscendo la somma della base e dell'altezza? Hai bisogno di altri dati? Come faresti se il triangolo fosse rettangolo isoscele?

5. Cerca il numero
Un numero supera di due il triplo di un altro. Trova almeno due numeri che soddisfano la condizione data.
Prova a pensare a problemi analoghi e a farli risolvere a un bambino che frequenta la scuola elementare.

6. Senza calcoli
Senza fare calcoli, spiega perché c'è un solo valore del coefficiente k per cui il sistema delle due equazioni $x - y = 2$, $x - ky = 0$, non ammette soluzioni.
Prova a costruire esempi concreti che non ammettono soluzioni

Redditi e tasse

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura. Costruire modelli sia discreti che continui di evoluzione di fenomeni nel tempo. Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Funzioni lineari, costanti a tratti, lineari a tratti. Equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita.	Relazioni e funzioni Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Diritto ed economia

Contesto
Vita sociale.

Questa attività può essere introdotta, in una seconda classe del primo biennio o verso la fine del primo anno del primo biennio, quando gli studenti hanno già affrontato il problema della rappresentazione di funzioni lineari e hanno un'idea delle tecniche risolutive di semplici equazioni di primo grado.
L'attività propone una prima riflessione su un problema di un certo interesse sociale, utilizzando strumenti matematici elementari per meglio comprendere le caratteristiche di un sistema di tassazione dei redditi. Qui si illustra quello in vigore in Italia alla fine del 2002 e alcune proposte di modifica di inizio 2003. L'insegnante avrà cura di adattare l'attività a eventuali successive modifiche della legge. Il modello che viene preso in considerazione non tiene conto di varie eccezioni e particolarità di applicazione del sistema di tassazione dei redditi.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre nozioni come quelle di funzione lineare a tratti e di modello; consente inoltre di affinare tecniche legate alla risoluzione di equazioni e disequazioni e offre l'occasione di utilizzare strumenti informatici per la rappresentazione grafica di funzioni. Inoltre, invita a riflettere su un problema sociale di interesse comune, offrendo occasioni per una collaborazione con l'insegnante di diritto ed economia in primo luogo, ma anche con quello di storia ed educazione civica. Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi collaborativi di studenti, richiedendo di riportare la discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone qualche lettura sul sistema di tassazione dei redditi (è possibile trovare vario materiale in Internet o sui quotidiani), precisando come ha funzionato il sistema in vigore fino alla fine del 2002 e proponendo un confronto con le proposte di modifica che sono state avanzate agli inizi del 2003.
Per esempio, può precisare che, fino al 2002 le aliquote IRPEF in vigore per i corrispondenti scaglioni di reddito complessivo erano le seguenti:

18% per redditi fino a 20 milioni[1] annui
24% per i redditi fino a 30 milioni annui
32% fino a 60 milioni annui
39% fino a 135 milioni annui
45% per redditi oltre i 135 milioni annui

Prima di suddividere la classe in piccoli gruppi di lavoro, l'insegnante può domandare quanto gli studenti pensano che un funzionario che ha un reddito complessivo, per esempio, di 120 milioni debba versare alle imposte. Il fatto che molti studenti rispondano 40 680 000 lire, ossia il 39% di 120 000 000, suggerisce che l'attività proposta ha senso: molte e frequenti sono, infatti, le incomprensioni sui sistemi di tassazione dei redditi e tali incomprensioni possono persistere anche dopo l'inserimento dello studente nel mondo del lavoro. Ciò può creare ostacoli a una partecipazione critica alla vita pubblica, che dovrebbe essere obiettivo primario di ogni corso scolastico a ogni livello e per ogni disciplina.
Il commento dell'insegnante a risposte di questo tipo è finalizzato a far rifletter gli studenti sul fatto che chi guadagna 120 000 000 non potrà essere tassato al 39% per l'intero ammontare, perché una parte del suo reddito, per esempio quella fino a 20 milioni, è tassata al 18%. Bisogna quindi distinguere tra *tasso marginale* di imposta e *tasso medio*.

Seconda fase

L'insegnante suddivide gli studenti in piccoli gruppi collaborativi di lavoro, formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).
I problemi proposti ai vari gruppi sono i seguenti:
1. Quanto dovranno versare un operaio che ha un reddito lordo di 30 000 000 annui e un dirigente che ha un reddito lordo di 200 000 000 annui alle imposte, secondo il sistema di tassazione riportato nella seguente tabella?
18% per redditi fino a 20 milioni annui
24% per i redditi fino a 30 milioni annui
32% fino a 60 milioni annui
39% fino a 135 annui
45% per redditi oltre i 135 milioni annui

2. Determinare una funzione lineare a tratti che descriva l'ammontare y delle tasse che un lavoratore che ha un reddito complessivo x dovrebbe versare alle imposte, al variare del reddito x.

3. Rappresentare graficamente in un piano cartesiano xOy l'andamento della funzione $y = y(x)$ determinata al passo precedente.

4. Determinare quale era la fascia di reddito lordo di Ariele nel 1998, sapendo che le tasse pagate da Ariele in quell'anno ammontavano a 18 000 000 di lire. Risolvere il problema sia formalmente che graficamente, individuando, in questo caso, una soluzione approssimata per via grafico – numerica.

[1] Gli scaglioni di riferimento della vecchia legge vengono ancora espressi in lire: l'insegnante può chiedere agli studenti di calcolare l'equivalente in euro (1 euro = 1936,27 lire).

5. Quale è la percentuale media pagata nel 1998 (di tasse sul reddito lordo) da Calibano che in quell'anno ha guadagnato 52 000 000? Dare un significato geometrico – grafico a questa percentuale media.

Terza fase

L'insegnante coordina la sessione di intergruppo nella quale individua un gruppo incaricato di proporre le soluzioni fornite ai vari problemi. Gli altri studenti intervengono chiedendo chiarimenti, ponendo domande, proponendo soluzioni alternative, suggerendo miglioramenti e completamenti; la sessione di lavoro è coordinata dall'insegnante che ha il compito di far sì che nessuno studente rimanga escluso dalla discussione.
Alla fine della discussione l'insegnante dovrebbe cercare di riassumere gli aspetti più interessanti delle varie risoluzioni e quelli emersi durante la discussione.

Quarta fase

L'insegnante fa presente agli studenti che il sistema di tassazione è in effetti più complicato di quello che è stato presentato nella precedente attività, perché le tasse sono determinate non solo calcolando la percentuale sul corrispondente scaglione di reddito, ma anche tenendo conto delle detrazioni di imposta e delle deduzioni sul reddito. L'insegnante avrà cura, magari con l'aiuto di colleghi di altre discipline, di spiegare ricorrendo a esempi, il significato di questi termini tecnici.
Quindi propone a ciascun gruppo di lavoro la lettura di un articolo che descriva una delle proposte di modifica del sistema di tassazione di redditi avanzate alla fine del 2002 (il testo qui di seguito riportato è solo un esempio, costruito da un documento riportato sul sito http://www.portaleaziende.it/notizie/view.php?p=728, "il portale delle aziende in materia fiscale societaria e aziendalistica" del 13 febbraio 2003). L'insegnante avrà cura di cercare in rete o sui quotidiani, o di costruirlo egli stesso, un testo adeguato ai propri studenti.

Proposta di lavoro

Leggete con attenzione il seguente testo che si propone di spiegare più in dettaglio il funzionamento di un sistema di tassazione dei redditi (in particolare uno di quelli proposti tra la fine del 2002 e il gennaio 2003 per sostituire il precedente sistema di tassazione). Redigete un documento che possa spiegare, a uno studente di primo anno di scuola superiore che non ha mai letto alcunché sull'argomento, i principi di funzionamento di un sistema di tassazione dei redditi uguale a quello presentato nel testo e rispondete alle domande che vi vengono poste all'interno del testo.

[...]
Le novità introdotte dall'art. 2 riguardano:
- una nuova tabella delle aliquote d'imposta;
- l'introduzione di una nuova deduzione dal reddito;
- una nuova modalità di determinazione della base imponibile;
- la previsione di nuove detrazioni d'imposta.
[...]
3.1 La deduzione base
[...]
Il comma 1 del nuovo articolo 10-bis prevede una deduzione pari a 3.000 euro (deduzione base) a favore di tutti i contribuenti.
[...]
3.2 Le ulteriori deduzioni dell'art. 10-bis
[...]

Per riepilogare, la deduzione di 3.000 euro è aumentata di un importo corrispondente a: 4.500 euro (ragguagliati al periodo di lavoro) per i possessori di redditi di lavoro dipendente, ad esclusione dei redditi derivanti dalle pensioni di ogni genere […]

4.000 euro (ragguagliati al periodo) per i possessori di redditi derivanti dalle pensioni di ogni genere […]
1.500 euro per i titolari di redditi di lavoro autonomo o di impresa minore. […]
Il legislatore ha precisato espressamente che le deduzioni previste in favore dei lavoratori dipendenti e assimilati, dei pensionati e dei lavoratori autonomi e delle imprese minori non sono cumulabili tra loro e pertanto se alla formazione del reddito complessivo concorrono due o più delle tipologie reddituali contemplate dalla predetta disposizione, il contribuente potrà fruire della deduzione più favorevole.

Domanda 1: qual è l'importo massimo delle deduzioni teoricamente applicabili?[2]

In particolare è previsto che la deduzione (di € 7500, 7000, 4500 o 3000) spetta per la parte corrispondente al rapporto tra un ammontare fisso di 26.000 euro aumentato delle deduzioni previste e degli oneri deducibili[3] e diminuito del reddito complessivo e del credito d'imposta[4], e lo stesso importo di 26.000 euro.
Se il predetto rapporto è maggiore o uguale a 1, la deduzione compete per intero; se lo stesso è pari a zero o minore di zero, la deduzione non compete; negli altri casi la deduzione è proporzionale al valore del rapporto di cui si considera il valore troncato alle prime quattro cifre decimali.

Domanda 2: quale è una formula che esprime la deduzione dal reddito effettivamente spettante?[5]

La deduzione effettivamente spettante va sottratta dal reddito complessivo per determinare il reddito imponibile sul quale applicare le aliquote d'imposta.
[…] Per effetto della nuova formulazione del comma 1 dell'articolo 11 risultano quindi rimodulati gli scaglioni di reddito e ridefinite le aliquote applicabili ai predetti scaglioni. Le nuove aliquote e gli scaglioni di reddito sono i seguenti:
23 %, per i redditi compresi tra 0 e 15 000 euro
29 %, per i redditi superiori a 15 000 ma non a 29 000 euro
31 %, per i redditi superiori a 29 000 ma non a 32 600 euro
39 %, per i redditi superiori a 32 600 ma non a 70 000 euro
45 %, per i redditi superiori a 70 000 euro.
[…]

Domanda 3: ipotizzando l'assenza di oneri deducibili e di credito di imposta, quale è il reddito imponibile di un dipendente che ha un reddito lordo di 20 000 euro annuo? E di un dipendente che

---

[2] € 7500, per un lavoratore dipendente o assimilato (3000 di base + 4500); € 7000, per un pensionato (3000 di base + 4000); € 4500, per un esercente arti o professioni o per un titolare di impresa minore (3000 di base + 1500).
[3] Per semplicità si suppone di essere in situazioni in cui non siano presenti oneri deducibili.
[4] Per semplicità si suppone di essere in situazioni in cui non siano presenti crediti di imposta.
[5] siano d = importo massimo deduzione teoricamente spettante, o = oneri deducibili; r = reddito, c = credito di imposta, f = deduzione dal reddito effettivamente spettante.

Allora si ha: $f = \begin{cases} 7500, & d+o-r-c>0 \\ \dfrac{26000+d+o-r-c}{26000}\cdot 7500, & -26000 \le d+o-r-c<0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$.

ha un reddito lordo annuo di 7500 euro? E di un dipendente con reddito lordo annuo di 33 500 euro*?*

Domanda 4: su alcuni quotidiani, nei primi giorni del febbraio 2003 è comparsa la seguente ipotesi semplificatrice di tassazione dei redditi, che individua due sole fasce di reddito:

- *23% per i redditi fino a 100 000 euro*
- *33% oltre il suddetto importo*.

Senza altre informazioni, è possibile confrontare le due proposte?
Supponendo che il sistema di deduzioni per determinare il reddito imponibile funzioni allo stesso modo nelle due proposte, confrontate i due sistemi di tassazione dal punto di vista del contribuente.

Possibili sviluppi:

- Confronto fra la prima delle proposte presentate e il sistema di tassazione dei redditi in vigore nel 2002.
- Studio dell'evoluzione dei sistemi di tassazione dei redditi in Italia dopo la seconda guerra mondiale.
- Confronto tra i sistemi di tassazione dei redditi in diversi paesi europei ed extraeuropei.

.

Elementi di prove di verifica

1. Confronti tra diversi sistemi di reddito.

La tabella di Figura 1 e il grafico di Figura 2 sono una prima e semplificata descrizione del sistema di redditi americano vigente nel 1990[6]. Tenere presente che anche nel sistema americano erano previste deduzioni. Per questo motivo, per calcolare le tasse effettivamente da pagare, si deve moltiplicare l'aliquota (espressa in percentuale nella tabella) per il reddito effettivamente tassabile (ossia il reddito meno le deduzioni). Per trovare il reddito effettivamente tassabile, una famiglia dovrebbe togliere dal reddito percepito una deduzione fissa di 5450 dollari ($ 5450) e una ulteriore deduzione di $ 2050 per ogni persona della famiglia. Per esempio, nella Figura 2, si prende in considerazione una famiglia di 4 persone, alla quale spetta una deduzione di $ 13 650.
Osservando attentamente la tabella di Figura 1 e il grafico di Figura 2, rispondete alle seguenti domande:

a) Quanto doveva pagare di tasse una famiglia di quattro persone che percepiva nel 1990 un reddito di $ 10 000?
b) Quanto doveva pagare di tasse una famiglia di quattro persone che percepiva nel 1990 un reddito di $ 20 000?

Commentate il seguente grafico che vuole descrivere alcune caratteristiche del sistema di tassazione dei redditi americano vigente nel 1990 (in Figura 2 con Taxable Income si intende il reddito effettivamente tassabile; con Adjusted Gross Income si intende il reddito lordo non ancora diminuito con le deduzioni spettanti; il Nontaxable Income è la parte di reddito non tassabile a causa delle deduzioni spettanti; con slope si intende la pendenza della retta; l'actual taxe rate è l'aliquota effettiva, mentre il marginal taxe rate è l'aliquota prevista nel corrispondente scaglione di reddito).

[6] Riferimento sul sito http://illuminations.nctm.org/lessonplans/9-12/taxes/index.html

TABLE 1

The 1990 Tax Brackets in Terms of Taxable Income

Tax Bracket	Taxable Income Reported	
	Over	Not Over
15%	$ 0	$ 32 450
28%	32 450	78 400
33%	78 400	162 770
	(the so-called bubble bracket)	
28%	162 770	...

Figura 1

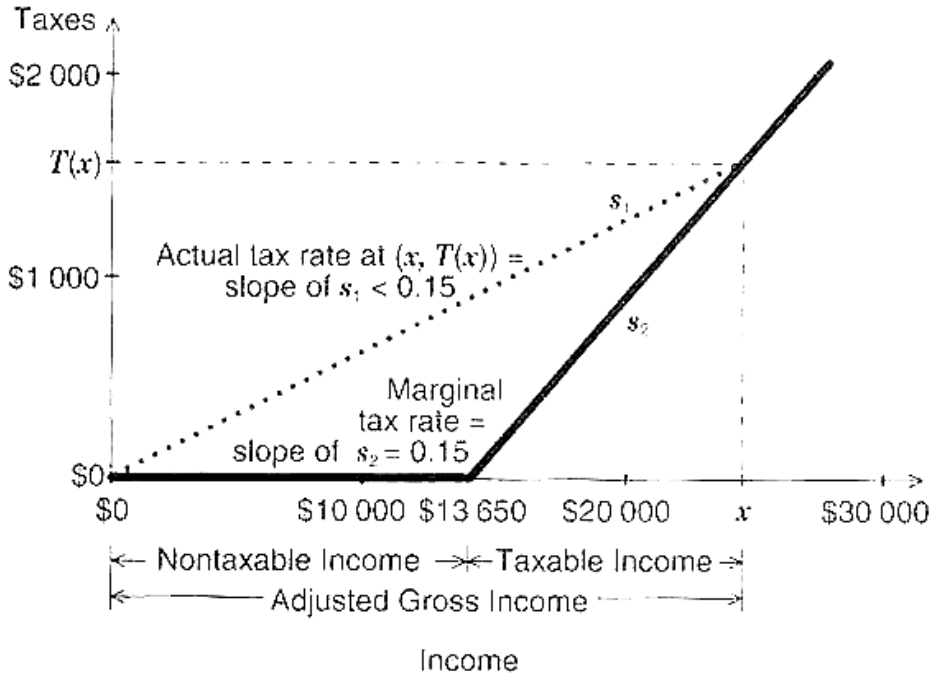


Fig 1.
A graph showing that the actual tax rate is less than the marginal tax rate

Figura 2

2. All'ufficio postale.

a) Il costo di un telegramma dipende dal numero di parole che compongono il suo testo. Dopo esserti informato sui prezzi praticati dalle poste italiane, scrivi l'equazione che rappresenta il costo C di un telegramma al variare del numero P di parole e disegna il grafico della funzione $C = f(P)$ su un piano cartesiano.

b) Il costo di un pacco postale varia al variare del peso del pacco.
Dopo esserti informato sui prezzi praticati dalle poste italiane, scrivi l'equazione che rappresenta il costo C di un pacco postale ordinario al variare del suo peso P e disegna il grafico della funzione $C = f(P)$ su un piano cartesiano.

Diete alimentari

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche individuare relazioni significative tra grandezze. Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni (notazione funzionale, tabulare e grafici). Risolvere per via grafica e algebrica problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado. Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano.	Segno di una funzione lineare. Equazioni e disequazioni di primo grado. Funzioni lineari. Sistemi lineari e interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite. Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica.	<u>Relazioni e funzioni.</u> Numeri e algoritmi. Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	Scienze

Contesto
Alimentazione.

Questa attività si situa in un contesto di esperienza quotidiana per gli studenti, anche in continuità con i temi legati all'alimentazione sviluppati nei precedenti livelli scolari.
Risulta anche motivante per la trattazione o l'applicazione di problemi in cui intervengono disequazioni lineari e sistemi di equazioni e disequazioni lineari e la loro rappresentazione grafica sul piano cartesiano.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in quattro fasi di difficoltà crescente. Nella prima gli studenti sono coinvolti nella determinazione della composizione della propria dieta quotidiana, in termini di quantità di grassi, proteine e carboidrati. Successivamente, si propone uno stesso problema relativo alla composizione di una dieta alimentare, articolando, nelle varie fasi, diverse questioni, quali l'introduzione di vincoli e la loro rappresentazione sul piano cartesiano e la ricerca del minimo di una funzione.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante distribuisce agli studenti una tabella che descrive la composizione rispetto ai grassi, proteine e carboidrati di alcuni fra i principali alimenti che fanno parte della dieta giornaliera. Chiede poi agli studenti di determinare, in base a essa, la quantità di grassi, proteine e carboidrati della propria dieta giornaliera. A titolo esemplificativo, si può utilizzare la seguente tabella che riporta tutti i dati (tranne quello relativo all'uovo) riferiti a 100 g di alimenti edibili:

Alimenti	Proteine (in g)	Grassi (in g)	Carboidrati (in g)
Biscotti secchi	6	8	85
Latte	4	2	4
Pasta	11	1	83
Riso	7	1	87
Pane	8	1	65
Carne	22	5	1
Pesce	18	6	2
1 Uovo (circa 50 g)	6	5	1
Lattuga	2	1	3
Legumi	19	4	54
Arance	2	1	7
Olio	0	99	0
Burro	1	83	2
Merendine	7	17	63
Cioccolata	7	35	55

Tabella 1

Questa prima fase dell'attività richiede diverse abilità, quali una valutazione adeguata delle quantità in grammi degli alimenti che si assumono quotidianamente, leggere e interpretare correttamente i dati della tabella che sono riferiti ai 100 g (tranne che per l'uovo), comprendere che la somma dei grammi per ogni riga non è uguale a 100 (i grammi mancanti si riferiscono all'acqua presente quasi in ogni alimento). Per le diverse abilità coinvolte, può essere significativo far svolgere questa prima fase dell'attività in piccoli gruppi collaborativi di lavoro. L'insegnante che ritenesse eccessivo il tempo da dedicare a questa prima fase, comunque utile allo studente per entrare nel problema, può passare direttamente alla seconda fase.

Seconda fase

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:
Una dieta prevede un consumo giornaliero di
50 g di grassi
100 g di proteine
250 g di carboidrati
Volendo seguire tale dieta con l'uso di tre soli alimenti x, y, z, determinate le quantità necessarie per ciascuno di essi conoscendo le rispettive composizioni percentuali (in peso):

Composizione	Alimento x	Alimento y	Alimento z
Grassi	30%	5%	5%
Proteine	10%	20%	10%
Carboidrati	20%	15%	40%
Acqua	40%	60%	45%

Tabella 2

In caso di blocco l'insegnante può suggerire di scrivere, per esempio, la relazione che esprime la quantità totale di grassi in funzione delle quantità di grassi contenuta nei tre alimenti ($0,5 = 0,3x +$

$0{,}05y + 0{,}05z$[1]). Inoltre, in precedenza, può anche aver fatto calcolare la quantità di grassi (o altro) che ciascuno studente consuma in un giorno in base alla sua dieta tipo.

Terza fase

L'insegnante pone agli studenti il seguente problema:

Una dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 75 g e 125 g e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g con l'ulteriore vincolo che la quantità complessiva di proteine e carboidrati non deve superare i 375 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti x e z della Tabella 2. Rappresentate graficamente in un piano cartesiano xOz le possibili soluzioni.

Il problema si formalizza con il seguente sistema di disequazioni (il peso è espresso in ettogrammi)

$$\begin{cases} 7{,}5 \le x + z \le 12{,}5 \\ 25 \le 2x + 4z \le 30 \\ 3x + 5z \le 37{,}5 \end{cases}$$

le cui soluzioni possono essere rappresentate su un piano cartesiano come suggerisce la seguente figura.

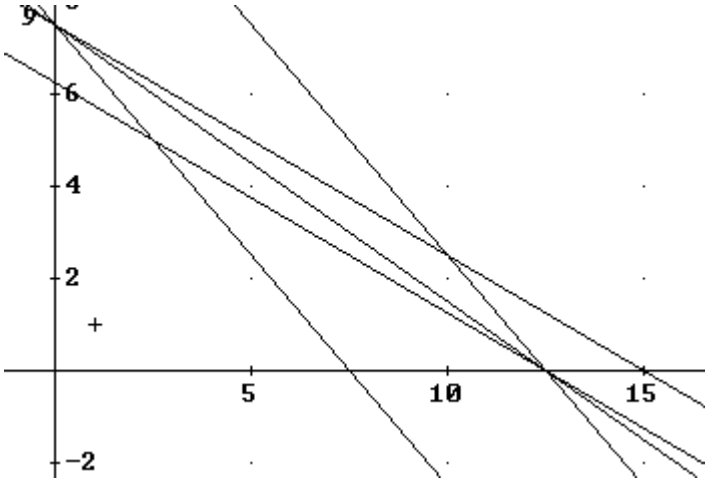


Figura 1

Quarta fase

L'insegnante propone a piccoli gruppi di studenti il seguente problema di minimo:

Una dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 75 g e 125 g, e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti x e z della precedente tabella e di voler minimizzare la quantità dei grassi. Per rappresentare la soluzione potete aiutarvi con parte dei grafici costruiti nel precedente problema. In questo caso si tratta di determinare il valore minimo che la funzione, nelle variabili x e z, che rappresenta la quantità di grassi può assumere su un certo poligono. Quale e perché*?*

I punti di minimo (o di massimo) della funzione che rappresenta la quantità di grassi, si trovano sui vertici del parallelogramma precedentemente considerato. Dopo aver determinato una procedura che consente di calcolare il valore minimo della funzione, si inducono gli studenti a cercare una giustificazione del fatto che il minimo si trova su uno dei vertici del poligono (in questo caso un parallelogramma).

[1] Si può far notare agli studenti l'opportunità di scrivere il peso in etti e non in grammi per semplificare l'equazione che diventa $5 = 3x + 0{,}5y + 0{,}5z$ oppure $50 = 30x + 5y + 5z$)

L'insegnante, in fase di discussione delle varie strategie risolutive, propone eventualmente ulteriori giustificazioni, in particolare sul perché il minimo della funzione rappresentante la quantità dei grassi si trova su un vertice del poligono, anche nella prospettiva di ulteriori sviluppi di problemi di ottimizzazione.

Possibili sviluppi

- Come variante del problema proposto nella fase 2, è possibile far scegliere agli studenti i tre alimenti che compongono la dieta, suddividendoli in piccoli gruppi di lavoro.
- Problemi di ottimizzazione e programmazione lineare.

Elementi di prove di verifica

1. Massimizzare le proteine

Una dieta prevede un consumo giornaliero di grassi compreso tra 30 g e 60 g, e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti *y* e *z* della Tabella 2 e di voler massimizzare la quantità di proteine. Dire se il problema ha soluzioni e, nel caso, determinarle.

2. La scelta del contratto più conveniente

A un giovane viene offerta un'assunzione come rappresentante di commercio con la possibilità di optare fra i seguenti tre tipi di contratto:
a) un fisso di 1000 euro al mese più una percentuale sul valore delle vendite del 2%;
b) un fisso di 200 euro ed una percentuale del 12% sul valore delle vendite;
c) un fisso di 500 euro se il volume delle vendite è compreso tra 1000 e 2000 euro, ed una percentuale del 6% sulla parte eccedente i 2000 euro.
Stabilire quali devono essere i volumi delle vendite che rendono il contratto a) equivalente al contratto b), e il contratto b) equivalente al contratto c).
Stabilire, in funzione del volume delle vendite, qual è il contratto più conveniente.

La fabbrica dei cioccolatini

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite Incrementi a passo costante, pendenza media.	Relazioni e funzioni. Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	Economia

Contesto
Vita sociale.

Il problema porta ad elaborare un modello che contiene due componenti: una di proporzionalità diretta e una di proporzionalità inversa.
Lo studio della loro interazione reciproca porta a comprendere che il fenomeno analizzato ha tre aspetti distinti, a seconda che prevalga la proporzionalità diretta, quella inversa o che le due si equilibrino.

Descrizione dell'attività
Obiettivo dell'attività è quello di modellizzare matematicamente una situazione concreta, nei limiti del possibile. Si tenga conto che le situazioni reali sono molto "sporche", nel senso che possono essere descritte da un numero elevato di relazioni che mettono in gioco un grande numero di variabili. In questo consiste la loro ricchezza e significatività. D'altra parte, la matematizzazione richiede sempre delle semplificazioni.
Il modello può essere più o meno sofisticato e dare ragione in forma più o meno adeguata del fenomeno che tratta. Gli elementi di un modello consistono nel suo potere esplicativo e predittivo. In questo senso, esso interpreta il fenomeno nell'ambito di una teoria, che ne dà conto, a meno di una data approssimazione.
La formula che si costruisce nell'attività è un modello della situazione.
Di solito, un modello ha senso per un ambito ristretto di valori numerici, al di fuori dei quali l'interpretazione perde di significato concreto. Nonostante ciò, tenere conto anche di questi valori, può talvolta aiutare a comprendere meglio i rapporti di interdipendenza tra le grandezze in gioco.

Nell'attività si usano due strumenti per interpretare il problema concreto: quello grafico (il piano cartesiano) e quello algebrico (le formule).

Il cambiamento di quadri di riferimento è cognitivamente rilevante: stimola negli studenti la flessibilità di pensiero necessaria a comprendere, da un lato come il modello sia un'interpretazione della realtà, dall'altro come le formule della matematica siano una generalizzazione ed astrazione di situazioni concrete.

Ecco il problema "idealizzato", ma che corrisponde a una situazione reale:

Cioccolatini.
Una ditta produce cioccolatini e li può confezionare in scatole più o meno grandi: si vuole valutare la situazione più conveniente.

A parte una spesa fissa, ovviamente i costi aumentano proporzionalmente alla quantità di cioccolatini prodotti. Si può assumere, invece, che il costo delle confezioni incida di più nel caso che la confezione contenga pochi cioccolatini e che sia più conveniente per l'acquirente se la confezione contiene più cioccolatini.
Naturalmente, nella modellizzazione si trascurano molti parametri e si fanno approssimazioni forti; nulla vieta, però, che una volta che una volta compreso intuitivamente il funzionamento del modello, si possano elaborare interpretazioni più sofisticate.
Detta x la quantità di cioccolatini prodotta, il costo y è dovuto alla somma di:

a) una parte proporzionale a x (ax, con a opportuno coefficiente);
b) una parte inversamente proporzionale a x, (b/x , con b opportuno coefficiente);
c) una spesa fissa, che indichiamo con c.

Un modello che descrive la situazione è quindi del tipo: $y = ax + b/x + c$

Per avere un'idea dell'andamento grafico della funzione non occorre conoscere l'Analisi: gli strumenti informatici di cui si dispone nelle scuole permettono di tracciare grafici per svariati valori dei parametri a, b, c. Nella Figura 1 sono riportati i grafici corrispondenti ai valori a = 0,12; a = 0,24; a = 0,48; con b=7,25; c=4.

Utilizzando i registri algebrico e grafico si può osservare quali modifiche si generano con il variare dei parametri e interpretare tali variazioni nella situazione descritta.
Ciò è cruciale per comprendere il ruolo dei parametri nelle formule; per questo i software dinamici risultano un supporto molto valido.

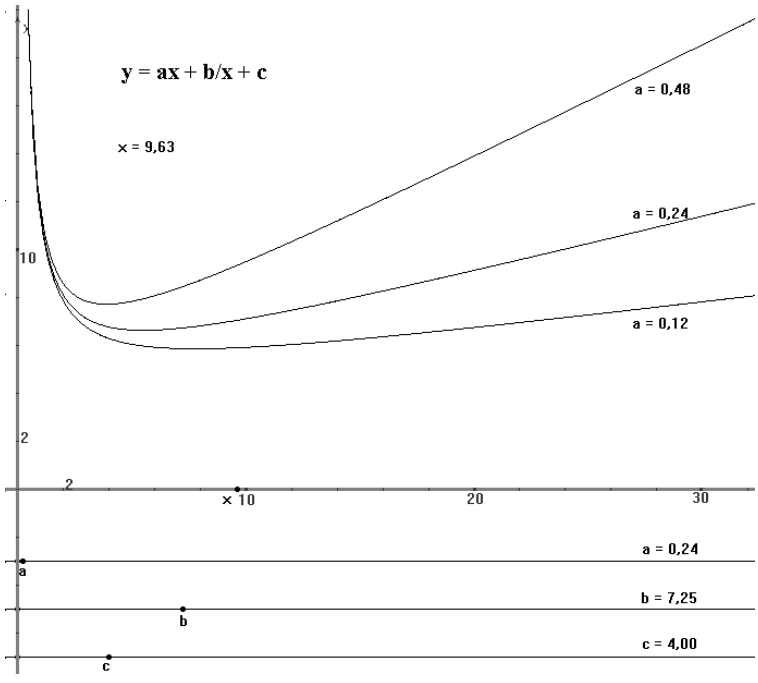


Figura 1

Per non appesantire l'attività con il calcolo, che non è la finalità di questa unità di lavoro, si può utilizzare un software (eventualmente già predisposto dall'insegnante) che permetta di evidenziare il comportamento della funzione al variare dei parametri *a, b, c.*
Nella figura i tre parametri sono indicati come punti vincolati sulle tre rette parallele all'asse x, disegnate in basso: l'ascissa dei tre punti fornisce il valore corrente del parametro. Inoltre, un quarto punto x, vincolato sull'asse x, rappresenta il valore corrente della variabile, cioè il numero di cioccolatini (il modello richiederebbe solo valori interi non negativi, ma la rappresentazione è fatta

nel continuo e va reinterpretata considerando solo i valori discreti. Non ha infatti senso considerare confezioni con 23,5 cioccolatini, anche se il modello dice quale sarebbe virtualmente il costo anche con mezzo cioccolatino!).
Si può costruire la formula $ax + b/x + c$ e il valore y che corrisponde ai valori correnti dei parametri e della variabile x, disegnando così il grafico della funzione:

$$f: x \rightarrow ax + b/x + c$$

Gli studenti possono, per esempio, iniziare a muovere il punto a, osservando i grafici della famiglia di curve

$$f_a: x \rightarrow ax + b/x + c$$

Questa attività permette allo studente di tenere sotto controllo quello che succede e di comprendere la differenza di significato tra una variabile (x) e un parametro (a). In modo analogo si possono studiare le famiglie di curve f_b, f_c, al variare dei parametri b e c.
In generale, gli studenti possono osservare che per $x>0$ il costo dapprima cala al crescere del numero x di cioccolatini, poi comincia a crescere.
Usando una retta variabile parallela all'asse x, si possono determinare approssimativamente i valori x_1 per i quali si ha questo cambiamento (minimo locale). Questi valori rappresentano i numeri di cioccolatini che minimizzano i costi.
L'insegnante porterà gli studenti a fare alcune osservazioni di carattere qualitativo sul grafico, come per esempio le seguenti:

a) Il valore x_1 in cui la funzione f assume il suo minimo diminuisce all'aumentare di a; corrispondentemente il valore $f(x_1)$ aumenta; ciò significa che, a parità degli altri parametri, all'aumentare del costo unitario per la produzione dei cioccolatini diminuisce il numero ottimale di cioccolatini per confezione, anche se il costo complessivo aumenta;
b) Il valore x_1 aumenta all'aumentare di b e corrispondentemente aumenta anche il valore $f(x_1)$; cioè all'aumentare del costo delle confezioni, a parità di numero di cioccolatini, aumenta anche il numero ottimale di cioccolatini, come pure il costo complessivo (anche se l'aumento appare meno sensibile di prima);
c) Il parametro c non muta l'andamento del fenomeno, salvo determinare un aumento o diminuzione costante della spesa complessiva rispetto agli altri parametri.

Questo modello è molto importante nella gestione aziendale: infatti, con un'altra interpretazione delle grandezze in gioco, descrive la cosiddetta *rottura di stock* nella gestione dei magazzini.

Elementi di prove di verifica

1. Bollette del gas

Modellizzate la seguente situazione:
L'azienda del gas può emettere bollette sui consumi con cadenza diversa: ogni mese, ogni due, tre, quattro, sei mesi... Se il cliente paga più volte, l'azienda guadagna gli interessi sulle somme versate dal cliente, ma ha maggiori spese per l'emissione delle bollette, la lettura del contatore, ecc.
Al variare della spesa annuale del cliente qual è il numero ottimale di bollette per l'azienda?

Elementi di prove di verifica

Livello scolare: 1° biennio

Uso di vari registri rappresentativi

1. Nel prodotto cartesiano degli insiemi $A\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $B\{7,8,9,10,11,12\}$ la relazione $R1$ è costituita dalle coppie ordinate di numeri interi che si trovano all'interno del contorno rappresentato nella figura qui a fianco.
   a. Con quale o quali elementi di B è in relazione il numero 6?
   b. Rappresentare la relazione come elenco di coppie ordinate;
   c. Rappresentare la relazione con il modello sagittale tra gli insiemi A e B.
   d. Scrivere il dominio di $R1$
   e. Scrivere il codominio di $R1$

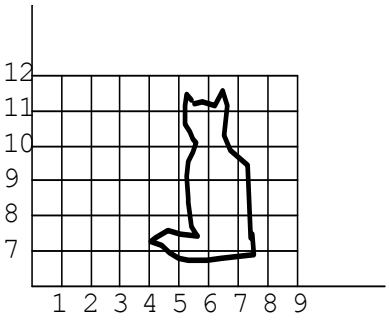
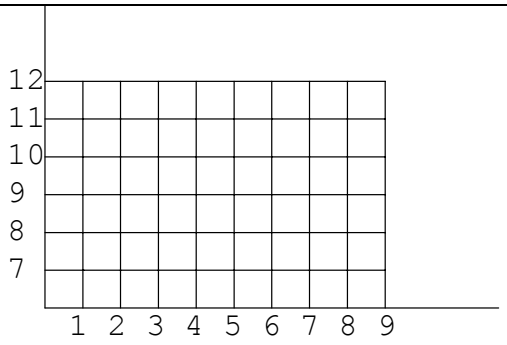
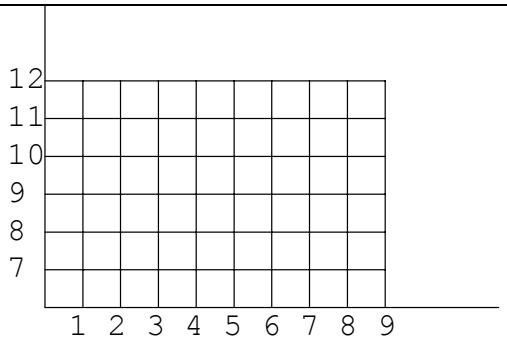


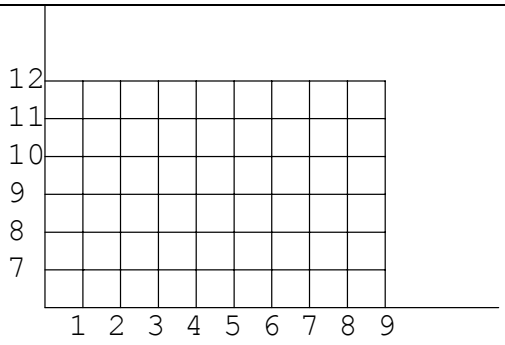
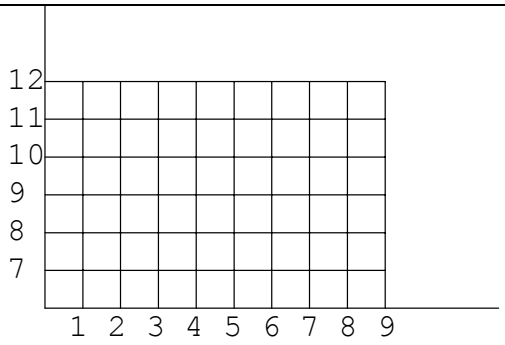
Figura 1

2. Si consideri l'insieme A costituito dalle seguenti nazioni europee: Italia, Francia, Germania, Gran Bretagna e dalle seguenti città: Roma, Parigi, Londra, New York, Milano, Napoli. Rappresentare la relazione $R2$: "X è capitale di Y", ove X è elemento di B e Y è elemento di A, con il modello sagittale, come sottoinsieme del prodotto cartesiano $B \times A$, come elenco di coppie ordinate

3. Lo stesso del quesito precedente con la relazione $R3$: "La città X non si trova nel paese Y".

4. Nel prodotto cartesiano degli insiemi $A\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $B\{7,8,9,10,11,12\}$ si rappresentino le seguenti relazioni (con la lettera x indicheremo un elemento di A, con la lettera y un elemento di B):

$R4$: la somma tra x e y è uguale a 14	
$R5$: il prodotto tra x e y è minore di 41	

*R*6: *x* è fattore di *y*	
*R*7: *x* e *y* sono indicati, nella lingua italiana, da una parola con lo stesso numero di caratteri	

Riconoscimento di funzioni

5. Quale delle precedenti relazioni *R*1, *R*2, *R*3, *R*4, *R*5, *R*6, *R*7 è una funzione?

6. Quali tra le seguenti relazioni sono funzioni?
   a) I seguenti sono i voti riportati dagli studenti (individuati attraverso il loro numero nel registro) in un compito in classe:

Studente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Voto	6	5	7	6	7	7	4	5	7	8	7	8	5	6	6	5	4

   La relazione è "*X* ha riportato la valutazione *Y*"

   b) Consideriamo l'insieme *A* delle persone e l'insieme *B* delle penne presenti in un'aula. La relazione è "*X* appartiene a *Y*" con *X* appartenente a *B* e *Y* appartenente ad *A*.

   c) Consideriamo l'insieme *A* delle persone e l'insieme *B* delle penne presenti in un'aula. La relazione è "*X* possiede *Y*" con *X* appartenente ad *A* e *Y* appartenente a *B*.

Lettura dei grafici

7. Quali condizioni soddisfano le ascisse e le ordinate dei punti che si trovano nelle parti di piano colorate in grigio della Figura 2? E di quelli che si trovano nelle intersezioni delle diverse zone (analizza i vari casi)?

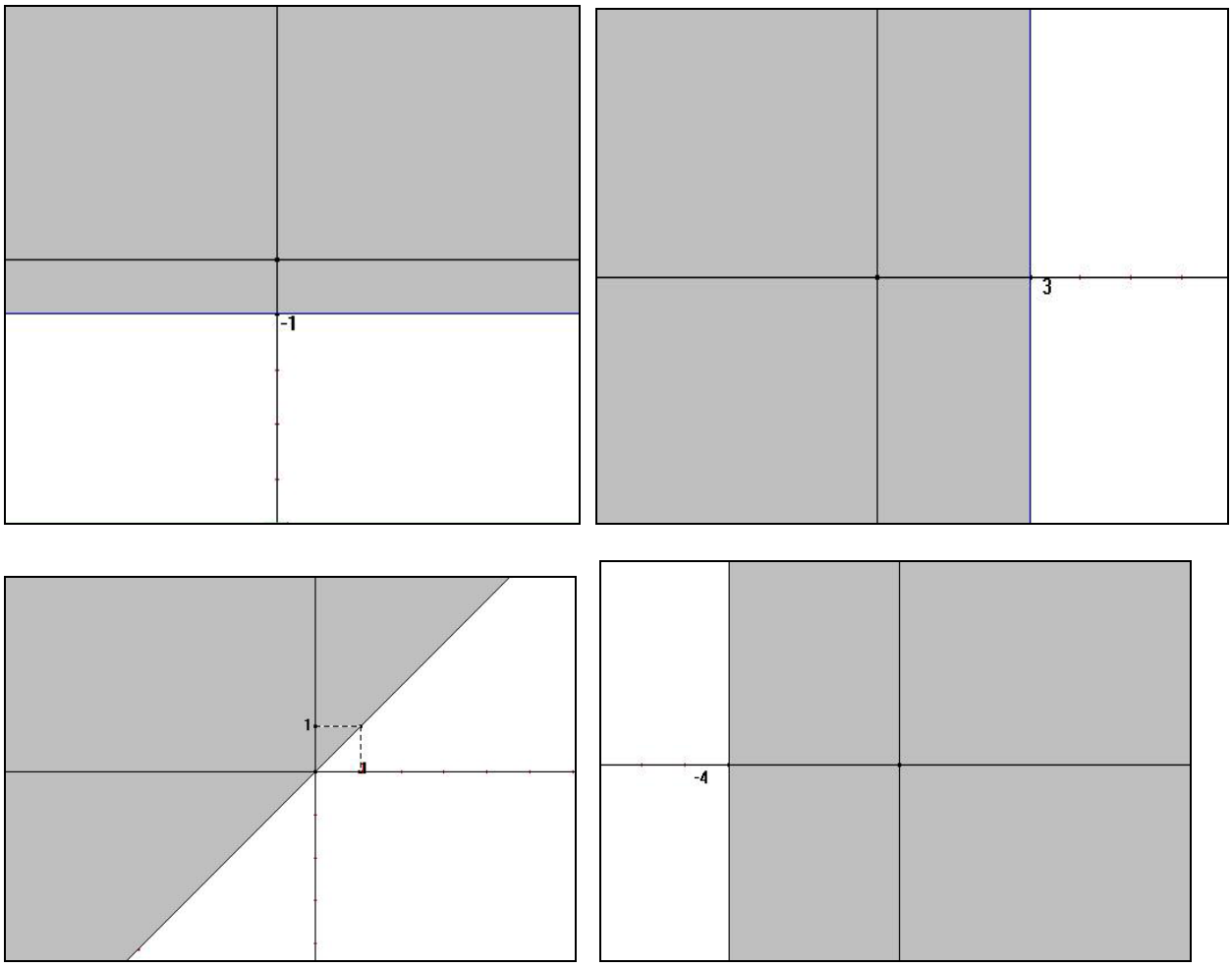


Figura 2

8. Disegna nel piano cartesiano il segmento di estremi $A(3; 1)$ e $B(1; -4)$. Che condizioni soddisfano i punti del segmento?

9. a) In Figura 3 è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette $x = -5$ e $x = 5$.
Leggi per quali valori di x la funzione assume il valore zero.

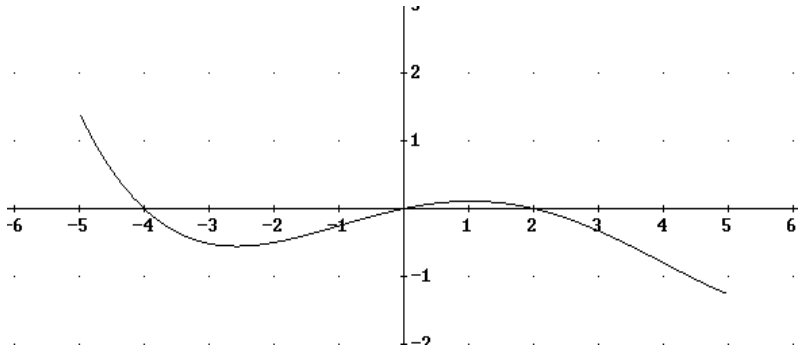


Figura 3

b) In Figura 4 è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette $x = -6$ e $x = 1$.

Leggi per quali valori di x la funzione assume un valore positivo.

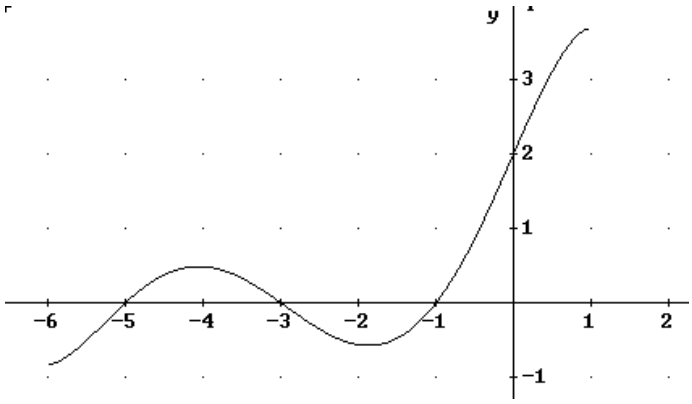


Figura 4

c) In Figura 5 è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette $x = -1$ e $x = 5$.

Leggi per quali valori di x la funzione assume un valore negativo.

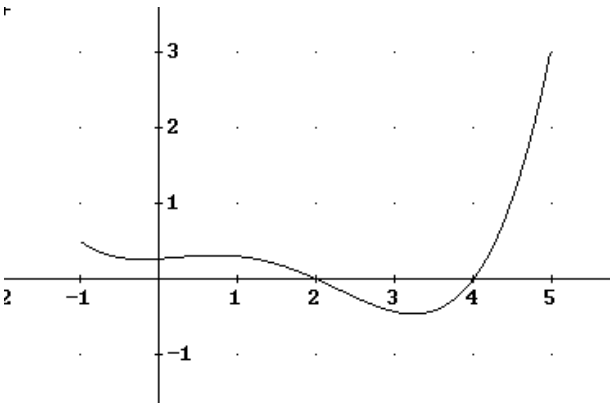


Figura 5

d) Traccia a piacere il grafico di una funzione che sia positiva per $x < 4$, si annulli per $x = 4$, sia negativa per $x > 4$.

10. Rappresenta sul piano cartesiano le rette $y = 2x + 1$ e $y = -x + 4$. Leggi sul grafico le coordinate del loro punto di intersezione e verifica che le sue coordinate soddisfano le equazioni di entrambe le rette.

11. Elenca alcune situazioni di interesse applicativo le cui schematizzazioni matematiche danno luogo a funzioni:
    - lineari;
    - quadratiche;
    - di proporzionalità inversa.

L'area dei rettangoli isoperimetrici

Livello scolare: 2° biennio.

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi. Rappresentare e risolvere problemi di secondo grado. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Equazioni e disequazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	<u>Relazioni e funzioni.</u> Spazio e figure Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Figure geometriche.

Questa attività può essere proposta in una classe di un secondo biennio come primo esempio di problemi di secondo grado e di problemi di massimo o minimo. L'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi del contesto scolastico delle figure geometriche e contribuire a consolidare alcune conoscenze di geometria che gli studenti hanno già conseguito.

Descrizione dell'attività
L'attività richiede di considerare l'insieme dei rettangoli aventi lo stesso perimetro, di rappresentare con una tabella, graficamente e formalmente, la variazione della loro area e di determinare il massimo della funzione che rappresenta l'area. L'uso di un ambiente di geometria dinamica non è necessario, ma può essere opportuno per affiancare ai registri numerico (tabelle), grafico (grafici di funzioni) e formale (la formula che rappresenta la variazione dell'area in funzione di una opportuna variabile) anche un registro geometrico visivo (la variazione dei rettangoli in un ambiente di geometria dinamica). L'attività può essere svolta in un tempo relativamente breve se agli studenti viene già fornito il file nell'ambiente di geometria dinamica, mentre richiede più tempo se si vuole che gli studenti costruiscano, in quell'ambiente, un insieme di rettangoli isoperimetrici.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:
Considerate l'insieme di tutti i rettangoli isoperimetrici. Scegliete una variabile rispetto alla quale la loro area varia (per esempio uno dei lati del rettangolo) e rappresentate la variazione dell'area individuando, sul grafico, il punto di area massima. Rappresentate, inoltre, in una tabella, alcuni valori assunti dall'area dei rettangoli al variare del lato considerato.

La Figura 1 illustra come si presenta la situazione in un ambiente di geometria dinamica. La lunghezza del segmento *AB* (6,01 nella Figura 1) rappresenta il semiperimetro dei rettangoli; il numero 12,01 rappresenta, invece, il perimetro. L'errore sull'ultima cifra dipende dalle approssimazioni effettuate sui numeri che esprimono la misura del semiperimetro e del perimetro.

I numeri 8,45 cm^2, 9,02 cm^2 e 6,37 cm^2 forniscono alcuni valori dell'area dei rettangoli, che si vede prima crescere (fino a che il rettangolo non si trasforma in un quadrato) e poi decrescere.

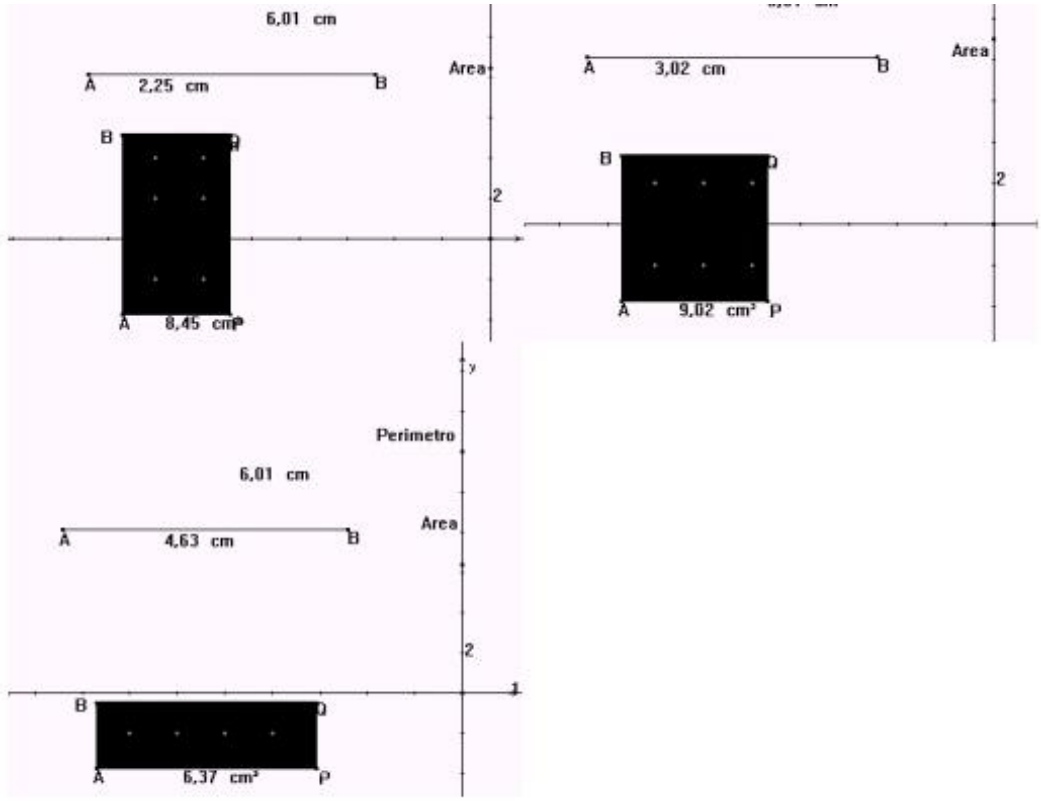


Figura 1

In tale ambiente, inserendo un sistema di assi cartesiani, è possibile rappresentare la variazione dell'area in funzione, per esempio, della misura del lato *AP*, come suggerisce la Figura 2 dove compare anche il grafico della funzione costante "perimetro".

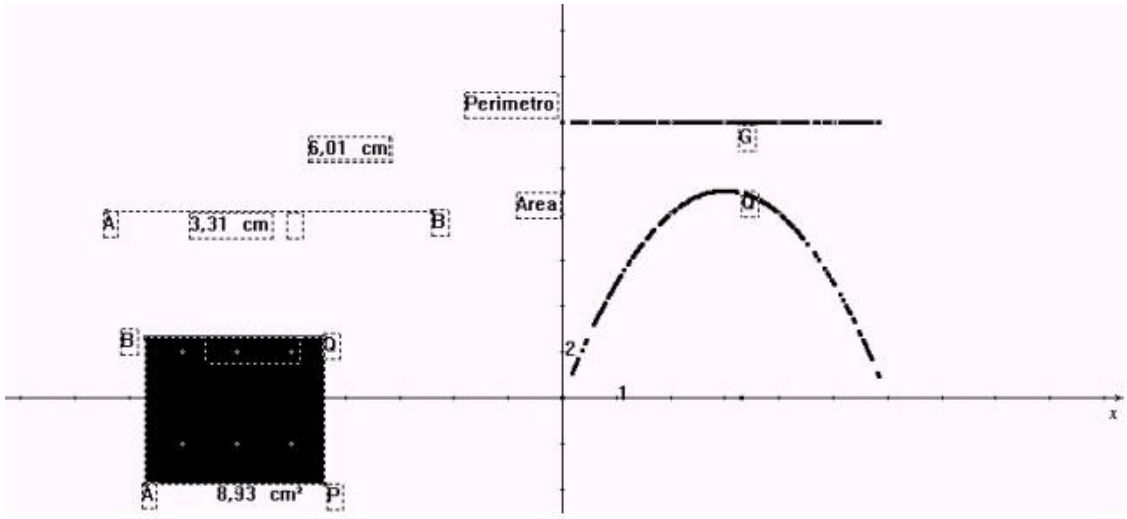


Figura 2

Seconda fase
L'insegnante invita gli studenti a formalizzare il problema indicando con x la misura del lato rispetto al quale varia l'area, a determinare l'area dei rettangoli in funzione di x e a calcolarne il massimo.

Gli studenti dovrebbero notare che, detta x la base e p il semiperimetro (che misura, nel caso rappresentato in figura, 6,01 cm), l'altezza vale $p - x$, per cui l'area è data da $(p - x)\, x$.
Si tratta di una parabola che ha il massimo per $x = p/2$, quando il rettangolo è un quadrato.

Possibili sviluppi:
- Problemi di massimo e minimo.
- Dimostrazioni sintetiche di alcune proprietà determinate per via analitica.

Elementi di prove di verifica

1. Triangoli
Si consideri l'insieme dei triangoli tali che la somma di un lato e dell'altezza a esso relativa misuri 3 cm. Dopo aver scritto un'equazione della funzione che esprime l'area di tali triangoli al variare della misura del lato, rappresenta il grafico di tale funzione su un piano cartesiano e determina il triangolo di area massima.

La concentrazione di un farmaco nel sangue

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Acquisire familiarità con i concetti di crescenza e decrescenza di una funzione. Costruire modelli sia discreti che continui di evoluzione di fenomeni nel tempo. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Zeri di funzioni. La funzione esponenziale. Semplici esempi di successioni. Incrementi a passo costante, pendenza media.	Relazioni e funzioni Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Scienze

Contesto
Educazione alla salute.

Questa attività può essere introdotta in una terza o in una quarta classe, quando gli alunni hanno già acquisito abilità nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni, nella rappresentazione grafica di semplici funzioni e nell'individuazione di relazioni funzionali fra grandezze. Sarebbe anche possibile proporre quest'attività in un primo biennio, ma, in tal caso, bisognerebbe evitare alcune questioni che qui, invece, vengono discusse e, soprattutto, si dovrebbe tener conto del fatto che molte delle abilità che qui abbiamo dato per acquisite dovrebbero ancora essere oggetto di attenzione didattica. L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre, affrontare e approfondire:

- nozioni come quelle di funzione, in particolare di successione, di crescenza di una funzione, di modello;
- tecniche come quelle delle differenze finite per ottenere informazioni sulla crescenza e sul come cresce una funzione;
- tecniche di programmazione per calcolare i valori di una successione definita per ricorsione.

Consente anche di avviare una prima riflessione sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Proprio per questi motivi, l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*. Attività di questo tipo rendono possibile la ripresa e l'approfondimento di tecniche di risoluzione di equazioni, sia grafiche sia numeriche, sia formali. La compresenza di questi tre approcci rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, soprattutto dei manipolatori grafico simbolici.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi di studenti, richiedendo di riportare la discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone la *situazione – problema* sotto riportata a gruppi collaborativi formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno):

Una studentessa si è prodotta una distorsione al ginocchio durante una partita di pallavolo indoor e il suo dottore le ha prescritto un farmaco anti-infiammatorio per ridurre il gonfiore. Deve prendere due pastiglie da 220 mg ogni 8 ore per 10 giorni. I suoi reni filtrano il 60% di questo farmaco dal suo corpo ogni 8 ore.

Quanta medicina si trova nel suo organismo dopo 3 giorni? E dopo 4 giorni? E dopo 10 giorni? Cercate di studiare l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel corpo; in particolare, cercate di capire che cosa accadrebbe se la studentessa continuasse a prendere il farmaco per molto tempo: pensate che la presenza del farmaco nel suo organismo tenderebbe prima o poi a diminuire o aumenterebbe sempre? E, nel caso aumentasse sempre, pensate che potrebbe superare un qualunque valore prefissato, oppure tenderebbe a un valore che non è superabile nemmeno lasciando passare molto tempo?

L'insegnante può suggerire di costruire una tabella come la seguente:

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)
0	1	0	
1	1	8	
2	1	16	
3	2	24	
…	…	…	
n			

Tabella 1

Ci si attende che i gruppi di studenti inizino a compilare la tabella[1] , come suggerito dalla Tabella 2, calcolando, con l'aiuto della calcolatrice, la quantità di farmaco che si trova nell'organismo alla fine di ogni successiva assunzione di pastiglie.

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)
0	1	0	440
1	1	8	0,4*440+440 = 616
2	1	16	0,4*616+440 = 686
3	2	24	0,4*686+440 = 714
4	2	32	0,4*714+440 = 726
5	2	40	0,4*726+440 = 730

Tabella 2

La Tabella 2 suggerisce almeno due congetture:

[1] La scelta di non considerare alcuna cifra dopo la virgola, nella misura dei milligrammi di farmaco rimasti nel corpo dopo ogni somministrazione, dovrebbe essere oggetto di discussione con la classe: è meglio lasciare che gli studenti utilizzino in libertà tutte le cifre decimali che credono nella determinazione dei risultati e poi discutere l'opportunità delle diverse scelte, evidenziandone limiti e potenzialità. Noi abbiamo scelto valori interi per conformità con il dato iniziale di 440 mg.

1. la successione è crescente, ma cresce sempre meno
2. dato un determinato valore del farmaco rimasto nel sangue, il successivo può essere determinato moltiplicando tale valore per 0,4 e addizionando 440, ossia i milligrammi di farmaco assunti.

L'osservazione 1 può essere corroborata e giustificata sia con argomentazioni logico – intuitive, sia con l'aiuto di tecniche come, per esempio, le differenze finite.
Le argomentazioni che possono essere addotte sono riconducibili, in genere, alla seguente:
"I reni della studentessa sono capaci di filtrare il 60% di una quantità che cresce, ossia filtrano una quantità sempre maggiore; quando la quantità che filtrano sarà uguale a quella assunta, che è costante (440 mg), allora la quantità di farmaco presente nel sangue si stabilizza".

Con le tecniche delle differenze finite è possibile rilevare esplicitamente che non solo la successione dei valori di farmaco presenti nell'organismo cresce, ma anche che cresce sempre meno.
Infatti, osservando la Tabella 3, è immediato accorgersi che le differenze prime diminuiscono.

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)	Differenze prime
0	1	0	440	
1	1	8	616	176
2	1	16	686	70
3	2	24	714	28
4	2	32	726	12
5	2	40	730	4

Tabella 3

Il metodo delle differenze finite è particolarmente indicato quando la variabile indipendente varia con passo costante. In tal caso, le differenze prime sono proporzionali alla pendenza della retta congiungente due punti successivi della successione (la costante di proporzionalità è il passo con cui variano i valori della variabile indipendente). In altri termini, se la variabile indipendente varia con passo costante, la si può anche dimenticare, concentrandosi sulla variazione dei valori della variabile dipendente. In questo caso, la tabella si può leggere in colonna, e non riga per riga. Questo modo di guardare i dati è caratterizzato da una certa dinamicità e consente di valutare velocemente crescenza e concavità di una curva che rappresenta l'andamento del fenomeno oggetto di studio, senza scomodare conoscenze matematiche che vadano al di là di differenze e, eventualmente, ma non necessariamente, di rapporti.
Questo primo tipo di osservazioni dovrebbe portare gli studenti ad avere un'idea anche grafica dei punti che formano la successione; in un primo momento l'insegnante potrebbe accontentarsi anche di gesti che indichino una curva crescente con la concavità rivolta verso il basso e tendente verso un limite.
La congettura di 2 necessita di maggiore attenzione nella lettura dei dati e di una certa abilità nel riconoscere regolarità in una successione. Se gli studenti sono stati abituati a non effettuare subito i calcoli, ma ad osservare prima come variano i dati su cui vengono effettuate le operazioni, si accorgeranno che tutti i calcoli effettuati possono essere rappresentati con lo schema:
$F(n) = 0{,}4 * F(n\text{-}1) + 440$
Dove abbiamo indicato con $F(n)$ e $F(n\text{-}1)$, rispettivamente, la quantità di farmaco presente subito dopo l'ennesima somministrazione delle pastiglie e quella presente subito dopo la somministrazione precedente.
In genere questa scrittura suggerisce ad alcuni studenti la possibilità di determinare il valore limite della successione. Infatti, se tale valore limite esiste, esso deve poter essere determinato ponendo $F(n) = F(n\text{-}1) = x$ e quindi risolvendo l'equazione $x = 0{,}4\,x + 440$ che dà il valore $x = 4400/6 \cong 733$.

Seconda fase

L'attività può proseguire invitando gli studenti a costruire programmi che consentono di calcolare automaticamente i valori della successione, partendo dalla definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} F(0) = 440 \\ F(n) = 0{,}4 \cdot F(n-1) + 440 \end{cases}$$

Il compito di costruire un programma o di definire la successione in un ambiente di manipolazione simbolica può anche essere portato a termine individualmente; in questo caso non è necessario che gli studenti lavorino in gruppo.

Di seguito si riporta il programma "farm" e la funzione "farmaco(n)"[2] costruiti per alcune calcolatrici programmabili grafico – tascabili che presentano un manipolatore simbolico simile a quello utilizzato da software ormai di diffusione relativamente vasta nelle scuole.

```
: farm( )                        (intestazione: nome programma)
:Prgm                            (indica che si tratta di un programma)
:Request "dammi n", n            (il sistema attende un input che inserisce nella cella di nome n)
: expr(n) → n                    (l'input n, preso come stringa, viene trasformato in dato numerico)
: 440 → far                      (si inizializza la variabile far)
: For i, 1, n, 1                 (inizio ciclo for, con i che va da 1 a n, passo 1)
: 0.4 * far + 440 → far          (aggiornamento dei valori della successione inseriti in far)
: EndFor                         (fine ciclo for)
: Disp far                       (viene visualizzato il contenuto di far)
: EndPrgm                        (fine programma)

: farmaco(n)                     (intestazione: nome funzione)
: Func                           (indica che si tratta di una funzione)
: if n = 0                       (se n = 0
: Return 440                     (restituisce il valore 440)
: if n > 0                       (se n > 0
: Return 0.4*farmaco(n-1)+440    restituisce il valore indicato)
: EndFunc                        (fine funzione)
```

L'insegnante può discutere con gli studenti sulla convenienza o meno di utilizzare un programma o una funzione per calcolare i valori della successione. Soprattutto, però, dovrebbe cercare di dare una risposta a una domanda che emerge in modo naturale quando si paragonano i tempi di calcolo impiegati per computare i valori della successione utilizzando la funzione e il programma. Perché con la funzione sopra definita si riesce a computare un numero sensibilmente inferiore di valori rispetto a quanto consente il programma?

La risposta a questa domanda è un'occasione per far capire le sensibili differenze che, dal punto di vista computazionale, esistono tra la ricorsione e l'iterazione.

Si può iniziare suggerendo che il programma, per come è stato definito, calcola i valori della successione in modo analogo (anche se molto più velocemente e con maggiore affidabilità) a quanto si fa con il calcolo con carta e penna. Infatti a partire dal dato $F(1) = 440$, si calcola $F(2)$ utilizzando la legge $F(n) = 0{,}4*F(n\text{-}1) + 440$; poi si calcola $F(3)$ utilizzando il dato F(2) appena ottenuto e la stessa legge di prima e così via. A ogni passo è necessario tenere in memoria solamente la legge e il dato precedente; nient'altro.

[2] In genere le calcolatrici grafico – simboliche hanno già funzioni predefinite che consentono il calcolo dei valori di una successione per iterazione, ma si ritiene preferibile, in un primo momento, far costruire dagli studenti un programma e una funzione che consentano di effettuare automaticamente tale calcolo. In seguito è possibile indicare loro come utilizzare eventuali funzioni predefinite del software utilizzato.

Invece la ricorsione richiede una disponibilità di memoria molto maggiore. Che cosa vuol dire, infatti, calcolare $F(4)$ utilizzando la funzione sopra definita?
$F(4) = 0{,}4 * F(3) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(3)$)
$F(3) = 0{,}4 * F(2) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(2)$)
$F(2) = 0{,}4 * F(1) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(1)$)
$F(1) = 0{,}4 * F(0) + 440$
Poiché $F(0) = 440$ si può tornare indietro, calcolando, in successione, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ e, finalmente, $F(4)$, svuotando progressivamente la memoria. Risulta evidente che un tale processo richiede un impegno di risorse di memoria che diventa presto rilevante con il crescere di n.
L'insegnante può anche far notare che il problema del computo dei valori può essere brillantemente risolto con un foglio elettronico. Per esempio, con un foglio elettronico in genere disponibile nelle scuole, la formula che genera i successivi valori della successione nella colonna A può essere costruita inserendo 440 in A1 e inserendo in A2 la formula =0,4*A1+440, quindi copiando tale formula nel numero di celle voluto.

Terza fase
L'insegnante può ora proporre un quesito più semplice del precedente; si suggerisce di far lavorare gli studenti individualmente e non a gruppi, per vedere non solo se sono in grado di mettere in pratica l'esperienza acquisita nella precedente attività, ma anche se riescono ad attivare strategie risolutive che risultano più appropriate per rispondere alle seguenti domande:

Come evolve la presenza del farmaco se, dopo dieci giorni, la studentessa non lo assume più?[3] Quanto tempo impiega a ridursi a 1/100 del farmaco presente dopo dieci giorni?

Ci si può attendere che molti studenti, anche a causa dell'attività appena svolta, definiscano una nuova successione per ricorrenza

$$\begin{cases} G(0) = 733 \\ G(n) = 0{,}4 \cdot G(n-1) \end{cases}$$

senza accorgersi che, in tal caso, è più semplice o, almeno, più efficace trovare una forma chiusa come

$$G(n) = (0{,}4)^n \cdot 733$$

facilmente ottenibile con l'osservazione di come vengono calcolati, successivamente, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$, … a partire da $G(0)$. Tutti, però, dovrebbero accorgersi che, in tal caso, i valori della successione diminuiscono e diminuiscono sempre meno (il gesto di una mano che percorre una curva decrescente con concavità rivolta verso l'alto sarebbe sufficiente a verificare la comprensione degli studenti sulle caratteristiche più significative dell'evoluzione del fenomeno).
La formula $G(n) = (0{,}4)^n \cdot 733$ consente di rispondere all'ultima domanda risolvendo l'equazione

$$7{,}33 = (0.4)^n \, 733$$

La soluzione può essere cercata per tentativi o anche graficamente (lavorando nel continuo, con la funzione $y = (0.4)^x$ con x variabile reale). Si ritiene preferibile una risoluzione per tentativi (che metta in gioco esplicitamente il concetto di soluzione di un'equazione) o grafica (che richiede eventuali cambi di scala, uso di finestre grafiche adeguate), seguita eventualmente da una soluzione che utilizzi i logaritmi. E' importante che l'uso dei logaritmi non sia meccanico, o inconsapevole; in questo caso la soluzione di un'equazione esponenziale può essere ben motivata.

Quarta fase
L'insegnante, prendendo come spunto la risoluzione del precedente problema (determinare dopo quanto tempo il farmaco presente nel corpo si riduce a circa 7,33 mg, partendo da un valore di 733

[3] Si suppone che tutti gli studenti abbiano calcolato il valore della quantità di farmaco presente dopo 10 giorni, ossia, circa 733 mg.

mg) potrebbe chiedere agli studenti di cercare di determinare una dipendenza esplicita da *n* anche nel caso della legge

$$\begin{cases} F(0) = 440 \\ F(n) = 0{,}4 \cdot F(n-1) + 440 \end{cases}$$

È possibile giustificare questa richiesta discutendo i vantaggi di una formula che dà $F(n)$ esplicitamente in funzione di *n*, rispetto a una funzione definita per ricorrenza.
Il lavoro dovrebbe essere svolto nuovamente in piccoli gruppi, e l'insegnante osserverà e valuterà la capacità di organizzare i dati che i ragazzi dovrebbero avere acquisito con le precedenti attività. Organizzando i dati nel seguente modo:
$F(0) = 440$
$F(1) = 0{,}4*F(0) + F(0)$
$F(2) = 0{,}4*F(1) + F(0) = 0{,}4* (0{,}4*F(0) + F(0)) + F(0) = 0{,}4^2 *F(0) + 0{,}4 * F(0) + F(0)$
$F(3) = 0{,}4*F(2) + F(0) = 0{,}4 * (0{,}4^2 *F(0) + 0{,}4 * F(0) + F(0)) + F(0) = 0{,}4^3 *F(0) + 0{,}4^2 * F(0) + 0{,}4 * F(0) + F(0)$
È possibile congetturare che si ha
$F(n) = F(0) *(0{,}4^n + 0{,}4^{n-1} + 0{,}4^{n-2} + \ldots\ldots + 0{,}4 + 1)$

Il problema diventa quindi quello di determinare la somma $\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^i$.

L'insegnante farà notare che, detta *s* la somma $0{,}4^n + 0{,}4^{n-1} + 0{,}4^{n-2} + \ldots\ldots + 0{,}4 + 1$, si ha che

$0{,}4*s = 0{,}4^{n+1} + s - 1$. Ciò equivale a dire che $s = \dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

La legge che lega esplicitamente F(n) a *n* è quindi

$$\mathrm{F}(n) = 440 \quad * \quad \frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

<u>Quinta fase</u>
L'insegnante può far notare che il fenomeno preso in considerazione dipende da alcuni parametri:

- il farmaco presente nel sangue all'istante 0, diciamo *a*;
- la percentuale di farmaco filtrata dai reni, diciamo *b*;
- la quantità che viene aggiunta a ogni somministrazione, diciamo *c*.

Ciò vuol dire che il problema precedente può essere generalizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases} F(0) = a \\ F(n) = b * F(n-1) + c \end{cases}$$

Si può quindi assegnare ai gruppi di studenti il seguente problema:
Studiare come varia l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel sangue quando si modificano i parametri significativi (si suggerisce di provare a modificare un parametro alla volta, tenendo costanti gli altri due).

È interessante osservare se il lavoro degli studenti avviene a livello puramente sperimentale o se, invece, vengono tenute presenti tutte le conoscenze già acquisite. Per esempio, studenti che riuscissero a capire che la legge generale che esprime la dipendenza esplicita di F(n) è del tipo

$$\mathrm{F}(n) = b^n a + \frac{1-b^n}{1-b}$$

probabilmente risolverebbero il problema proposto in breve tempo, dimostrando, inoltre, buone abilità di produrre e utilizzare forme di pensiero analogico che, in matematica, sono assolutamente importanti.

Possibili sviluppi:

- Dimostrazioni, per induzione, di alcune congetture avanzate dagli studenti o suggerite dall'insegnante.
- Approfondimenti sul problema delle approssimazioni e del controllo del risultato di calcoli in cui si fa sistematico uso di approssimazioni.
- Il problema delle somme infinite: come valutare la convergenza e, nel caso in cui la somma converga, quali tecniche possono essere utilizzate per determinare la somma di infiniti termini (eventualmente con l'aiuto di calcolatrici grafico – simboliche).
- Le differenze finite per trovare la legge con cui è stata generata una successione di numeri (nel caso di leggi polinomiali o nel caso di leggi esponenziali).
- Critica sulle potenzialità e i limiti del modello, anche con considerazioni di carattere chimico – biologico.
- Effetti delle droghe e dell'alcool sull'organismo (in collaborazione, almeno, con l'insegnante di scienze e chimica).
-

Elementi di prove di verifica

1. Ricerca della legge

La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza *B* in funzione di una grandezza *A*. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (*A*); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente *B*. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (*B*2- *B*1, *B*3- *B*2, *B*4- *B*3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella terza colonna (*C*3-*C*2, *C*4-*C*3, *C*5-*C*4 … e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione $B = f(A)$, spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	*B*	*C*	*D*
0	0		
0,3	-0,51	-0,51	
0,6	-0,84	-0,33	0,18
0,9	-0,99	-0,15	0,18
1,2	-0,96	0,03	0,18
1,5	-0,75	0,21	0,18
1,8	-0,36	0,39	0,18
2,1	0,21	0,57	0,18
2,4	0,96	0,75	0,18
2,7	1,89	0,93	0,18
3	3	1,11	0,18
3,3	4,29	1,29	0,18
3,6	5,76	1,47	0,18
3,9	7,41	1,65	0,18
4,2	9,24	1,83	0,18
4,5	11,25	2,01	0,18
4,8	13,44	2,19	0,18

Tabella 4

2. La palla che rimbalza
Una palla magica viene lasciata cadere da un'altezza h. Supponendo che la palla perda il 15% dell'energia a ogni urto con il terreno, studiare l'evoluzione dell'altezza della palla dal suolo all'aumentare del numero di urti, determinando una legge analitica che rappresenti la variazione dell'altezza della palla dal suolo. Come sarebbe il grafico dell'altezza della pallina dal suolo al variare del tempo? C'è qualche relazione tra i due grafici appena descritti?

3. Pesci in una riserva di pesca
All'inizio di un'osservazione in una riserva di pesca sono presenti 2000 pesci. Supponendo che il numero dei pesci diminuisca ogni anno, per varie cause (la pesca, morte naturale ecc.), del 30% e che alla fine di ogni anno la riserva venga ripopolata con 1500 pesci, quale sarà l'evoluzione del numero di pesci presenti nello stagno se le ipotesi fatte rimangono costantemente valide?
Come varia l'evoluzione del fenomeno al variare dei parametri significativi?

4. Decadimento radioattivo
Supponiamo di studiare la disintegrazione di una massa di materiale radioattivo. Sia t il tempo misurato a partire da quando si inizia a studiare il fenomeno e sia $m = m(t)$ la massa che al tempo t non si è disintegrata. Supponiamo che la velocità di disintegrazione sia proporzionale, in ogni istante, alla massa $m(t)$ non ancora disintegratasi. Come evolverà la massa $m(t)$? Dopo aver prodotto qualche congettura di tipo qualitativo, provate a fare qualche ipotesi quantitativa (per esempio potreste ipotizzare che in ogni unità di tempo si disintegri, mediamente, il 5% della massa) e verificate la risposta data in precedenza aiutandovi con le calcolatrici.

5. Una successione di quadrati
La seguente figura indica una costruzione che parte dal quadrato di vertici $A_1B_1C_1D_1$ e prosegue all'infinito considerando i punti medi di ciascun lato di ogni nuovo quadrato.

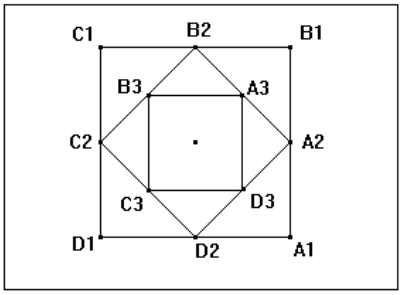


Figura 1

Descrivi la costruzione del secondo quadrato $A_2B_2C_2D_2$; descrivi la costruzione del quadrato generico, motivandola.
Assegnata la misura del lato del quadrato iniziale, ad esempio 1, come varia il lato del quadrato quando si procede a costruzioni successive? Qual è il rapporto tra un lato e il lato del quadrato successivo? Come varia l'area del quadrato? Qual è il rapporto tra un'area e la successiva?
Considera la somma delle aree dei quadrati, a partire dal primo quadrato assegnato aggiungendo le aree dei quadrati via via ottenuti. Come varia questa somma? A quale limite tende quando il numero dei quadrati tende all'infinito?

Moto di un proiettile

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi. rappresentare graficamente e risolvere problemi che si formalizzano con sistemi di secondo grado. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Equazioni e disequazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici. Le funzioni seno, coseno e tangente.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di Matematica	Fisica

Contesto
Applicazioni goniometriche.

Questa attività può essere proposta in una classe di un secondo biennio nella quale siano già stati introdotti i concetti di seno e coseno di un angolo acuto e trattati i primi elementi di cinematica (almeno le equazioni orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato e il moto di caduta libera di un grave). Il contesto di riferimento è quindi quello scolastico dei primi elementi di fisica e l'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi di questo contesto e contribuire a consolidare alcune conoscenze che gli studenti hanno conseguito nei corsi di fisica. Attraverso un esempio storicamente significativo[1], si introducono, per un caso particolare, le equazioni parametriche di un luogo geometrico (una parabola con asse verticale) che è oggetto di studio di geometria analitica che, in quanto funzione quadratica, costituisce uno degli argomenti indicati nel tema "*Relazioni e funzioni*" del primo biennio.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. La prima consiste in una discussione qualitativa sul moto di un proiettile e in una successiva sistemazione quantitativa condotta dall'insegnante. Nella seconda fase, grazie anche all'uso di software di manipolazione simbolica, si propongono agli studenti quesiti finalizzati alla costruzione di tecniche utili a risolvere problemi di moto del proiettile utilizzando le sole leggi orarie. Nella terza fase si determina, a partire dalle leggi orarie, l'equazione cartesiana della traiettoria.
L'uso degli strumenti informatici è fortemente consigliato nella conduzione di quest'attività.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone agli studenti di descrivere qualitativamente la traiettoria del moto di un oggetto lanciato con un angolo diverso da 0 rispetto alla verticale. Dopo una discussione di carattere

[1] Le ricerche volte allo studio del moto dei corpi e, in particolare, al moto di un proiettile, sono state, nel XVII secolo, oggetto di attenzione e finanziamenti considerevoli.

qualitativo, tesa soprattutto ad ascoltare le risposte degli studenti, evidenziando quelle più adatte a preparare la trattazione più formale e quantitativa, l'insegnante fa riflettere sul fatto che il moto di un proiettile, trascurando altre forze che non siano quella di gravità, avviene in due dimensioni.
Scomponendo il moto in due direzioni fra loro ortogonali, delle quali una coincidente con quella della forza di gravità, si ottiene un moto uniformemente accelerato lungo una direzione e rettilineo uniforme lungo l'altra.
Un esempio di possibile introduzione del problema del moto di un proiettile viene qui accennata:
un moto parabolico è caratterizzato da una velocità iniziale v_0 (in m/s) e da un angolo di tiro α (si tratta dell'angolo formato dalla direzione di tiro con l'asse orizzontale). Il suo moto orizzontale è uniforme, con velocità costante uguale a $v_0 \cos(\alpha)$. Quindi, assumendo che, nell'istante t=0, il punto si trovi nell'origine, la posizione orizzontale è descritta dalla funzione

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t.$$

Che cosa succede verticalmente? È come se lanciassimo un sasso verso l'alto. La velocità verticale varia, perché la forza di gravità determina un'accelerazione diretta verticalmente verso il basso. Se non ci fosse l'accelerazione di gravità la velocità verticale sarebbe costante, pari a $v_0 \sin(\alpha)$.
Invece l'accelerazione di gravità, che si indica con g e che vale circa 9,8 m/s^2, produce una diminuzione della velocità pari a g m/s ogni secondo. Quindi la velocità verticale varia nel tempo con la seguente legge: $v(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$.
Come varia la posizione verticale? Consideriamo l'istante iniziale t=0 (in cui la velocità verticale vale $v_0 \sin(\alpha)$) e un istante qualsiasi t (in cui la velocità verticale vale $v_0 \sin(\alpha) - gt$); nell'intervallo di tempo da 0 a t, poiché la velocità varia uniformemente, la velocità media è uguale a $\frac{v_0 \sin(\alpha) + v_0 \sin(\alpha) - gt}{2} = \frac{2v_0 \sin(\alpha) - gt}{2} = v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} gt$.
Se nell'intervallo di tempo che va da 0 a t (cioè in t secondi) un punto si muove con velocità media pari a $v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} gt$, allora percorre uno spazio (in metri) $s(t) = \left(v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} gt \right) t$. Quindi la sua posizione verticale è data dalla funzione $y = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} gt^2$.
Quindi le funzioni parametriche di un moto parabolico caratterizzato da velocità iniziale v_0 e angolo di tiro α sono espresse con le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Seconda fase
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema da svolgersi con l'aiuto di un software di manipolazione simbolica, utilizzando eventualmente le calcolatrici grafico - simboliche[2].

Si lancia un sasso con una velocità iniziale v_0 = 10 m/s in direzione α = 60°; assumendo g=9,8 m/s^2:
a) scrivere le funzioni parametriche del moto;
b) in ambiente Parametric[3] impostare xt1= e yt1= secondo le funzioni stabilite;
c) in ambiente Window[4] ponete tmin=0 e tmax uguale ad un numero opportuno di secondi (non troppo grande; quanto resta in aria un sasso lanciato a 60° con velocità 10 m/s?). Ponete xmin=0 e xmax uguale ad un numero opportuno di metri (quanto procede il sasso in orizzontale prima di

[2] Nel prosieguo dell'attività si fa riferimento a un ambiente tipico di alcune calcolatrici grafico – simboliche. Non è difficile riformulare le richieste adeguandole al particolare strumento utilizzato. Eventualmente è anche possibile riformulare l'attività senza riferirsi ad alcun software.
[3] Ci si riferisce all'ambiente del software nel quale è possibile definire funzioni parametriche.
[4] Ci si riferisce all'ambiente del software nel quale è possibile ridefinire la finestra grafica nella quale rappresentare le funzioni che si definiscono.

cadere a terra?). Ponete ymin=0 e ymax uguale ad un numero opportuno (quale altezza massima potrà raggiungere, all'incirca, il sasso?). In Y=Editor, con il cursore su xt1= oppure su yt1= settate F6 Style, Path, in modo da vedere una "pallina" che si muove lasciando dietro di sé la traiettoria. Finalmente andate in Graph e osservate il moto. Se occorre, cambiate i parametri in Window, in modo da osservare bene il moto sullo schermo della calcolatrice;
d) osservando il grafico e usando qualunque metodo riteniate opportuno rispondete alle seguenti domande:

- Quanti metri percorre il sasso in orizzontale prima di cadere a terra? Questa distanza si chiama *gittata* del moto parabolico.
- Per quanti secondi rimane in aria prima di cadere a terra? Questo intervallo di tempo si chiama *tempo di volo*.
- Quanto in alto sale? Cioè qual è l'altezza massima raggiunta?

e) Che cosa succede se, mantenendo la stessa velocità iniziale, si cambia l'angolo di tiro? Compilate la Tabella 1. Approssimate le distanze ai centimetri e gli angoli al decimo di grado.

v_0 (m/s)	α (°)	gittata (m)	tempo di volo (s)	altezza max (m)
10	10°			
10	30°			
10	40°			
10	50°			
10	60°			
10	80°			

Tabella 1

f) Che cosa succede se, mantenendo lo stesso angolo di tiro, si cambia la velocità iniziale? Compilate la Tabella 2. Approssimate le distanze ai centimetri e gli angoli al decimo di grado.

v_0 (m/s)	α (°)	gittata (m)	tempo di volo (s)	altezza max (m)
2	60°			
5	60°			
10	60°			
15	60°			
20	60°			
30	60°			

Tabella 2

Terza fase

L'insegnante sistema e organizza i risultati raggiunti dagli studenti nelle due precedenti fasi e dimostra, a partire dalle leggi del moto (ossia dalle due funzioni parametriche $x(t)$ e $y(t)$) che l'equazione cartesiana della traiettoria del moto di un proiettile è $y = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2$.

Dimostra inoltre, che la gittata risulta allora $\frac{2v_0^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$ e fa notare che l'altezza massima corrisponde all'ordinata del vertice della parabola che descrive la traiettoria.

Possibili sviluppi

- Determinazione delle leggi della velocità del proiettile e, in particolare, determinazione della velocità con cui tocca terra.

- Funzioni che esprimono un moto armonico.
- Equazioni parametriche di una circonferenza e relazioni tra moto armonico e moto circolare uniforme.

Elementi di prove di verifica

1. Calcolo di gittate, altezza massima e tempo di volo
Si consideri un moto parabolico con v_0 = 10 m/s e α=55°. Dopo aver approssimato sul grafico[5] della calcolatrice la gittata, l'altezza massima e il tempo di volo, calcolarli (g = 9,8 m/s^2).

Quale deve essere la velocità iniziale di un corpo puntiforme lanciato con direzione 30° se si vuole che la gittata sia di 50 m (g = 9,8 m/s^2)?

Un sasso viene lanciato verso l'alto (quindi con direzione 90°). A che velocità deve essere lanciato se si vuole che arrivi fino a un'altezza massima di 12 m (g = 9,8 m/s^2)?

[5] Questa richiesta ha senso soprattutto se si utilizzano software che consentono di percorrere con un cursore i punti del grafico indicando, contemporaneamente, il valore delle coordinate dei punti toccati.

Elementi di prove di verifica

Disequazioni

1. Indica per quali valori di x è vera la disuguaglianza $x^2 + x < x^2 + x + 1$

2. Risolvi la disequazione $|x - 2| \geq |x - 6|$.
(È opportuno interpretare una scrittura del tipo $|x - 5|$, come "la distanza di x, punto mobile sulla retta delle ascisse, dal punto 5" e seguire dinamicamente che cosa significa ciò per diverse posizioni di x. Successivamente, la scrittura $|x - 5| \geq 2$ viene facilmente intrepretata come "le posizioni di x sulla retta tali che la sua distanza da 5 sia maggiore o uguale a 2".
Infine la scrittura $|x - 2| \geq |x - 6|$ si interpreta come "le posizioni in cui x è più distante da 2 che da 6")

Confronto fra funzioni

3. In un opportuno sistema di riferimento, disegna il grafico di $y = x^2$.
Quindi, nello stesso sistema di riferimento, disegna i grafici di:
$y = x^2 - 3$ $\quad y = -(x + 1)^2$ $\quad y = |x^2 - 1|$

4. Considera le equazioni $y = a/x$ $\quad y = ax^2$; che tipo di diagramma rappresentano rispettivamente nel sistema di assi cartesiani xOy?
E nel sistema di assi cartesiani aOy?

5. In un opportuno sistema di riferimento , disegna il grafico di $y = \sin x$.
Quindi, nello stesso sistema di riferimento, disegna i grafici di:
$y = 2 + \sin x$ $\quad y = \sin(-x)$ $\quad y = \sin|x|$

6. Ricordando che e^x è una funzione crescente, e tenendo presente il grafico della funzione $y = \sin x$ e le sue caratteristiche, studia il segno della funzione $y = e^{\sin x}$ definita nell'intervallo $[-2\pi ; 2\pi]$ e determina i suoi punti di massimo e di minimo.

7. Qual è la funzione inversa della funzione $y = (x + 4)/x$?

Tipologie di funzioni

8. La temperatura del mare varia nel corso dell'anno secondo una legge che con buona approssimazione si può ritenere di tipo sinusoidale: $y = A + B \sin(Cx+D)$.
In questa formula, x denota il giorno dell'anno ($x = 1$ corrisponde al ° gennaio;… $x = 20$ corrisponde al 20 gennaio;… $x = 365$ corrisponde al 31 dicembre), mentre y denota la corrispondente temperatura (misurata in gradi centigradi).
Determina le costanti A, B, C, D, in accordo con i seguenti dati, desunti da una serie di rilevamenti sperimentali effettuati in una località marittima italiana:
- periodicità della funzione : 365 giorni;
- temperatura minima: 9° C registrata il 20 gennaio;
- temperatura massima: 23° C, registrata il 20 luglio.

9. Esprimi le funzioni che legano l'area della superficie laterale di un cubo e il volume del cubo alla misura dello spigolo. Disegna l'andamento grafico delle due funzioni su un piano cartesiano. Cosa puoi dire, relativamente alla crescita della funzione area, rispetto a quella della funzione volume, all'aumentare della misura dello spigolo?

10. Siano $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=(x+1)^2$; completa la tabella seguente:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
2			80	16
		4		81
x	x^2-1			

11. Sapendo che la resistenza della struttura ossea è proporzionale alla sezione delle ossa e che il peso è proporzionale al volume di un corpo, sapresti dire se può esistere un uomo che sia alto dieci metri, ma che sia proporzionato (nel senso che sia simile a un uomo normale)? Sapresti dire perché gli elefanti hanno le zampe così larghe?

12. Due funzioni che sono l'una l'inversa dell'altra hanno grafici simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Disegna i grafici delle funzioni inverse di $y = 2^x$ e di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

13. Nel film, *Un sogno per domani*, un bambino di scuola media ha un'idea per migliorare il mondo: questa idea prevede di *passare un favore a tre persone diverse*, richiedendo che ciascuna di esse faccia altrettanto con altre tre persone. Supponendo che, mediamente, ogni persona impieghi un mese a passare i tre favori, quanto tempo sarebbe necessario affinché ogni abitante della terra venisse coinvolto in questo grandioso progetto? (Si fa l'ipotesi, inverosimile, che i favori non siano sempre "passati" a persone diverse).

Area sottesa da un grafico

14. Supponi di ricordare solamente come si calcola l'area di un rettangolo. Con quest'unica formula a disposizione come potresti dare una stima dell'area di una semicirconferenza di raggio 1? E dell'area della regione finita di piano individuata dalla parabola $y = 3 - x^2$ e dall'asse x? Come potresti migliorare la stima da te trovata? Come puoi dare una stima dell'errore commesso?

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. e Robutti, O., *Matematica*, La Scuola, 2002.
Campedelli, L., *Fantasia e logica nella matematica*, Milano, Feltrinelli, 1966.
Jakobson, R., *Saggi di linguistica generale*, Milano, Feltrinelli, 1966.
Maraschini, W., Menghini, M., Palma, M., *Strategie matematiche: formalizzare per risolvere*, Pitagora, Bologna, 1997.
NCTM, 1998, proposta del nuovo curricolo dall'Associazione degli insegnanti di matematica degli USA; reperibile al sito: http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.2/index.htmIRRE
Villani, V., *Matematica per discipline biomediche*, McGraw-Hill, 2ª ed., 1997.

DATI e PREVISIONI

Dati e previsioni

Gli argomenti del nucleo “Dati e previsioni” già presenti nel curricolo della scuola primaria e secondaria di primo grado per essere affrontati in modo prevalentemente intuitivo, ricevono in questo curricolo una organizzazione più strutturata, adatta all’età degli studenti. A livello di ciclo secondario, infatti, le conoscenze da acquisire, pur basandosi sempre sulla classificazione dei caratteri (qualitativi, sconnessi ed ordinati; quantitativi, discreti e continui) consistono nel mettere in evidenza la possibilità sia di sintetizzare la distribuzione statistica semplice con una pluralità di valori medi tra i quali scegliere in modo opportuno, tenendo conto della definizione di ciascuno di essi, sia di misurare la variabilità del carattere nel collettivo studiato. Lo studio della variabilità non è però fine a se stesso, ma ha uno scopo interpretativo. La sua giustificazione, perciò, richiede l’entrata in campo almeno di un secondo carattere con un ruolo esplicativo rispetto al primo. Ciò pone due problemi concettuali differenti: lo studio della connessione o interdipendenza statistica fra caratteri e lo studio (ma solo se entrambi i caratteri sono quantitativi), del loro variare simultaneo. Si introducono così il concetto di correlazione (concordanza e discordanza) e la ricerca di una semplice espressione funzionale che descriva la legge di dipendenza fra le variabili osservate (regressione lineare).

Non a caso le conoscenze che riguardano la probabilità seguono in questo curricolo quelle di statistica. Ciò suggerisce come sia opportuno iniziare la trattazione di tale tema, avendo già a disposizione motivazioni ed esempi accattivanti che permettono di introdurre la probabilità, le sue proprietà di base e le prime regole di calcolo. Anche il passaggio dagli eventi alle variabili aleatorie è favorito da questo approccio che vede “semplici distribuzioni di probabilità” introdotte su una base ormai solida, offerta dallo studio delle distribuzioni semplici. Il concetto di probabilità condizionata e il teorema di Bayes hanno importanti applicazioni concrete in vari settori.

La vita quotidiana e le proposte dei mezzi di comunicazione offrono sempre più l’opportunità di motivare gli studenti ad affrontare temi di statistica e di probabilità. L’insegnante potrà utilmente sfruttare la curiosità innata degli studenti per far loro raccogliere informazioni quantitative su argomenti che li coinvolgono direttamente, ma anche su argomenti che riguardano la fisica, l’economia, la storia, la geografia e che richiedono o la ripetizione della stessa esperienza o la gestione di un collettivo di osservazioni empiriche. Ciò che va evitato è di introdurre la statistica come un insieme di calcoli su numeri inventati e senza significato in un contesto reale. La statistica e la probabilità sono un valido aiuto per il cittadino e promuovono l’acquisizione di abilità utili nella vita quotidiana solo se aiutano a comprendere la realtà ed in particolare quel suo aspetto “disorientante” che è la variabilità dei fenomeni.

Tra l’altro operare in contesti quantitativi coinvolgenti ed interessanti, perché derivanti da fenomeni in parte conosciuti, può essere un utile supporto per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica, introducendo gradualmente il linguaggio formale della matematica, in modo che gli studenti arrivino a percepire che le formule non sono altro che un linguaggio che ha il vantaggio della concisione e della non ambiguità.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
1° biennio	Arrivare a scuola	Extramatematico, sociale	Lingua italiana	
1° biennio	Grafico…è bello	Distribuzioni semplici, grafici	Lingua italiana, storia ed educazione civica	
1° biennio	Di media *non* ce n'è una sola	Vita quotidiana		
1° biennio	Pivot è bello	Numeri, grafici		
1° biennio	Un gioco con tre dadi	Giochi, probabilità		
1° biennio	Il problema delle parti	Giochi, probabilità	Storia	
1° biennio	Elementi di prove di verifica	Probabilità		
2° biennio	A proposito di valutazione scolastica	Extramatematico, sociale, distribuzioni doppie		
2° biennio	I grafici parlano…	Sociale		
2° biennio	Promossi con una domanda sola?	Extramatematico, sociale, probabilità		
2° biennio	Se si insiste…*non* si vince	Giochi, probabilità		
2° biennio	Anche le rette raccontano	Extramatematico, sociale		
2° biennio	Nasce un'impresa!	Sociale: progettazione	Lingua italiana, Economia e marketing	
2° biennio	Elementi di prove di verifica	Probabilità		

Arrivare a scuola

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Comprendere la differenza fra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e continui. Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche.	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze.	Dati e previsioni Spazio e figure Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Extramatematico, sociale.

Il contesto di questa attività è di tipo extramatematico, in particolare riguarda l'ambito sociale.
Questa unità riguarda l'"arrivare a scuola". L'attività prevede la problematizzazione delle situazioni, la predisposizione del questionario, la raccolta dei dati, la loro elaborazione e rappresentazione grafica, la loro interpretazione.
Questa attività è consigliata nel 1° biennio, come uno dei possibili approcci al nucleo, in raccordo con quanto sviluppato nella scuola secondaria di primo grado. Il contesto è extramatematico e si basa sull'esperienza della vita quotidiana, ponendo i ragazzi di fronte all'analisi di problemi concreti.

Descrizione dell'attività
Rendere protagonisti gli studenti, con tematiche che li coinvolgono in prima persona, si è mostrato una metodologia vincente sotto l'aspetto della motivazione. Qui si propone un tema già largamente sperimentato nella scuola superiore: "l'arrivare a scuola".
L'argomento si presta per affrontare il problema del trasporto in cui tutti gli studenti sono coinvolti. Nel caso in cui l'indagine riguardi tutto l'istituto, il momento della restituzione dei dati potrà, ad esempio, avviare un dibattito sul tema dei ritardi nell'ambito dell'assemblea degli studenti.

Prima fase
Per accertare la conoscenza da parte degli allievi dei concetti di unità statistica, di collettivo statistico, come insieme delle unità indagate, di carattere e sue modalità, l'insegnante propone una attività di gruppo, chiedendo agli studenti di preparare una o più schede di lavoro sulla distinzione tra unità statistica, carattere e modalità. Per saggiare la conoscenza degli studenti con riferimento alla individuazione delle diverse tipologie di carattere il docente può sottoporli a prove di verifica (si vedano le proposte in fondo all'unità).

Seconda fase
Nel presupposto che il questionario sia lo strumento più adatto per raccogliere i dati, l'insegnante propone una attività di gruppo finalizzata alla sua preparazione.
I questionari costruiti dai ragazzi sono poi confrontati e discussi per fare emergere una versione definitiva, completa e corretta.

L'attenzione viene focalizzata, in particolare, sulla necessità di porre domande semplici, chiare e precise in modo da evitare che una domanda possa essere interpretata in modi diversi o risulti non completa nella sua formulazione.
E' preferibile che le domande siano a risposta chiusa, in modo che le alternative di risposta siano previste in anticipo; quando non è possibile individuarle tutte si introduce la modalità "altro".
Si consiglia di limitare le domande a risposta aperta a quando si richiede un parere personale.
Perché i dati abbiano la stessa natura e siano confrontabili, occorre riferirsi ad opportune unità di misura. In questo caso particolare, ad esempio, l'unità di misura è necessaria con riferimento a: il tempo necessario per effettuare il percorso casa-scuola e il momento in cui ci si alza al mattino. Dato che il tempo è un carattere quantitativo continuo le domande che lo riguardano vengono espresse in intervalli. In questo modo è possibile tenere conto anche dell'errore di approssimazione da cui le misure sono affette.
Con riferimento al tempo abitualmente impiegato per arrivare a scuola, si è deciso di utilizzare la classificazione proposta dall'ISTAT nella scheda del censimento della popolazione. Ad eccezione della prima e dell'ultima classe, ciò significa utilizzare classi chiuse sia a destra sia a sinistra; con la conseguenza che ogni estremo viene inteso come il punto centrale di un intervallo di ampiezza unitaria. Rispetto al "momento" in cui ci si alza al mattino, si considera che si alzi alle 6.29 chi lo fa tra le 6.29.00 e le 6.29.59.
L'attenzione alla formulazione del questionario può costituire un utile momento di interdisciplinarità, in particolare con il collega di italiano.
L'insegnante orienta la discussione in modo che vengano prescelte le domande che soddisfano le finalità conoscitive del fenomeno e contemporaneamente in modo che siano presenti caratteri di tipo qualitativo, sconnesso e ordinato, e quantitativo, discreto e continuo, con l'obiettivo di mettere in evidenza il diverso trattamento dei dati a seconda del tipo di carattere.
Per collaudare il questionario predisposto, in analogia con le procedure usualmente adottate nelle indagini statistiche, risulta opportuno provare il questionario in un'altra classe.
Effettuata la somministrazione pilota ed apportate le eventuali modifiche si ottiene il questionario definitivo col quale eseguire l'indagine. Di seguito si fornisce un esempio di questionario frutto di un'attività realmente effettuata in un istituto scolastico superiore.

Sezione 1: Dati relativi al rispondente

Domanda 1: Qual è la tua età (in anni compiuti)?

- □ Meno di 14
- □ 14
- □ 15
- □ 16
- □ 17
- □ 18
- □ 19
- □ più di 19

Domanda 2: Sesso

- □ Femmina
- □ Maschio

Domanda 3: Qual è il tuo comune di residenza?

_____

Domanda 4: Quale classe stai frequentando?

- □ Prima
- □ Seconda
- □ Terza
- □ Quarta
- □ Quinta

Sezione 2: Andare a scuola

Domanda 5: A che ora ti alzi abitualmente il mattino per venire a scuola?

- □ Prima delle 6.00
- □ Dalle 6.00 alle 6.29
- □ Dalle 6.30 alle 6.59
- □ Dalle 7.00 alle 7.29
- □ Dalle 7.30 in poi

Domanda 6: Con quale tipo di mezzo abitualmente raggiungi la scuola?

- □ A piedi
- □ Solo con mezzi privati (bicicletta, motorino, automobile,…)
- □ Solo con i mezzi pubblici (bus urbano e/o extraurbano, treno,…)
- □ Con mezzi sia privati che pubblici

Domanda 7: Quanto tempo impieghi abitualmente per arrivare a scuola, partendo da casa?

- □ Fino a 15 min.
- □ Da 16 a 30 min.
- □ Da 31 a 45 min.
- □ Da 46 a 60 min.
- □ Oltre 60 min.

Domanda 8: Abitualmente arrivi a scuola in orario?

□ Si □ No

Terza fase

Una volta somministrato il questionario, è necessario elaborare i dati. Si ritiene utile, a questo livello scolare, procedere allo spoglio manuale di un adeguato numero di questionari per mettere in evidenza la difficoltà dell'operazione e il rischio, in questa fase molto delicata, di introdurre degli errori sia di lettura che di registrazione.

Si propone di utilizzare schemi di spoglio del tipo di Tabella 1 e di Tabella 2.

Qui, come nei prossimi esempi i dati riguardano un'indagine condotta presso alcune classi prime dell' I.T.C.S. "G. Salvemini" di Casalecchio di Reno (BO), nel febbraio 2003.

Prospetto di spoglio: carattere "Età"

Età in anni compiuti	Spoglio	N. studenti
14 anni	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	61
15 anni	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26
16 anni	⌴	3
Totale		90

Tabella 1

Prospetto di spoglio dei caratteri: "Sesso" e "Puntualità"

	Puntualità		
Sesso	Si	No	Tot
M	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 |	61
F	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 □		29
Totale	84	6	90

Tabella 2

E' fondamentale nel presentare i dati in forma tabellare inserire il titolo, indicando nell'ordine due elementi "chiave" che danno senso all'analisi: la definizione del collettivo statistico in esame e l'indicazione del carattere secondo il quale si sta effettuando lo studio del collettivo stesso. L'esigenza che entrambe le indicazioni siano esatte e sintetiche può rendere difficile sia la predisposizione del titolo della tabella che si sta costruendo, sia la comprensione di dati acquisiti già in forma tabellare.

L'operazione di spoglio effettuata produce rispettivamente la Tabella 3 e la Tabella 5a. La prima contiene una distribuzione statistica secondo un solo carattere (distribuzione semplice), la seconda una distribuzione statistica contemporaneamente secondo due caratteri (distribuzione doppia).

Quarta fase
L'insegnante propone di esaminare in dettaglio le risposte ad alcune domande.
Rispetto all'età:

Studenti della classe prima dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"
per età (in anni compiuti)
(7 febbraio 2003)

Età (in anni compiuti)	N° studenti
14	61
15	26
16	3
Totale	90

Tabella 3

Qual età è la più frequente? *(moda = 14 anni)* Qual è l'età minima? Qual è l'età massima?
Se ci si vuole confrontare con la prima classe di un liceo scientifico vicino, è possibile utilizzare la tabella ottenuta? La risposta dipende dal fatto se le due scuole hanno lo stesso numero di studenti iscritti alla classe prima, se così non fosse occorrerà ricorrere al calcolo delle frequenze relative, o a quelle percentuali, di entrambe le tabelle, che diventeranno in tal modo commensurabili.

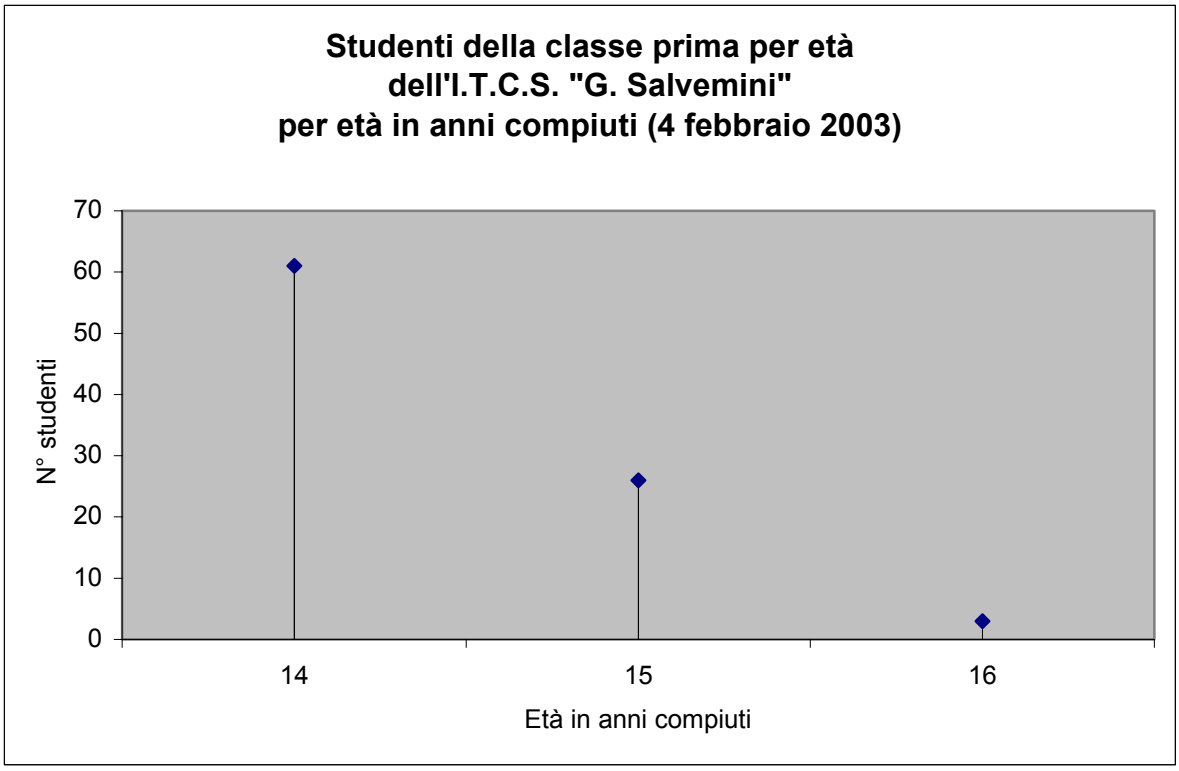


Figura 1

Dovendo costruire la rappresentazione grafica quale tipo di grafico è più opportuno? L'insegnante apre la discussione cercando di condurre gli studenti ad osservare che, essendo il carattere quantitativo discreto, la coppia ordinata (modalità, frequenza) individua un punto del piano cartesiano, con ciò consentendo la costruzione di un diagramma ad aste.
Ogni asta è proporzionale alla frequenza della corrispondente modalità del carattere.
Rispetto al tempo abituale di percorrenza casa scuola:

Studenti della classe prima dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"
per tempo abituale di percorrenza casa-scuola
(7 febbraio 2003)

Tempo di percorrenza (min.)	N° studenti
fino a 15 min.	30
da 16 a 30 min.	24
da 31 a 45 min.	30
da 46 a 60 min.	5
oltre i 60 min.	1
Totale	90

Tabella 4

Nella tabella che classifica gli studenti rispetto ai tempi di percorrenza si può effettuare una rappresentazione grafica ad aste? Si? No? Perché?
Si ritrovano le stesse condizioni della tabella precedente? In effetti ora si ha a disposizione la coppia ordinata (intervallo, frequenza), non è quindi più possibile costruire un grafico ad aste.
Occorre fare una nuova ipotesi di lavoro: la frequenza viene rappresentata mediante un rettangolo in cui la base rappresenta l'intervallo e l'altezza la densità di frequenza (tale concetto potrà essere opportunamente approfondito ed utilizzato in seguito).

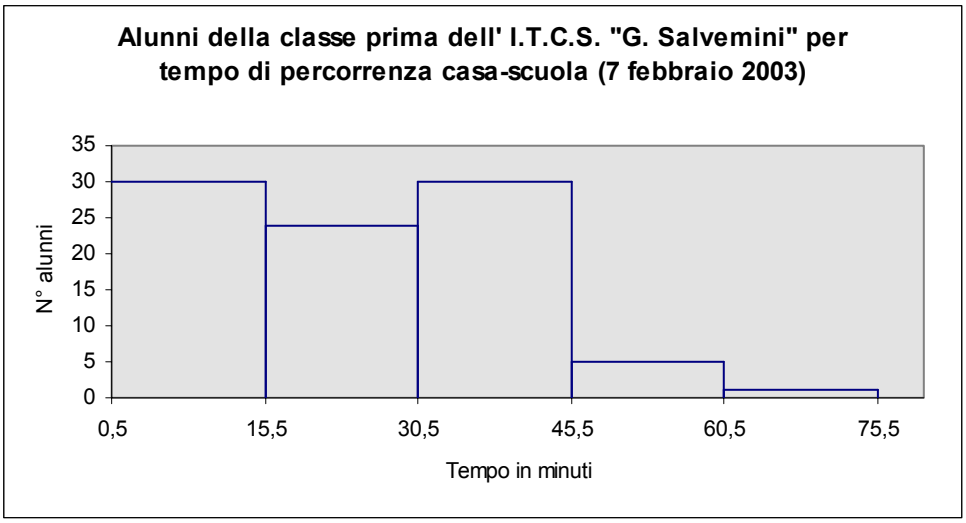


Figura 2

Inoltre occorre procedere ad una modifica degli estremi di ogni intervallo; ciò è possibile considerando l'approssimazione delle misure sicché gli intervalli modificati sono: 0,5 - 15,5; 15,5 – 30,5; 30,5 – 45,5; 45,5 – 60,5; 60,5 – 75,5. Si è in questo modo risolto anche il problema del primo e dell'ultimo intervallo che in origine erano aperti e che sono stati chiusi rispettivamente a sinistra con 0,5 e a destra con 75,5. Gli estremi di sinistra e di destra sono stati scelti in modo da mantenere invariata l'ampiezza degli intervalliA questo punto l'insegnante, dopo aver osservato che le aree di due rettangoli di uguale base sono proporzionali alle rispettive altezze, porta gli studenti a costruire **l'istogramma** di frequenze di Figura 2.

Contemporaneamente rispetto al sesso e alla puntualità:

Studenti della classe prima
dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"
per sesso e puntualità
(7 febbraio 2003)

	Puntualità		
Sesso	Sì	No	
Femmine	55	6	61
Maschi	29	0	29
Totale	84	6	90

Tabella 5a

Studenti della classe prima
dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"
per sesso e puntualità (dati in percentuale)
(7 febbraio 2003)

	Puntualità		
Sesso	Sì	No	
Femmine	90,2	9,8	100
Maschi	100	0	100
Totale	93,3	6,7	100

Tabella 5b

Lo scopo dell'indagine è volta anche a capire come gli studenti rispettano l'orario d'ingresso a scuola. Può essere che il sesso abbia influenza sul comportamento di questi studenti?
Guardando la tabella c'è differenza fra il comportamento dei maschi e quello delle femmine? Può essere utile calcolare le frequenze percentuali di riga?
I dati nel loro complesso possono meravigliare per l'alta percentuale di studenti che dichiara di arrivare abitualmente in orario. Gli studenti hanno "barato"? Ci sono stati errori di rilevazione o di spoglio? C'è qualche motivo per questo comportamento"virtuoso"? Un docente della scuola richiesto di giustificare questi dati informa che la scuola effettua un rigido controllo sui ritardi.

Possibili sviluppi
In modo analogo si possono costruire le distribuzioni degli altri caratteri facendo attenzione a che le rappresentazioni grafiche siano adeguate per ogni tipo di carattere. Grafici a settori circolari grafici, a colonne e grafici a nastro sono adatti per caratteri qualitativi; istogrammi a basi uguali sono adatti per caratteri qualitativi ordinati. Sarà poi cura dell'insegnante condurre gli studenti ad interpretare i dati elaborati.

Elementi di prove di verifica

Individua la risposta corretta fra quelle proposte, barrando la relativa lettera.

1. Qual è la definizione corretta di **carattere statistico**?
a) Un aspetto di una determinata entità, che può essere misurato o classificato
b) Un gruppo di unità omogenee per qualità
c) La misura dell'altezza di un individuo espressa in centimetri
d) La manifestazione di un giudizio su una unità statistica

2. Quale tra le seguenti è la definizione corretta di **unità statistica**?
a) Sono le entità che formano un collettivo
b) Il sesso degli individui che formano un collettivo
c) Un collettivo di unità statistiche a cui rivolgere l'indagine
d) Una popolazione che può essere classificata o misurata sotto vari aspetti

3. Fra i seguenti distingui quali sono **caratteri statistici**:

a) Sesso di un individuo	Sì	No
b) Reddito di una persona	Sì	No
c) Campione	Sì	No
d) Famiglia	Sì	No
e) Azienda	Sì	No
f) Numero di dipendenti di una azienda	Sì	No
g) Valutazione di un esame	Sì	No
h) Perimetro toracico	Sì	No
i) Colore dei capelli	Sì	No
l) Regioni di uno Stato	Sì	No
m) L'insieme delle città italiane	Sì	No

4. Tra quelli che hai individuato come caratteri, indica quali sono **qualitativi** e quali **quantitativi**

Caratteri qualitativi	Caratteri quantitativi

5. Per ciascuno fra i seguenti caratteri statistici, indica di quale tipo si tratta, scegliendo fra: **qualitativo sconnesso**, **qualitativo ordinato**, **quantitativo discreto**, **quantitativo continuo.** Spiega la tua risposta.

a) Età

_____

b) Numero degli elettori alle elezioni politiche

_____

c) Sesso

_____

d) Statura

_____

e) Reddito annuo di una persona

_____

f) Temperatura rilevata in una certa ora della giornata

_____

g) Professione di un individuo

_____

Griglia di correzione

1. a
2. d
3. a, b, f, g, h, i

Grafico … è bello

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche.	Frequenze assolute, relative, percentuali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. Serie storiche e loro rappresentazioni.	Dati e previsioni Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana, storia ed educazione civica

Contesto
Distribuzioni semplici, grafici.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito statistico (distribuzione semplice e rappresentazioni grafiche) con aspetti extramatematici in quanto si basa su un'attività interdisciplinare con la storia e l'educazione civica, nella quale gli studenti si trovano di fronte a problemi di rappresentazione di dati che riguardano il "Processo di industrializzazione nella seconda metà dell'Ottocento".

Descrizione dell'attività
In accordo con il gruppo interdisciplinare che tratta questo modulo, relativamente alla parte di matematica, l'insegnante fa precedere all'esame delle tabelle che riguardano l'argomento di storia, alcune riflessioni su una tabella riguardante l'andamento degli iscritti alla classe prima in un istituto tecnico. In particolare propone la Tabella 1.

Andamento degli iscritti alla classe prima in un istituto superiore

anno	Iscritti
1993	216
1994	171
1995	204
1996	260
1997	247
1998	273
1999	281
2000	307
2001	324

Tabella 1

Successivamente si presentano la Tabella 2 e la Tabella 3 che riguardano l'attività interdisciplinare.

Percentuale della popolazione agricola sulla popolazione attiva

Anni	Gran Bretagna	Francia	Stati tedeschi	U.S.A.
1850	22	64	65	65
1870	15	49	49	50
1910	6	42	18	33

Tabella 2

Scambi internazionali nel 1914

Tra paesi europei	40
Da paesi non europei a paesi europei	21,5
Da paesi europei a paesi non europei	15,5
Tra paesi non europei	23
Totale	100

Tabella 3

La lettura dei dati delle tre tabelle comporta difficoltà crescenti, particolarmente per quelli di Tabella 3. Perché i dati non sono facilmente leggibili? Cosa manca nella Tabella 3? L'insegnante chiede agli studenti l'individuazione di un modo efficace per la loro lettura ed interpretazione e li conduce a rendersi conto che un grafico, non meno della parola, di uno scritto, consente una comunicazione efficace dei risultati di un'indagine, di uno studio su un problema sociale, ecc. I grafici consentono infatti di comunicare, comprendere, analizzare, riassumere, confrontare e visualizzare subito tutto! Tuttavia occorre imparare ad usare e non ad abusare dei grafici. I prerequisiti minimi per la costruzione dei grafici sono: piano cartesiano, proporzioni, percentuali.

Prima fase

L'insegnante induce gli studenti ad osservare che i dati della Tabella 1 riguardano la serie storica delle iscrizioni nella classe iniziale di una scuola mentre quelli della Tabella 2 riguardano serie storiche riferite a più paesi. Si tratta di distribuzioni? Sì, no, perché?

La tabella 3 è o non è una distribuzione? Sì, no e perché? Ha un titolo completo?

I dati contenuti nelle tabelle sono dati direttamente osservati o derivano da un'elaborazione?

L'insegnante guida gli studenti a scrivere il rapporto che dà origine a ciascuno dei dati della Tabella 2 e confronta tale procedimento con quello che dà origine ai dati di Tabella 3.

L'insegnante illustra agli studenti le caratteristiche dei principali strumenti di rappresentazione grafica utilizzabili in questo contesto ed il ruolo che in essi ha l'asse orizzontale. Dipende dal tipo di modalità osservate? E' solo una base di appoggio o deve avere una scala? In particolare, analizza le caratteristiche del grafico a settori circolari e dei grafici a colonne.

Seconda fase

Ogni studente partendo dalle tabelle iniziali produce il grafico che ritiene più opportuno, utilizzando i mezzi che ha a propria disposizione (carta, compasso e matita, calcolatore).

Terza fase

L'insegnante discute con gli studenti i grafici che hanno elaborato. Nel prosieguo dell'unità vengono riportati i lavori prodotti da studenti di una prima classe di un istituto superiore. In particolare, disponendo di un Foglio elettronico Excel, vi sono stati studenti che hanno scelto grafici, alcuni dei quali sono particolarmente suggestivi, anche se non privi di errori.

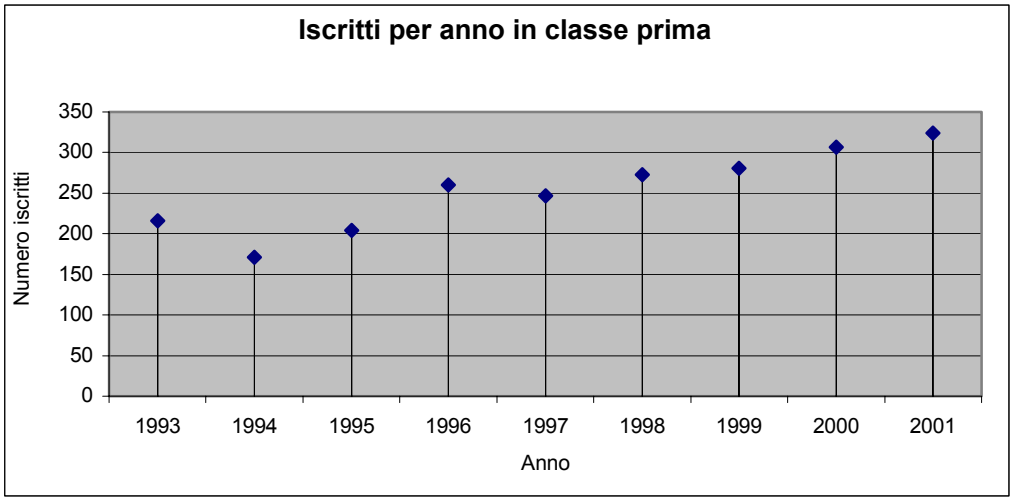


Figura 1

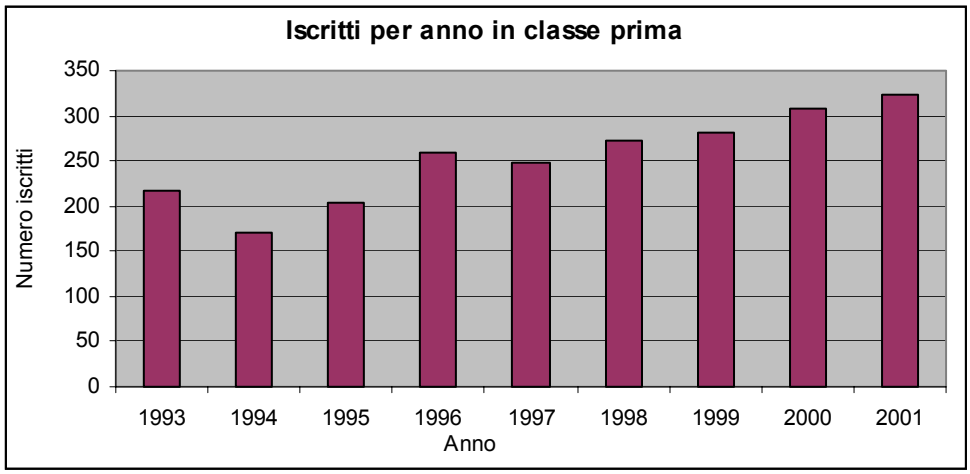


Figura 2

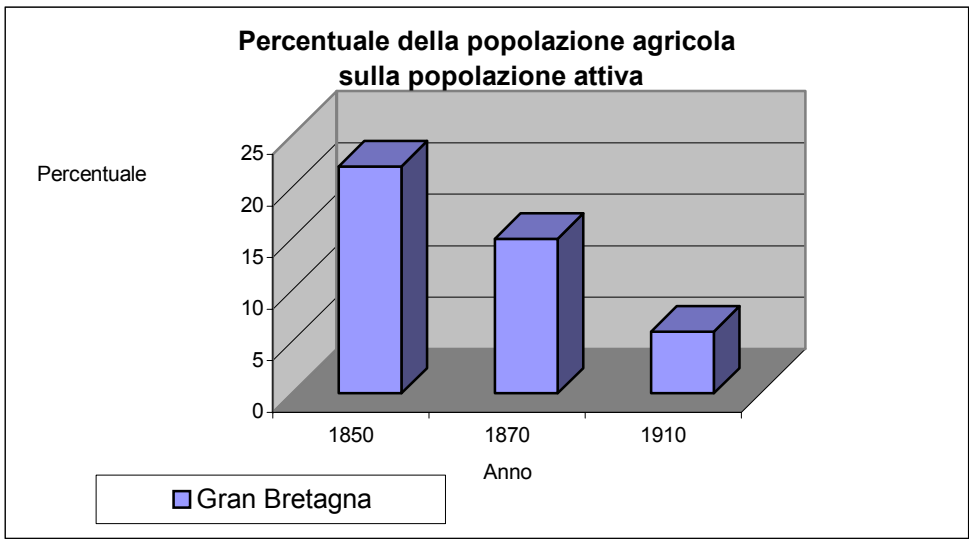


Figura 3

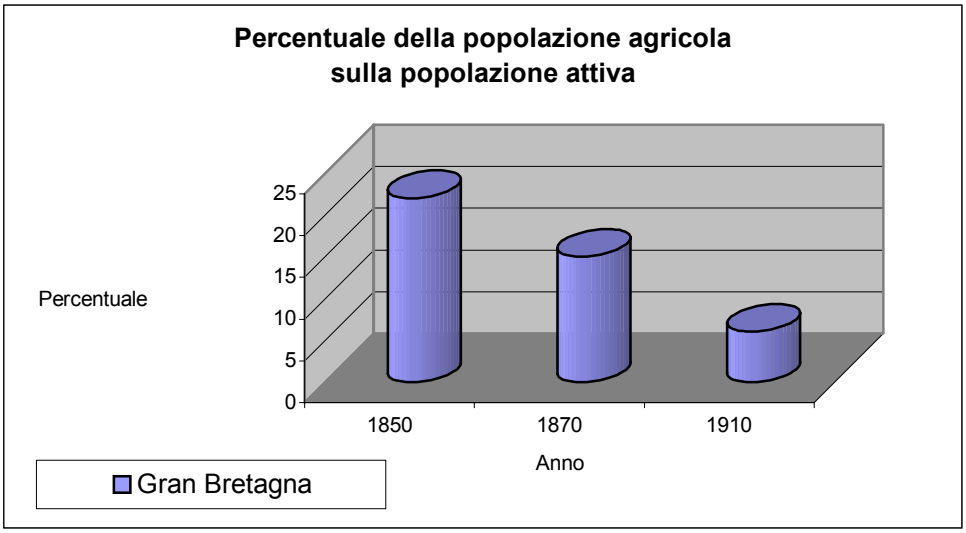


Figura 4

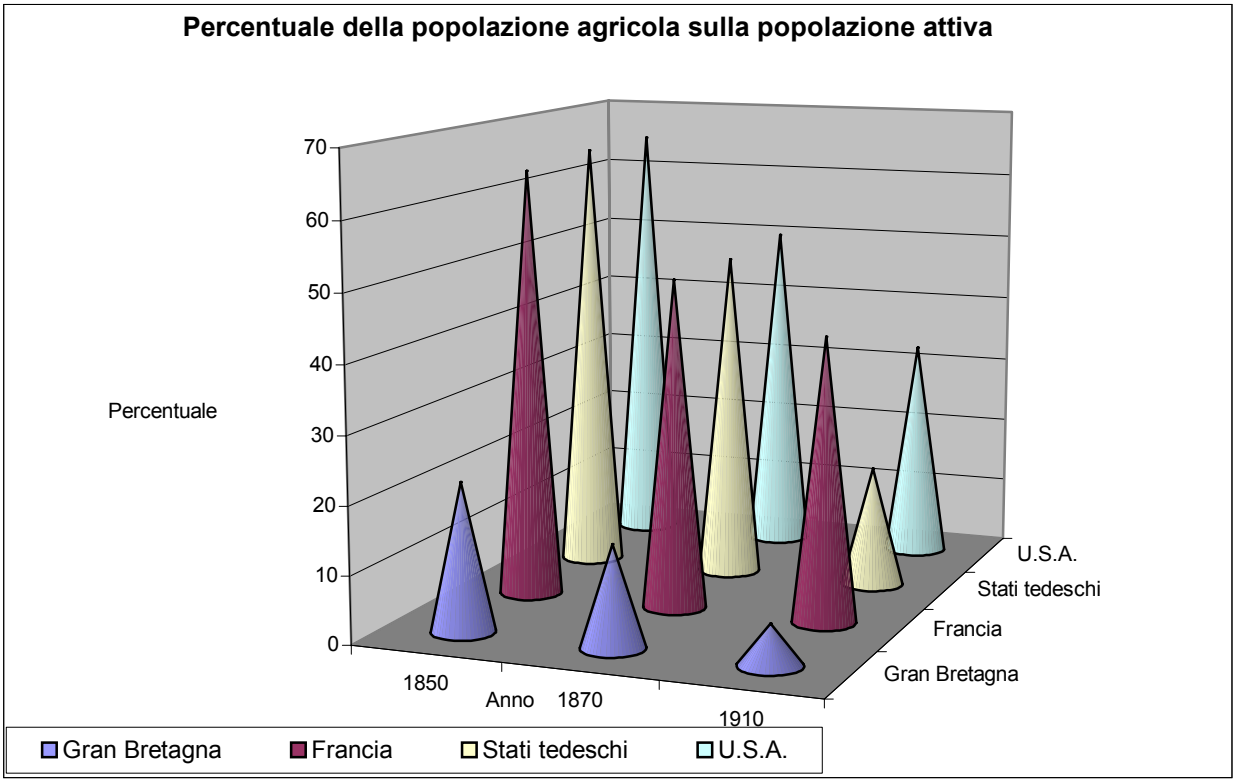


Figura 5

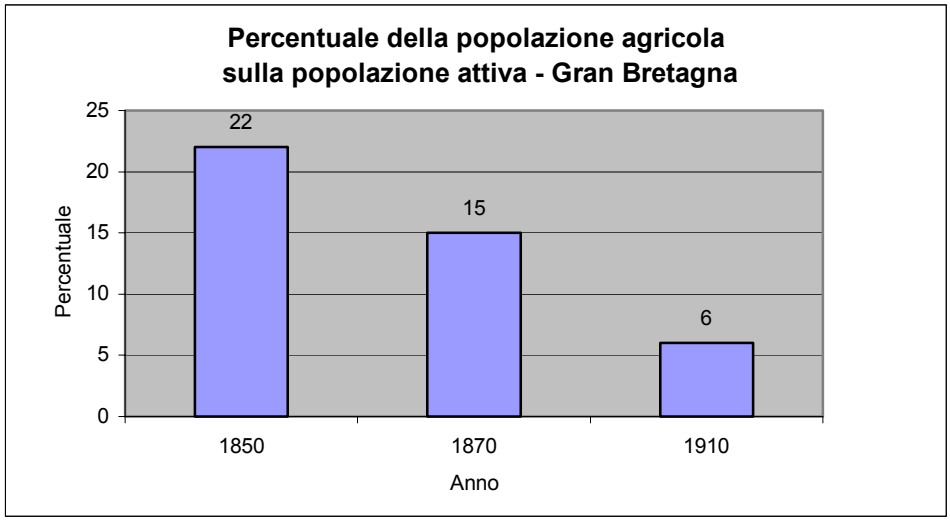


Figura 6a

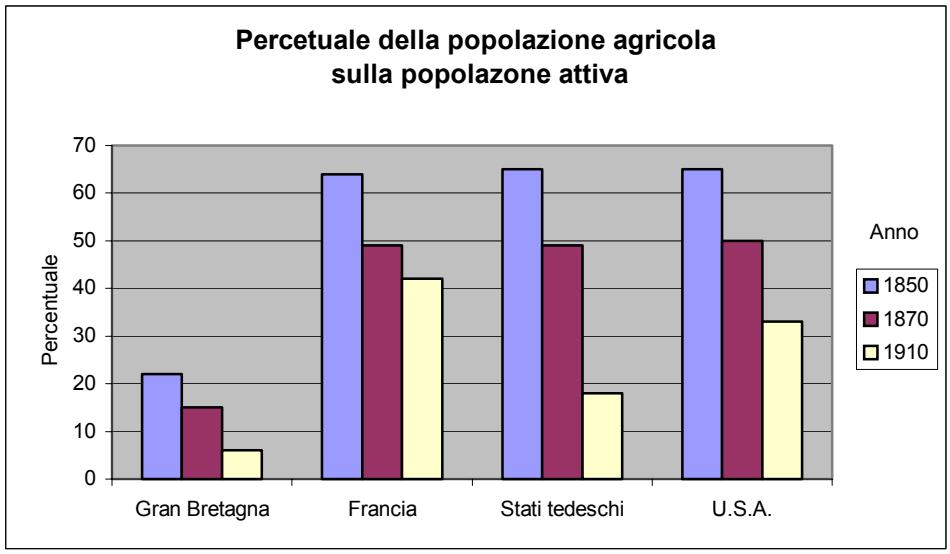


Figura 6b

Per la rappresentazione grafica dei dati della Tabella 1 sono stati usati due grafici che esprimono in maniera corretta, (perché?) l'informazione che la tabella offre. L'insegnante fa emergere con la discussione che un buon grafico è quello che riesce a combinare l'esigenza della completezza e della correttezza con la facilità e l'immediatezza della lettura.
Per la Tabella 2 sono stati scelti, in generale, grafici che introducono una terza dimensione non esistente nelle tabelle, producendo prismi (Figura 3) o cilindri (Figura 4) nei quali viene affidato all'altezza il ruolo di rappresentare la percentuale. Si è anche prodotto un grafico molto particolare che ha utilizzato dei coni in uno spazio tridimensionale dove vengono rappresentati contemporaneamente gli anni, le percentuali, i paesi (Figura 5). La lettura di questo grafico risulta indubbiamente meno facile rispetto ai precedenti, anche se l'immagine che si ricava è sufficientemente fedele rispetto ai dati da rappresentare.
L'insegnante chiede agli studenti se, rispetto ai tre periodi considerati, gli intervalli temporali sono costanti. Ciò induce gli studenti a riflettere che tutti i grafici presentano un errore al riguardo perché non si è tenuto conto che gli intervalli fra un anno e il successivo sono diversi.

Dovendo convergere verso una sola rappresentazione si scelgono le Figure 6a e 6b, apportando, però, la correzione necessaria per tener conto dell'osservazione precedente. Dopo l'opportuna correzione, il grafico della Figura 6a dà luogo al grafico di Figura 7, che consente di illustrare correttamente i dati di un singolo paese. In maniera analoga l'insegnante conduce gli studenti a modificare il grafico di Figura 6b per effettuare in modo corretto il confronto simultaneo fra paesi diversi.

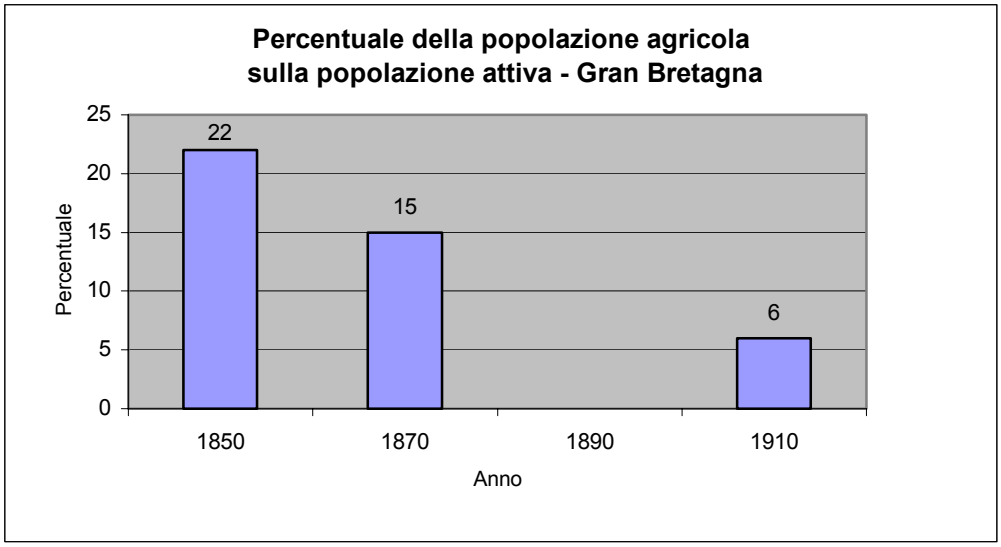


Figura 7

Rispetto alla distribuzione degli scambi internazionali nel 1914 (Tabella 3), i grafici delle Figure 8a e 8b risultano corretti. In particolare nel grafico a settori circolari si è evitato di introdurre una dimensione inesistente. L'insegnante guida gli studenti al confronto tra due grafici. Quale dei due consente la rappresentazione del totale? E' corretto usare il grafico a settori per i dati della prima colonna della Tabella 2? Perché?

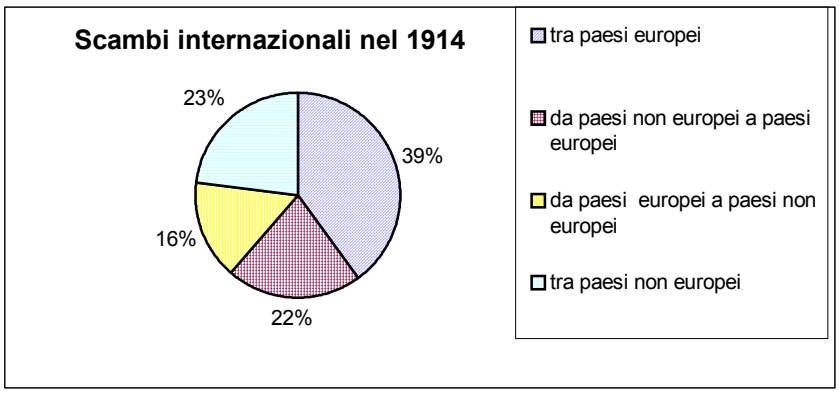


Figura 8a

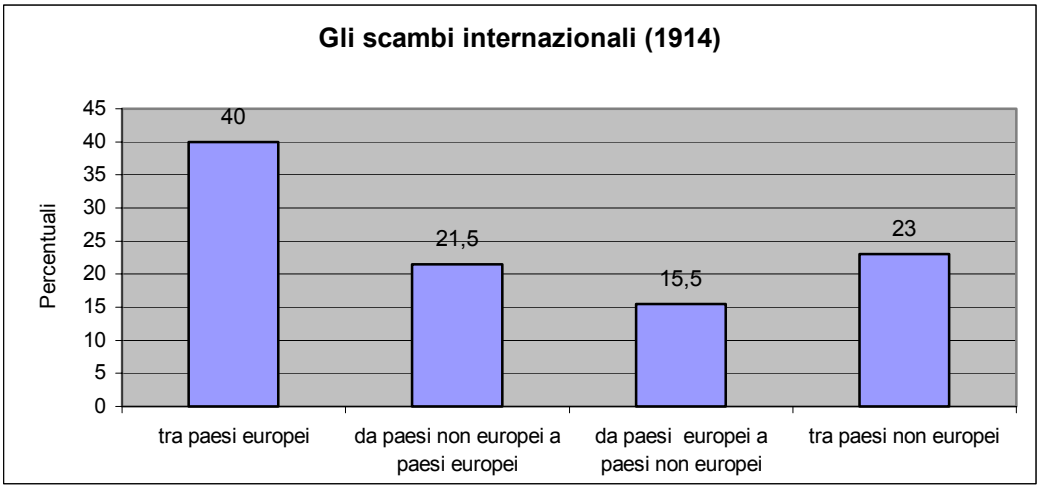


Figura 8b

In questa fase di studio l'insegnante indica i nomi tecnici dei grafici, fa osservare come sono stati costruiti e, soprattutto, che essi richiedono, per essere leggibili, la presenza di alcuni elementi fondamentali: titolo, legenda, indicazione delle unità di misura.
In seguito mostra uno schema simile al seguente, dove, per ciascuna tipologia di dati, viene suggerito il tipo di grafico più appropriato. L'insegnante termina l'attività, invitando gli studenti a completare l'ultima colonna con un esempio di distribuzione.

Tipologia di dati	Tipo di grafico	Esempio di distribuzione
Una distribuzione secondo un carattere *qualitativo* (con poche modalità)	Il diagramma a settori circolari (detto diagramma a torta)	
Una distribuzione secondo un carattere *qualitativo* (con molte modalità)	Il diagramma a colonne o nastri	
Una distribuzione secondo un carattere *quantitativo discreto*	Il diagramma cartesiano per punti o con diagramma ad aste	
Una serie storica	Il diagramma cartesiano o a nastri	
Una distribuzione secondo un carattere *quantitativo in classi* (prestando attenzione alla loro ampiezza)	L'istogramma di frequenza	
Una serie territoriale	Il cartogramma	

Di media *non* ce n'è una sola!

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolare i principali valori medi per caratteri quantitativi.	Proprietà dei principali valori medi.	Dati e previsioni Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	Viaggi Commercio Vita sociale

Contesto.
Vita quotidiana.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito statistico e l'ambito probabilistico. Partendo da situazioni problematiche legate all'esperienza degli studenti (vedi anche l'attività "Arrivare a scuola") si possono introdurre alcune attività che motivino l'introduzione di diversi valori medi. L'unità è rivolta a studenti del primo biennio con l'obiettivo di "fugare" la credenza, ampiamente diffusa nell'opinione pubblica, che esista soltanto la media aritmetica (la cosiddetta "media matematica"!) utile per giustificare o risolvere qualunque problema in cui occorra individuare un indice sintetico.

Descrizione dell'attività
Prima fase
L'insegnante presenta le seguenti situazioni problematiche:

a) Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h. Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?

b) Una agenzia che effettua indagini di mercato ha rilevato per una rete televisiva i seguenti dati medi giornalieri di ascolto, nel periodo invernale e nella fascia oraria dalle 20 alle 21:

Giorno della settimana	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Numero medio spettatori (in migliaia)	1.200	1.800	2.000	1.600	1.200	800	900

Una agenzia di pubblicità in quale giorno potrebbe consigliare a un proprio cliente di inserire uno spot pubblicitario di un prodotto per la neve, volendo usare la fascia oraria 20 – 21?

c) In un ciclo di lavorazione tre apparecchiature lavorano in serie: la prima macchina ha un rendimento del 90 % , la seconda dell'80% , la terza del 30%. Qual è il rendimento medio complessivo?

d) Uno studente nella pagella del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti:

Italiano	7
Storia	8
Geografia	7
Lingua inglese	6
Scienze	5
Matematica	4
Educazione Fisica	9

Il padre gli ha promesso un regalo se la media dei suoi voti fosse stata superiore al 7.
Otterrà lo studente il regalo?

e) Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami[1] riportando le seguenti votazioni:

Esame	Punteggio in trentesimi	Crediti
Laboratorio di Matematica	25	9
Analisi Matematica	24	12
Geometria	21	6
Algebra	27	6
Calcolo delle probabilità	23	9
Fisica generale	24	9
Lingua inglese	30	3
Fondamenti di Informatica	28	3
Abilità relazionali	30	3

Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30.
Otterrà il nostro studente la borsa di studio?

f) In una prova multidisciplinare di Storia, Inglese, Matematica, Diritto, gli studenti vengono valutati con un punteggio da 0 a 15 per ogni materia. Il voto finale è dato dalla media dei quattro punteggi parziali. La prova non si considera superata se uno studente prende 0 punti in una delle materie. Quale valore medio consente di rappresentare adeguatamente questo modo di valutare?

Seconda fase

Si invitano gli studenti, preferibilmente in attività di gruppo, a riflettere sul modo di risolvere i problemi proposti.
Gli errori ricorrenti potrebbero essere, relativamente ad ogni esercizio, i seguenti:

a) la prima idea risolutiva per tale problema è frequentemente quella di utilizzare la media aritmetica, ovvero di calcolare

$$v_m = \frac{932 + 856}{2} = 894 Km/h$$

In tale situazione non è sempre semplice riuscire a spiegare allo studente dove è l'errore commesso. Può essere opportuno "esasperare" il problema assegnando valore 0 alla velocità

[1] Secondo il nuovo ordinamento universitario ad ogni esame è associato un numero di crediti: ciascun credito corrisponde a circa 25 ore di lezione-tutoraggio-impegno individuale dello studente. Ogni anno lo studente è tenuto ad accumulare 60 crediti.

media del ritorno, il che significa ammettere implicitamente di non ritornare; in tal caso appare evidente che la media aritmetica, conservando i totali dei valori da sintetizzare, non risolve il problema. L'insegnante condurrà allora gli studenti ponendo loro la domanda: nell'andata quanti Km si sono percorsi? E quanti nel ritorno? Come si può allora esprimere la velocità del "sistema" andata ritorno? E' ragionevole ammettere che il numero dei Km percorsi nell'andata e nel ritorno sia identico? Se sì, qual è la formulazione teorica che risolve il problema? Se no, il problema ha soluzione? L'insegnante può utilmente avvalersi del calcolo letterale, guidando gli studenti alla soluzione corretta che consiste nell'utilizzo della media **armonica.** Tale media può essere formalizzata in collegamento con il nucleo Numeri e algoritmi. Si avrà pertanto, ammettendo uguali i Km percorsi nell'andata e nel ritorno:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B}}$$

b) Una lettura non sufficientemente attenta della distribuzione statistica potrebbe indurre gli studenti a calcolare la media aritmetica delle frequenze. L'insegnante ricorda il significato rispettivamente delle modalità e delle frequenze e conduce gli studenti ad individuare, come risposta al problema proposto, la moda. Essa in questo caso è il mercoledì, il giorno della settimana con la massima frequenza di ascolto.

c) A questo punto del percorso, gli studenti dovrebbero avere chiaro che la media aritmetica risponde al problema della equidistribuzione di un totale che viene conservato.
L'insegnante invita gli studenti a cogliere il senso del problema. La prima macchina in origine quanto deve rendere? Se la risposta è 100 pezzi, effettuata la lavorazione, quanto ha reso? Se si danno 90 pezzi alla seconda macchina quanti pezzi si ottengono? Se si immettono 72 pezzi nella terza ed ultima macchina quanti pezzi si hanno? Dunque da 100 pezzi teorici si ottengono in realtà, con l'intervento in serie delle 3 macchine, 21,6 pezzi. Il problema è allora di trovare tre macchine tutte con la stessa resa che diano alla fine dei tre passaggi 21,6 pezzi. Il percorso logico può essere coadiuvato da una semplice schematizzazione formale che porta a concludere che quando è necessario mantenere il risultato di un prodotto la media idonea è quella **geometrica.**

d) Poiché in questo caso va rispettata la somma dei punteggi ottenuti, la sintesi corretta è la media aritmetica. E' da far notare un errore che gli studenti potrebbero commettere: calcolare le medie parziali dell'area umanistica (Italiano, Storia, Geografia, Lingua Inglese), scientifica (Scienze, Matematica) e di Educazione Fisica e poi fare la media semplice delle medie.
Riflettere su ciò può essere didatticamente efficace perché dà l'opportunità di offrire un esempio di operazione non associativa. Infatti nel fare una media di medie parziali occorre tener conto di quante sono le unità statistiche che ciascuna media parziale sintetizza (collegamento con Numeri e algoritmi).

e) Questo problema non dovrebbe creare eccessive difficoltà per convincere gli studenti ad utilizzare la media aritmetica ponderata. Nel caso in cui qualcuno commettesse l'errore di trascurare il credito si potrebbe proporre al solito un esempio "estremo": una valutazione di 30/30 in un esame con 3 crediti e una valutazione di 30/30 in un esame con 10 crediti può contare allo stesso modo? Evidentemente no!
Una situazione simile potrebbe essere il calcolo della media **aritmetica** con valori ripetuti (per esempio i voti conseguiti da una classe di studenti in un compito di matematica).

f) Quale dei valori medi utilizzati nei casi precedenti potrebbe andar bene in questo esempio?

Dalla discussione dovrebbe emergere che ciò che si vuole è che, quando si presenta uno zero, la sintesi si annulli. Dunque occorre utilizzare un valore medio fondato sul prodotto. E' forse la media geometrica la soluzione del problema posto? Essa in effetti è l'unica media che, assumendo in tal caso il valore 0, consente di escludere uno studente che abbia riportato un punteggio nullo in almeno una delle quattro materie.

Terza fase

L'insegnante a questo punto sistematizza le conoscenze sui diversi tipi di medie, fornendo in ogni caso la formula e chiarendo le relative proprietà.

Quarta fase

Verifica.

Si allegano elementi di prove di verifica sui valori medi.

Elementi di prove di verifica

1. Il "colore dei capelli" viene osservato su tre individui, ottenendo:

A	B	C
Capelli BIONDI	Capelli ROSSI	Capelli NERI

La mediana di questa distribuzione è:

a) Capelli BIONDI
b) Capelli ROSSI
c) E' B
d) Non si può calcolare
e) Capelli NERI

La moda di questa distribuzione è:

a) E' A
b) Capelli NERI
c) Non esiste
d) Capelli ROSSI
e) Capelli BIONDI

2. In una prova nove studenti vengono valutati, assegnando loro uno dei tre livelli: O = ottimo, B = Buono, S = Sufficiente, ottenendo:

Alberto	Gino	Raffaella	Maria	Anna	Mario	Giuseppe	Carla	Roberto
O	O	B	S	S	O	B	B	S

La mediana della distribuzione è:

a) Anna
b) O
c) 4,5
d) 5
e) B

3. Il reddito medio mensile di cinque famiglie italiane nel mese di giugno nel 2002 è stato di € 1.705. Il reddito complessivo di queste famiglie è di:

a) circa € 10.000
b) minore di € 7.000
c) non si può calcolare
d) € 8.525
e) maggiore di € 10.000

4. Ad una certa data, l'età media in anni compiuti dei componenti di una famiglia di quattro persone è pari ad anni 32. Se tre dei componenti hanno rispettivamente 15, 50 e 47 anni, l'età del quarto componente è:

a) 16 anni
b) 11 anni
c) Minore di 10 anni
d) Non si può calcolare
e) 18 anni

5. I voti in matematica di 8 studenti di una scuola secondaria sono:

Studente	1	2	3	4	5	6	7	8
Voto	8	3	6	8	7	8	4	7

Per la metà degli studenti più bravi il voto minimo è stato almeno:

a) 7,1
b) 7
c) 5
d) 8
e) 6

Griglia di correzione

1. d, c
2. e
3. d
4. a
5. b

Pivot è bello

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi con riguardo a una rilevazione pianificata e inserire i dati rilevati anche in un foglio elettronico. Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Calcolare i principali valori medi e le misure di variabilità.	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. Proprietà dei principali valori medi e delle misure di variabilità.	Dati e previsioni Laboratorio di matematica Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	Vita sociale Organizzazione di attività

Contesto
Numeri, grafici.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'uso di dati numerici e delle loro rappresentazioni grafiche.
Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una classe del primo biennio quando gli studenti hanno acquisito abilità di base sull'utilizzo del foglio elettronico (selezionare, copiare, incollare, indirizzamenti assoluti e relativi, creazione guidata dei grafici, …).
Dopo che gli studenti hanno imparato ad effettuare lo spoglio di tipo manuale di un numero limitato di semplici questionari, l'attività proposta diventa molto utile quando lo spoglio riguarda molti questionari. Trasferire i dati in una tabella di un foglio elettronico rende comodo e agevole la manipolazione flessibile di distribuzioni univariate tratte dall'intera base di dati o da un suo sottoinsieme.

Descrizione dell'attività
Per lo sviluppo di questa attività si è utilizzato il foglio elettronico Excel.
Nell'esempio si presenta una parte di una tabella, tratta dall'unità "Arrivare a scuola" (Tabella 1) e la si descrive nelle sue parti principali al fine di chiarire i diversi concetti in essa contenuti.
Ogni riga rappresenta una unità statistica e ogni informazione da essa ricavata è disposta nelle rispettive colonne, una per la modalità di ciascun carattere.
Perché nelle colonne C e D, che contengono caratteri qualitativi sconnessi, si trovano dei numeri?
Perché proprio quei numeri?
Per poter utilizzare in modo semplice lo strumento delle tabelle pivot è importante che nelle singole celle ci siano dei valori numerici. Pertanto anche le modalità qualitative sono state codificate in forma numerica. In questo caso la scelta è stata la seguente: carattere "Sesso": modalità "Femmina" $\rightarrow$ 1, modalità "Maschio" $\rightarrow$ 2. Anche per il carattere "Comune di residenza" è stata effettuata una scelta analoga.
Tenuto conto che il questionario è stato somministrato in una scuola superiore, come è possibile trovare le età riportate in tabella? Evidentemente è stata fatta, a livello di codifica, una scelta analoga alla precedente, anche se il carattere quantitativo non lo richiedeva espressamente. E' stato infatti attribuito codice 1 all'età "Meno di 14" che corrisponde alla prima risposta data alla

domanda 1 del questionario reperibile all'unità "Arrivare a scuola", codice 2 ad una età "14", e così via. In questo modo è stata legata direttamente la modalità al numero di risposta del questionario stesso.

	A	B	C	D	E
1	codice	età	sesso	comune	classe
2	1	7	2	3	4
3	2	6	1	4	4
4	3	5	1	16	4
5	4	5	1	4	4
6	5	6	1	2	4
7	6	5	2	2	4
8	7	5	1	2	4

Tabella 1

Nella colonna A sono riportati i codici attribuiti ai singoli questionari in fase di spoglio. Ciò permette di individuare ogni record e di effettuare il controllo della correttezza dell'inserimento dei dati di ciascun questionario
Nella colonna B sono riportati i codici assegnati alle diverse età, secondo quanto indicato sopra: 7 corrisponde ad uno studente la cui età è di 19 anni, che è la settima risposta alla domanda 1 del questionario.

Prima fase
Una prima proposta riguarda il modo di ottenere informazioni circa la distribuzione univariata delle frequenze del carattere "Età" del collettivo considerato.
Si utilizza la procedura guidata per "interrogare" l'insieme dei dati oggetto di interesse (database).
La prima cosa da fare è selezionare una cella qualsiasi del database. Successivamente si sceglie dal menu dati la voce "Report della tabella pivot e del grafico pivot …".
Si ottiene così la seguente figura:

Figura 1

La scelta del pulsante “Avanti” apre una finestra che indica la zona nella quale sono residenti i dati oggetto di interesse; dopo aver confermato nuovamente con il pulsante “Avanti”, si ottiene la seguente finestra:

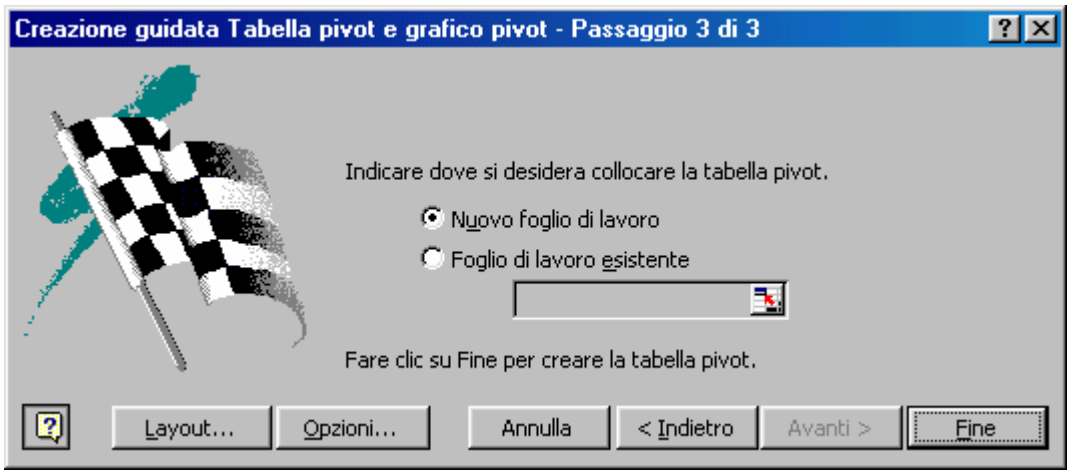


Figura 2

In questa finestra si deve scegliere dove posizionare i risultati dell’interrogazione (Tabella pivot) del database; è consigliabile, per maggior chiarezza, collocare la tabella pivot in un nuovo foglio di lavoro (come indicato in Figura 2).
Scegliendo il pulsante “Layout” si giunge alla finestra successiva che permette la costruzione della tabella pivot.

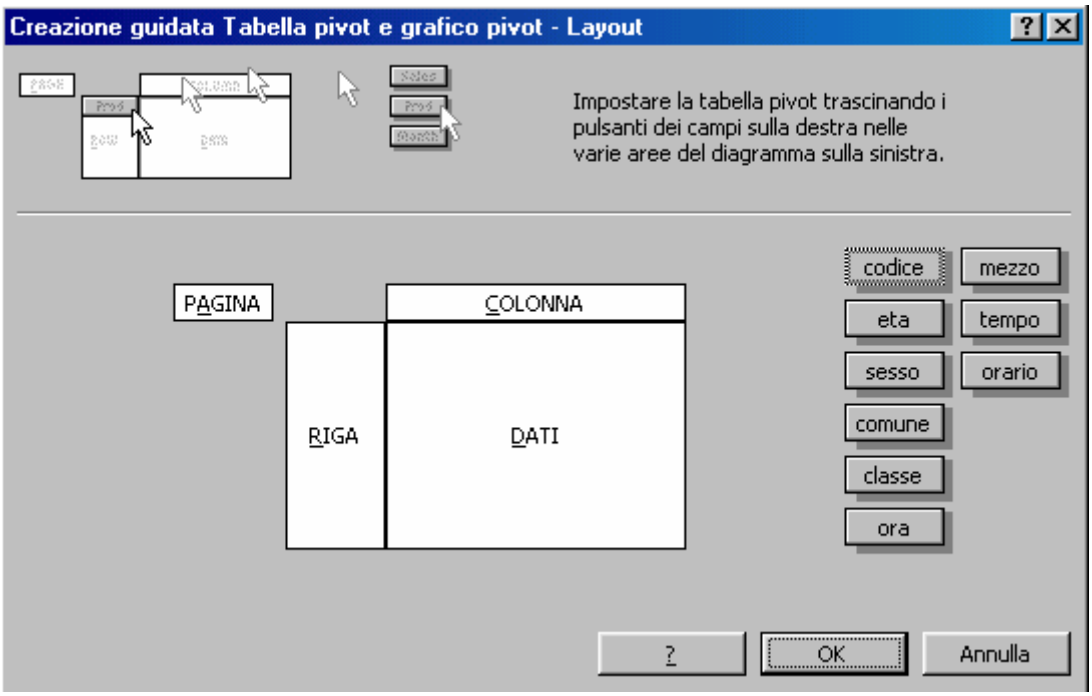


Figura 3

Nella finestra sono visibili i campi del database (i caratteri) e un riquadro dove, posizionando i singoli campi, è possibile ottenere la tabella desiderata. Per semplice trascinamento del campo sesso sulla zona contrassegnata dal nome Riga si inserisce il carattere “Sesso”. Trascinando il pulsante

sesso nella zona Dati si ottiene il conteggio delle unità che posseggono tali modalità. A questo riguardo è importante scegliere la modalità "Conta( )" effettuando un doppio clic sul pulsante attivo nella zona Dati dopo il trascinamento.
Per poter effettuare una interrogazione per sottoinsiemi del database, ad esempio per classe, si deve trascinare il pulsante del carattere discriminatore prescelto sul campo Pagina.
Il risultato delle scelte proposte è visibile nella figura seguente:

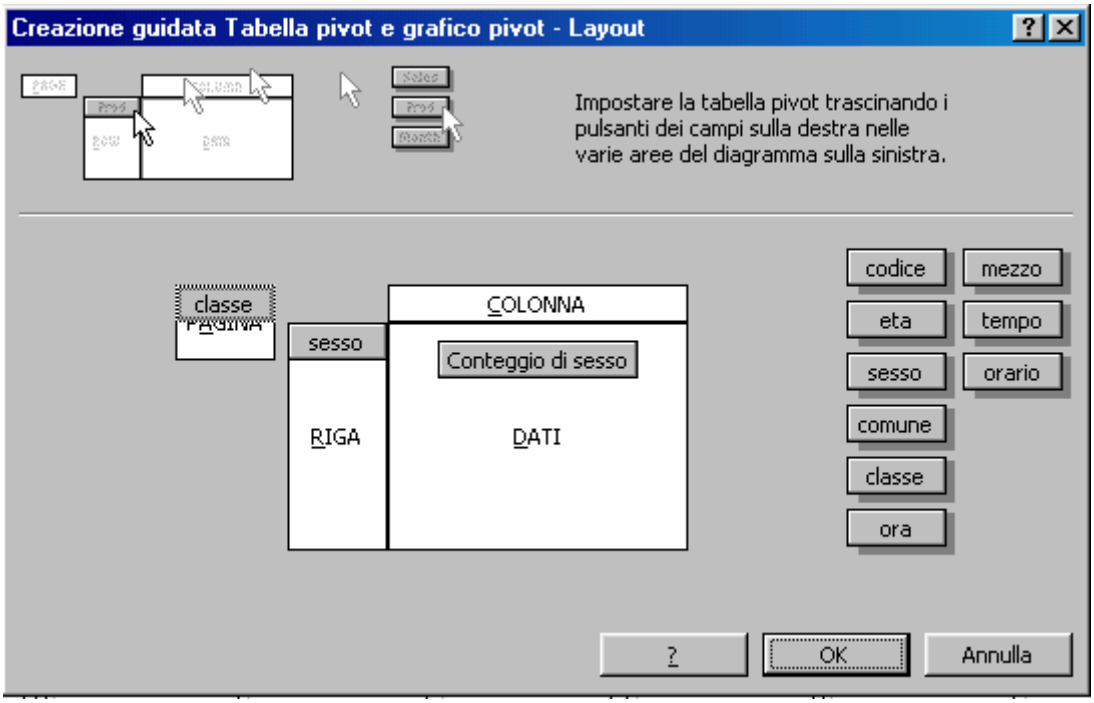


Figura 4

Seconda fase
Il risultato della procedura illustrata nella fase precedente permette di ottenere la tabella mostrata nella figura di seguito riportata:

Figura 5

La tabella pivot così ottenuta, fornisce, rispetto a tutte le classi, le informazioni richieste.

Il pulsante contenuto nella cella B1 *(nome in Excel)* permette poi di ottenere lo stesso tipo di distribuzione riferita alla modalità prescelta tra quelle proposte dal carattere "Classe".
Bisogna tuttavia osservare che per poter lavorare sui dati ottenuti è opportuno ricopiare il contenuto della tabella e incollare i valori in un altro foglio con la procedura: "Incolla speciale", selezionando l'opzione "Valori". A tal fine conviene effettuare la selezione partendo da una cella in basso a destra rispetto all'area di interesse.
In questo modo si ottiene una tabella indipendente da quella pivot e soprattutto dalle modifiche determinate su di essa da ulteriori interrogazioni.

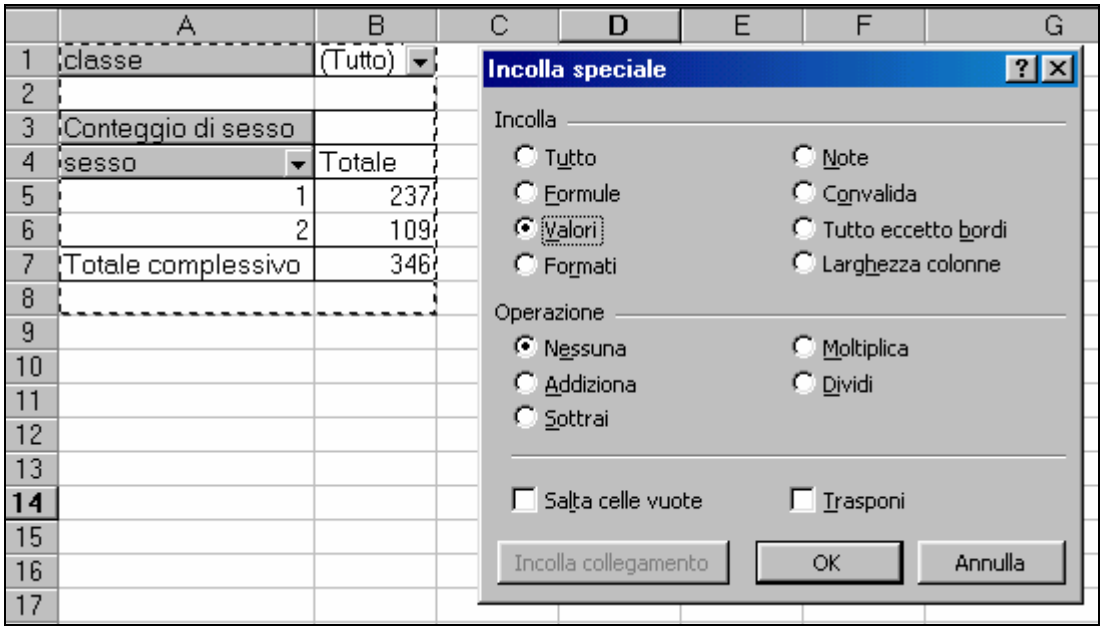


Figura 6

Terza fase
E' possibile rappresentare graficamente le informazioni contenute nella Figura 5? Quale tipo di grafico rappresenta in maniera più appropriata la distribuzione di frequenze esaminata?
L'insegnante sollecita la discussione e guida l'attenzione degli studenti sul significato statistico delle coppie ("Modalità del carattere Sesso", "Frequenza") e sulla loro rappresentazione grafica.
Una soluzione possibile può essere ottenuta mediante i seguenti passaggi.
In primo luogo occorre decodificare le modalità del carattere sesso. E' sufficiente sovrascrivere nelle celle corrispondenti la modalità "Femmina" e la modalità "Maschio".
Con la selezione di una cella qualsiasi all'interno della tabella pivot si può utilizzare la procedura guidata per la composizione del grafico che è in grado di rappresentare in modo corretto la distribuzione in esame.
L'insegnante, per far emergere la scelta del grafico più opportuno per rappresentare la distribuzione di frequenze, guida gli studenti a riflettere sulla natura del supporto orizzontale sul quale si trovano le modalità del sesso e sulla scelta di un grafico adeguato tra quelli proposti dal foglio elettronico per rappresentare la distribuzione considerata.

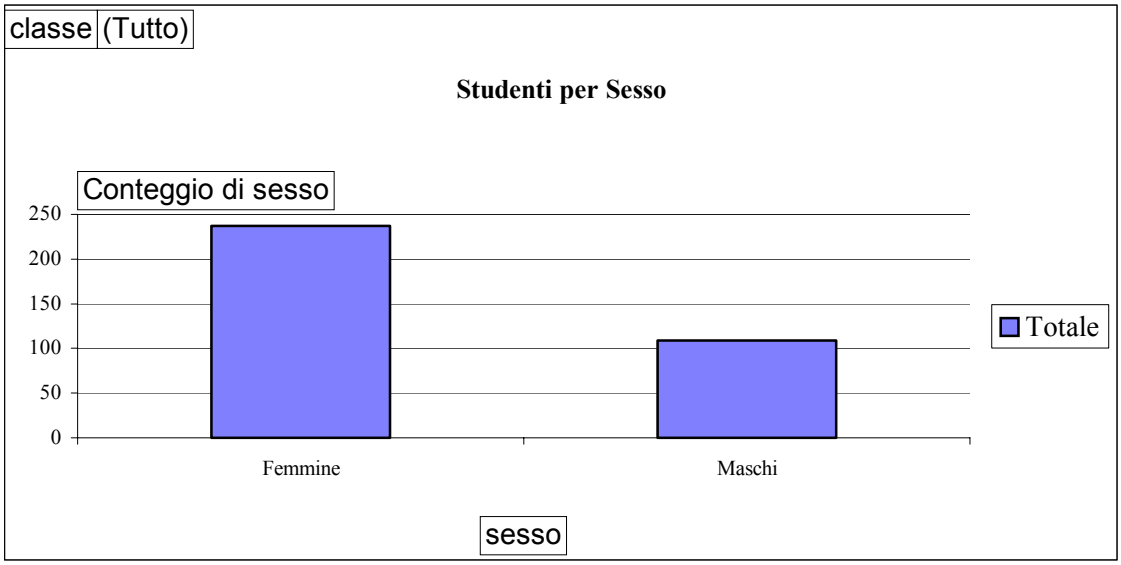


Figura 7

Che tipo di grafico propone in modo automatico il foglio elettronico? E' corretto? Perché?

Quarta fase

Sono di più i maschi in prima o in seconda? La tabella pivot può aiutare a rispondere a questa domanda? Si può rispondere alla prima domanda con un grafico ad aste?

L'insegnante guida gli studenti ad utilizzare la tabella pivot per trovare la risposta mediante l'interrogazione secondo la voce classe. I risultati sono riportati nelle tabelle seguenti:

classe	1
sesso	
Femmine	61
Maschi	29
Totale	90

Tabella 2

classe	2
sesso	
Femmine	36
Maschi	27
Totale	63

Tabella 3

Spontaneamente ci si attende che gli studenti rispondano che sono di più i maschi in prima. E' compito dell'insegnante guidarli al confronto fra due collettivi di diversa numerosità, pervenendo al concetto di frequenza relativa e al calcolo della Tabella 4 e della Tabella 5.

classe	1
sesso	
Femmine	67,78
Maschi	32,22
Totale	100,00

Tabella 4

classe	2
sesso	
Femmine	57,14
Maschi	42,86
Totale	100,00

Tabella 5

Quinta fase

Ci sono strumenti che consentono di sintetizzare una distribuzione semplice?

L'insegnante stimola l'attenzione degli studenti sull'individuazione della moda per una distribuzione di un carattere qualitativo e il calcolo della media aritmetica per un carattere quantitativo discreto.
Con l'utilizzo della tabella pivot si ottengono rapidamente le seguenti distribuzioni:

Classe	n. studenti
Prima	90
Seconda	63
Terza	117
Quarta	47
Quinta	29
Totale	346

Tabella 6

La Tabella 6 riporta i dati degli iscritti nelle varie classi della scuola in esame. La moda è "Terza" in quanto è la modalità che presenta la frequenza maggiore.
Se si prende in considerazione un carattere quantitativo discreto è possibile determinare la media aritmetica e ad essa associare due indici di variabilità: la varianza e lo scarto quadratico medio.
L'insegnante suggerisce agli studenti di estrarre la tabella che contiene le informazioni relative all'età degli studenti.

Età	Totale
14	61
15	69
16	107
17	61
18	40
19	5
> 19	3
Totale	346

Tabella 7

Qual è l'età media? La colonna dei totali contribuisce a rispondere alla domanda precedente? Come può essere trattata l'ultima modalità?
Il calcolo della media aritmetica può essere fatto anche senza l'ausilio dello strumento informatico che, tuttavia, permette di far convergere l'attenzione dello studente principalmente sugli aspetti concettuali piuttosto che su quelli calcolatori. E' fondamentale che l'insegnante induca lo studente a riflettere sul valore interpretativo degli indici trovati senza indulgere eccessivamente sulle tecniche utilizzate per la loro determinazione. A tal riguardo è importante che l'insegnante apra una discussione con gli studenti circa le soluzioni (arbitrarie) per "chiudere" l'ultima modalità.
Una soluzione possibile al problema suddetto può essere ottenuta predisponendo un'elaborazione come quella proposta nella Tabella 8.

xi	ni	xi*ni	xi - m	$(xi - m)^2$	$(xi - m)^2*ni$
14	61	854	-1,93	3,7385	228,0499
15	69	1035	-0,93	0,8715	60,1315
16	107	1712	0,07	0,0044	0,4728
17	61	1037	1,07	1,1374	69,3794
18	40	720	2,07	4,2703	170,8126
19	5	95	3,07	9,4033	47,0163
20	3	60	4,07	16,5362	49,6086
Totale	346	5513			625,4711
Media aritmetica (m)		15,93			
Varianza		1,81			
Scarto quad. med.		1,34			

Tabella 8

Il problema dell'ultima classe è stato risolto utilizzando informazioni aggiuntive disponibili in segreteria sull'età degli studenti di più di 19 anni.
Le prime due colonne sono state estratte dalla tabella pivot mentre le altre colonne sono state calcolate usando le formule e le funzioni di Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	xi	ni	xi*ni	xi - m	(xi - m)^2	(xi - m)^2*ni
2	14	61	=A2*B2	=A2-$C$10	=D2*D2	=E2*B2
3	15	69	=A3*B3	=A3-$C$10	=D3*D3	=E3*B3
4	16	107	=A4*B4	=A4-$C$10	=D4*D4	=E4*B4
5	17	61	=A5*B5	=A5-$C$10	=D5*D5	=E5*B5
6	18	40	=A6*B6	=A6-$C$10	=D6*D6	=E6*B6
7	19	5	=A7*B7	=A7-$C$10	=D7*D7	=E7*B7
8	20	3	=A8*B8	=A8-$C$10	=D8*D8	=E8*B8
9	Totale	=SOMMA(B2:B8)	=SOMMA(C2:C8)			=SOMMA(F2:F8)
10	Media	aritmetica (m)	=C9/B9			
11	Varianza		=F9/B9			
12	Scarto quad. med.		=RADQ(C11)			
13						

Tabella 9

In Tabella 9 sono riportate le formule e le funzioni usate per il calcolo degli indici. L'insegnante fa notare l'uso dei riferimenti relativi e dei riferimenti assoluti nelle formule e l'impiego della funzione "Somma( )" per calcolare la somma dei valori in colonna e della funzione "Radq( )" per il calcolo della radice quadrata.
La terza colonna contiene il prodotto tra le singole modalità e le rispettive frequenze assolute. A tal riguardo l'insegnante può stimolare l'attenzione degli studenti sul fatto che tale operazione consente di "pesare" in modo diverso le singole modalità del carattere "Età".
Il rapporto tra la somma della terza colonna e la somma della seconda permette di calcolare la media aritmetica.
La quinta e la sesta colonna consentono di calcolare la varianza, ottenuta come rapporto tra la somma della sesta colonna con la somma delle seconda.

Quali informazioni si possono trarre dalla varianza? Cosa si può dire sulla sua unità di misura? E' la stessa del fenomeno del quale si vuol indagare la variabilità?
La radice quadrata della varianza fornisce lo scarto quadratico medio che è anch'esso una misura della variabilità.
Quali vantaggi ha lo scarto quadratico medio rispetto alla varianza? Quanto dista l'età 14 dalla media? E l'età 19? Possiamo esprimere queste due distanze prendendo come unità di misura lo scarto quadratico medio? Immaginiamo di avere un'altra distribuzione sempre con la stessa media 15,93 anni, e con scarto quadratico medio 3,2 anni, se uno studente ha 19 anni la sua distanza dalla media ha la stessa importanza di prima? In quale distribuzione lo studente è più vicino alla media? So lo scarto quadratico medio fosse pari a 0, cosa significherebbe?
La varianza e lo scarto quadratico medio sono misure idonee a confrontare la variabilità di due distribuzioni riferite a caratteri diversi? Perché?

Sesta fase

C'è la possibilità di calcolare indici sintetici di una distribuzione semplice rispetto ad un carattere continuo avente modalità suddivise in classi? C'è la possibilità di calcolare la media e lo scostamento quadratico medio, analogamente a quanto si è visto nella quinta fase?
Con l'utilizzo della tabella pivot applicata sul database si ottiene rapidamente la seguente distribuzione che fa riferimento ai tempi che gli studenti impiegano per arrivare a scuola.

Tempo di percorrenza (min.)	N° studenti
fino a 15 min.	145
da 16 a 30 min.	103
da 31 a 45 min.	65
da 46 a 60 min.	24
oltre i 60 min.	9
Totale	346

Tabella 10

L'insegnante stimola l'attenzione degli studenti sul calcolo della media aritmetica e degli indici di variabilità in questa nuova situazione.

ei	es	ni	xic	xic*ni	xic - m	(xic - m)^2	(xic - m)^2*ni
0,5	15,5	145	8	1160	-14,84	220,08	31912,31669
15,5	30,5	103	23	2369	0,16	0,03	2,79534064
30,5	45,5	65	38	2470	15,16	229,97	14948,00682
45,5	60,5	24	53	1272	30,16	909,91	21837,87678
60,5	70	9	70	630	47,16	2224,51	20020,6142
Totale		346		7901			88721,60983
media aritmetica (m)		22,84		legenda:	ei	estremo inferiore	
varianza		256,42			es	estremo superiore	
scarto quad. medio		16,01			xic	valore centrale	

Tabella 11

Il caso in esame pone allo studente problemi aggiuntivi rispetto al caso precedente? Dove deve porre l'attenzione lo studente? Nell'algoritmo di calcolo o altrove?
L'insegnante guida lo studente a riflettere sulla necessità di individuare con attenzione gli estremi della prima classe e la modalità di "chiusura" dell'ultima. Nell'esempio di Tabella 5 il valore rappresentativo dell'ultima classe è stato individuato in base alle informazioni aggiuntive a disposizione (i 9 studenti appartenenti all'intervallo in esame, risiedendo tutti nello stesso comune, impiegano 70 minuti per raggiungere la scuola).
E' possibile costruire l'istogramma di frequenze? L'insegnante guida gli studenti a costruire la Figura 8, usando il grafico dispersione (XY) di Excel e dando una tabella di punti xy che rappresentano i vertici di ogni rettangolo. Dovendo rappresentare sul grafico la media, dove la si posizionerà? Sull'asse delle ascisse o delle ordinate? Perché?

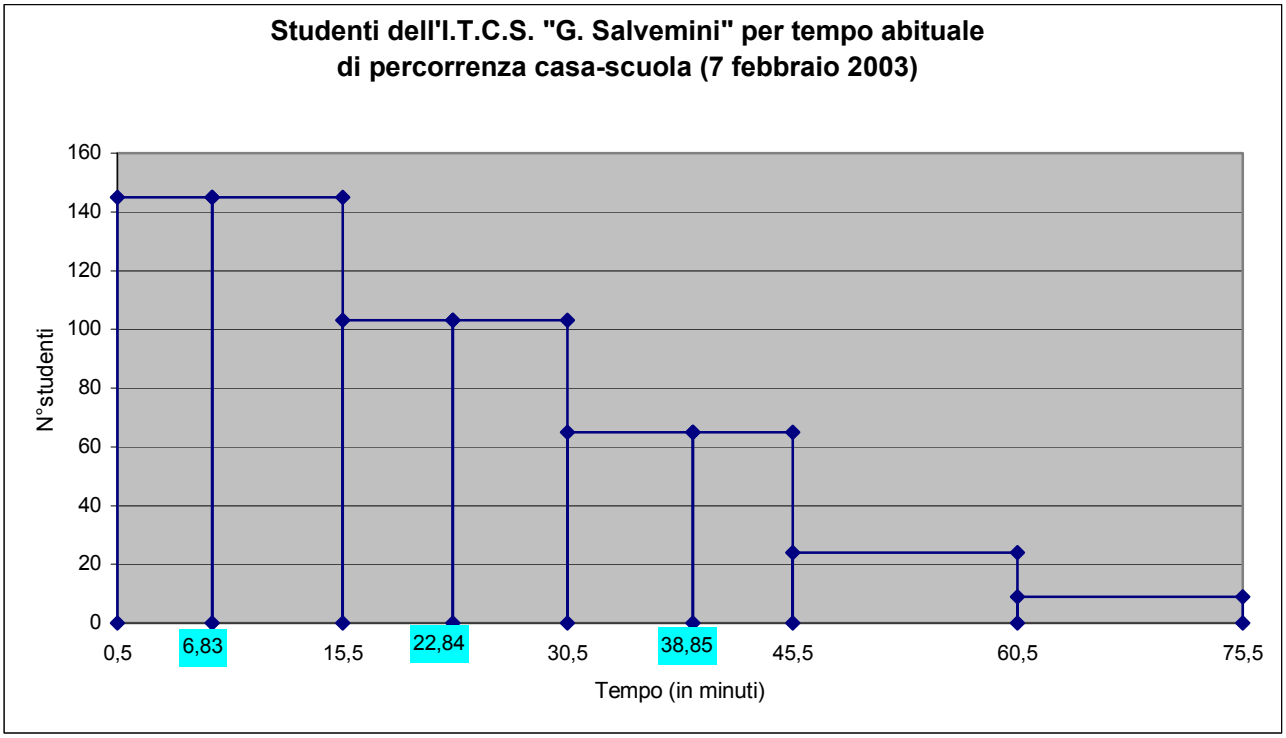


Figura 8

Dovendo rappresentare lo scarto quadratico medio come si farà? L'insegnante guida gli studenti a considerare che lo scarto dalla media non è altro che una distanza dalla media. Dunque lo scarto quadratico medio, come media quadratica di distanze, dal punto di vista geometrico è un segmento, che è possibile disegnare sull'asse delle ascisse, a sinistra e a destra della media aritmetica. Dunque come si sono ottenuti i punti di ascissa 6,83 e 38,85? Si può calcolare qual è il numero di studenti che impiegano fra 6,83 e 38,85 minuti? Quale percentuale rappresentano sul totale degli studenti?

Un gioco con tre dadi

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi indipendenti e non.	Eventi e operazioni con gli eventi. Significato della probabilità e sue valutazioni.	Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Giochi

Contesto
Giochi, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito probabilistico; ha anche aspetti collegati al contesto dei giochi.
Questa attività può essere introdotta anche al primo anno di biennio dopo aver trattato le distribuzioni di frequenze e aver introdotto le definizioni di probabilità. Non occorrono né i teoremi sulle probabilità né altri concetti. L'attività ha lo scopo di indurre ad una individuazione corretta dello spazio degli eventi, in modo che gli studenti sappiano distinguere tra evento (uscita di un certo risultato nei dadi) ed evento elementare. L'obiettivo è condurre gli studenti alla scoperta che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende dal modo in cui l'esperimento è definito.
Per la simulazione al computer sono necessari alcuni prerequisiti di conoscenza del foglio elettronico: come si inseriscono i dati, come si inserisce una formula, come si copia una formula, riferimenti relativi e assoluti alle celle, come si crea un grafico. Le funzioni "Casuale( )" e "Conta.Se( )" possono essere introdotte anche in questo contesto.

Descrizione dell'attività
L'insegnante propone il seguente problema: lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado col punteggio maggiore annotando la somma dei due dadi rimasti (se quelli col punteggio maggiore sono due, eliminarne uno qualsiasi).
Per una migliore comprensione del problema l'insegnante suggerisce una lettura attenta del testo e chiede agli studenti di esemplificare qualche situazione che si può verificare. Pone alla fine la domanda:
I risultati sono gli stessi che nel lancio di due dadi?

Prima fase
Il problema si può affrontare dopo aver trattato preliminarmente il lancio di due dadi.
L'insegnante guida gli studenti a costruire il grafico di frequenze per il lancio di due dadi dopo aver effettuato l'esperimento manualmente o tramite la simulazione al computer ed aver calcolato la somma dei punteggi ottenuti.
Il foglio elettronico, riportato in Figura 1, è stato costruito riportando nella colonna B le uscite del primo dado e nella colonna E le uscite del secondo dado (ottenuti tramite la funzione casuale); nella colonna G si è effettuata la somma. Per poter calcolare le frequenze assolute e relative (colonne J e K) si è usata la funzione "Conta.Se( )".

J10 = =CONTA.SE($G$10:$G$410;2)

LANCIO DI DUE DADI

Premi F9 per esperimento

	PRIMO DADO		SECONDO DADO		SOMMA	SOMMA	FREQUENZE ASSOL.	FREQUENZE REL.
10	2,061695	3	5,175182	6	9	2	7	0,02
11	1,218886	2	1,945911	2	4	3	13	0,03
12	4,968867	5	2,510941	3	8	4	46	0,11
13	4,46233	5	1,81119	2	7	5	40	0,10
14	3,804479	4	3,055004	4	8	6	59	0,15
15	3,821183	4	5,105237	6	10	7	73	0,18
16	2,444649	3	4,165009	5	8	8	60	0,15
17	5,230644	6	5,41912	6	12	9	51	0,13
18	3,811168	4	2,744116	3	7	10	27	0,07
19	5,117183	6	1,124992	2	8	11	15	0,04
20	3,171011	4	3,764367	4	8	12	10	0,02
21	3,868213	4	4,985429	5	9			
22	0,302787	1	4,936015	5	6			
23	4,913538	5	5,126264	6	11			
24	3,139194	4	3,289649	4	8			

Figura 1

Nel caso si sia effettuata la simulazione al computer l'insegnante invita ad osservare le colonne in cui sono riportati i risultati relativi al primo ed al secondo dado e chiede se i dadi sono truccati. Come sono tra loro i punteggi dei due dadi? Come avvengono i lanci?

Dall'esame del grafico in Figura 2 gli studenti possono dedurre che i casi centrali sono i più frequenti. Da cosa dipende?

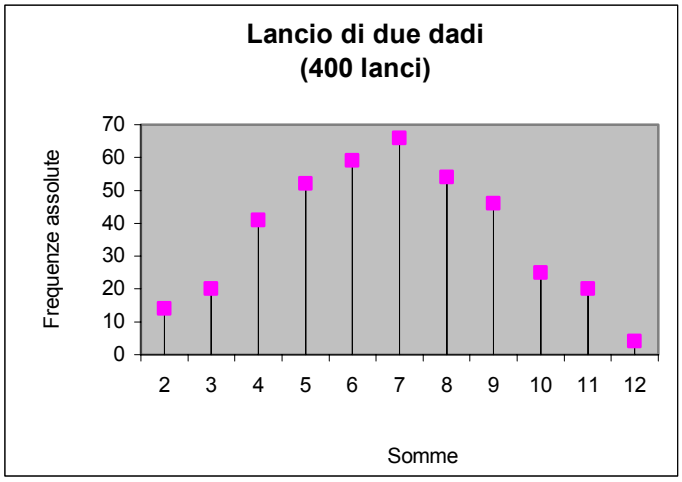


Figura 2

Si invitano gli studenti a valutare le probabilità dei diversi eventi possibili.
I casi possibili nel lancio di due dadi sono tutte le coppie che si possono ottenere associando una faccia del primo dado con una qualunque del secondo dado $6 \cdot 6 = 36$.
Non tutti i risultati, però, hanno la stessa probabilità: infatti, ad esempio, il numero 6 si può ottenere in più modi che non il numero 3.
Gli studenti saranno guidati a compilare la seguente tabella.

EVENTO	Modalità di presentazione	Numero casi possibili	Probabilità
uscita del 2	1+1	1	1/36
uscita del 3	1+2 2+1	2	2/36
uscita del 4	1+3 2+2 3+1	3	3/36
uscita del 5	1+4 2+3 3+2 4+1	4	4/36
uscita del 6	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	5	5/36
uscita del 7	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	6	6/36
uscita del 8	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	5	5/36
uscita del 9	3+6 4+5 5+4 6+3	4	4/36
uscita del 10	4+6 5+5 6+4	3	3/36
uscita del 11	5+6 6+5	2	2/36
uscita del 12	6+6	1	1/36
Totale		36	1

Si pongono agli studenti le seguenti domande: perché il grafico sperimentale non risulta perfettamente simmetrico come ci si aspetterebbe dalla valutazione di probabilità? Il grafico avrebbe avuto un andamento più vicino alle previsioni se il numero di lanci fosse stato maggiore?
Si può invitare gli studenti a ripetere la simulazione con un numero maggiore di lanci.
Il foglio elettronico permette agevolmente sia di ripetere più volte l'esperimento con lo stesso numero di lanci (basta premere un tasto per vedere simultaneamente come si modifica il grafico) sia di variare il numero di lanci.
L'insegnante guida gli studenti ad osservare che il grafico muta anche se il numero di lanci è identico. Perché? Quante sono le simulazioni di lanci che si possono fare, fissato il numero di lanci? Allora l'insieme di *n* lanci studiato ed osservato è forse un "campione casuale"?
Appare, inoltre, chiaro che all'aumentare del numero dei lanci la frequenza si avvicina alla valutazione teorica di probabilità.
Si può concludere che su un gran numero di prove ci si può attendere di avere frequenze di uscita sempre più vicine alla valutazione di probabilità?
E' un primo approccio alla legge dei grandi numeri.

Seconda fase

Nella fase successiva si propone il problema dei tre dadi .
Si invitano gli studenti ad eseguire l'esperimento lanciando i dadi ed effettuando un numero alto di prove. Si possono far lavorare gli studenti in gruppo e far loro costruire il grafico delle frequenze. E' opportuno comunque far ripetere l'esperimento con una simulazione al computer.
Il foglio elettronico, riportato in Figura 3, è stato costruito riportando nella colonna B le uscite del primo dado, nella colonna E le uscite del secondo e nella colonna H le uscite del terzo (ottenute tramite la funzione casuale); per calcolare la somma dei dadi rimasti(colonna J), dopo aver scartato il punteggio maggiore, si è utilizzata, per ogni terna di valori, la funzione "Max( )", che restituisce il valore massimo.

I23 | =MAX(B23;E23;H23)

Lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado col punteggio maggiore annotando la somma dei due dadi rimasti (se quelli col punteggio maggiore sono due, eliminane uno qualsiasi). Avrai gli stessi risultati che nel lancio di due dadi?

Eseguiamo l'esperimento con il foglio elettronico effettuando un numero alto di prove

		PRIMO DADO		SECONDO		TERZO		SOMMA DEI DADI RIMASTI
20	1,16996	2	1,46329	2	2,22954	3	3	4
21	3,5894	4	2,78112	3	2,62169	3	4	6
22	2,89431	3	4,26873	5	2,50929	3	5	6
23	2,96419	3	0,61913	1	3,73917	4	4	4
24	3,68677	4	5,05047	6	5,96392	6	6	10
25	0,91528	1	2,24784	3	3,33311	4	4	4
26	5,73208	6	4,00959	5	1,41102	2	6	7
27	4,91961	5	4,75386	5	2,96675	3	5	8
28	1,75621	2	5,03489	6	2,88963	3	6	5
29	0,31508	1	5,64307	6	5,84135	6	6	7
30	3,20051	4	5,46263	6	3,72739	4	6	8
31	1,91658	2	2,00728	3	4,7734	5	5	5

Figura 3

Dall'esame del grafico di Figura 4 gli allievi possono notare il diverso andamento ottenuto in questo esperimento rispetto a quello relativo al lancio di due dadi.

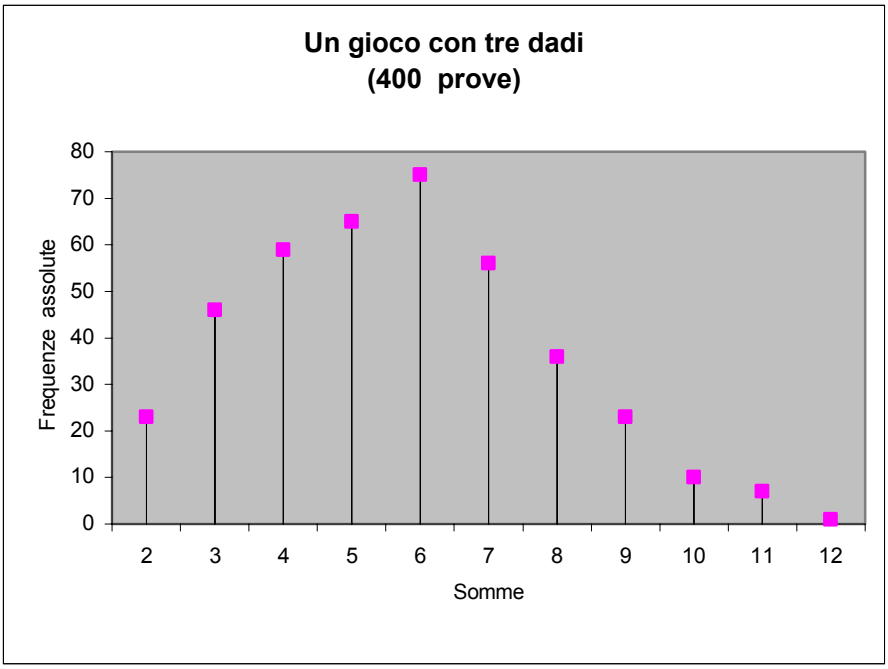
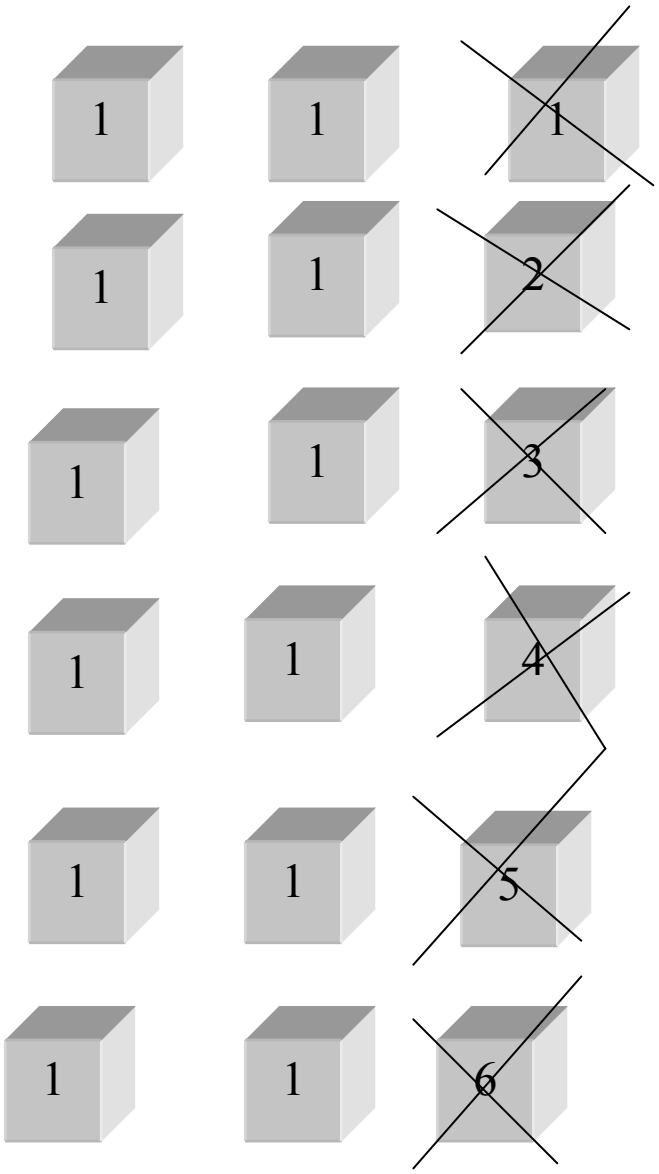
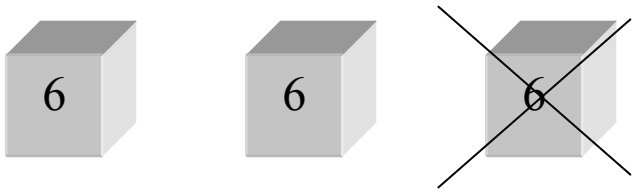


Figura 4

Si faranno riflettere gli allievi sul fatto che, anche se gli eventi sono sempre l'uscita dei numeri da 2 a 12, il fatto di aver eliminato l'esito del terzo dado, quello col punteggio maggiore, non può essere ignorato. Si invitano, poi, gli allievi a calcolare i diversi casi possibili per ogni evento.
Per esempio l'evento E_1 : "uscita del 2" e l'evento E_2 "uscita del 12" non hanno in questo caso la stessa probabilità .
Infatti, l' evento E_1 si realizza in 16 modi:



mentre l'evento E_2 si realizza in un sol modo:



In questo problema i casi possibili sono $6^3 = 216$.

A questo punto si invitano gli studenti a calcolare la probabilità dei diversi eventi, dividendoli in gruppi perché il calcolo seppure semplice è un po' laborioso, e si ottiene:

P(uscita del 2) = $16/ 6^3$	P(uscita del 3) = $27/ 6^3$	P(uscita del 4) = $34/ 6^3$
P(uscita del 5) = $36/ 6^3$	P(uscita del 6) = $34/ 6^3$	P(uscita del 7) = $27/ 6^3$
P(uscita del 8) = $19/ 6^3$	P(uscita del 9) = $12/ 6^3$	P(uscita del 10) = $7/ 6^3$
P(uscita del 11) = $3/ 6^3$	P(uscita del 12) = $1/ 6^3$	

Le valutazioni teoriche si accordano con i risultati ottenuti ?

Il problema delle parti

Livello scolare: 1° biennio.

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato di probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.	Dati e previsioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Giochi, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito probabilistico; ha anche aspetti collegati ai giochi.
Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una prima o seconda classe del primo biennio; non è richiesto alcun prerequisito di calcolo delle probabilità. L'attività ha come obiettivo primario proprio quello di introdurre al pensiero probabilistico e va quindi svolta secondo i tempi della didattica lunga, tipici del contesto laboratoriale, dando agli studenti il tempo necessario per appropriarsi dei concetti e delle prime tecniche del calcolo delle probabilità. L'attività è suscettibile di ulteriori sviluppi nel secondo biennio, quando si voglia introdurre o applicare la distribuzione binomiale.
Il contesto è quello dei giochi, con la storia della matematica che dovrebbe favorire la costruzione di significati, presentando genesi ed evoluzione del concetto di probabilità. In questo caso la storia della matematica funge anche da elemento motivante, soprattutto quando evidenzia che le soluzioni non adeguate degli studenti al problema proposto sono state date, nel corso della storia, dai matematici che hanno affrontato lo stesso problema: questa considerazione dà dignità agli "errori" degli studenti e fa capire che, talvolta, una risoluzione adeguata e soddisfacente a un problema può essere determinata solo con un cambio di prospettiva reso possibile dallo sviluppo di nuovi concetti, come, in questo caso, quello di probabilità.

Descrizione dell'attività
Il problema che viene proposto in questa attività è noto in letteratura come "problema della divisione della posta in gioco" o "problema delle parti". La prima versione che ci è nota è presente in un manoscritto di anonimo del 1400 circa, anche se il problema deve la sua fama a Luca Pacioli, che lo propose nel 1494 nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*.
Il problema riguarda la suddivisione della posta fra due giocatori di "uguale valore" (ossia che hanno la stessa probabilità di guadagnare un punto), che sono costretti a interrompere la partita prima che uno di essi abbia totalizzato il numero di punti necessario per vincere la partita.
L'attività viene strutturata in quattro fasi. Nella prima si propone di risolvere il problema in piccoli gruppi di lavoro (ovviamente) collaborativi; nella seconda, in una discussione matematica rivolta all'intera classe, si evidenziano i dati del problema e alcuni modi di rappresentarli e si discutono le

soluzioni proposte dai vari gruppi; nella terza fase si ricostruiscono i gruppi con la consegna di sistemare il procedimento risolutivo prima proposto, alla luce dei nuovi elementi emersi nella discussione collettiva. Nella quarta fase, infine, si passa alla discussione di bilancio, nella quale si costruiscono, gradualmente, le tecniche necessarie alla risoluzione del problema, eventualmente traendo spunto dalla storia della matematica e, in particolare, dalle soluzioni proposte da Pascal e da Fermat.

Prima fase

L'insegnante propone la "situazione – problema" sotto riportata a gruppi collaborativi formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).

Situazione – problema:

In una taverna del piccolo paese di Matelandia, Ariele e Calibano giocano a testa e croce con una moneta a due facce non truccata. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l'esito. Vince tutta la posta di 24 denari (12 dei quali sono di Ariele e 12 di Calibano) chi per primo totalizza 6 punti.

I giochi d'azzardo sono però proibiti a Matelandia e il gendarme Prospero, venuto a conoscenza della partita che si sta giocando, si avvia verso la taverna per arrestare Ariele e Calibano. Informati del pericolo, i due giocatori interrompono la partita sul 5 a 3 per Ariele e fuggono, ciascuno con i 12 denari messi per formare la posta, concordando di ritrovarsi il giorno dopo senza finire la partita ma solo per dividere equamente la posta in gioco.

Problema:

Come dovrebbero, Ariele e Calibano, dividersi i 24 denari in modo tale che la suddivisione sia equa, ossia in modo tale da tenere conto del fatto che avevano contribuito alla posta con 12 denari ciascuno e che quando la partita è stata interrotta il punteggio era 5 a 3 per Ariele?

Tutte le volte che il problema è stato proposto a studenti del primo biennio che non avevano ancora affrontato sistematicamente il calcolo delle probabilità, la prima reazione è stata di stupore, perché il problema è ritenuto troppo facile, banale. Ci si può aspettare che, in breve tempo, i vari gruppi di studenti giungano a proporre la seguente risoluzione (o una equivalente): dividere la posta, ossia i 24 denari, per il numero totale di partite giocate, e moltiplicare il risultato prima per 5, per ottenere i denari spettanti ad Ariele, poi per 3, in modo da ottenere quelli di Calibano.

L'insegnante deve verificare, prima di passare alla seconda fase, che gli tutti studenti abbiano raggiunto un buon livello di fiducia nella risoluzione proposta.

Seconda fase

L'insegnante avvia una discussione matematica alla presenza dell'intera classe, invitando i rappresentanti di alcuni gruppi a presentare la propria strategia risolutiva[1]. L'insegnante deve aver cura di predisporre la classe alla discussione collettiva, sia lodando il lavoro fino ad allora svolto, sia ricordando che tra gli elementi di valutazione della discussione vi è la capacità di analisi critica delle idee altrui.

In seguito l'insegnante fa notare che, in generale, i dati del problema sono il numero n di punti necessari per vincere la partita e i numeri a e b di punti che hanno totalizzato, rispettivamente, i due giocatori al momento dell'interruzione della partita. Tali dati possono essere rappresentati con la notazione $[n: a ; b]$ ove a e b sono numeri naturali minori di n, ma anche con la notazione $[-p; -q]$, dove p e q sono i punti che mancano, al momento dell'interruzione della partita, rispettivamente al primo e al secondo giocatore per vincere l'intera posta. In questo momento l'insegnante si limita a

[1] Non è necessario che tutti gli studenti presentino la soluzione proposta, soprattutto se le strategie risolutive sono fortemente simili, come avviene spesso in questo caso. L'insegnante invita un gruppo a presentare la propria strategia risolutiva e a chiedere agli altri gruppi di limitarsi a interventi che servano per precisare, aggiungere qualcosa o, eventualmente, per criticare e contestare le strategie risolutive proposte dal gruppo che ha iniziato le presentazioni.

presentare le due differenti modalità di rappresentazione dei dati a disposizione, senza evidenziare che la seconda modalità è enormemente più suggestiva della prima[2].
A questo punto l'insegnante ha il compito di mettere in crisi la fiducia degli studenti nella soluzione proposta. Allo scopo può chiedere a qualche studente di giocare a testa e croce, contro di lui. Se il numero degli studenti è sufficientemente elevato, è abbastanza probabile che si verifichi la situazione che vede l'insegnante, dopo il primo lancio della moneta, vincere per 1 a 0 su uno studente. Si tratta di una situazione critica che consente all'insegnante di mettere in crisi la fiducia degli studenti nella soluzione proposta (quella di dividere la posta in parti direttamente proporzionali al punteggio dei due giocatori). Infatti, se la partita viene interrotta sull'1 a 0 per l'insegnante, con la strategia di suddividere la posta in parti direttamente proporzionali ai punteggi dei due giocatori, tutta la posta andrebbe all'insegnante e nulla allo studente. Ma quale studente è disposto ad accettare una suddivisione di questo tipo visto che sta perdendo solo per 1 a 0 e avrebbe ancora ottime possibilità di recuperare? La proposta di suddividere in parti proporzionali al punteggio appare, in questo caso, manifestamente non equa.
L'insegnante, per far capire agli studenti che la strategia risolutiva da loro proposta ha comunque una propria dignità e non è indice di ingenuità e superficialità da parte loro, può far presente che la stessa soluzione è stata proposta nel 1494 da Luca Pacioli, un grande matematico, secondo cui la suddivisione equa sarebbe stata di 15 denari per Ariele e di 9 per Calibano, ossia la stessa suddivisione proposta da alcuni degli studenti. Inoltre il problema, nonostante i tentativi di risoluzione di altri matematici, come Cardano, Tartaglia e di Pietro Cataneo, non fu risolto in modo soddisfacente fino alla metà del diciassettesimo secolo, quando fu data una risposta adeguata con Pascal e, indipendentemente, con Fermat.
L'insegnante, in questa fase, può approfittare dell'occasione per fissare l'attenzione su alcuni termini come suddivisione in parti direttamente proporzionali al punteggio e suddivisione equa, iniziando a precisarne il significato.

Terza fase

Per trovare una strategia risolutiva alternativa, che possa soddisfare tutti i componenti della classe l'insegnante può ricostituire i gruppi di studenti invitandoli a ripensare alla strategia risolutiva, cercando di trovarne una che sia adeguata anche alla trattazione di casi limite come quello dell' 1 a 0 per uno dei giocatori.
L'insegnante, in questa fase, deve intervenire sistematicamente nei gruppi di lavoro per evitare che si sclerotizzino posizioni semplificatrici del tipo "la partita può essere ripresa in seguito a partire dal punteggio sul quale è stata interrotta" oppure "si divide la posta a metà indipendentemente dal punteggio" o, ancora, "se il gioco d'azzardo è proibito, allora i giocatori devono essere multati e non spetta loro alcuna somma". Si dovrebbe far presente agli studenti che le risoluzioni proposte non devono far perdere senso al problema: la strategia di cambiare le richieste di un problema quando non lo si sa risolvere porta a non soddisfare la richiesta iniziale. Se Ariele e Calibano hanno chiesto aiuto per risolvere il loro problema, l'obiettivo dell'insegnante e quello degli studenti è cercare di risolverlo con i vincoli che loro hanno imposto e non quello di cambiare il problema posto.
In questa terza fase ci si aspetta che da qualche gruppo di lavoro emergano soluzioni che affermino che una suddivisione equa deve tenere conto non solo delle partite giocate, ma anche di quelle che rimangono da giocare per raggiungere i 6 punti necessari a vincere l'intera posta (è stato osservato, in alcuni gruppi di lavoro, l'attenzione esclusiva, con tipico pensiero probabilistico, alle sole partite che ancora rimangono da giocare).

[2] Con la seconda modalità, infatti, si fissa l'attenzione sul numero di punti che ancora servono per vincere e non sul punteggio ottenuto al momento dell'interruzione: è il cambio di orizzonte richiesto dal pensiero probabilistico (non guardare a quanto è già accaduto, ma prendere in considerazione ciò che deve ancora accadere o, meglio, il mondo degli eventi possibili, per effettuare previsioni).

Può essere interessante osservare se gli studenti, inconsapevolmente, ripropongano alcune strategie risolutive che i matematici che si sono occupati del problema hanno fatto pervenire attraverso testi a stampa[3]. Se questa situazione si verifica, è possibile utilizzare le fonti storiche in una specie di gioco "voci – eco", nel quale le voci della storia, ossia le soluzioni proposte dai matematici, fanno eco alle voci della classe, ossia alle soluzioni proposte dagli studenti. In alcuni casi le voci della storia danno dignità agli errori commessi dagli studenti; altre volte contribuiscono a dar forza a idee espresse da alcuni studenti, consentendo che esse vengano riconosciute da tutta la classe diventando, a tutti gli effetti, oggetto di discussione. Ciò, oltre a consentire di creare un atteggiamento riflessivo nei confronti dei concetti messi in gioco nel problema, favorisce l'instaurarsi e lo svilupparsi della discussione matematica con inevitabili benefici per la socializzazione e la condivisione del sapere.

Quarta fase

L'insegnante si incarica di proporre una sistemazione delle varie soluzioni proposte e della loro evoluzione verso la soluzione ottenuta utilizzando il calcolo delle probabilità. Sottolinea il fatto che in questa soluzione la prospettiva, rispetto alla suddivisione in parti direttamente proporzionali al punteggio al momento dell'interruzione del gioco, è profondamente cambiata: per suddividere la posta l'attenzione è rivolta ai punti che mancano per vincere e non a quelli già ottenuti dai due giocatori (può essere utile a questo punto ritornare sulle due modalità di rappresentazione dei dati del problema proposto, commentando la maggiore utilità della notazione [- p ; - q]). L'idea è quindi quella di suddividere la posta in parti proporzionali alle possibilità che i due giocatori avrebbero di vincere l'intera posta al momento dell'interruzione, se il gioco potesse continuare. Il problema diventa quindi quello di misurare tale possibilità.

A questo punto l'insegnante può utilizzare le voci della storia, presentando in classe una sintesi dell'approccio di Pascal e di quello di Fermat alla risoluzione del problema, oppure può limitarsi a presentare alcuni elementi di calcolo delle probabilità, in particolare la legge delle probabilità totali e delle probabilità composte, magari con qualche cenno all'uso dei diagrammi ad albero come strumento di efficace rappresentazione di situazioni probabilistiche. Sia in un caso che nell'altro, la presentazione non può essere confinata in tempi e spazi angusti, per la delicatezza dei concetti coinvolti e quindi deve avere i ritmi e i tempi della didattica lunga.

Qui di seguito si dà un primissimo cenno dell'approccio alla risoluzione del problema da parte di Pascal e si propone poi una soluzione con il moderno linguaggio dei diagrammi ad albero.

Soluzione "alla Pascal"	tradotta in termini moderni
Sul punteggio di 5 a 3 per Ariele, se si gioca un'altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l'intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 4. Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia 12 denari. Sul 5 a 4 per Ariele, se si gioca un'altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 5. Allora ad Ariele vanno, oltre ai 12 denari già stabiliti, almeno la metà dei 12 rimanenti, ossia 12+6= 18. Sul 5 a 5 si può giocare al più un'altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul 5 a 5	La speranza di vittoria di Ariele è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi: E_1 ; E_2E_1 ; $E_2E_2E_1$ Ove: E_1 è l'evento "Ariele guadagna un punto"; E_2 è l'evento "Calibano guadagna un punto". Poiché E_1 ed E_2 hanno probabilità ½ , per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, si ha che E_1, E_2E_1, $E_2E_2E_1$ hanno, rispettivamente, probabilità uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. Quindi la probabilità che Ariele ha di vincere è, per la regola sulla probabilità totale

[3] A questo proposito si può far riferimento a uno dei lavori riportati nei riferimenti bibliografici.

devono dividersi la posta rimanente, ossia 3 denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul 5 a 3 per Ariele, ad Ariele vanno 12+6+3=21 denari, mentre a Calibano ne spettano 24-21=3.	per eventi incompatibili, 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8. Un'equa ripartizione dei 24 denari può essere effettuata suddividendo la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei due giocatori: 21 denari ad Ariele e 3 a Calibano.

Risoluzione con l'aiuto dei diagrammi ad albero
Il seguente diagramma ad albero prende in considerazione tutte le possibili situazioni che potrebbero verificarsi se la partita continuasse, invece di essere interrotta sul 5 a 3 per Ariele (A indica la vittoria di Ariele e C quella di Calibano).

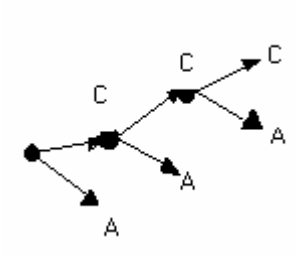


Figura 1

Il diagramma ad albero di Figura 1 consente di visualizzare lo spazio delle situazioni possibili: in questo caso è uno strumento particolarmente indicato, in quanto la partita è stata interrotta sul 5 a 3 e quindi lo spazio delle situazioni possibili non è eccessivamente complesso. Si fa notare agli studenti che Calibano, per arrivare a sei punti prima di Ariele, deve vincere tre partite consecutive senza che Ariele ne vinca alcuna. Ciò vuol dire che la probabilità di vincita di Calibano è $\frac{1}{8}$, mentre quella di Ariele è $\frac{7}{8}$. La suddivisione della posta in parti direttamente proporzionali alla probabilità che i due giocatori avrebbero di vincere il gioco al momento dell'interruzione, se questo fosse continuato è quindi 21 denari per Ariele e 3 per Calibano.

Possibili sviluppi
- Introduzione del concetto di gioco equo e relative applicazioni.
- La generalizzazione del problema della parti al caso [*n*: *a* ; *b*] e la distribuzione binomiale.
- Lettura e analisi del carteggio Pascal – Fermat sul problema delle parti.
- Il problema dei compleanni.

Elementi di prove di verifica

1. Un'urna contiene 6 palline nere e 5 bianche. Si eseguono due estrazioni successive, rimettendo, dopo la prima estrazione, la pallina estratta nell'urna. Qual è la probabilità di ottenere
a) due palline nere
b) una pallina bianca e una nera

2. Sia data un'urna contenente 5 palline, di cui 2 azzurre e 3 bianche. Effettuando due estrazioni successive in ciascuna delle quali si estrae una sola pallina che poi si inserisce nuovamente nell'urna, calcolare la probabilità di ottenere i seguenti eventi:
a) due palline azzurre
b) una pallina azzurra e una bianca

3. Un'urna contiene palline bianche, nere e rosse; sapendo che la probabilità di estrarre una pallina nera è 1/2, che quella di estrarre una pallina nera o bianca è 2/3 e che vi sono 2 palline bianche, è possibile determinare il numero di palline rosse e quello di palline nere? In caso di risposta negativa spiega perché; in caso di risposta affermativa, determina tali numeri.

4. Qual è la probabilità che, lanciando due volte un dado cubico regolare, con facce numerate da 1 a 6, escano due numeri multipli di 3?

5. Sapendo che, al gioco del Lotto, sulla ruota di Napoli il 12 non è uscito per 80 settimane e che il 20 è stato estratto nelle due ultime settimane, possiamo dire che alla prossima estrazione è più probabile che esca il 12 rispetto al 20? Perché?

6. Una classe è composta da 9 maschi e 11 femmine. Per partecipare a una rappresentazione musicale studentesca vengono estratti tre nominativi. Qual è la probabilità che almeno uno di essi sia quello di una studentessa?

7. Un numero di 5 cifre viene scritto nel sistema binario con la seguente procedure:
a) si scrive il numero 1
b) si estraggono da un'urna (contenente cento cartellini con la cifra 0 e cento cartellini con la cifra 1) quattro cartellini in successione, rimettendo ogni volta i cartellini estratti nell'urna e scrivendo, a ogni estrazione, la cifra estratta di seguito a quelle già scritte.

Qual è la probabilità che si ottenga, in questo modo, un numero minore del numero che, in base dieci, si rappresenta con la scrittura 30?

8. In un sacchetto vi sono palline indistinguibili fra loro al tatto, ma colorate in modo diverso. Alcune sono blu, altre rosse, altre verdi. Non ci sono palline di altri colori. La probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è 1/2; la probabilità di estrarre una pallina che non sia blu è 4/5. Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Che cosa sai dire sul numero totale di palline contenute nel sacchetto? Secondo te, quale somma dovrebbero scommettere tre giocatori, ciascuno su un colore diverso, per incassare 350 Euro in caso di vincita? Giustifica la risposta.

9. L'estrazione di due carte da un mazzo di 40 carte può essere condotta in due modi differenti. Nel primo, si estrae a caso dal mazzo una carta e poi si estrae una seconda carta senza rimettere nel mazzo la prima. Nel secondo modo, dopo aver estratto la prima carta, questa viene rimessa

nel mazzo e quindi ne viene estratta una seconda. Per avere la maggior probabilità di estrarre due carte di cuori, quale modalità di estrazione sceglieresti? Giustifica la risposta.

10. Due sacchetti contengono cinque bussolotti ciascuno, all'interno dei quali è contenuta una lettera dell'alfabeto. Nel sacchetto A vi sono le cinque lettere della parola "pappa" e nel sacchetto B le cinque lettere della parola "posta". Viene estratta a caso una lettera dal sacchetto A e introdotta nel sacchetto B. In seguito viene estratta una lettera dal sacchetto B che viene introdotta in A. Qual è la probabilità che, effettuata l'esperienza a due prove descritta, la composizione dei due sacchetti sia uguale a quella originaria (ossia quella che essi possedevano prima che venisse effettuata l'esperienza a due prove)?

Griglia di correzione

1. 36/121 e 60/121
2. 4/25 e 12/25
3. 2 bianche, 4 rosse, 6 nere
4. 1/9
5. No, le successive estrazioni settimanali al gioco del lotto sono eventi fra loro indipendenti.
6. 1 – (9/20)(8/19)(7/18)
7. 7/8
8. $p(R) = 1/2$; $P(V) = 3/10$; $p(B) = 1/5$. Possiamo però dire che le palline rosse sono il 50% del totale, che le blu sono il 20% e le verdi il 30%. Un giocatore che decidesse di puntare sull'evento "esce la pallina verde" dovrà quindi pagare un premio pari al 30% della somma che vincerebbe. Il 30% di 350 euro dà 105 euro. Il 50% di 350 euro dà 175 euro. Il 20% di 350 euro dà: 70 euro. Ovviamente 70+105+175=350. Si può anche dire che le palline sono almeno 10.
9. È più conveniente la seconda modalità.
10. 1/3

Elementi di prove di verifica

Valutazione delle probabilità

Approccio frequentista

1. In una confezione sono contenute 50 lampadine di cui 5 difettose. Se ne prende una a caso: qual è la probabilità che sia difettosa? E se se ne prendono due, contemporaneamente, qual è la probabilità che siano entrambe difettose?

2. Da una indagine su una popolazione risulta che una persona su 20 è mancina. Qual è la probabilità che una persona, presa a caso in quella popolazione, non sia mancina?

3. Lancia 100 volte un dado a sei facce (puoi effettuare l'esperimento oppure fare una simulazione al computer).
Qual è la frequenza relativa dell'evento *uscita del 6*? Qual è la probabilità dell'evento *uscita del 6* nel lancio di un dado? (Spiega le eventuali discordanze tra i due valori ottenuti).

Approccio classico

1. Un professore di matematica, in una classe composta da 25 alunni, per interrogare decide di lasciarsi guidare dal caso. Ha a disposizione un sacchetto che contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Decide di usarlo così come è ed estrae una pallina; se il numero non supera 25, interroga l'alunno che ha quel numero nell'elenco; altrimenti fa il prodotto delle cifre e interroga l'alunno che ha nell'elenco il numero corrispondente. Tutti gli alunni hanno la stessa probabilità di essere interrogati? Il professore interroga in ogni caso qualcuno? Qual è la probabilità che non interroghi nessuno?

2. Tre signori lasciano il loro cappello al guardaroba di un ristorante. Se, all'uscita, riprendono i loro cappelli a caso qual è la probabilità che nessuno riprenda il suo cappello?
(Per rispondere considera che tale evento è quello contrario all'evento unione dei tre eventi: *il primo o il secondo o il terzo signore riprende il suo cappello*).
Se i signori sono quattro la probabilità che nessuno riprenda il suo cappello aumenta o diminuisce? E se sono cinque ?

Approccio soggettivista

1. Considera gli eventi: *la squadra A vince la partita di calcio di domenica* e *la squadra A termina in vantaggio il primo tempo*. Tali eventi sono indipendenti o no? Se no, sono correlati positivamente o negativamente?

2. Supponi che in un *questionario* presentato alla tua classe si chieda di indicare l'anno di nascita di Dante Alighieri scegliendo tra 5 possibili risposte:

- 753 a.C.
- 825 d.C.
- 1265 d.C.
- 1321 d.C.
- 1920 d.C.

Per ogni risposta indica qual è, secondo te, la probabilità che i tuoi compagni indichino quello come anno di nascita di Dante Alighieri. Giustifica le tue valutazioni secondo un tuo criterio relativo al livello medio di cultura dei tuoi compagni.

Griglia di correzione

Approccio frequentista

1. 1/10; 4/490
2. 19/20

Approccio classico

1. 1/30
2. 1/3 ; 3/8; 11/30

A proposito di valutazione scolastica

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su una unità statistica formata da 2 elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica. Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e riconoscere in essa i diversi elementi individuabili.	Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali.	Dati e previsioni Numeri e Algoritmi Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Organizzazione di attività

Contesto
Extramatematico, sociale, distribuzioni doppie.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico ed è connesso all'ambito sociale; nel contesto matematico in particolare riguarda l'ambito statistico (distribuzioni doppie).
Questa attività è consigliata nel 2° biennio, come uno dei possibili approcci iniziali al nucleo. Il contesto è extramatematico e si basa sui dati di ingresso e di uscita dell'insieme degli studenti della classe prima di un istituto superiore e pone gli studenti di fronte all'analisi di un problema concreto che li coinvolge: trovare se esiste una relazione tra i giudizi di ingresso e i giudizi finali.

Descrizione dell'attività
Per affrontare il problema proposto è necessario rilevare per ogni studente il giudizio finale della scuola media (carattere qualitativo ordinato che si esprime con le modalità: Sufficiente, Buono, Distinto, Ottimo) e l'esito finale (carattere qualitativo ordinato che si esprime con le modalità decrescenti: Promosso, Promosso con 1 debito, Promosso con 2 debiti, Promosso con 3 debiti, Respinto). Con questi dati è possibile costruire una distribuzione doppia di frequenze che si presenta come nella Tabella 1: i dati ai quali la tabella si riferisce derivano da una rilevazione effettuata presso L'I.T.I.S. "C. Zuccante" di Mestre (Ve), nell'anno scolastico 2001/2002.

Studenti iscritti nelle classi prime dell'a.s. 2001/02
per giudizio della scuola media ed esito finale (frequenze assolute)

Giudizio scuola media	Esito finale					Totale
	Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto	
Sufficiente	8	8	15	34	41	106
Buono	40	**21**	15	17	13	106
Distinto	64	6	5	5		80
Ottimo	32	1				33
Totale	144	36	35	56	54	325

Tabella 1

Prima fase

L'insegnante stimola e guida gli studenti alla scoperta del significato degli elementi che compaiono nella Tabella 1.

Quante sono le combinazioni possibili delle modalità delle due variabili?

In generale sono tante quanto è il prodotto del numero delle modalità in riga per il numero delle modalità in colonna. C'è qualche relazione con il prodotto cartesiano di due insiemi ?.

Cosa indica il numero 21 in grassetto nella tabella? E' il numero degli studenti che hanno avuto "contemporaneamente" Buono nella scuola media e che sono stati Promossi con 1 debito formativo.

L'insegnante suggerisce di fissare l'attenzione sulla modalità Distinto tra quelle che appartengono al carattere "Giudizio della scuola media". Quanti sono gli studenti che hanno avuto tale valutazione? Quale distribuzione di "Esito finale" hanno conseguito? Si tratta di una distribuzione semplice? Da chi dipende? Ha senso dire che si tratta di una distribuzione semplice dell'"Esito finale" condizionatamente al fatto di avere conseguito Distinto alla scuola media?

L'insegnante conduce gli studenti a scrivere la distribuzione condizionata:

	Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto	Totale
Distinto	64	6	5	5		80

Quante sono le distribuzioni parziali condizionate alle modalità del giudizio della scuola media?

In modo analogo e come rinforzo del concetto in discussione, l'insegnante può opportunamente lavorare anche sulle 5 distribuzioni condizionate di colonna.

Si possono fare altre considerazioni sulla Tabella 1. Cosa si ottiene sommando le righe o le colonne? L'insegnante guida gli studenti a rendersi conto che da una distribuzione congiunta di frequenze relativa a due caratteri si ottengono in modo univoco le due distribuzioni semplici dei due caratteri rispetto ai quali si è classificato congiuntamente.

Distribuzione degli studenti rispetto all'Esito finale:

Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto	Totale
144	36	35	56	54	325

Distribuzione degli studenti rispetto al Giudizio della scuola media:

Sufficiente	106
Buono	106
Distinto	80
Ottimo	33
Totale	325

Seconda fase

Si può costruire una distribuzione doppia di frequenze relative? Quali informazioni fornisce?

L'insegnante guida gli studente ad esprimersi con le percentuali. Qual è la percentuale di studenti che hanno conseguito Distinto alla scuola media e sono stati Promossi in seconda? Qual è la percentuale di coloro che hanno conseguito Sufficiente alla scuola media e sono stati Respinti?

L'insegnante può stimolare la discussione circa l'esistenza di un legame tra il "Giudizio della scuola media" e l'"Esito finale".

Studenti iscritti nelle classi prime dell'a.s. 2001/02
per giudizio della scuola media ed esito finale (percentuali sul totale)

Giudizio scuola media	Esito finale					Totale
	Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto	
Sufficiente	2,5	2,5	4,6	10,5	12,6	32,6
Buono	12,3	6,5	4,6	5,2	4,0	32,6
Distinto	19,7	1,8	1,5	1,5	0	24,6
Ottimo	9,8	0,3	0	0	0	10,2
Totale	44,3	11,1	10,8	17,2	16,6	100,0

Tabella 2

Come si può "vedere" ed, eventualmente, misurare l'intensità di questo legame?

Per capire come si analizza l'esistenza di un eventuale legame (**connessione**) tra due caratteri, l'insegnante propone all'attenzione degli studenti la seguente tabella:

	Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto	Totale
Sufficiente	*P^S*	*1D^S*	*2D^S*	*3D^S*	*R^S*	*S*
Buono	*P^B*	*1D^B*	*2D^B*	*3D^B*	*R^B*	*B*
Distinto	*P^D*	*1D^D*	*2D^D*	*3D^D*	*R^D*	*D*
Ottimo	*P^O*	*1D^O*	*2D^O*	*3D^O*	*R^O*	*O*
Totale	*P*	*1D*	*2D*	*3D*	*R*	*n*

Tabella 3

Ogni riga della tabella precedente rappresenta, in simboli, la distribuzione condizionata, del carattere "Esito finale" rispetto alle diverse modalità del carattere "Giudizio delle scuola media", con riferimento alle frequenze assolute.
I simboli di Tabella 3 fanno riferimento ai corrispondenti valori della Tabella 1.
Per rispondere alla domanda posta, però, occorre fare riferimento ai valori percentuali. Perché? L'insegnante dopo aver fatto osservare che la distribuzione marginale e le condizionate hanno diverse numerosità, ricorda agli studenti che per poter confrontare distribuzioni con diverse numerosità occorre ricorrere alle frequenze relative o a quelle percentuali.
Se le modalità di un carattere non avessero influenza sulla distribuzione dell'altro, tutte le distribuzioni percentuali condizionate di riga o di colonna dovrebbero essere uguali e coincidere con la corrispondente distribuzione marginale.
Ad esempio, se il carattere "Giudizio della scuola media" non avesse influenza sull'"Esito finale" si avrebbero per i "Promossi"le seguenti situazioni:

$$\frac{P\hat{}S}{S}=\frac{P\hat{}B}{B}=\frac{P\hat{}D}{D}=\frac{P\hat{}O}{O}$$

Applicando tra queste proporzioni la proprietà del comporre si ottiene ad esempio:

$$\frac{P\hat{}S+P\hat{}B+P\hat{}D+P\hat{}O}{S+B+D+O}=\frac{P\hat{}D}{D}$$

Il numeratore del primo membro è l'insieme dei "Promossi" mentre il denominatore rappresenta l'insieme degli studenti, quindi:

$$\frac{P}{n} = \frac{P\hat{}D}{D}$$

Questo implica che i valori delle frequenze assolute congiunte dovrebbero essere dati da:

$$P\hat{}D = \frac{P * D}{n}$$

Questo valore rappresenta la frequenza teorica associata alla coppia di eventi (Distinto, Promosso) nell'ipotesi di indipendenza associativa e viene perciò chiamata frequenza teorica in condizione di indipendenza (l'insegnante suggerisce agli alunni di rivedere la regola per il calcolo della probabilità composta per eventi indipendenti).
Questo ragionamento vale per ogni coppia di modalità e quindi è possibile costruire, eventualmente con l'uso del computer, la tabella di indipendenza in cui ogni cella soddisfa alla condizione precedente; tale tabella si dice anche Tabella di connessione nulla.

Tabella di connessione "nulla" fra giudizio della scuola media ed esito finale

	Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto	Totale
Sufficiente	46,966	11,742	11,415	18,265	17,612	106
Buono	46,966	11,742	11,415	18,265	17,612	106
Distinto	35,446	8,862	8,615	13,785	13,292	80
Ottimo	14,622	3,655	3,554	5,686	5,483	33
Totale	144	36	35	56	54	325

Tabella 4

L'insegnante domanda come sono le distribuzioni marginali della Tabella 1 (tabella osservata) e quelle della Tabella 4 (tabella teorica)? Come mai la Tabella 1 contiene solo numeri interi mentre la Tabella 4 contiene tutti numeri decimali?
Come è possibile valutare la "distanza" tra dati osservati e dati teorici in ipotesi di indipendenza? Dopo aver lasciato dibattere gli studenti su questo problema, l'insegnante propone una possibile quantificazione di tale "distanza" costruendo la differenza in modulo tra le frequenze delle caselle corrispondenti nelle due tabelle.

Tabella delle differenze assolute tra i dati della Tabella 1 e quelli della Tabella 4

	Promosso	Prom1Deb	Prom2Deb	Prom3Deb	Respinto
Sufficiente	**38,97**	3,74	3,58	**15,74**	**23,39**
Buono	6,97	9,26	3,58	1,26	4,61
Distinto	**28,55**	2,86	3,62	8,78	**13,29**
Ottimo	**17,38**	2,66	3,55	5,69	5,48

Tabella 5

I dati della Tabella 5 mettono in luce la presenza di alcune distanze (in grassetto) piuttosto elevate rispetto alle altre. Esse segnalano un allontanamento "consistente" dalla condizione teorica di indipendenza.

L'insegnante guida gli studenti a descrivere i dati della Tabella 5. Nel corso del dibattito si osservano alcuni legami interessanti: gli ottimi promossi sono più dell'atteso; i distinti promossi sono più del previsto e non esistono distinti respinti, pur esistendo la corrispondente frequenza teorica; i sufficienti-promossi sono meno dell'atteso mentre i sufficienti-respinti e i sufficienti-promossi con tre debiti formativi sono più del previsto.

Elementi di prova di verifica

1. Si conosce la distribuzione di cento studenti secondo il sesso e il voto in una prova di matematica:

Sesso	Voto in matematica		Totale
	insufficiente	sufficiente	
Maschi	4	6	10
Femmine	36	54	90
Totale	40	60	100

a) Secondo te, i caratteri "Sesso" e "Voto in matematica" sono connessi? □ Sì □ No

b) Data una qualunque distribuzione di studenti secondo il "Sesso" e il "Voto in matematica", si dice che tra i due caratteri in questione non c'è connessione se:

1. Al variare delle modalità del carattere "Sesso" le distribuzioni percentuali secondo il carattere "Voto" sono uguali. □ Vero □ Falso
2. Rispetto al carattere "Sesso", la distribuzione percentuale di quanti hanno un voto insufficiente è uguale alla distribuzione percentuale di quanti hanno un voto sufficiente. □ Vero □ Falso
3. Tra i maschi, la percentuale di quelli che hanno ottenuto sufficiente, sul totale dei maschi, è uguale alla percentuale di femmine con voto sufficiente, sul totale delle femmine. □ Vero □ Falso
4. Rispetto al totale degli alunni, la percentuale dei maschi con voto insufficiente è uguale alla percentuale dei maschi con voto sufficiente. □ Vero □ Falso

2. La tabella seguente riporta i risultati di un sondaggio rivolto ad un campione di 400 italiani adulti che riguarda il numero delle volte che si sono fatti visitare dal medico negli ultimi tre mesi:

Fumatore	Numero di visite mediche			Totale
	0 – 1	2 – 4	≥ 5	
Sì	20	60	80	160
No	110	90	40	240

a. In percentuale tra i fumatori quanti sono quelli che si fanno visitare non meno di 5 volte?
b. Il fatto di essere fumatori incide o non incide sulla distribuzione delle visite mediche degli ultimi tre mesi?

3. Il senato degli Stati Uniti nel 1994 era formato da 100 membri. Il 44% era repubblicano e tra i repubblicani il 95% era di sesso maschile. Si sa che le femmine erano in totale il 7% dei membri del senato.

a. Inserisci le frequenze assolute nella tabella a doppia entrata per sesso e partito politico.
b. Il partito politico incide sulla composizione per sesso?

Partito politico	Sesso		Totale
	Maschi	Femmine	
Repubblicani			
Democratici			
Totale			

Griglia di correzione

1.a. Sì
1.b. Vero; Vero, Vero, Falso
2. 50%; sì
3.

Partito politico	Sesso		Totale
	Maschi	Femmine	
Repubblicani	42	2	44
Democratici	51	5	56
Totale	93	7	100

I grafici parlano…

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Selezionare, produrre ed usare appropriate rappresentazioni grafiche delle distribuzioni doppie.	Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni doppie rispetto a caratteri di qualsiasi natura.	Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Sociale.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; in particolare, per il contesto matematico, l'attività riguarda l'ambito statistico (distribuzioni doppie e rappresentazioni grafiche).
L'attività prende spunto da un'indagine effettuata dagli studenti, nell'ambito dell'area di progetto, dell'I.T.I.S. "C. Zuccante" di Mestre (Ve) sui lavori svolti dagli stessi studenti nel periodo estivo. La zona offre possibilità di lavoro estivo in diversi settori, grazie ad un buono sviluppo industriale e commerciale. L'istituto stesso, inoltre, organizza stages di formazione nel periodo estivo.
La Presidenza dell'Istituto avvertiva l'esigenza di esplorare più a fondo il fenomeno, di sapere se e quanti studenti erano interessati, a conoscere i settori produttivi di maggiore interesse. Per tale motivo ha commissionato un'area di progetto ad una classe terza dello stesso Istituto. Gli studenti hanno provveduto a predisporre un opportuno questionario, a farlo compilare, a codificarlo e a costruire il corrispondente data base relativo a 499 studenti (unità statistiche) rispetto ai 13 caratteri rilevati.

Descrizione dell'attività
Questa unità utilizza alcuni dei risultati dell'analisi per mostrare rappresentazioni grafiche particolarmente utili per sintetizzare le tabelle e coglierne il significato. Ciò consente quindi sia avere una idea più immediata e generale dell'andamento di un carattere, sia la possibilità di confrontare distribuzioni di caratteri diversi. Con l'avvertenza, sempre valida nella rappresentazione per immagini, che una stessa distribuzione presentata in un modo o in un altro sembra cambiare profondamente.

Prima fase
Una prima domanda riguarda l'"Età" degli studenti che lavorano, le "Classi" e i "Corsi di appartenenza": elettronica e telecomunicazioni (ET) ed informatica (IS).

L'insegnante mette in evidenza come il modo in cui le frequenze si dispongono segnala l'esistenza di una connessione fra le età e le classi. Qual è l'età minima e l'età massima degli studenti per ogni classe? La distribuzione per età degli "elettronici" e la distribuzione per età degli "informatici" sono analoghe nelle classi corrispondenti?

Studenti che lavorano d'estate per età e classe di appartenenza (dati assoluti)

Classe	Età in anni compiuti						Totale
	16	17	18	19	20	21	
3ET	23	8	3				34
4ET		21	22	6	2		51
5ET			28	10	4		42
3IS	23	9	6	2			40
4IS		26	12	6	2		46
5IS			28	15	2	1	46
Totale	46	64	99	39	10	1	259

Tabella 1

L'insegnante, a questo punto, invita gli studenti a rappresentare graficamente la tabella. (*In questa attività faremo riferimento ai colori anche se, per motivi tipografici, i grafici sono riportati in bianco e nero.)* Ecco l'elaborato degli studenti:

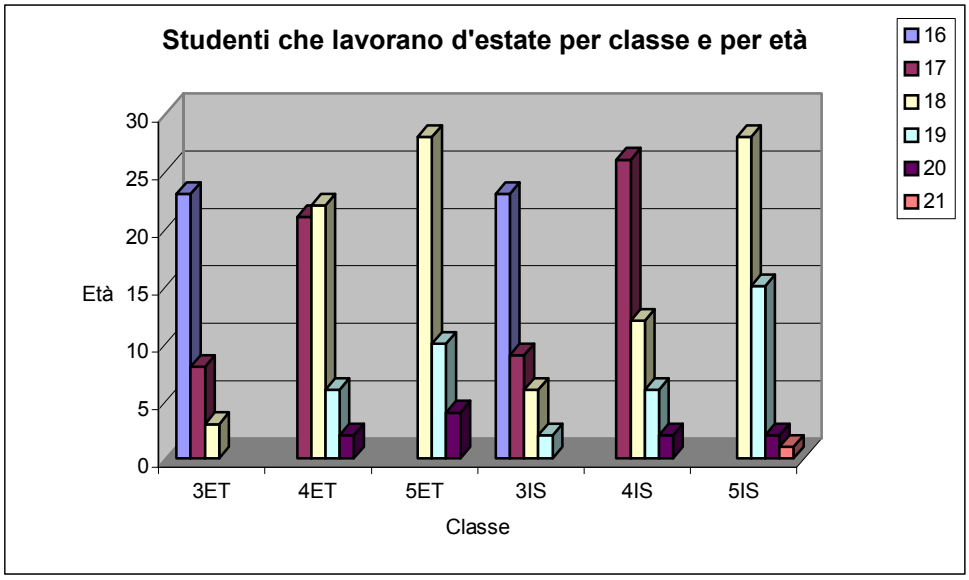


Figura 1

L'insegnante conduce gli studenti ad interpretare il grafico a colonne accostate invitandoli ad interpretare l'andamento delle età al variare delle classi, così come è evidenziato dai colori dei prismi. Un grafico a colonne giustapposte, anziché a prismi giustapposti sarebbe stato più o meno corretto?

Seconda fase

Studenti e insegnanti sono curiosi di sapere se i lavori estivi sono retribuiti e se ciò è condizionato dalla posizione lavorativa. Il data base consente di estrarre la seguente tabella a doppia entrata:

Studenti del triennio che hanno svolto attività
classificati per posizione e per compenso ricevuto (dati assoluti)

Posizione	Compenso		Totale
	Sì	No	
Impiegato	16	1	17
Operaio	67	2	69
Apprendista	109	2	111
Stage	24	5	29
In Proprio	14	2	16
Socio	2		2
Coadiuvante	2		2
Volontario	5	8	13
Totale	239	20	259

Tabella 2

Sono confrontabili fra loro le otto distribuzioni del compenso rispetto alla posizione?
La risposta è ovviamente negativa ed è perciò necessario passare alla tabella con i dati percentuali, nella quale tutte le righe hanno per somma cento:

Studenti del triennio che hanno svolto attività
suddivisi per posizione e per compenso ricevuto (dati percentuali).

Posizione	Compenso		Totale
	Sì	No	
Impiegato	94,1	5,9	100
Operaio	97,1	2,9	100
Apprendista	98,2	1,8	100
Stage	82,8	17,2	100
In Proprio	87,5	12,5	100
Socio	100		100
Coadiuvante	100		100
Volontario	38,5	61,5	100
Totale	92,3	7,7	100

Tabella 3

L'insegnante chiede agli studenti il significato della distribuzione che compare nell'ultima riga. Il valore 92,3 come si giustifica? Dopo aver condotto ad osservare che esso è compreso tra 82,8 e 100, l'insegnante fa riflettere gli studenti sull'uguaglianza:

$$\frac{0{,}941\cdot 17+0{,}971\cdot 69+0{,}982\cdot 111+0{,}828\cdot 29+0{,}875\cdot 16+1\cdot 2+1\cdot 2+0{,}385\cdot 13}{259}=\frac{239{,}015}{259}\cong 0{,}923$$

Ritornando al problema delle rappresentazioni grafiche, qual è il grafico più opportuno per rappresentare contemporaneamente tutte le distribuzioni condizionate del "Compenso" rispetto alla "Posizione"? Ha influenza il fatto che entrambi i caratteri siano qualitativi?

L'insegnante conduce gli studenti a costruire il grafico della Figura 2.
Come ha influenzato il grafico il fatto che tutte le distribuzioni condizionate danno per somma cento?
Come è stato possibile evidenziare la percentuale di studenti che ha ricevuto un compenso condizionatamente alla posizione lavorativa?
L'insegnante guida gli studenti verso le risposte: dal grafico è immediatamente visibile il fatto che il totale è cento e il doppio colore permette di visualizzare le differenti percentuali di coloro che hanno o non hanno ricevuto un compenso.
Naturalmente non era necessario ricorrere ad un grafico tridimensionale che tuttavia è quello scelto dagli studenti.

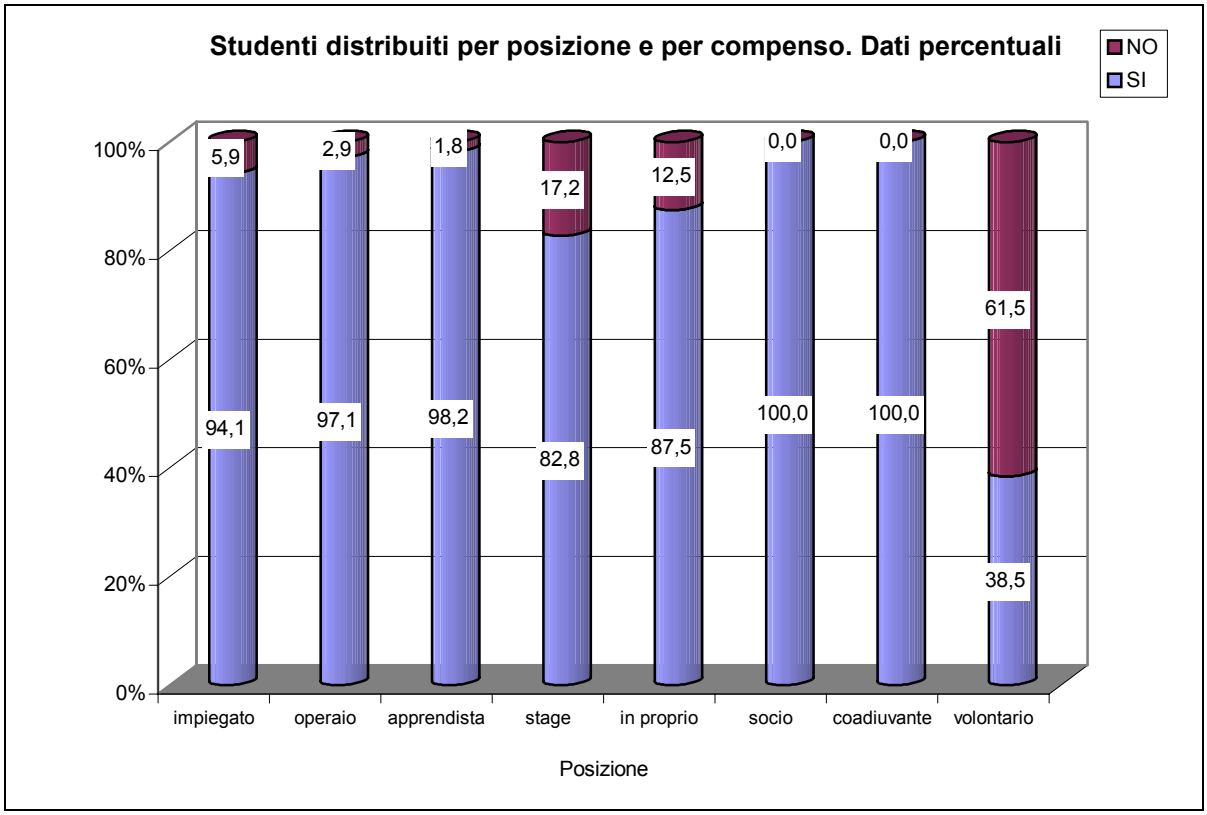


Figura 2

Come si poteva prevedere la percentuale più alta di studenti senza compenso ha operato nel volontariato, mentre chi lavora come socio o come coadiuvante riceve in ogni caso una retribuzione. Attenzione a trarre conclusioni affrettate: in ciascuna di queste due posizioni hanno operato soltanto due studenti!

Terza fase

L'attività proposta costituisce un approfondimento opzionale seppur molto suggestivo per l'interpretazione delle relazioni interne ad una distribuzione doppia. Essa fa perno sui concetti di primo quartile, mediana e terzo quartile di una distribuzione di un carattere almeno ordinato rettilineo.
Una sintesi grafica della tabella doppia, quando almeno uno dei caratteri è ordinato, è fornita dall'insieme di più diagrammi a scatola ("Boxplot"). Nel "boxplot" l'escursione del carattere si valuta in ordinata. Il primo ed il terzo quartile sono i valori in ordinata che delimitano la scatola stessa, mentre la mediana è l'altezza relativa al simbolo corrispondente interno alla scatola. A

partire da ciascun lato orizzontale della scatola sino all'ultima osservazione di coda (valore minimo, valore massimo) si disegna poi un segmento verticale.
Quando, come in una distribuzione doppia con almeno un carattere ordinale, si confrontano giustapponendoli più "boxplot" tutti relativi a tale carattere, in ascissa si pone un asse categorico che serve per spaziare i grafici corrispondenti alle diverse modalità dell'altro carattere.
Per rispondere alla domanda se il tempo lavorativo in giorni si differenzia a seconda del settore d'impiego, una soluzione potrebbe essere quella di costruire un insieme di "boxplot" utilizzando i dati riportati nella Tabella 4. In essa sono indicati, per ciascuno dei settori più importanti, il minimo (min), il primo quartile (q1), la mediana, il terzo quartile (q3) ed il massimo (max).

Alcuni valori caratteristici per principali settori d'impiego

Valori caratteristici	Settore			
	elettronico	manifatturiero	ristorazione	informatico
min	14	15	2	14
q1	30	40	42	15
mediana	59	55	70	30
q3	70	60	90	53
max	120	170	180	90

Tabella 4

Il "boxplot" della durata in giorni del "Rapporto di lavoro" condizionato al "Settore d'impiego" è riportato nella Figura 3.

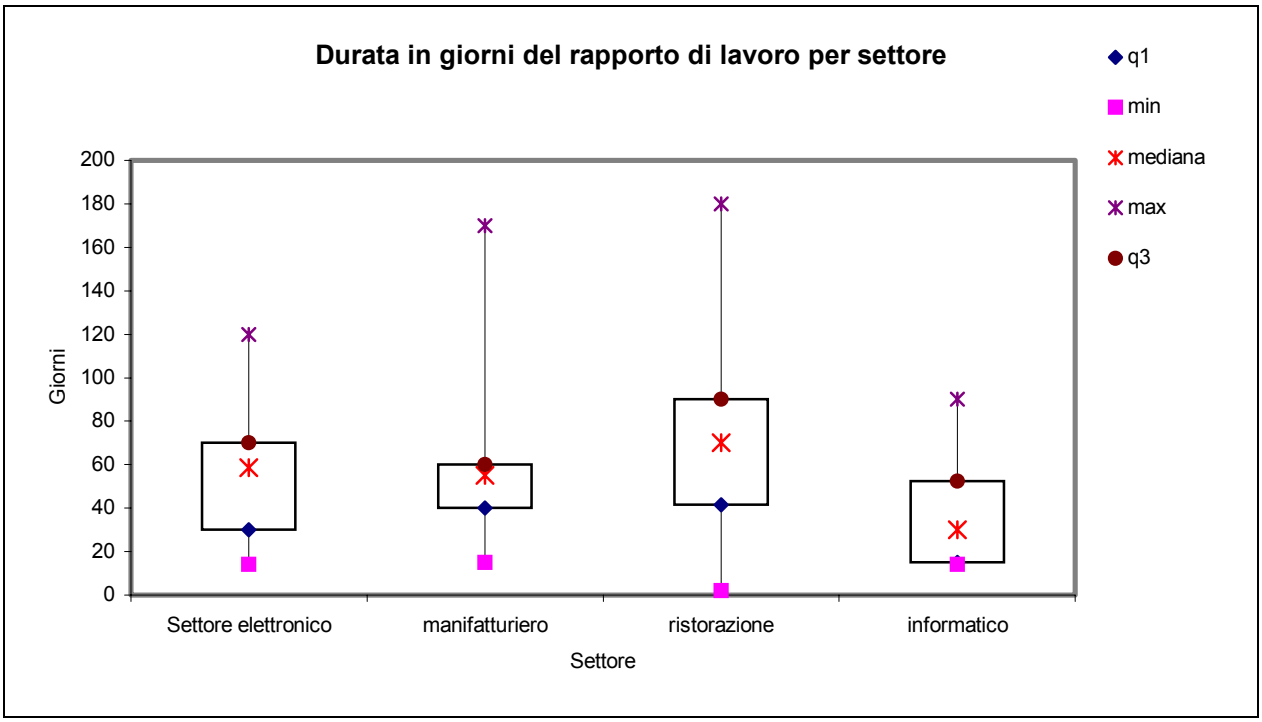


Figura 3

Qual è il settore in cui si manifesta il minor campo di variazione rispetto alla durata del rapporto di lavoro? E quello con maggiore variabilità? Può incidere il contesto economico del territorio ad alta densità turistica e manifatturiera?
Poiché all'interno della scatola cade circa il 50% del collettivo, l'insegnante conduce gli studenti ad osservare che, per esempio, il 50% circa degli studenti del settore manifatturiero ha "resistito" fra 40 e 60 giorni; nel settore elettronico la durata del rapporto di lavoro del 50% circa degli studenti che occupano la parte centrale della distribuzione ordinata dei giorni di lavoro è compresa tra 30 e 70 giorni.
Cosa succede negli altri settori? Nel settore informatico, qual è il numero massimo dei giorni di lavoro del 75% degli studenti che lavorano di meno? L'insegnante ricorda il significato del terzo quartile e porta gli studenti alla risposta.

Promossi con una domanda sola?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare la Formula di Bayes.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato della probabilità e sue valutazioni. Formula di Bayes e suo significato.	Dati e previsioni Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana

Contesto
Extramatematico, sociale, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; in particolare, per il contesto matematico, si pone in evidenza l'ambito probabilistico.
Il problema può essere affrontato a livello di primo biennio quando si conosca la definizione di probabilità e si sia in grado di valutare la probabilità di eventi condizionati. Si vuole portare gli studenti a rendersi conto che l'esser "fortunati" o meno (ad esempio sapendo rispondere in modo esatto ad un compito del tipo quiz a risposta multipla) può essere un fatto quantificato. Nel suo futuro, nella ricerca di sbocchi occupazionali, ciascuno studente potrebbe trovarsi di fronte a strumenti di questo tipo, largamente usati dalle industrie dei giorni nostri nella ricerca-scelta di personale da inserire nelle proprie attività produttive. E quei quiz saranno molto più ardui, anche perché spazieranno ben oltre la pratica scolastica…

Descrizione dell'attività
Si propone in classe un quiz a risposta multipla e si chiede: qual è la probabilità che uno studente che ha risposto esattamente alle domande abbia effettivamente studiato ?
Prendendo spunto da questo fatto si può poi rispondere ad una domanda che può emergere spesso in ambito scolastico.
Si supponga che uno studente abbia, magari a fine anno, una media bassa. E' "possibile", con una sola interrogazione, recuperare il terreno perduto ed essere promosso?
Il problema si presenta molto accattivante e sicuramente stimola la fantasia e la scaltrezza degli allievi molto interessati a questo tipo di argomento.

Prima fase
Si tratta di lavorare con probabilità di eventi condizionati. È stato considerato dalla classe un solo risultato, anche se importante, concernente tale tematica ovvero la Formula di Bayes.
Per questo motivo è necessario fare, con la classe, alcune ipotesi di lavoro; senza ovviamente farne una trattazione teorica, che potrebbe esulare dal contesto della realtà scolastica, si introdurrà operativamente la necessità delle probabilità "a priori"; questo fatto contribuirà non poco ad indirizzare l'attenzione degli studenti sul fatto che trattare l'incertezza non è mai un fatto del tutto "automatico" come invece potrebbe apparire da uno studio superficiale di altre parti della matematica.
Valutare la probabilità che uno studente che ha studiato sappia rispondere alle domande è la prima ipotesi di lavoro da affrontare.
La risposta a tale questione può (e deve!) sollevare discussioni … al termine delle quali potrebbe esserci un accordo del tipo di quello presentato qui di seguito.

Di uno studente si potrebbe arrivare a dire che:

a. Se studia con impegno, allora risponde bene alle domande del quiz con probabilità 1 (ovvero per lui saper rispondere correttamente è un evento certo).
b. Se studia così così, sa rispondere bene alle domande del quiz con probabilità p (che lo studente stesso, più di ogni altro, sa quantificare !).
c. Se non ha studiato, può rispondere bene ad una domanda con m risposte con probabilità $1/m$ (ovvero per lui tutte le risposte sono "equivalenti": da qui si vede che l'equiprobabilità non è un valore intrinseco ma una valutazione razionale successiva alla "raccolta" di (tutte) le informazioni a disposizione.)
d. Se uno studente a fine anno ha la media del 4 vuol dire che, durante l'anno, su 10 domande ha risposto bene solo a 4 (oppure a 20 su 50 e così via). Anche su questo punto la valutazione potrebbe essere diversa: ad esempio, se l'insegnante è uso non dare più di 8 ad un compito o ad una interrogazione perfetta, la valutazione precedente va riscalata a….. 3.2 (cioè la media del 4 diventa praticamente media del 3). Nella discussione lo studente impara a riflettere sul fatto che, cambiando le informazioni, può anche cambiare la probabilità: d'altronde nessuno di loro giocherebbe mai con monete che sa, prima di iniziare a giocare, essere "non regolari".

Una volta d'accordo (!) con queste, necessarie, considerazioni – e ricordandosi ancora una volta che la discussione fatta su di esse ha una importante valenza concettuale, oltre che didattica e operativa – si può passare alla formalizzazione del problema.
Indichiamo con A l'evento "lo studente ha (davvero) studiato" e con B l'evento "lo studente risponde esattamente alla domanda".
Chiedersi qual è la probabilità che uno studente che ha risposto esattamente alle domande abbia effettivamente studiato vuol dire chiedersi, formalizzando la richiesta, qual è la probabilità dell'evento A/B.
Dalla sopra ricordata Formula di Bayes si ha:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}$$

dove con $\overline{A}$ si è indicato l'evento "complementare" dell'evento A ovvero l'evento che si verifica quando *non* si verifica l'evento A.
Calcoliamo adesso i vari valori di probabilità, supponendo, per semplicità, che il compito consista di una sola domanda. (L'estensione a più domande sarà poi un fatto successivo, anche se non completamente automatico).

$P(B/A) = 1$ (da quanto si è argomentato al punto a)

$P(A) = p$ (anche questo valore è stato quantificato in seguito alla discussione sviluppata al punto d)

$P(B/\overline{A}) = \frac{1}{m}$ (se, come si è detto al punto c, nel quiz ci sono m risposte)

Dunque si ha:

$$P(A/B) = \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{1 + p(m-1)}$$

Nota: Si potrebbe naturalmente eccepire sulla decisione di porre $\frac{1}{m}$, come valore equiprobabile.
Infatti in molte domande a risposta multipla, spesso anche chi non ha studiato si accorge che le risposte non sono equivalenti. Molti preparatori di test infatti seguono la "regola" di due risposte molto simili, una abbastanza verosimile ed una assai lontana. Anche in questo caso comunque si tratta di dare valutazioni di probabilità in senso razionale-soggettivo, tenendo conto dell'esperienza (ovvero dello scopo del test, del preparatore stesso, ecc…).

Seconda fase
L'efficacia concreta di questa formula può essere vista subito rispondendo alla seconda questione che ci si è posti all'inizio.
Si supponga che uno studente abbia, magari a fine anno, una media bassa. E' "possibile", con una sola interrogazione recuperare il terreno perduto ed essere promosso?
In questo contesto "possibile" assume il significato di "ragionevole" se riferito ad una eventualità di questo genere; ci chiediamo cioè la liceità di fare questa proposta – sia da parte del professore che magari vuol aiutare lo studente, sia da parte dello studente che cerca, con un solo gettone, di far saltare il banco. Più concretamente ci stiamo chiedendo se ci sono dei margini entro i quali tale proposta può essere fatta senza eccessive indignazioni (da parte degli altri studenti, da parte degli altri professori, ecc..). E' peraltro evidente che se la proposta viene fatta a (o da) uno studente che ha media 5, nessuno si scandalizzerebbe, ma se lo studente avesse media 2…!
Sia, ad esempio, 4 il corrispondente di "media bassa"
Per le considerazioni successive alla discussione fatta in classe, possiamo dire che, per quanto ne sappiamo, il nostro studente è come se, durante l'anno, avesse "mediamente" risposto bene solo a 4 su 10 (oppure a 20 su 50 e così via).
Dobbiamo ancora fare una ulteriore osservazione di lavoro: rispondere bene ad una interrogazione, anche se finale, dovrà essere considerato come rispondere bene ad un quiz con due sole risposte. Porremo per questo $m = 2$.
Siamo dunque in un caso particolare della nostra formula finale: sarà sufficiente porre $p = 4/10$ per ottenere:

$$P(promozione) = \frac{4}{7}$$

Essendo $\frac{4}{7}$ circa 0,571 possiamo dire che siamo vicini alla sufficienza e dunque sarebbe lecito e corretto promuovere lo studente in quelle condizioni
Naturalmente ciò non sarebbe più vero nel caso di uno studente con "media bassa" uguale a 3,
in quanto gli stessi calcoli ci portano ad una conclusione del tipo $P(promozione) = \frac{6}{13}$ e dunque non sarebbe più considerato ammissibile fare un simile "salto".

Nota: con questa attività lo studente, oltre a familiarizzarsi con il concetto di probabilità condizionata, inizia a decidere di dare proprie (e coerenti, e razionali, ed eque,….) valutazioni di alcuni eventi che ha davanti ai suoi occhi: inizia cioè a familiarizzarsi, magari anche senza conoscerne il nome, con le probabilità "a priori" che così tanta importanza rivestono nelle considerazioni statistiche e probabilistiche, e comprende che sono le "a priori" a condizionare il risultato finale, nel caso trattato la promozione o la bocciatura.
Nella discussione che apre la prima fase, è opportuno far emergere che nella valutazione della probabilità a priori dell'evento *A:* "lo studente ha (davvero) studiato", certamente porre $P(A) = 0,4$, la probabilità del voto 4, gioca un ruolo ambiguo ma solo "prima della discussione" e della conseguente assegnazione di probabilità. Si tratta infatti di una prima ipotesi di lavoro sulla quale si può discutere (in classe) per arrivare ad una formulazione che, dipendendo magari dal professore,

dal periodo dell'anno, dall'esame (orale o scritto o entrambi) può anche "cambiare". Questa, al di là della formalizzazione, è una consapevolezza acquisita importante in sé.
Nella discussione che chiude la seconda fase, poi, trovata la probabilità *"a posteriori",* l'insegnante porterà gli studenti a comprendere che il modo in cui ci si è espressi circa la *P(promozione*) fa passare implicitamente dalla probabilità al suo uso. Si può dire che il docente usa un criterio secondo il quale se la probabilità a posteriori è "di poco" inferiore a 0,6 allora lo studente viene promosso? E' argomentabile che, utilizzando il voto 4 come mezzo per assegnare il valore 0,4 alla probabilità di "Aver studiato da 4", allora avendo ottenuto 0,571 è come dire che lo studente ha studiato da 5,71, ossia da quasi 6 e, conseguentemente, la promozione viene data?

Elementi di prove di verifica

1. Siano dati gli eventi:
A = "essere il capocannoniere della Serie A di calcio"
B = "essere un uomo che abita a Milano"

Dopo avere valutato la probabilità di *A* e di *B* , calcolare *P(A/B)*, *P(B/A)* e fare commenti sul risultato.

Nota: Tale calcolo, oltre che far riflettere sul significato di evento condizionato e della relativa valutazione probabilistica, serve assai a mettere in guardia lo studente dal non confondere i due eventi *A/B* e *B/A*. Nel febbraio 2003 il capocannoniere della serie A era Vieri dell'Inter di Milano.

Se si insiste…*non* si vince

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi indipendenti e non. Valutare criticamente le informazioni fornite dai media relative ai giochi di sorte.	Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici distribuzioni di probabilità. Il concetto di gioco equo.	Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Giochi Previsioni

Contesto
Giochi, probabilità.

Questa attività può essere introdotta nel secondo biennio, dopo aver introdotto le definizioni di probabilità e dopo aver trattato i principali valori medi e le principali misure di dispersione.
Per la simulazione al computer sono necessari alcuni prerequisiti di conoscenza del foglio elettronico: come si inseriscono i dati, come si inserisce una formula, come si copia una formula, riferimenti relativi e assoluti alle celle, come si crea un grafico. Le funzioni "Casuale( )" e "Se( )" possono essere introdotte anche in questo contesto.

Descrizione dell'attività
L'attività costituisce un primo approccio alla distribuzione binomiale e ha come obiettivo quello di far capire, fugando una credenza diffusa, che è negativa la risposta alla domanda: lanciando molte volte una moneta (bilanciata) il numero delle teste tende ad essere uguale al numero delle croci?
Per risolvere il problema conviene partire da semplici considerazioni.

Se si lancia una moneta si può ottenere testa o croce con probabilità rispettivamente $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Quale sarà la frequenza relativa di testa in 100 lanci di una moneta?
Per rispondere l'insegnante propone di simulare l'esperimento con il foglio elettronico usando la funzione "Casuale( )".
Questa funzione genera un numero compreso tra zero e uno. Si può associare ad un numero minore di 0,5 l'uscita di Testa e ad un numero maggiore o uguale di 0,5 l'uscita di Croce. Oppure si moltiplica la funzione "Casuale( )" per 2 (così si ottengono numeri compresi tra 0 e 2) e poi se ne prende la parte intera (funzione "Int( )"). Si ottiene 1 (Testa) o 0 (Croce).
Il foglio elettronico, di cui la Figura 1 mostra la parte iniziale, è stato costruito riportando: nella colonna D le sequenze di 0 e 1 ottenute tramite la funzione "Casuale( )", calcolata nella colonna C; nella colonna A il numero progressivo di lanci; nella B gli esiti dell'esperimento simulato, ossia le uscite di Testa (1) le uscite di Croce (0). Per ottenere la sequenza di T e C si usa la funzione "Se( )" che ha la seguente sintassi "=SE(condizione; azione nel caso sia vera la condizione; azione nel caso la condizione sia falsa)". In questo caso è stata digitata la formula "=SE(D2 = 1;"T";"C")". Il calcolo per il numero di teste (colonna E) si può fare in maniera agevole incrementando ogni volta il contenuto della cella in cui si trova la somma delle Teste e usando la funzione "Copia formula" e i riferimenti relativi alle celle. In questo caso si è inserita nella prima cella della colonna E (E2) il contenuto della prima cella della colonna D (D2), poi è stata digitata la formula E3 = E2+D3 per la cella successiva e infine si è copiato il comando nelle altre celle attive.

Nella colonna F sono riportate le frequenze relative di testa.

B7 = =SE(D7=1;"T";"C")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**LANCI**	**MONETA**			n° T	FREQ.T				
2	1	C	0,82011	0	0	0,00				
3	2	C	0,543162	0	0	0,00				
4	3	T	1,665016	1	1	0,33				
5	4	C	0,085047	0	1	0,25				
6	5	T	1,204324	1	2	0,40				
7	6	T	1,876874	1	3	0,50				
8	7	T	1,06786	1	4	0,57				
9	8	T	1,662015	1	5	0,63				
10	9	T	1,38247	1	6	0,67				
11	10	C	0,990017	0	6	0,60				
12	11	T	1,256956	1	7	0,64				
13	12	C	0,14895	0	7	0,58				
14	13	C	0,848766	0	7	0,54				
15	14	C	0,09596	0	7	0,50				
16	15	T	1,888573	1	8	0,53				
17	16	T	1,354797	1	9	0,56				
18	17	T	1,464304	1	10	0,59				

Figura 1

Può essere interessante far ripetere più volte l'esperimento (basta premere un tasto!) e osservare come variano i grafici.
Si nota facilmente nella Figura 2 che, al crescere del numero dei lanci, la frequenza relativa oscilla, arrivando a stabilizzarsi attorno a 0,5; dunque la frequenza relativa "tende" alla probabilità, cioè a 0,5 (Legge dei grandi numeri).

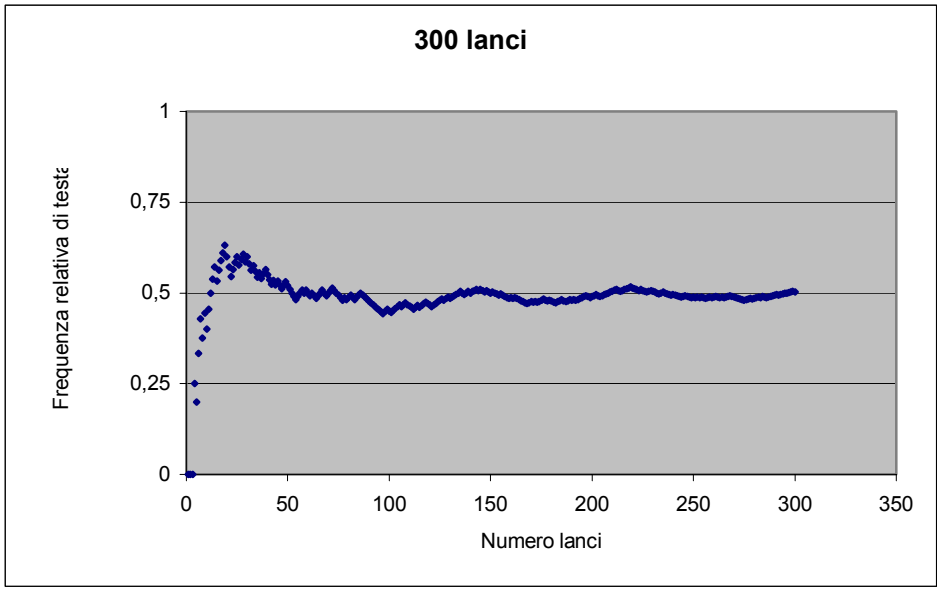


Figura 2

L'insegnante pone allora la seguente domanda: in un gran numero di lanci ci si può attendere che il numero delle teste sia uguale al numero delle croci?
In altre parole ci si può attendere che la differenza tra il numero delle teste e il numero delle croci tenda a zero al crescere del numero dei lanci?

Per aiutare gli studenti a rispondere, l'insegnante chiede se è importante sapere quale sia maggiore fra il numero delle teste e quello delle croci. Quando dal dibattito emerge che ciò che interessa è il modulo della differenza, l'insegnante propone di usare la simulazione con il foglio elettronico e di aggiungere un'altra colonna (colonna G) in cui si pone la differenza in valore assoluto tra il numero delle teste e il numero delle croci:

$$|T\text{-}C| = | T - (n\text{-}T) | = | 2T\text{-}n |$$

Nel foglio la formula è "=Ass(2*E2-A2)" che viene, come al solito, copiata in tutte le celle attive.
L'insegnante invita gli studenti a costruire il grafico corrispondente.

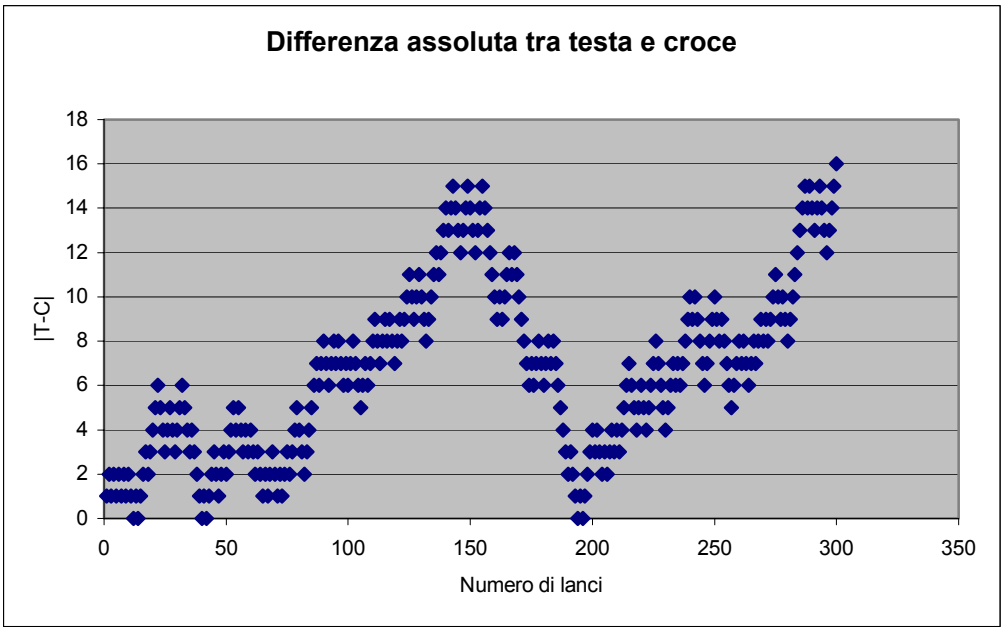


Figura 3

Il grafico in Figura 3 mostra che la differenza tra le teste e le croci tende ad aumentare.
Può essere interessante far ripetere più volte l'esperimento (basta premere un tasto!) e si osserva che la differenza non solo non si stabilizza attorno allo zero, ma anzi aumenta…
Perché?
Se gli studenti conoscono già la media e lo scarto quadratico medio per una distribuzione statistica, si possono introdurre questi concetti per la distribuzione di probabilità nel caso di Testa e Croce (distribuzione binomiale).

Nota: L'insegnante fa notare la caratteristica del foglio Excel di rappresentare le frazioni improprie, separando la parte intera dalla frazione propria. Così, ad esempio, 1 1/2 = 3/2.

Partendo dallo schema:

		C	**T**		
2 monete	**CC**	**CT**		**TT**	
n° teste	0	1		2	
Probabilità	1/4	1/2		1/4	media = ½ ·**2**
3 monete	**CCC**	**CCT**	**CTT**	**TTT**	
n° teste	0	1	2	3	
	1/8	3/8	3/8	1/8	media = ½ ·**3**
4 monete	**CCCC**	**CCCT**	**CCTT**	**CTTT**	**TTTT**	
n° teste	0	1	2	3	4	
Probabilità	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	media = ½ ·**4**

si arriva per gradi alle formule:

la media del numero di Teste in *n* lanci è $\frac{n}{2}$, la varianza è $\frac{n}{4}$ e $\sigma = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

L'insegnante può guidare la classe ad approfondire ulteriormente la comprensione di come *n* e *p* (parametri) "governano" la distribuzione binomiale, proponendo, ad esempio, lo schema seguente.

2 monete	n. teste (xi)	Prob. P(xi)	xi*P(xi)	xi^2	xi^2*P(xi)
CC	0	1/4	0	0	0
CT	1	1/2	1/2	1	1/2
TT	2	1/4	1/2	4	1
			1		1 1/2

Media	1	varianza	1/2

n	2
p	1/2
q	1/2

media 1 = n*p
varianza 1/2 = n*p*q

3 monete	n. teste (xi)	Prob. P(xi)	xi*P(xi)	xi^2	xi^2*P(xi)
CCC	0	1/8	0	0	0
CCT	1	3/8	3/8	1	3/8
CTT	2	3/8	3/4	4	1 1/2
TTT	3	1/8	3/8	9	1 1/8
			1 1/2		3

media	1 1/2	varianza	3/4

n	3
p	1/2
q	1/2

media 1 1/2 = n*p
varianza 3/4 = n*p*q

4 monete	n. teste (xi)	Prob. P(xi)	xi*P(xi)	xi^2	xi^2*P(xi)
CCCC	0	1/16	0	0	0
CCCT	1	4/16	4/16	1	4/16
CCTT	2	6/16	12/16	4	1 8/16
CTTT	3	4/16	12/16	9	2 4/16
TTTT	4	1/16	4/16	16	1
			2		5

media	2	varianza	1

n	4
p	1/2
q	1/2

media 2 = n*p
varianza 1 =n*p*q

Tornando al problema del numero aleatorio $|2T\text{-}n|$ va tenuto presente che la varianza del numero aleatorio $(2T\text{-}n)$ è $4\cdot\frac{n}{4}$ e lo scarto quadratico medio è $\sigma = \sqrt{n}$. Quest'ultima quantità è una misura per eccesso della media del numero aleatorio $|2T\text{-}n|$ (cfr.: Barra, 2000).
Dunque, contrariamente a quello che si poteva pensare, la differenza in modulo tra il numero delle teste e il numero delle croci non tende a zero ma cresce come $\sqrt{n}$, perciò, per esempio, su 100 lanci ci si può aspettare in media che tale differenza assuma il valore della radice di 100, cioè 10; così su 400 lanci possiamo aspettarci in media che tale differenza assuma il valore 20. Questo dipende dal fatto che stiamo considerando le frequenze assolute e non quelle relative.
Se non si ritiene opportuno introdurre i concetti di media e scarto quadratico per questa distribuzione si può dare una spiegazione intuitiva del fatto che dopo un eccesso di teste non è necessario un recupero delle croci; si tratta infatti di eventi indipendenti, la moneta non ha memoria!
Se si gioca a Testa e Croce con una scommessa alla pari il gioco è equo, ma ciò non significa che dopo 100 partite si possa essere certi di non aver perso né guadagnato nulla; infatti la probabilità che su 100 lanci vi siano esattamente 50 Teste e 50 Croci è:

$$p_{50} = \binom{100}{50} \cdot \frac{1}{2^{100}} \cong 0{,}08$$

cioè un numero molto piccolo! In caso generale di fronte a $n = 2m$ prove si otterrà sempre un risultato del tipo $\frac{1}{\sqrt{\pi m}}$[1] e dunque più prove si fanno e minore è la probabilità di avere metà successi e metà fallimenti.
Può essere questa l'opportunità di introdurre il concetto di gioco equo.

Da questa attività dovrebbe emergere il concetto espresso dalla seguente frase:

"*Giocare poche volte a Testa e Croce non è più ma meno rischioso che giocare molte volte…La legge dei grandi numeri non giustifica alcuna speranza che chi è in perdita debba "rifarsi". L'illusorietà e perniciosità di tale fiducia nel"rifarsi"appare sancita anche in una battuta popolare (sembra siciliana), notevole perché in generale le preferenze popolari sembra vadano alla tesi sbagliata. Si tratta della risposta di una donna ad un'amica che le aveva chiesto se era vero che suo figlio aveva perduto una forte somma al gioco: <<Sì, ma questo è niente: il peggio è che vuole rifarsi>>(cfr.:* de Finetti, 1970, vol. 1, pag.384).

[1] Tale risultato si ottiene considerando che, per l'approssimazione di De Moivre – Stirling, è circa $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Anche le rette raccontano

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su una unità statistica formata da due elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica.	Concetto e significato di modello: correlazione e regressione.	Dati e previsioni Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Organizzazione delle attività

Contesto
Extramatematico, sociale.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; in particolare, per il contesto matematico, si pone in evidenza l'ambito statistico (rappresentazioni grafiche; correlazione e regressione).
L'attività riguarda lo studio di una distribuzione doppia rispetto a due caratteri entrambi quantitativi e può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, nel secondo biennio quando gli studenti hanno acquisito sicurezza sulle principali abilità relative all'uso del foglio elettronico. Si richiede l'uso dei filtri in una tabella, la padronanza delle diverse tipologie di indirizzamento e l'uso di alcune funzioni statistiche. Se non si dispone del foglio di calcolo, le proposte indicate di seguito sono ugualmente valide, ma richiedono più tempo per l'elaborazione.

Descrizione dell'attività
L'esempio presenta l'esito finale di una classe prima in tre materie. La tabella è stata tratta dal database dell'unità "A proposito di valutazione scolastica" con l' uso del filtro appropriato.

Alunno	Matematica	Fisica	Inglese	Alunno	Matematica	Fisica	Inglese
	x	y	z		x	y	z
1	5	4	5	14	8	8	8
2	5	6	4	15	9	8	8
3	4	5	4	16	3	4	6
4	6	6	5	17	5	6	6
5	8	8	8	18	6	7	8
6	6	6	6	19	6	6	8
7	6	6	6	20	6	7	8
8	7	8	7	21	6	6	8
9	9	8	7	22	6	6	6
10	6	6	7	23	5	6	7
11	8	7	7	24	6	7	6
12	5	5	6	25	7	8	6
13	8	8	8	26	5	5	5

Tabella 1

Prima fase

L'insegnante propone all'osservazione della classe la Tabella 1 e formula alcune domande. Chi è bravo in matematica lo è anche in fisica o in inglese? Come si può stabilire se uno studente è bravo in una determinata materia? In questa classe chi ha 7 in matematica è "bravo"?

L'insegnante propone la Figura 1 e stimola gli studenti a riflettere sul grafico in essa contenuto.

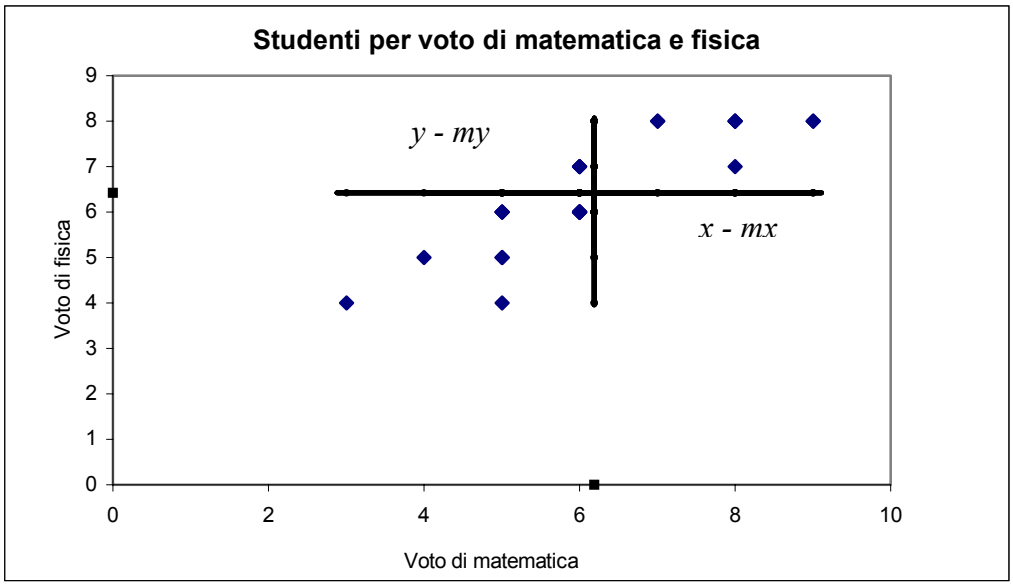


Figura 1

Come mai i punti sono meno di 26 (numero degli studenti)? La dislocazione dei punti sul piano cartesiano dà una informazione su un eventuale legame tra il voto di matematica (x) e il voto di fisica (y)? Perché sono stati rappresentati gli scarti dalla media aritmetica ($x - mx$) e ($y - my$)? Che informazioni aggiuntive offrono?

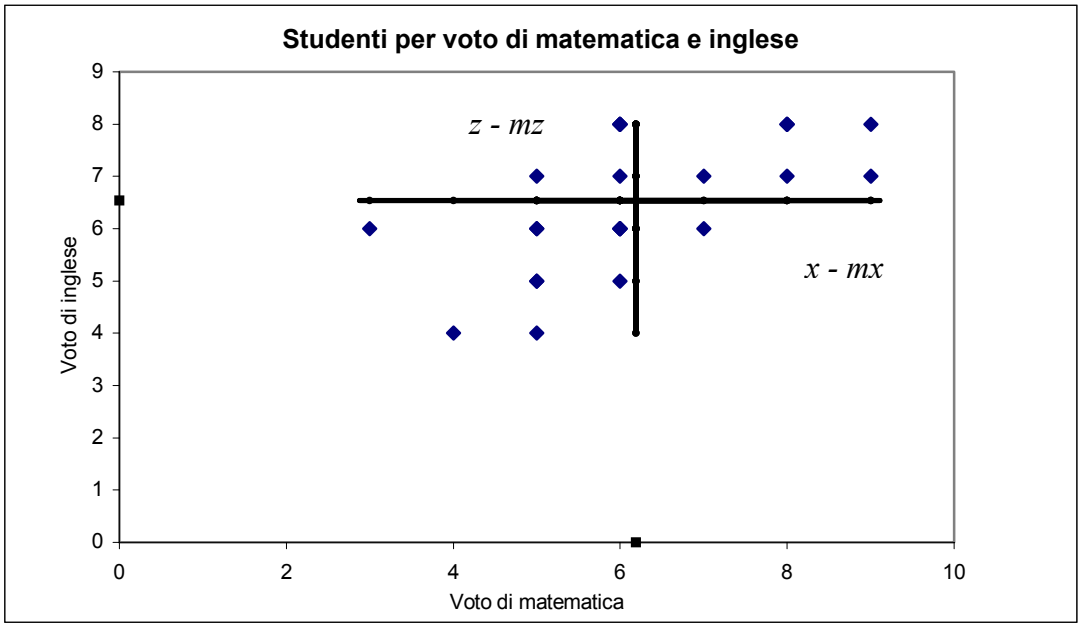


Figura 2

Successivamente l'insegnante stimola gli studenti a riflettere sul grafico di Figura 1.
Gli studenti più bravi in matematica sono più bravi anche in fisica? E' vero anche il viceversa? Ci sono studenti più bravi in matematica, ma meno bravi in fisica? E' vero anche il viceversa? Rispetto al sistema traslato nel baricentro [(x –mx)*;* (y – my)] quali segni hanno le coordinate di queste unità statistiche? L'insegnante sottolinea che a questo punto è possibile sfruttare le note relazione tra i segni di due numeri relativi per cui il prodotto tra due concordi è positivo e il prodotto tra due numeri discordi è negativo.
Rispetto al sistema degli scarti si può dunque dire che se i punti della nuvola si dispongono con maggiore frequenza nel primo e nel terzo quadrante fra le due variabili vi è "concordanza", mentre in caso contrario vi è "discordanza". In Figura 1 è evidente la concordanza, ossia al crescere del voto in matematica cresce mediamente anche il voto in fisica. A queste prime valutazioni soggettive è tuttavia indispensabile sostituire una misura oggettiva, che si fonda sul prodotto degli scarti che competono a ciascuna unità.
Per potere confrontare misure ottenute su distribuzioni diverse è generalmente indispensabile che esse varino fra 0 e 1. In questo particolare ambito concettuale però è necessario che si tenga conto che la correlazione ha un doppio aspetto: concordanza o discordanza. Questa duplicità si esprime con i segni: + esprime la concordanza, - esprime la discordanza, dunque ciò che si vuole è un indice che assuma valori fra –1 e +1. Se assume valori positivi è un indice di concordanza, se assume valori negativi è un indice di discordanza. Il valore 0 è indicatore di una situazione da esaminare con attenzione poiché si può realizzare o in ipotesi di indipendenza, connessione nulla, tra i caratteri oppure quando i punti, nel loro insieme, non "danno l'idea" di un andamento lineare.
Il "coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson" è la soluzione a questo problema concettuale. Esso ha la seguente espressione:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - mx)(y_i - my)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - mx)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - my)^2}}$$

Da chi dipende il segno di r? r ha un'unità di misura? Perché?
Il coefficiente di correlazione lineare di Bravais–Pearson può essere agevolmente determinato utilizzando le potenzialità del foglio elettronico, evitando che gli studenti si concentrino eccessivamente sull'aspetto puramente di calcolo tralasciando quello interpretativo.

Alunno	Matematica	Fisica					
	x	y	$x - mx$	$y - my$	$(x - mx)^2$	$(y - my)^2$	$(x - mx)(y - my)$
1	5	4	-1,192	-2,423	1,422	5,871	2,88905
2	5	6	-1,192	-0,423	1,422	0,179	0,50444
3	4	5	-2,192	-1,423	4,806	2,025	3,11982
4	6	6	-0,192	-0,423	0,037	0,179	0,08136
5	8	8	1,808	1,577	3,268	2,487	2,85059
…	…	…	…	…	…	…	…
26	5	5	-1,192	-1,423	1,422	2,025	1,69675
Totali	161	167	0	0	54,0385	38,3462	39,8846
Media ar.	6,192	6,423					

Tabella 2

La Tabella 2 riporta soltanto i calcoli relativi alle prime cinque unità statistiche su 26 e fa riferimento al "Voto in matematica" e il "Voto in fisica" ed utilizza il foglio di calcolo Excel.

Perché la somma della 4° e 5° colonna è uguale a 0? Quale significato si può attribuire al segno della somma dell'ultima colonna? Un valore positivo come quello ottenuto indica che tutti gli scarti dalla media aritmetica sono positivi?
Il coefficiente di correlazione lineare *r* calcolato rispetto ai voti di matematica e fisica è:

$$r = \frac{39{,}88}{\sqrt{54{,}04 \cdot 38{,}35}} = 0{,}8762$$

Il valore ottenuto è coerente con le osservazioni fatte sulla Figura 1? Sapendo che $r = 1$ quando i punti della nuvola sono allineati su una retta crescente, l'insegnante chiede: dai dati a disposizione ci si poteva attendere un valore di *r* così alto?
E' un utile esercizio di verifica ricorrere alla funzione statistica messa a disposizione dal foglio elettronico Excel che consente di calcolare in modo automatico il coefficiente di correlazione lineare. Si indica di seguito il percorso da seguire per ottenerne il valore.
Attivare il pulsante "Incolla funzione" per aprire la finestra riportata in Figura 3:

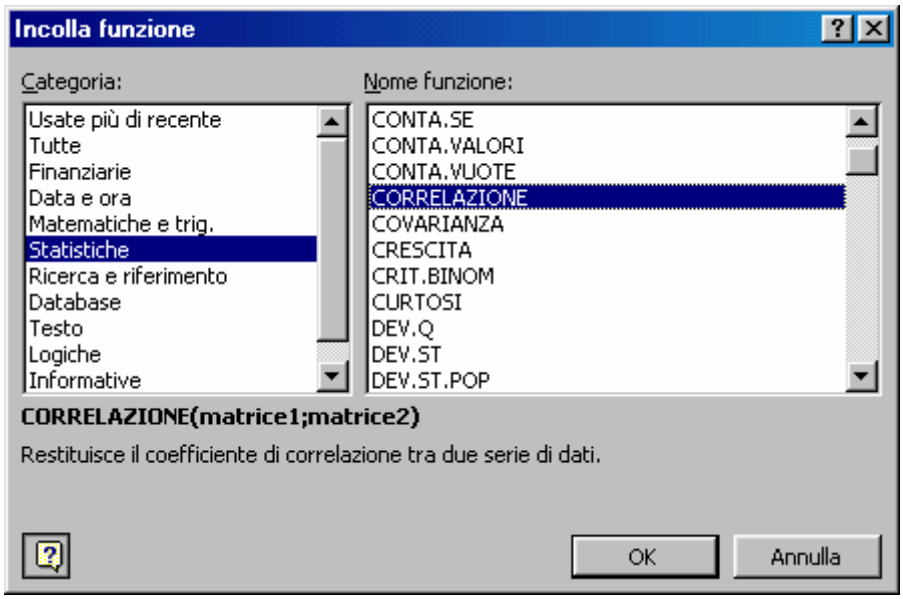


Figura 3

Dopo aver confermato con OK si ottiene la finestra della Figura 4:

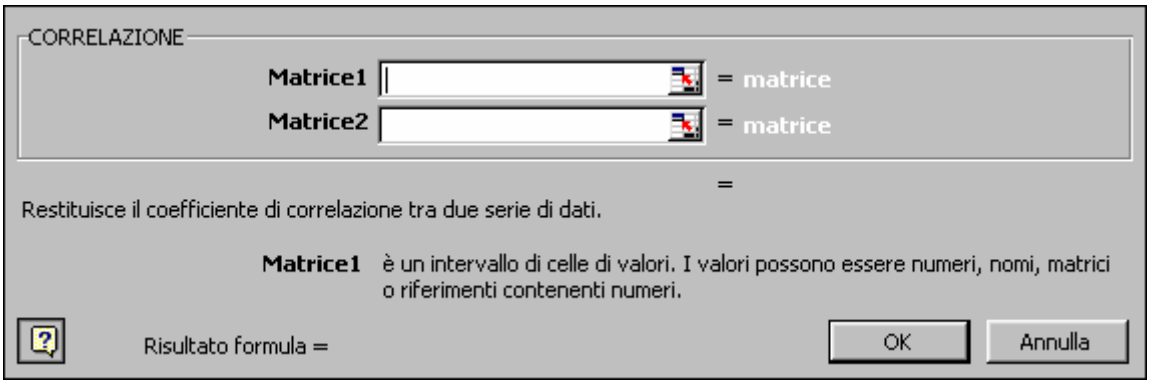


Figura 4

"Matrice1" è un intervallo di celle di valori e, in questo caso, l'intervallo dei valori dei voti di matematica, "Matrice2" è il secondo intervallo di celle di valori e, sempre in questo caso, l'intervallo dei valori dei voti di fisica.
L'indicazione riportata a fianco di Matrice 1 va intesa, nel calcolo del coefficiente di correlazione lineare, come limitata ai valori numerici.
La chiusura della finestra fornisce il valore del coefficiente cercato.
Il risultato ottenuto con la funzione "Correlazione( )" del foglio elettronico coincide con quello ottenuto dai calcoli effettuati seguendo tutti i passaggi?
Osservando la Figura 2, che si riferisce ai voti di matematica ed inglese, si può pensare che la somma dei prodotti degli scarti dalla media aritmetica sia positiva anche in questo caso?
L'insegnante propone come esercizio il calcolo del coefficiente *r* per la distribuzione doppia dei caratteri "Voto in matematica" e "Voto in inglese".

Seconda fase
La forma della nuvola dei punti delle figure precedenti e l'alto valore di *r*, nel caso esaminato, giustificano la ricerca di una retta che interpoli l'insieme dei punti che rappresentano il fenomeno, passando il più vicino ad essi, secondo il "metodo dei minimi quadrati".
La determinazione di questa funzione può essere fatta, in modo agevole, usando le funzioni del foglio elettronico Excel, come evidenziato di seguito.
Occorre selezionare un punto qualsiasi sul grafico e, cliccando con il pulsante destro, far apparire il menu evidenziato nella Figura 5:

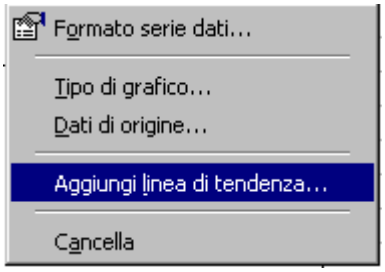


Figura 5

La voce evidenziata in Figura 5 fa apparire la finestra "Aggiungi linea di tendenza". La scheda "Tipo" consente di scegliere una funzione interpolatrice, lineare nel caso in esame[1], mentre la scheda "Opzioni" consente, selezionando le voci spuntate come in Figura 6, di tracciare sul grafico la retta interpolatrice, secondo il metodo dei minimi quadrati, come si vede in Figura 7.

[1] Occorre porre attenzione al fatto che, pur scegliendo come funzione interpolatrice una funzione non lineare, il problema della ricerca dei parametri risolto con il metodo dei minimi quadrati è pur sempre lineare a patto che l'interpolatrice sia di tipo polinomiale o ad esso riconducibile. Si parla in tal caso di modello lineare nei parametri.

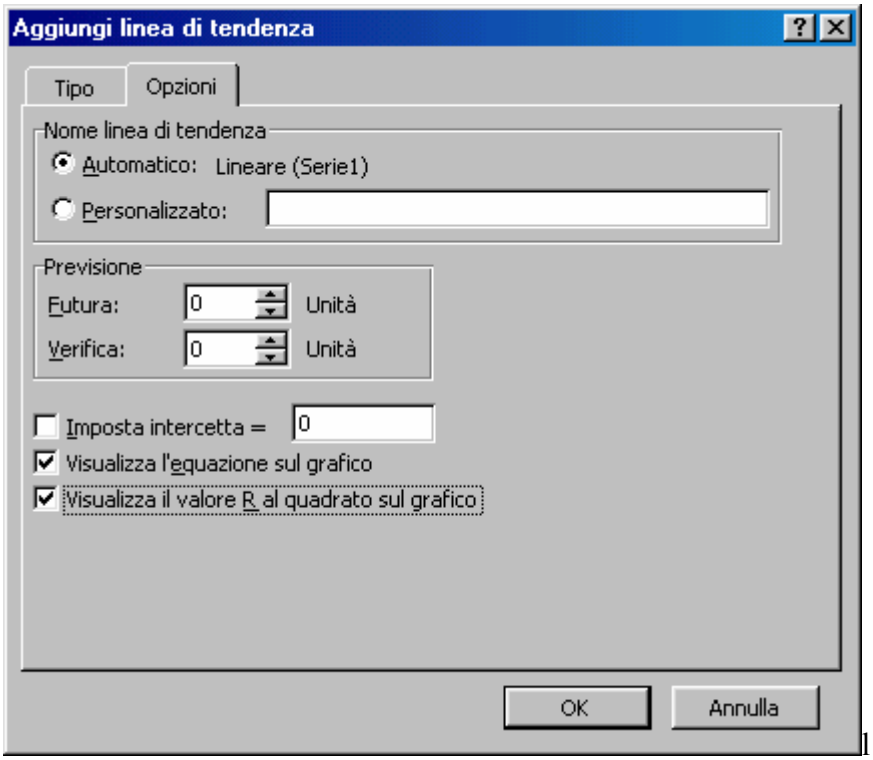


Figura 6

Nella Figura 7, oltre al grafico della retta interpolatrice, il foglio elettronico fornisce anche la sua equazione e l'"Indice di determinazione lineare" R^2 .
R^2 è un indice che può assumere valori compresi tra 0 ed 1. Esso vale 1 quando tutti i punti osservati appartengono ad una retta, crescente o decrescente. In tale caso quella retta esprime la dipendenza lineare che esiste tra X ed Y in base alla quale il valore di Y è determinato quando si conosce quello di X. R^2 vale 0 sia quando esiste indipendenza fra i caratteri, sia quando l'andamento della nuvola dei punti non consente di proporre l'interpolazione con una retta. In questo caso la retta interpolatrice ha equazione $y = 0$ e nota la variabile X non può dirsi nulla sul valore che assume l'altra variabile.
L'insegnante stimola l'attenzione della classe, ponendo una serie di domande sulla Figura 7.
Perché la retta passa per l'origine? C'è una relazione tra il coefficiente r di correlazione lineare di Bravais–Pearson e il coefficiente R^2 di determinazione lineare?
L'insegnante guida gli studenti ad osservare che, per una distribuzione doppia, R^2 altro non è che il quadrato di r.

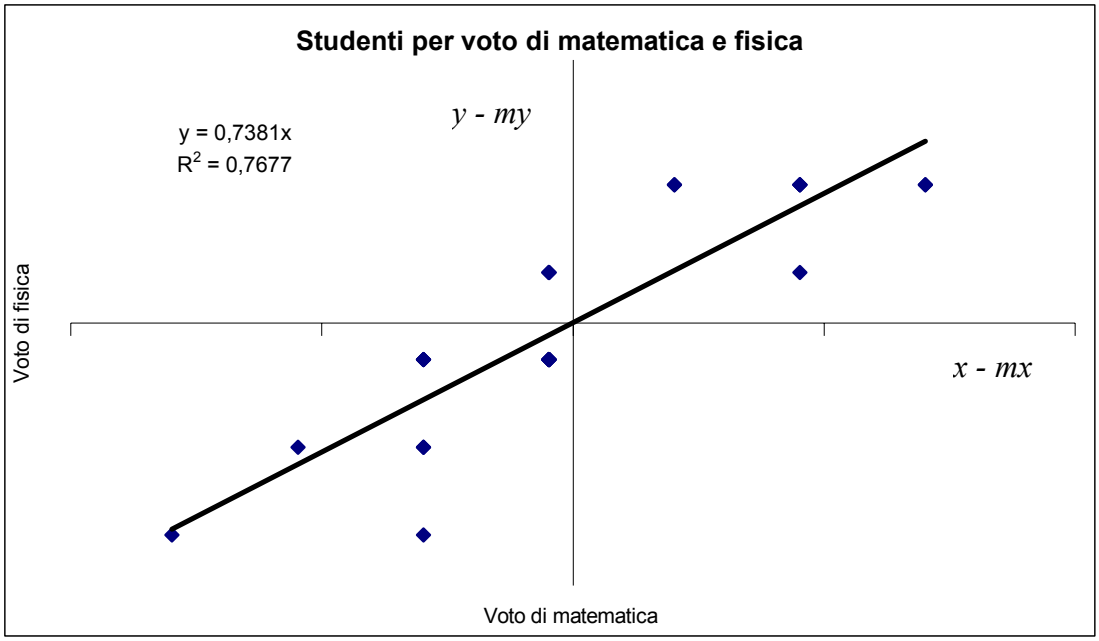


Figura 7

L'equazione della retta interpolatrice fornita dal foglio elettronico è coerente con quanto ci si attende, poiché manca il termine noto. Come si giustifica il valore del coefficiente angolare della retta? Nell'elaborazione dei dati del foglio elettronico usati in precedenza è possibile trovare quelli necessari al calcolo del "Coefficiente angolare (*b*) della retta interpolatrice"? L'insegnante mostra agli studenti la formula di *b* che risolve il problema [2]. Tale formula, applicata alla Tabella 2, consente arrivare alla soluzione anche quando non si ha a disposizione il computer.
Gli stessi risultati si possono ottenere utilizzando alcune funzioni di tipo statistico del foglio elettronico:

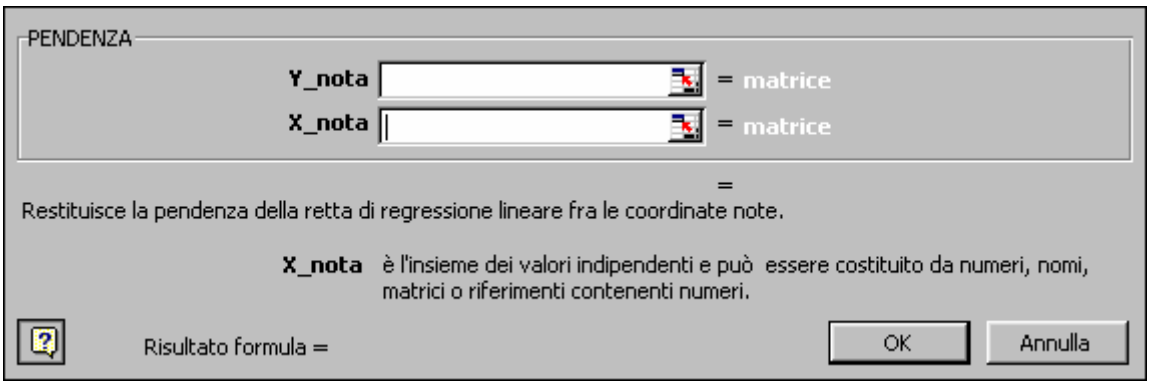


Figura 8

La funzione "Pendenza( )" restituisce il coefficiente angolare della retta di regressione lineare.

[2] La formula di *b* è:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - mx)(y_i - my)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - mx)^2}$$

Qual è l'interpretazione statistica del coefficiente di regressione? Si può dire che ad ogni incremento unitario del voto di matematica (X) il voto in fisica (Y) aumenta di b? In quale relazione stanno tra loro r e b?
L'ordinata all'origine in questo caso vale 0, riportando il sistema di assi cartesiani nell'origine, come cambia il termine noto a? Quale interpretazione ha il valore trovato?
Quando il problema richiede di calcolare anche l'intercetta a, il foglio elettronico Excel mette a disposizione la funzione statistica "Intercetta( )" che ha una sintassi del tutto analoga alla funzione di Figura 8.

Nasce un'impresa!

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi con riguardo ad una rilevazione pianificata ed inserire i dati in un foglio elettronico. Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su un'unità statistica formata da 2 elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica. Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo 2 caratteri e riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. Selezionare, produrre ed usare appropriate rappresentazioni grafiche. Valutare criticamente le informazioni fornite dai media, con riferimento particolare ai sondaggi ed ai giochi di sorte.	Distribuzioni doppie di frequenza e tabelle a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni doppie rispetto a caratteri di qualsiasi natura.	<u>Dati e previsioni</u> Laboratorio di Matematica	Lingua italiana Economia e marketing

Contesto
Sociale: progettazione.

L'attività si sviluppa in un contesto extramatematico ed interdisciplinare, quello dell'area di progetto, e riguarda la simulazione della nascita di un'impresa che dovrà operare nel settore della vendita di automobili.
Tale attività si è sviluppata nell'ultimo biennio dell'I.T.C.S. "L. Einaudi" di Padova nell'a.s. 2001/2002. Lo scopo, attraverso la compilazione, la somministrazione e l'elaborazione di un questionario, è quello di creare la base informativa per compilare il cosiddetto BUSINESS PLAN, cioè quel documento che guida la nascita e lo sviluppo della nuova impresa, nei suoi primi anni di vita. L'esperienza viene riportata come è stata descritta dagli stessi alunni del gruppo matematico che l'ha condotta ed è un esempio di come la Statistica opera per creare basi informative e previsioni economiche.

Descrizione dell'attività

L'attività ha per scopo l'analisi dei problemi inerenti l'ubicazione dell'autosalone, il target della clientela e l'analisi del mercato automobilistico su cui indirizzare il settore operativo dell'impresa.
Per raggiungere gli obiettivi prefissati, all'inizio dell'anno scolastico, l'insegnante aiuta gli alunni a predisporre un questionario riguardante il mercato dell'auto, cercando di individuare le informazioni essenziali da raccogliere.
Il questionario è stato successivamente compilato dagli studenti delle classi 4e e 5e dell'istituto e, per la codifica e l'elaborazione delle risposte, è stato predisposto un datatabase con il foglio elettronico Excel.
Si sono create, poi, per l'analisi dei risultati, tante tabelle pivot quanti sono i quesiti posti.
Le elaborazioni contenute nelle tabelle, sono state differenziate rispetto al sesso degli intervistati.
I valori assoluti, per i confronti, sono stati trasformati in percentuale. Per rendere chiare e comprensibili le tabelle, esse sono state accompagnate da opportune rappresentazioni grafiche (quasi tutte con diagrammi a settori circolari) ed è stato affiancato, ad ogni elaborazione, un commento personale degli alunni sui risultati dell'indagine.
Ipotizzando anche di servire una clientela proveniente da paesi stranieri, il questionario è stato tradotto in tedesco ed in inglese.
Le informazioni ricavate hanno quindi costituito la base per rispondere ad altri quesiti che la simulazione dell'attività pone:

a) la determinazione del tipo di auto da vendere da parte del concessionario,
b) la scelta della zona più favorevole in cui far sorgere l'autosalone.

Le informazioni sulla fascia di prezzo che i potenziali acquirenti sono disposti a pagare, è servita al gruppo che si è occupato della parte giuridica e della pubblicità. Sono state elaborate le informazioni riguardanti la più opportuna localizzazione del concessionario.
I risultati salienti dell'indagine, tenuto conto delle preferenze espresse, si possono così riassumere:

1) gli intervistati preferiscono acquistare un'auto nuova;
2) la somma da destinare all'acquisto dell'auto è compresa fra € 5.000 ed € 10.000;
3) le auto preferite dai giovani sono quelle sportive;
4) la collocazione ideale dell'autosalone è in periferia;
5) i servizi più richiesti sono la velocità di consegna e l'appoggio di un'autofficina.

L'attività è terminata con l'esposizione dei risultati raggiunti dai vari gruppi ad un esperto del settore, che ha fornito una valutazione positiva dell'attività svolta.
A completamento del lavoro, si è predisposto un sito Web su cui far confluire i risultati dell'indagine e pubblicizzare l'impresa di nuova costituzione.

Analisi dei dati

La sintesi dei risultati esposti è il frutto di elaborazioni di un database di 289 righe o record (pari al numero degli studenti rispondenti) e di 37 colonne o campi (numero delle domande poste tenuto conto che alcune sono articolate in più quesiti), costruito in base alle risposte al questionario somministrato agli studenti di tutte le classi quarte e quinte dell'I.T.C.S. "L. Einaudi" di Padova, scelti come rappresentanti del segmento "giovani" di potenziali acquirenti dell'auto.
Si propongono di seguito alcune delle tabelle ricavate con le tabelle pivot del foglio Excel e i grafici prodotti nel corso della ricerca. A corredo di ogni elaborazione gli studenti hanno scritto i loro commenti che si riportano integralmente.
Tali tabelle giustificano i risultati sopra elencati, in particolare riguardano:

I. studenti e automobili;
II. studenti e collocazione di un salone multimarche;
III. studenti e servizi di un autosalone multimarche.

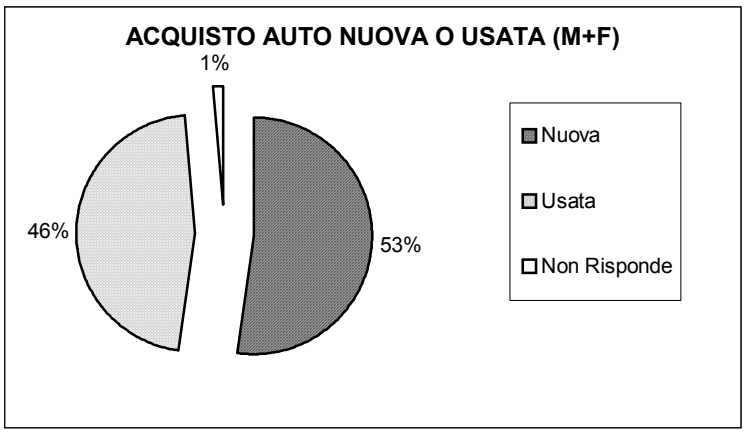
Gli studenti nella loro ricerca di esprimere in modo molto sintetico il titolo delle tabelle e dei grafici corrispondenti non hanno tenuto nel dovuto conto che occorre ben definire il collettivo osservato. In

questo caso si tratta sempre degli “Studenti rispondenti delle classi 4e e 5e dell’I.T.C.S. “L. Einaudi” di Padova, nell’anno scolastico 2001/2002”.
Le distribuzioni costruite sono sempre distribuzioni doppie nelle quali uno dei caratteri di classificazione è il “Sesso". Per quanto riguarda grafici e commenti ci si è riferiti alla distribuzione totale (M+F).

Gli studenti e l’automobile

Acquisto auto nuova o usata

	SESSO					
Acquisto Auto	F	M	Totale	%F	%M	%TOT
Nuova	116	35	151	54,46	46,05	52,25
Usata	95	39	134	44,60	51,32	46,37
Non Risponde	2	2	4	0,94	2,63	1,38
Totale	213	76	289	100,00	100,00	100,00

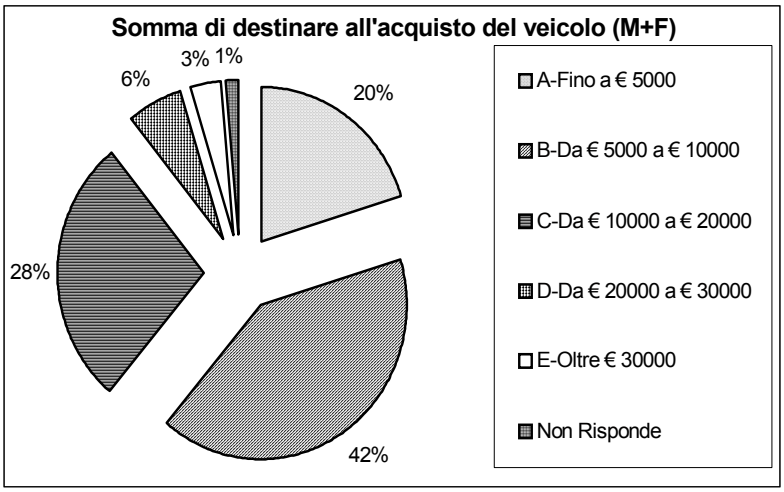


Il 53% degli intervistati preferirebbe acquistare un'auto nuova, mentre il 46% acquisterebbe un usato. Ciò significa che il nostro autosalone dovrebbe prendere in considerazione la possibilità di ritirare e di vendere usati.

Tabella 1

Somma da destinare all'acquisto di un veicolo nuovo

	SESSO					
Somma acquisto nuovo	F	M	Totale	%F	%M	%TOT
A-Fino a € 5000	39	20	59	18,31	26,32	20,42
B-Da € 5000 a € 10000	98	20	118	46,01	26,32	40,83
C-Da € 10000 a € 20000	59	22	81	27,70	28,95	28,03
D-Da € 20000 a € 30000	10	7	17	4,69	9,21	5,88
E-Oltre € 30000	5	5	10	2,35	6,58	3,46
Non Risponde	2	2	4	0,94	2,63	1,38
Totale	213	76	289	100,00	100,00	100,00



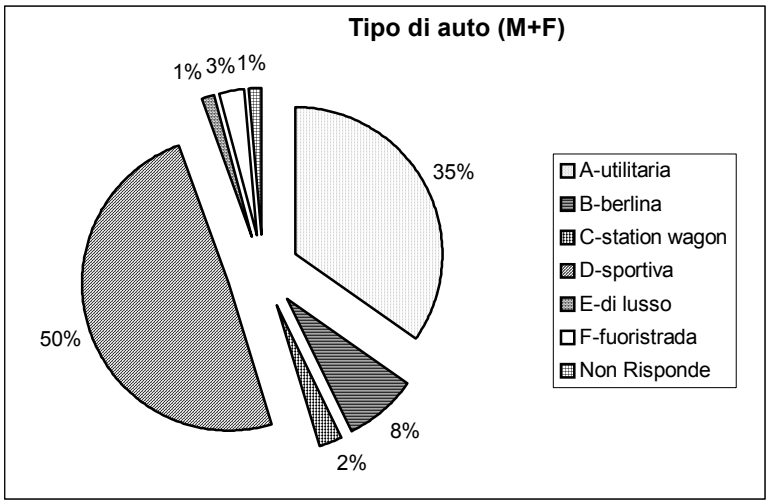
Dal risultato dell'intervista è possibile evidenziare che ben il 42%[1] della possibile clientela è disposta ad acquistare un auto spendendo da 5 a 10 mila euro. Un'altra percentuale, il 28%, è disposta a spendere da 10 a 20 mila euro. Altra percentuale da evidenziare è il 20% degli intervistati, i quali sono disposti ad acquistare un veicolo sborsando al massimo 5 mila euro e il veicolo potrà essere soltanto un usato o un veicolo nuovo ma dal modello vecchio.

Tabella 2

[1] Si osservi che, dopo aver arrotondato all'intero più vicino tutte le percentuali esclusa la maggiore, perché la somma risulti 100 è necessario arrotondare 40,83 a 42. In tal modo si produce l'errore relativo minimo.

Tipo di automobile

	Sesso					
9-c:tipo di auto	F	M	Totale	%F	%M	%TOT
A-utilitaria	83	17	100	38,97	22,37	34,60
B-berlina	18	6	24	8,45	7,89	8,30
C-station wagon	3	4	7	1,41	5,26	2,42
D-sportiva	102	40	142	47,89	52,63	49,13
E-di lusso	1	3	4	0,47	3,95	1,38
F-fuoristrada	4	4	8	1,88	5,26	2,77
Non Risponde	2	2	4	0,94	2,63	1,38
Totale	213	76	289	100,00	100,00	100,00



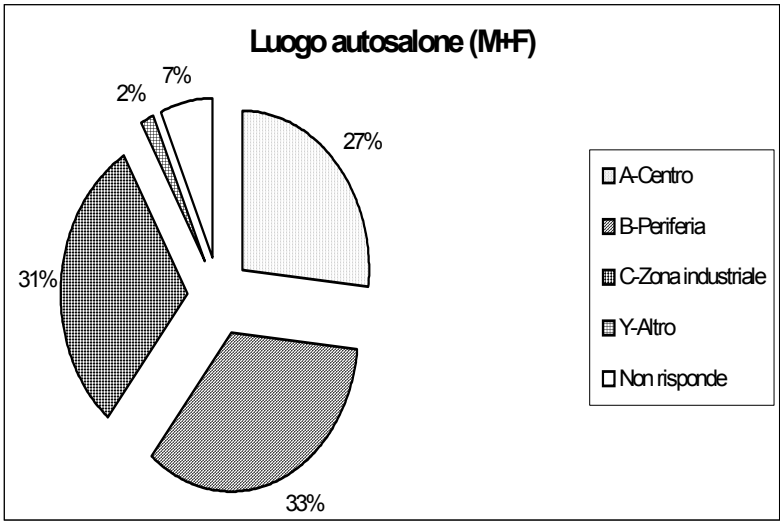
Dal grafico emerge che quasi la metà degli intervistati è interessata all'acquisto di un'auto sportiva e che un'altra fetta importante di preferenze è assegnata alle auto utilitarie. Ciò significa che il nostro bacino di utenza non è interessato all'acquisto di automobili di lusso o familiari né di fuoristrada. Il nostro autosalone dovrà quindi puntare sulla vendita di auto sportive o utilitarie.

Tabella 3

Studenti e collocazione di un salone multimarche:

Dove è situato l'autosalone

	Sesso					
Luogo Autosalone	F	M	Totale	%F	%M	%TOT
A-Centro	59	18	77	27,70	23,68	26,64
B-Periferia	77	22	99	36,15	28,95	34,26
C-Zona industriale	62	27	89	29,11	35,53	30,80
W ovunque		1	1	0,00	1,32	0,35
W-Altro: dappertutto	1	1	2	0,47	1,32	0,69
W-Altro: in internet		1	1	0,00	1,32	0,35
Y-Altro	1		1	0,47	0,00	0,35
Non risponde	13	6	19	6,10	7,89	6,57
Totale	213	76	289	100,00	100,00	100,00



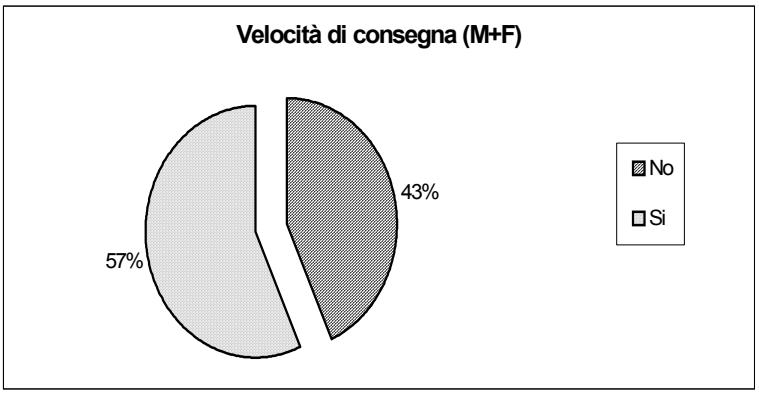
Dal grafico risulta che la collocazione ideale per l'autosalone è in periferia, anche se molto rilevanti sono le percentuali di chi lo preferirebbe in centro o in zona industriale. Oltre alle preferenze più o meno giustificabili degli studenti, potrebbe aver influito nella risposta anche la loro zona di residenza.

Tabella 4

Studenti e servizi di un autosalone multimarche:

Servizio offerto: velocità nella consegna

	Sesso					
Servizi forniti:Velocità consegna	F	M	Totale	%F	%M	%TOT
No	94	31	125	44,13	40,79	43,25
Si	119	45	164	55,87	59,21	56,75
Totale	213	76	289	100,00	100,00	100,00

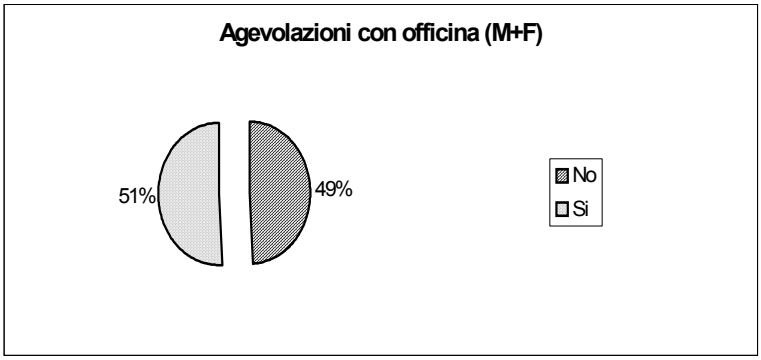


Tra gli ipotetici servizi che l'autosalone dovrebbe offrire, il 57% degli studenti considera più importante la velocità di consegna dell'automezzo acquistato.

Tabella 5

Servizio offerto: agevolazioni in officina

	Sesso					
Servizio fornito:Agevolazioni con officina	F	M	Totale	%F	%M	%TOT
No	103	39	142	48,36	51,32	49,13
Si	110	37	147	51,64	48,68	50,87
Totale	213	76	289	100,00	100,00	100,00



La disponibilità di un'officina guadagna appena la maggioranza delle preferenze tra i servizi che l'autosalone dovrebbe offrire. Il restante 49% probabilmente preferisce rivolgersi alla sua officina di fiducia.

Tabella 6

Questionario

AREA DI PROGETTO 5^E: QUESTIONARIO

RICERCA DI MERCATO RIGUARDANTE IL SETTORE AUTOMOBILISTICO

Rispondi alle seguenti domande secondo le tue preferenze e possibilità economiche

1- CLASSE SEZIONE CORSO

- [ ] Igea
- [ ] Brocca
- [ ] Iter

2- SESSO M F

3- ETA'

4- COMUNE DI RESIDENZA

5- PROFESSIONE DEL CAPOFAMIGLIA:

- [ ] lavoratore dipendente
- [ ] lavoratore professionista
- [ ] lavoratore autonomo
- [ ] imprenditore
- [ ] altro _____

6- SEI IN POSSESSO DELLA PATENTE DI GUIDA?

- [ ] Sì
- [ ] No

se la risposta è NO

- [ ] ho già richiesto il foglio rosa e/o sono iscritto ad una scuola guida
- [ ] penso di avviare le pratiche entro i prossimi 3 mesi
- [ ] non ho intenzione di conseguirla per il momento
- [ ] altro _____

7- DI QUALI MEZZI DI TRASPORTO LA TUA FAMIGLIA DISPONE?

- [ ] nessuno
- [ ] ciclomotore
- [ ] moto
- [ ] auto
- [ ] fuoristrada
- [ ] altro mezzo

Se possiede auto quante ne ha?

- [ ] 1 di quale marca_____
  di quale cilindrata _____
- [ ] 2 di quale marca_____
  di quale cilindrata _____
- [ ] 3 o + di quale marca_____
  di quale cilindrata _____

8- NELL'AMBITO DEL NUCLEO FAMILIARE E' STATO GIA' ACQUISTATO UN VEICOLO NUOVO?
(negli ultimi 6 mesi)

- [ ] Sì
- [ ] No

9- NEL CASO TU POTESSI DESTINARE UNA SOMMA ALL'ACQUISTO DI UN'AUTOMOBILE (secondo le tue possibilità economiche) SARESTI DISPOSTO/A AD ACQUISTARLA

- [ ] Nuova
- [ ] Usata

E QUALE SOMMA SPENDERESTI? (una sola possibilità)

- [ ] fino a 5.000 Euro
- [ ] da 5 a 10 mila Euro
- [ ] da 10 a 20 mila Euro
- [ ] da 20 a 30 mila Euro
- [ ] oltre 30 mila Euro

NELLA SCELTA DEL TIPO DI AUTOMOBILE SEI ORIENTATO AD UNA

- [ ] utilitaria
- [ ] berlina
- [ ] station wagon/ familiare
- [ ] sportiva
- [ ] di lusso
- [ ] fuoristrada

10- PER LA SCELTA RIGUARDANTE L'ACQUISTO

- [ ] ti interessi personalmente
- [ ] ti informi su riviste specializzate
- [ ] ti rivolgi a parenti/ amici/ conoscenti
- [ ] ti fai consigliare da esperti
- [ ] altro _____

11- ATTUALMENTE LA DISTRIBUZIONE AVVIENE TRAMITE CONCESSIONARI MONOMARCA, TI INTERESSEREBBE TROVARE UN LUOGO DOVE PUOI ACQUISTARE E PROVARE PIU' DI UN MODELLO CON ADDETTO AUTOSALONE MULTIMARCHE?

- [ ] Sì
- [ ] No

DOVE VORRESTI TROVARLO?

- [ ] in centro
- [ ] in periferia
- [ ] nella zona industriale
- [ ] altro_____

12-QUALI SERVIZI O AGEVOLAZIONI VORRESTI AVERE RIVOLGENDOTI AD UN AUTOSALONE MULTIMARCHE ?
(è possibile più di una risposta)

- [ ] velocità nella consegna
- [ ] agevolazioni con officina
- [ ] altro _____

13- SEI A CONOSCENZA DELLE POSSIBILITA' DI ACQUISTO IN INTERNET DI AUTOMOBILI?

- ☐ Sì
- ☐ No

USERESTI LA RETE PER ACQUISTARLE?

- ☐ Sì
- ☐ No

14- RITIENI CHE L'ACQUISTO IN RETE DEBBA AVVENIRE:

- ☐ senza alcun servizio o agevolazioni
- ☐ con l'appoggio di un autosalone che offre servizi ed agevolazioni
- ☐ con l'appoggio di un'officina di assistenza

Grazie per la disponibilità che ci avete concesso !!!!!!

Elementi di prove di verifica

Formula di Bayes e gioco equo

1. In un torneo di calcio all'italiana si sa che la squadra A ha vinto il torneo. Ricordo che le squadre che hanno disputato l'altra semifinale erano B e C, ma non ricordo più quale delle due sia arrivata in finale. Se la squadra B aveva probabilità 2/5 di battere la squadra C in semifinale e la squadra A aveva probabilità ¼ di battere C e 2/3 di battere B, qual è la probabilità che l'altra squadra finalista sia stata la B?

2. Antonio vuole costruire un puzzle da 300 pezzi. La sorella ha messo i pezzi di due puzzle diversi, uno da 300 e uno da 100 pezzi, in due contenitori uguali. Antonio non sa qual è il contenitore che deve prendere, sa solo che la sorella, nel rimettere a posto i pezzi, ha cambiato di posto a 30 di essi. Antonio prende un pezzo, scegliendo a caso da uno dei due contenitori.
Che probabilità ha di pescare un pezzo utile?
Se Antonio ha preso un pezzo utile, che probabilità c'è che provenga dal contenitore giusto?

3. La probabilità che l'azienda A, produttrice di videogiochi abbia un incremento del fatturato è 2/3. In base ai dati delle gestioni precedenti, si sa che l'azienda ha un incremento del 2% con probabilità ½; un incremento del 5% con probabilità 1/3; un incremento del 10% con probabilità 1/6. Sapendo che l'azienda, a fine anno, non ha avuto un incremento del 10%, qual è la probabilità che abbia avuto un incremento del fatturato del 5% ?

4. In un'urna vi sono 3 palline rosse e una nera. Si gioca ad estrarre una coppia di palline alla volta. Saresti disposto a scommettere con un tuo amico alla pari in questo modo:
Vinci se esce la coppia "rossa-nera"
Vince il tuo amico se esce la coppia "rossa-rossa"?

5. In un'urna vi sono 8 palline rosse, 6 nere e 5 verdi. Si gioca in due ad estrarre una coppia di palline alla volta. Uno dei due giocatori vince se esce la coppia "rossa-rossa" e l'altro se esce la coppia "rossa-nera"; gli altri casi non vengono considerati.
Quale dei due giocatori ha maggiore probabilità di vincere? Come deve essere la ripartizione delle quote perché il gioco sia equo?

Griglia di correzione ed osservazioni

1. 16/25

2. 0,6 ; 0,75

3. 1/4

4. Nel caso dell'esercizio 4, gli studenti spesso rispondono che la scommessa alla pari non è accettabile, perché sono fuorviati dal fatto che le palline rosse sono il triplo di quelle nere. Il calcolo combinatorio può essere utile per calcolare il numero di coppie possibili nei vari casi. Si trova che la coppia "rossa-nera" si può avere in tre modi e così la coppia "rossa-rossa**";** si ha *P(rossa-nera)* = *P(rossa-rossa)* = 1/2 per cui la scommessa alla pari è equa**.**

5. In questo caso la scommessa alla pari non è accettabile; infatti la coppia "rossa-rossa" si può avere in 28 modi, mentre la coppia "rossa-nera" si può avere in 48 modi. Il gioco sarà equo se il giocatore che scommette sulla coppia "rossa-nera" è disposto a pagare una somma che sia i 12/7 di quella che scommette il suo avversario.

Riferimenti bibliografici

Anichini, G. (1988), Quanto è probabile avere lo stesso compleanno, in *Archimede*, 1, pp. 19-29.

Barra, M. (2000), Probabilità e gioco d'azzardo, in *Le Scienze il loro insegnamento*, nn.5-6, pp.26-32.

Brunelli, L. (2000), e altri, Un'indagine in classe per apprendere la statistica. Guida per un corso di base di statistica descrittiva, in *Induzioni*, 21.

de Finetti, B., (1970) *Teoria delle probabilità*, vol.I e II, Einaudi.

Fraire, M. - Rizzi, A. , (2001), *Esercizi di Statistica*, Carocci Editore.

Galilei, G., (1993), Sopra le scoperte de i dadi, in *Induzioni*, 7, pp. 15-17

Ministero della Pubblica Istruzione, (1995), Direzione Classica, L'insegnamento di probabilità e statistica nella scuola liceale, Seminario di formazione per docenti, in *Quaderni*, 8.

Ministero della Pubblica Istruzione, (1995), Direzione Classica, Probabilità e statistica nella scuola liceale, Seminario di formazione per docenti, in *Quaderni*, 28.

Ottaviani, M.G., (2001), Strumenti per l'analisi dei dati, in *Induzioni*, 23, pp. 33-81.

Ottaviani, M.G., (2002), Strumenti per l'analisi dei dati, II^{a} parte, in *Induzioni*, 24, pp. 39 - 77.

Pezzulli, S. (2001), Le rappresentazioni grafiche dei dati statistici. Materiali e metodi introduttivi, in *Induzioni*, 23, pp. 83-127.

ARGOMENTARE, CONGETTURARE, DIMOSTRARE

Argomentare, congetturare, dimostrare

Il nucleo caratterizza le attività che introducono, sviluppano e consolidano la dimostrazione, ossia uno degli aspetti fondamentali che contraddistinguono il pensiero matematico maturo.
Si considerano perciò quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico, che è sempre inestricabilmente intrecciato con i segni del suo linguaggio.
Il significato dei segni matematici è analizzabile a due livelli:
1. quello diretto dei segni, per cui ad es. $x^2 = 2$ può denotare un insieme numerico ben preciso all'interno di un codice specifico (le soluzioni in **Q**, **R** dell'equazione; due rette verticali; ...);
2. quello del discorso in cui tali segni entrano.

Il primo significato riguarda principalmente le definizioni dei concetti, il secondo le relazioni tra queste. La matematica è costituita da enunciati in cui sono coinvolti continuamente i due aspetti. Comprendere la matematica significa possedere queste due funzioni del discorso.
Le attività didattiche sono quindi finalizzate allo sviluppo di queste due funzioni, che affondano le loro radici nelle attività discorsive possedute dal soggetto in modo "naturale" e che coinvolgono attività cognitive usuali. Per questo in tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno accompagnare sempre la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica.
Ad esempio per imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'algebra gli studenti dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione e generalizzazione utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (ad es.: tempi/velocità, prezzi). Analogamente per le conoscenze legate allo spazio e alle figure è essenziale la loro esplorazione dinamica in contesti vari.
A livello maturo tali funzioni evolvono verso la dimostrazione matematica, che ha specificità proprie, la più importante delle quali è che essa è basata sulla nozione di **conseguenza logica**, per cui

$$A \rightarrow B$$

è asserito quando non esistono modelli in cui vale A mentre B non vale (ovvero B vale in tutti i modelli in cui vale A): si noti che nella scrittura "$A \rightarrow B$", la freccia non sta a significare l'implicazione materiale ma ha un ruolo puramente iconico.
La definizione di conseguenza logica dà ragione del perché valgono gli enunciati matematici e si tratta di una ragione ben diversa da quella delle verità empiriche delle scienze sperimentali. Un enunciato B è un teorema solo relativamente a qualche teoria (ipotesi); è senza senso dire che è tale in assoluto (anche se può sembrare così; si pensi a un enunciato come "2+2 = 4" o a quello del teorema di Pitagora). L'attività matematica consiste nell'entrare dentro alla relazione $A \rightarrow B$ e per fare ciò occorre argomentare, colmare le lacune, fare tentativi, esperimenti mentali e non; dopo un po' di attività di solito si chiarisce la teoria che fa da sfondo all'enunciato, il significato dei termini coinvolti in esso; allora con l'uso delle conoscenze specifiche che si hanno sull'argomento, inclusa eventualmente un po' di manipolazione simbolica, si riesce finalmente a vedere un cammino da A a A_1, da A_1 a A_2, ..., e infine da A_n a B.
Queste considerazioni sono alla base della seguente definizione di dimostrazione:
Una dimostrazione è un insieme ordinato di enunciati del tipo $A_i \rightarrow A_{i+1}$, che sono collegati per transitività.
C'è un'unica regola: scrivi $A_i \rightarrow A_{i+1}$ ogni volta che A_{i+1} è conseguenza logica di A_i.
L'insieme può anche avere un ordine non lineare, ad esempio ad albero.
Un punto cruciale consiste nel fatto che la relazione di conseguenza logica è indecidibile. Cioè non esiste in generale alcuna macchina, come quelle sognate da Leibniz (neanche il computer più potente mai progettato), che possa stabilire concretamente per ogni A e B se B è conseguenza logica di A o meno.

Pertanto i matematici indagano se e perché un tale enunciato valga o meno e questo compito richiede abilità per essere risolto. Il perché l'enunciato valga è la dimostrazione (dimostrazioni essenzialmente diverse corrispondono a perché diversi).
La dimostrazione è un discorso, che può far riferimento a qualsiasi frammento di conoscenza si ritenga utile e produttivo per accertare che B è conseguenza di A (spesso A sembra non esserci, in quanto la teoria di riferimento, ad esempio l'aritmetica, può rimanere implicita, ad es. quando B è un enunciato come "2+2 = 4" o il teorema di Pitagora). Dimostrare è un processo dialogico del soggetto con un interlocutore, eventualmente virtuale; ciò ha conseguenze importanti per la didattica della dimostrazione, in quanto il suo carattere argomentativo deve sempre essere presente perché l'attività abbia senso.
Sono obiettivi da perseguire nella scuola superiore:

- consolidare le due funzioni del discorso sopra descritte, che si configurano come abilità specifiche;
- supportare gli studenti nella delicata evoluzione che li porta dall'argomentare al dimostrare, cioè dal discorso più o meno informale e intuitivo alla esplicitazione della relazione di conseguenza logica che lega le varie proposizioni di una dimostrazione: anche queste sono descritte nelle indicazioni programmatiche come abilità specifiche;
- dare agli studenti gli elementi conoscitivi tecnici essenziali per entrare dentro agli aspetti fondamentali del ragionamento matematico (dimostrazioni per assurdo, per induzione, ..): questi costituiscono le conoscenze del Nucleo, da sviluppare in contesti vari e significativi, legati ai temi propri degli altri Nuclei.

E' comunque da evitare un'impostazione puramente formalistica delle attività dimostrative: il significato dei "connettivi logici" (se…allora, non, e, o, tutti, esiste, ecc.) va acquisito all'interno di attività significative e non come addestramento alla manipolazione di segni dal significato più o meno misterioso.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamento esterni	Pagina
1° biennio	Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione	Figure geometriche piane		
1° biennio	Diverse scritture per una formula	Aritmetica: numeri interi		
1° biennio	Quel che vedo è sempre vero	Aritmetica: numeri naturali	Storia	
1° biennio	Non è vero che è sempre vero	Aritmetica: numeri primi	Storia	
1° biennio	Sarà vero, ma non ci credo	Aritmetica: numeri primi		
1° biennio	Condizione necessaria ma non sufficiente	Aritmetica: numeri primi		
1° biennio	Attività con software geometrico	Figure geometriche	Lingua italiana	
1° biennio	Quante rette per *n* punti?	Punti e rette nel piano		
1° biennio	Si può fare un riassunto in matematica?	Linguaggi	Lingua italiana Lingua straniera	
1° biennio	Dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico: prove di verifica	Linguaggi	Lingua italiana Lingua straniera	
2° biennio	Grissini e triangoli	Probabilità e geometria		
2° biennio	Area di un rettangolo come cambia variando la lunghezza dei lati.	Figure geometriche e loro relazioni.	Lingua italiana	
2° biennio	Tasselli del domino e induzione	Ragionamenti combinatori	Storia	

Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.	Argomentare, congetturare, dimostrare Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Figure geometriche piane.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del primo anno del primo biennio in un contesto tipicamente geometrico, quando gli studenti conoscono già la bisettrice di un angolo e il concetto di rette perpendicolari. Essa viene realizzata con l'ausilio di un software di geometria dinamica, di cui già gli studenti conoscono le funzioni fondamentali, ed ha come obiettivo la scoperta della relazione tra bisettrice e altezza di un triangolo, quando il triangolo è isoscele.
Tale relazione può essere espressa dal seguente teorema:
"Se la bisettrice di un angolo di un triangolo è anche perpendicolare al lato opposto allora il triangolo è isoscele; se il triangolo è isoscele la bisettrice è perpendicolare al lato opposto".

La discussione che segue l'attività di esplorazione offre anche l'occasione di ritornare sul concetto di altezza del triangolo e di darne una definizione rigorosa.
Il percorso si propone i seguenti obiettivi trasversali:
a) esplorare un problema aperto;
b) individuare degli invarianti, tramite le seguenti funzionalità permesse dal software: il trascinamento, la misura e la verifica di proprietà;
c) individuare relazioni geometriche tra figure, mettendo in evidenza i legami funzionali (quali oggetti della figura variano in dipendenza di quali altri) e variazionali (come variano);
d) formulare nuove congetture, tramite l'esplorazione della configurazione geometrica;
e) validare le congetture formulate, tramite prove su casi particolari, o trascinamento, o costruzioni, o altro;
f) dimostrare le congetture formulate.

Descrizione dell'attività

L'attività prevede una fase di elaborazione personale degli allievi e una successiva discussione collettiva delle soluzioni elaborate. In questo modo viene ad essere completamente trasformato il rapporto consueto tra insegnanti e studenti che vorrebbe l'insegnante responsabile della spiegazione e lo studente responsabile dell'applicazione di quanto spiegato: il contratto didattico che si propone, infatti, prevede che studenti e insegnante siano corresponsabili dell'apprendimento.

Il percorso didattico proposto punta sul supporto offerto dal software di geometria al fine di:

- introdurre gli allievi al mondo della geometria euclidea;
- sviluppare la capacità di formulare congetture nonché di elaborare per esse una dimostrazione;
- superare la frattura tra forme spontanee di argomentazione e la modalità specifica di una dimostrazione matematica.

Tecnicamente questi obiettivi si possono ottenere inibendo alcune delle funzioni del software e costruendo un "menu ridotto"[1].

E' esperienza comune che di fronte ai primi teoremi e alla richiesta di fornire una dimostrazione gli studenti incontrino difficoltà nel passare dalle conoscenze intuitive a una prospettiva teorica. Da qui le scelte seguenti:

1) le costruzioni geometriche come contesto tematico nel quale organizzare le attività didattiche;
2) il software come ambiente di mediazione per la costruzione del significato di un teorema;
3) la discussione collettiva in classe come contesto in cui far evolvere i processi argomentativi degli studenti verso la dimostrazione;
4) la verbalizzazione da parte degli studenti delle attività svolte per spingerli a descrivere e commentare la soluzione dei problemi e per seguirli nel loro processo di crescita logico-deduttiva;
5) Un "quaderno" dove gli studenti riportano le definizioni, gli assiomi e le giustificazioni delle costruzioni (teoremi) concordati in classe durante le discussioni collettive.

Si propone il seguente problema (gli studenti hanno a disposizione un software di geometria):
Dato un triangolo, tracciare la bisettrice di uno dei suoi angoli. Può risultare perpendicolare al lato opposto considerato?

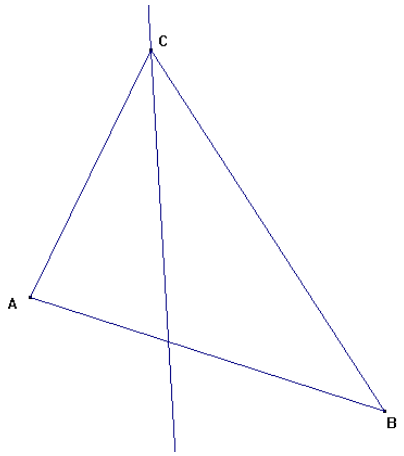


Figura 1

Il triangolo isoscele è una figura fin troppo nota, della quale gli studenti conoscono bene le proprietà più significative. Questo fatto può rivelarsi un ostacolo per riconoscere le relazioni corrette tra le diverse proprietà. In genere gli studenti non distinguono tra proprietà caratterizzanti (stabilite da una definizione) e proprietà da esse derivate (dimostrabili come conseguenze di una

[1] Ad esempio, in Cabri Géomètre, si può usare il menu Opzioni/Configurazione degli strumenti per togliere (o aggiungere) "strumenti" a Cabri. Per esempio, nell'attività proposta si può togliere lo strumento retta perpendicolare dalla casella degli strumenti Costruzioni.

definizione). In altri termini, una definizione è intesa in termini di descrizione, piuttosto che in termini di condizione caratterizzante, dalla quale è possibile dedurre altre proprietà. In questo caso, un triangolo isoscele risulta "definito" da tutte le proprietà note. E' la presenza di questa difficoltà ad offrire l'occasione per affrontare una discussione generale sul significato dell'attività di definizione.
Il punto fondamentale della discussione consiste nel far emergere la formulazione di una congettura basata sull'esplorazione. E' importante arrivare ad una formalizzazione accettata da tutti di una o di entrambe le implicazioni del teorema.
Un punto importante da mettere in luce è comunque la distinzione tra le due implicazioni; si tratta di una buona occasione per suggerire alcune riflessioni sul linguaggio da utilizzare ("se ...allora", "... se e solo se ...") e sulla distinzione tra ipotesi e tesi. Lo spunto può essere infatti offerto dall'analisi degli elaborati prodotti dagli studenti come resoconto delle attività di esplorazione. A questo proposito un'evoluzione possibile della discussione consiste nel raccogliere i suggerimenti che senz'altro qualche intervento offrirà in relazione alle convinzioni che gli studenti hanno maturato durante l'esperienza della scuola media.
La nozione di altezza è nota a tutti ed il termine *altezza* è certamente usato dagli studenti durante la discussione che segue l'attività proposta; il suo uso deve essere sistemato in modo rigoroso attraverso una definizione: l'altezza relativa ad un lato di un triangolo diviene la retta passante per un vertice e perpendicolare al lato opposto.
Si può notare che in questo modo l'altezza viene definita come retta e non come segmento. È bene sottolineare questo aspetto, perché l'idea intuitiva di altezza che gli studenti hanno è legata a quella del segmento (da misurare!) che congiunge il vertice con il piede della perpendicolare. Inoltre, la definizione dovrebbe sottolineare il legame tra il vertice ed il lato opposto rispetto ai quali si considera la perpendicolare. Tutto questo dovrebbe aiutare a superare le difficoltà legate allo stereotipo dell'altezza come "segmento verticale che sta all'interno del triangolo".
L'attività si può suddividere in quattro fasi.
Prima fase
Gli studenti lavorano al computer con un menu ridotto con la modalità di trascinamento e prendono nota, individualmente, di tutto quello che osservano sul loro quaderno.
Seconda fase
Discussione collettiva sui risultati dell'esplorazione.
Terza fase
Sistemazione formale delle osservazioni e formulazione del teorema ("se in un triangolo la bisettrice di un angolo è perpendicolare al lato opposto, esso è isoscele; e viceversa") e condivisione della dimostrazione.
Quarta fase
Definizione rigorosa di altezza applicata alla geometria del triangolo.

Possibili sviluppi
1. Un'attività che può essere iniziata a questo punto e può essere ripresa anche successivamente, è quella del confronto fra testi, ovvero chiedendo agli studenti di confrontare formulazioni differenti di enunciati di proprietà geometriche per stabilire se abbiano lo stesso significato o meno.

2. Come approfondimento si può discutere in classe su questo problema (con "carta e matita" oppure con l'uso di software di geometria):
In un triangolo ABC si tracciano le bisettrici degli angoli A e B (Figura 2). Sia O il loro punto di incontro. E' possibile, modificando opportunamente i lati del triangolo ABC, fare in modo che le due bisettrici siano tra loro perpendicolari? Scrivere tutte le osservazioni.

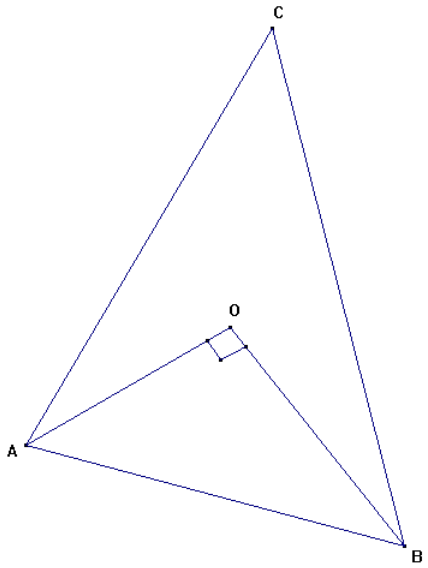


Figura 2

3. Si propone, con l'uso di un software di geometria, la seguente attività di "esplorazione":
In un triangolo rettangolo *ABC*, tracciare le bisettrici degli angoli acuti *B* e *C*. Sia *P* il loro punto di incontro. Descrivere le posizioni di *P*, al variare dei vertici *B* e *C* su due rette perpendicolari in *A*. Scrivere tutte le osservazioni.

(In Figura 3 sono riportate alcune delle posizioni di *P*).

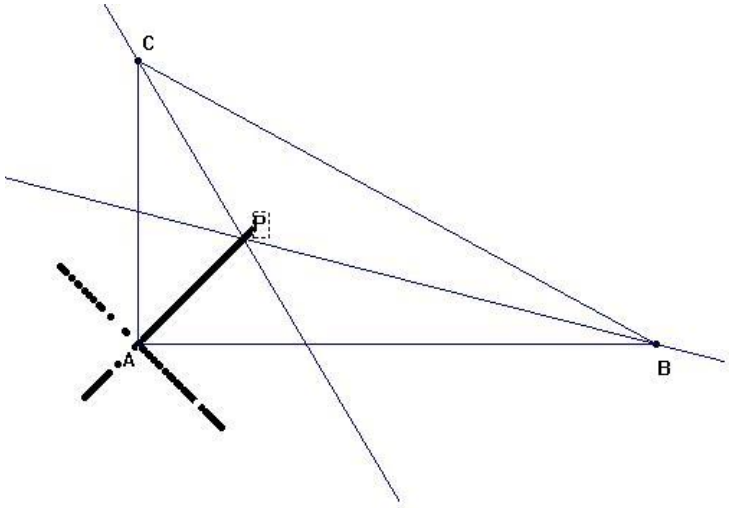


Figura 3

Elementi di prove di verifica

1. Considerare la bisettrice dell'angolo interno *BAC* di un triangolo *ABC*. Sia *M* il punto in cui tale bisettrice interseca il lato *BC* del triangolo. Sotto quali condizioni il triangolo *AMB* è isoscele? Sotto quali condizioni sono isosceli sia il triangolo *AMB*, sia il triangolo *AMC*? Giustificare le risposte.

2. Sia dato un triangolo isoscele avente come lati congruenti *AC* e *BC*. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo *ACB* lo divide in due triangoli congruenti.

3. Siano dati due triangoli *ABC* e *A'BC* che hanno il lato *BC* in comune e che sono situati da parti opposte rispetto a *BC*. Inoltre è noto che il lato *BC* sta sulla bisettrice degli angoli *ABA'* e *ACA'*. Dimostrare che i triangoli *ABA'* e *AA'C* sono isosceli. Dimostrare anche che, comunque si prenda un punto *M* su *BC*, la retta passante per *M* e per *B* incontra il segmento *AA'* nel suo punto medio *H*.

4. Sia dato un angolo *ABC*. Considerare la semiretta *BX* di origine *B* che sia bisettrice dell'angolo *ABC* e una retta *r* che intersechi *BX* in un punto *H* e formi con *BX* quattro angoli congruenti. Siano *M* e *N* le due intersezioni di *r* con i lati dell'angolo *ABC*. Dimostrare che *BMN* è isoscele.

5. Disegnare l'asse del segmento *AB* e la bisettrice dell'angolo *POQ* di figura utilizzando i seguenti strumenti e metodi:
a) matita, carta riga non graduata e compasso
b) matita, carta, riga graduata, squadra e goniometro
c) matita, carta e piegamenti della carta
d) un software di geometria.

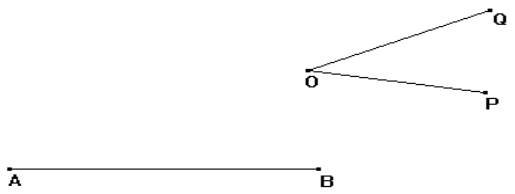


Figura 4

6. Dati una retta *r* e due punti *A* e *B* situati dalla medesima parte di *r*, determinare il cammino più breve che si deve compiere sul piano per andare da *A* a *B* toccando *r*.

7. Tracciare la traiettoria che si deve far compiere a una palla da biliardo per passare da una posizione *A* a una posizione *B*, toccando nell'ordine le sponde *r* e *s* (Figura 5).

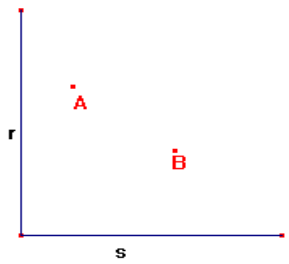


Figura 5

Diverse scritture per una formula

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in situazioni osservate. Usare linguaggi :linguaggio simbolico dell'algebra elementare. Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi	

Contesto
Aritmetica: numeri interi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno calcolare il valore di un'espressione numerica e algebrica.
L'attività:
- è pensata per un avvio precoce, ma "sensato" al linguaggio dell'algebra,
- è un problema aperto,
- può essere svolta con carta e matita, ma anche con l'ausilio di strumenti di calcolo.

Ha per obiettivi:
- favorire la produzione di congetture,
- avviare, quando opportuno, alla formalizzazione nel linguaggio dell'algebra,
- avviare alla validazione delle congetture.

Descrizione dell'attività
E' consigliabile che:
- i problemi proposti vengono svolti in piccoli gruppi e che poi le strategie di approccio al problema vengano condivise e discusse alla presenza dell'intera classe, con la mediazione e il coordinamento dell'insegnante,
- durante l'attività di gruppo l'insegnante non intervenga, ma osservi sia i processi che gli studenti individualmente mettono in atto, sia il tipo di interazioni tra i membri del gruppo,
- l'attenzione dell'insegnante sia maggiormente concentrata sulla scelta delle strategie da parte degli studenti e sul processo risolutivo, piuttosto che sul prodotto finale,
- l'insegnante, nella fase di discussione collettiva, evidenzi limiti e potenzialità dell'uso del linguaggio algebrico nella validazione delle congetture prodotte nell'affrontare i problemi proposti.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema: *Che cosa si può dire sulla somma di due numeri dispari consecutivi? Giustifica le tue affermazioni.*

La risposta si ottiene immediatamente con l'uso del linguaggio dell'algebra: $2n-1+2n+1=4n$.
Si deduce che la somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 4.
Non è questa l'unica strategia risolutiva né l'unica forma di scrittura (altre possibili sono: 2n + 1 + 2n + 3, d + d + 2): fra le altre, è possibile anche utilizzare esclusivamente il linguaggio naturale e schemi mentali organizzati sulla retta numerica. In tal caso si potrebbe notare che la somma di due numeri dispari consecutivi è il doppio del numero pari che è compreso fra i due numeri dispari e quindi, essendo il doppio di un numero pari, è divisibile per 4 (o altre parafrasi indotte dalla scrittura).
In questa fase l'insegnante osserva l'attenzione degli studenti nella lettura e nella comprensione del testo (valuta chi dimostra di comprendere il testo, per esempio provando con numeri dispari consecutivi, rispetto a chi dimostra di non comprenderlo, per esempio usando numeri che non sono dispari o che non sono consecutivi). Si tratta di una valutazione dell'attenzione al compito proposto e del livello di concentrazione nell'attività da svolgere. La valutazione è significativa, perché il fatto che gli studenti lavorino in gruppo consente un controllo che non sarebbe possibile nel lavoro individuale e quindi minimizza il rischio di errori dovuti a semplice distrazione.

Seconda fase

Risoluzione del problema.

- Possibili approcci risolutivi del problema

I gruppi possono:

- esplorare con numeri "piccoli",
- esplorare con numeri "grandi" (potrebbero dare l'impressione di una maggiore generalità nell''esplorazione, rispetto a quella consentita da numeri "piccoli"),
- esplorare con numeri sia "piccoli" che "grandi",
- formalizzare con espressioni del tipo $a + b$, … ,
- formalizzare con espressioni del tipo $d + d + 1 = 2d + 1$, oppure $d + d + 2 = 2d + 2$, usando la lettera d come abbreviazione della parola "dispari". In tal caso vi è un uso della lettera come "etichetta", che non favorisce successive e significative esplorazioni. Nelle eventuali successive esplorazioni, valutare anche se gli studenti sostituiscono a d valori che contraddicono l'ipotesi che d sia dispari: ciò potrebbe suggerire una difficoltà a mantenere il significato di una formula. Valutare inoltre se gli studenti non sanno andare avanti, oppure se interpretano il risultato, riconoscendo semplicemente che si tratta di un numero pari (in tal caso si può supporre che siano nel *frame* pari-dispari, invece che in quello dei multipli),
- usare il linguaggio naturale come strumento di controllo e di operazione:

"dispari più dispari = pari",

- avere già in mente una possibile modellizzazione: per esempio rappresentare i numeri su una retta e concludere che il numero cercato è il doppio del numero "di mezzo"; oppure usare palline che raggruppano opportunamente, come mostrato in Figura 1

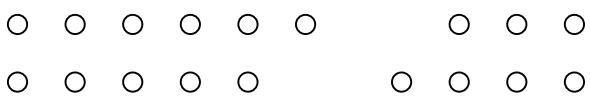


Figura 1

- mettere in formula in maniera opportuna:

$(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4$, oppure $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$,

e concludere che si tratta di un multiplo di 4.

- Possibili atteggiamenti nei confronti del problema

Gli studenti:

- utilizzano i numeri per fare una congettura e danno una giustificazione del risultato a livello empirico ("va bene nei casi verificati, quindi va bene sempre"),
- utilizzano i numeri per esplorare, fanno una congettura, sono consapevoli della necessità di una giustificazione generale, ma non riescono a trovarla,
- imboccano una strada infruttuosa utilizzando un formalismo non adeguato e si bloccano,
- riescono a giustificare in modo soddisfacente il risultato congetturato.

Terza fase

Comunicazione dei risultati, osservazioni possibili.

Gli studenti:

- non riescono a esprimere in maniera chiara i risultati del lavoro di gruppo,
- si rivolgono, nel linguaggio e nel riferimento ai contenuti, solo all'insegnante,
- si rivolgono, nel linguaggio e nel riferimento ai contenuti, in maniera comprensibile ai componenti del gruppo e a tutta la classe,
- utilizzano il linguaggio naturale per supportare il ragionamento (in fase di scoperta?, in fase di sistemazione e di comunicazione?),
- espongono i risultati facendo uso di un linguaggio simbolico adeguato (in fase di scoperta?, in fase di sistemazione e di comunicazione?).

Quarta fase

Discussione collettiva.

Durante la discussione collettiva, alla presenza dell'intera classe, l'insegnante, nell'ottica dell'apprendistato cognitivo ([1]), avvia lo studente verso l'uso del linguaggio algebrico come linguaggio per generalizzare e dimostrare (spiegare all'interno di una teoria) le congetture prodotte. Nella conduzione delle discussione matematica in classe, l'insegnante deve sempre avere presenti problematiche di tipo storico-epistemologico, sia di tipo cognitivo, sia di carattere psico-pedagogico relative agli argomenti oggetto di trattazione e alle metodologie utilizzate.

Possibili sviluppi

- Differenza fra in quadrati di numeri dispari consecutivi.
- Somma di tre numeri dispari consecutivi.

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.

Quel che vedo è sempre vero

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Aritmetica: numeri naturali.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro esempi.
L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione letterale, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Nell'attività sono prese in considerazione congetture semplici, verificabili numericamente e dimostrabili algebricamente, in modo da giustificare l'affermazione: Quel che vedo è sempre vero.

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate, e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".
All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici. E' utilizzata *la metodologia dell'apprendistato cognitivo*[1] intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.
L'attività può essere presentata autonomamente o, meglio, inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Non è vero che è sempre vero, Sarà vero ma non ci credo e Condizione necessaria ma non sufficiente.

[1] Vedi nota 1 all'attività precedente: *Diverse scritture per una formula.*

Prima fase

L'attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione algebrica.

- L'insegnante enuncia agli studenti la seguente affermazione:
  La differenza tra il quadrato di un numero naturale e il quadrato del suo precedente è sempre un numero dispari?
- L'insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni.
- L'insegnante evidenzia come il computer e in particolare l'uso del foglio elettronico può velocizzare il lavoro e aumentare il numero delle esplorazioni, anche con numeri grandi.

Seconda fase

L'attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L'insegnante descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni in modo da verificare l'affermazione presentata.
- L'insegnante sollecita la riflessione ad un aspetto del problema "*… è sempre un numero dispari?*" e quindi prospetta la formalizzazione dell'espressione *(2n-1)* come formula generatrice dei numeri dispari.
- L'insegnante formalizza algebricamente l'affermazione enunciata in precedenza, nei vari modi possibili:
  - $n^2-(n-1)^2=2n-1$
  - $(n+1)^2- n^2=2n-1$.

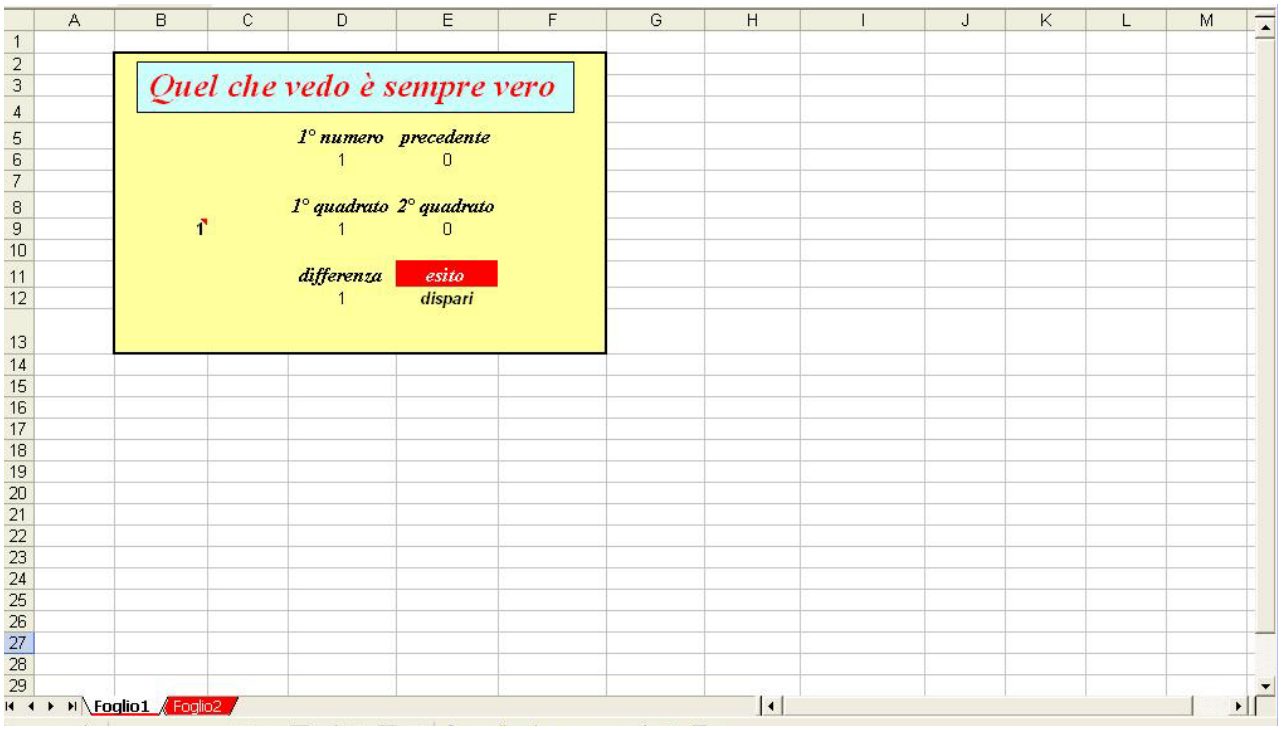


Figura 1

- L'insegnante propone di allargare l'esplorazione ad un numero più ampio di casi.

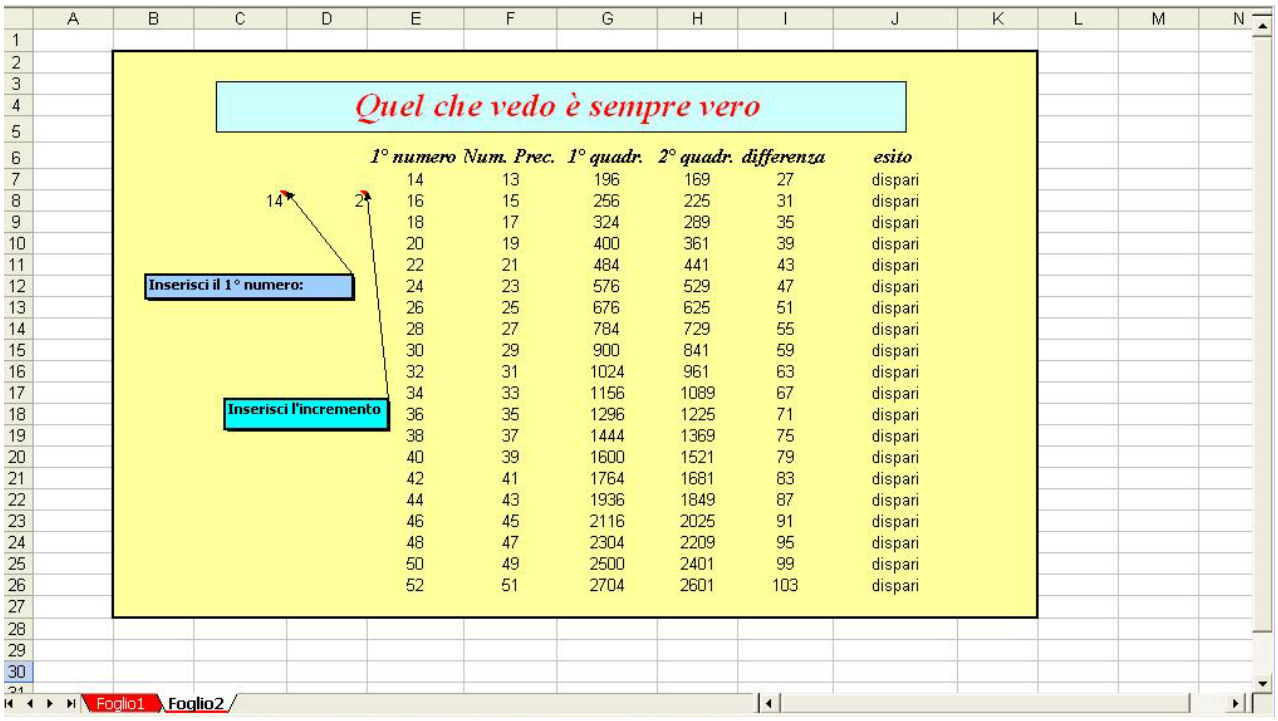


Figura 2

- L'insegnante stimola gli studenti a ricercare la differenza tra verifica e dimostrazione in una congettura e a giustificare l'espressione: Quel che vedo è sempre vero, ossia affermazioni sempre verificabili aritmeticamente e sempre dimostrabili algebricamente.

Possibili sviluppi

- Per consolidare l'esperienza l'insegnante prospetta agli studenti di utilizzare altri numeri del tipo:
  - *(2n+1)* e *2n*
  - *altre forme algebriche.*
- L'insegnante propone di osservare, verificare, dimostrare le seguenti affermazioni:
  - *la somma di due numeri dispari consecutivi è un numero pari*;
  - *la somma di un numero pari con un numero dispari è un numero dispari*;
  - *la somma di due numeri pari è un numero pari*;
  - *il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari*;
  - *il prodotto di due numeri, di cui uno è pari, è pari*;

  e di risolvere e commentare il seguente rompicapo:
  - "*Ciascuna delle persone che ha partecipato ad un ricevimento ha dato un certo numero di strette di mano. Dimostrare che il numero di quelli che ne hanno dato un numero dispari, è pari*".

Elementi di prove di verifica

1. *Indicare qual è la somma di due numeri dispari consecutivi:*
a) 4(n+1)
b) 4(n-1)
c) 4n+1
d) 4n-1
e) nessuna delle precedenti affermazioni è esatta

2. *Indicare qual è la somma di due numeri pari consecutivi:*
a) 4(n-2)
b) 4(n-1)
c) 4n-1
d) 4n-2
e) nessuna delle precedenti affermazioni è esatta

3. *Indicare qual è la somma di tre numeri pari consecutivi:*
a) 6(n-1)
b) 6n
c) 3n
d) 6n+8
e) 6n+4

4. *Indicare qual è la somma di tre numeri dispari consecutivi:*
a) 6(n-1)
b) 6n
c) 3n
d) 6n+8
e) 6n-3

5. *Indicare qual è la risposta esatta:*
a) la somma di tre numeri consecutivi è sempre dispari
b) la somma di tre numeri consecutivi è sempre pari
c) la somma di tre numeri consecutivi è multiplo di sei
d) la somma di tre numeri consecutivi è multiplo di due
e) nessuna delle precedenti affermazioni è esatta

6. *Indicare qual è la risposta esatta:*
a) la somma di due numeri consecutivi è sempre dispari
b) la somma di due numeri consecutivi è sempre pari
c) la somma di due numeri consecutivi è sempre multiplo di tre
d) la somma di due numeri consecutivi è multiplo di due
e) nessuna delle precedenti affermazioni è esatta

7. *Indicare qual è la risposta esatta:*
a) la somma di due numeri qualsiasi è sempre dispari
b) la somma di due numeri qualsiasi è sempre pari
c) la somma di due numeri qualsiasi è sempre multiplo di tre
d) la somma di due numeri qualsiasi è multiplo di due
e) nessuna delle precedenti affermazioni è esatta

Non è vero che è sempre vero

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Aritmetica: numeri primi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro-esempi.
L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Nell'attività sono prese in considerazione congetture semplici, verificabili numericamente e dimostrabili algebricamente, in modo da giustificare l'affermazione: Non è vero che è sempre vero.

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".
All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici.
E' utilizzata *la metodologia dell'apprendistato cognitivo*[1] intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.
L'attività può essere presentata autonomamente o inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Quel che vedo è sempre vero, Sarà vero ma non ci credo e Condizione necessaria ma non sufficiente**.**

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.

Prima fase

L'attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione algebrica. L'insegnante illustra le *notizie storiche* legate alle congetture sui numeri primi, qui sintetizzate:

"Lo studio dei numeri primi è stato oggetto di numerose congetture nel corso dei secoli, alcune delle quali sono tuttora irrisolte. Nonostante l'amore per i numeri che i Pitagorici provavano, i risultati da loro ottenuti non riguardano esclusivamente i numeri primi. Il primo risultato importante sui numeri primi è dovuto ad Euclide che più di 2000 anni fa, nel libro IX degli *Elementi*, provò l'infinità di questi. Questa fu una delle prime dimostrazioni ad usare il metodo di riduzione all'assurdo per trovare un risultato. Euclide diede anche la prova del Teorema Fondamentale dell'Aritmetica: *ogni numero intero può essere scritto come un prodotto di numeri primi in modo essenzialmente unico*. Tale dimostrazione, tuttavia, non ha fornito alcuna indicazione ulteriore sulla distribuzione dei numeri primi lungo l'insieme dei naturali.

Intorno al 200 a.C. il greco Eratostene ideò un *algoritmo* per elencare i numeri primi, che si chiama il *Crivello di Eratostene*.

I successivi sviluppi importanti vennero fatti da Fermat (1601-1665) all'inizio del diciassettesimo secolo. Egli dimostrò una congettura di Albert Girard, cioè che ogni numero primo rappresentabile con la formula *4n + 1* può essere scritto in modo unico come somma di due quadrati e congetturò come *ogni numero possa essere scritto come la somma di quattro quadrati*. e ipotizzò inoltre, che i numeri della forma $2^{(2^n)}+1$ fossero primi (Eulero dimostrò che la congettura è falsa per $5 \le n \le 16$).

Fermat dimostrò anche quello noto come il *Piccolo Teorema di Fermat*: *se p è un numero primo, allora per ogni numero intero a si ha* $a^p = a$ *modulo p*.

Ciò dava credito alla congettura cinese, risalente a 2500 anni prima, cioè che *un numero intero n è numero primo se e solo se il numero* $2^n - 2$ *è divisibile per n*. Se fosse vera tale congettura la ricerca dei numeri *primi* si semplificherebbe notevolmente.

L'*ipotesi cinese* è però solo *necessaria ma non sufficiente*, infatti 341= 11·31 non è primo ma $2^{341} - 2$ è divisibile per 341. Quindi tale condizione è efficace solo se non è verificata da *n*, nel qual caso si conclude che *n* non è primo.

Il *Piccolo Teorema di Fermat* è la base per molti altri risultati nella *Teoria dei Numeri* e per metodi ancora in uso oggi sui computer per controllare se i numeri sono primi.

Fermat trattenne una corrispondenza con altri matematici del suo tempo ed in particolare col monaco Marin Mersenne (1558-1648). In una delle sue lettere a Mersenne egli espresse l'idea che i numeri $2^n + 1$ erano sempre numeri primi se n è una potenza di 2, verificò questo per n = 1, 2, 4, 8 e 16, e sapeva che se n non fosse stata una potenza di 2, il risultato sarebbe stato falso; numeri di questa forma sono chiamati *numeri di Fermat*. Fu solo oltre 100 anni dopo che Eulero mostrò che il caso successivo $2^{32} + 1 = 4294967297$ è divisibile per 641 e così non è primo!

Anche i numeri della forma $2^n - 1$ attrassero attenzione perché è facile mostrare che se *n* non è primo quei numeri devono essere numeri composti. Essi sono spesso chiamati *numeri di Mersenne* M_n perché Mersenne li studiò. Euclide aveva dimostrato inoltre che se il numero $2^n - 1$ è un numero primo, allora il numero $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ è un numero perfetto (cioè pari alla somma dei suoi fattori; ad es. 6 = 1+2+3; altri numeri perfetti sono: 28, 496, 8128). Il matematico Eulero nel 1747 dimostrò che *tutti* i numeri perfetti pari avevano quella forma. Ancora oggi non si sa se vi sono dei numeri perfetti *dispari*. Non tutti i numeri della forma $2^n - 1$ con n primo sono primi.

Per esempio $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ è un numero composto. Per molti anni numeri di questa forma furono i più grandi primi noti. Il numero M_{19} venne dimostrato primo da Cataldi nel 1588 e fu il più grande primo conosciuto per circa 200 anni fino a che Eulero dimostrò che M_{31} è primo. Esso stabilì

un record, in quanto per un secolo non si scoprì un primo maggiore; successivamente, quando Lucas mostrò che M_{127} (numero a 39 cifre) è primo, quello diventò il record fino all'era dei computer elettronici. Infatti nel 1952 i numeri di Mersenne M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} ed M_{2281} vennero dimostrati primi da Robinson usando uno dei primi computer iniziando così l'era dei computer anche in teoria dei numeri.
La storia prosegue a tutt'oggi: ad esempio il 14.11.01 si scoprì che il numero di Mersenne $2^{13466917}$-1 è primo. Si tratta di un numero di 4053946 cifre; conseguentemente il numero $2^{13466916}\cdot(12^{13466917}-1)$ è perfetto".

- L'insegnante enuncia agli studenti la seguente affermazione: "*Esiste una formula che genera numeri primi?*".
- L'insegnante invita gli studenti ad utilizzare il polinomio: n^2-n+17, con $n \in N_+$, per la ricerca (anche con l'utilizzo di una calcolatrice) di numeri primi mediante riscontro su una tabella come quella riportata alla fine di questa attività (si trova facilmente in rete cliccando su 'prime numbers' con un qualsiasi motore di ricerca).
- L'insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni.
- L'insegnante evidenzia come il computer e in particolare l'uso del foglio elettronico può velocizzare il lavoro e aumentare il numero delle esplorazioni, sia con numeri più grandi, sia con valori diversi da 17.

Seconda fase

L'attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L'insegnante generalizza l'affermazione precedente con la relazione: n^2-n+c e descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni, in modo da verificare l'affermazione presentata in corrispondenza di diversi valori di $c \in N$.
- L'insegnante sollecita la risoluzione del problema e la riflessione sulle seguenti affermazioni:
  a) La formula genera tutti i numeri primi?
  b) La formula genera solo, ma non tutti, numeri primi?
  c) La formula genera anche alcuni numeri non primi?
  d) Il parametro *c* può assumere numeri pari?
  e) Il parametro *c* può assumere numeri composti?
  f) Il parametro *c* può assumere numeri primi?

- L'insegnante stimola gli studenti a ricercare la differenza tra verifica e dimostrazione in una congettura e a giustificare l'espressione: Non è vero che è sempre vero, ossia congetture non sempre verificabili aritmeticamente e non dimostrabili algebricamente.

Possibili sviluppi

- L'insegnante invita gli studenti a riflettere sulle seguenti osservazioni:
  - ✓ In che relazione si trovano particolari valori di *c: 11, 17, 41, ...* con la certezza che il valore corrispondente, undicesimo, diciassettesimo, … sia un numero primo: *soglia di credibilità della congettura;*
  - ✓ Riflessione sulla infinità dei numeri primi:
    La scelta di ***c*** sempre più grande individuerà una soglia di *non credibilità* della unicità della formula generatrice di numeri primi; per ogni ***c*** sempre più grande l'insieme dei numeri primi, che si potranno così individuare, sarà più denso e si potrà pertanto giungere all'affermazione che ***i*** *numeri primi sono infiniti.*
- Teorema di Euclide: *I numeri primi sono infiniti.*

- ✓ La dimostrazione fornita da *Euclide* è una classica dimostrazione per assurdo che si basa sull'osservazione che un numero "*composto*", cioè avente più di due divisori, si può decomporre nel prodotto di numeri primi. Supponiamo, per assurdo, che l'insieme dei numeri primi sia finito e disponiamoli in ordine crescente: 2, 3, 5, ……, *p.* Consideriamo il numero $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots\ldots \cdot p + 1$. Essendo $m>1$ sarà o un numero primo o un numero composto.
  Si presentano, pertanto, due casi:
  - Se *m* è primo il teorema resta così provato dal momento che $m > p$;
  - Se *m* è un numero composto allora potrebbe essere scritto come prodotto di numeri primi fin qui noti. Ora il 2 non può essere un fattore di *m* perché dividendolo per 2 otteniamo come resto il numero 1; la stessa cosa vale per tutti gli altri numeri primi considerati 2, 3, 5, 7, … , *p*. Quindi *m* non si può fattorizzare mediante prodotto di numeri primi. Cosa che è assurda avendo supposto che *m* è un numero composto.
    La conclusione è che ci sono altri numeri primi oltre a quelli "proposti"e che quindi essi sono infiniti.

- Utilizzare un'altra relazione del tipo: $n^2-79n+1601$ per verificare la congettura.
- La relazione del tipo: an^2+bn+c, *con c* diverso da uno, può generare solo numeri primi?

Elementi di prove di verifica

1. *Stabilire quali delle seguenti affermazioni è vera*:
a) Esiste una formula generatrice di tutti i numeri primi
b) Esistono formule generatrici di numeri primi
c) La formula n^2-n+c, con $n \in N_+$ e $c \in N_+$ genera solo numeri primi
d) La formula n^2-n+c, con $n \in N_+$ e $c \in N_+$ genera solo numeri composti
e) La formula n^2+n-c, con $n \in N_+$ e $c \in N$ genera solo numeri primi

2. *Indicare quali sono i primi tre numeri generati dal polinomio* $P(n)=n^2-n+5$:
a) 5; 7; 15
b) 5; 7; 11
c) 5; 9; 11
d) 7; 9; 13
e) 9; 13; 15

3. *Indicare quale sarà il primo numero composto nella formula* $P(n)=n^2-n+41$:
a) Il trentanovesimo termine
b) Il quarantesimo termine
c) Il quarantunesimo termine
d) Il quarantaduesimo termine
e) Non è possibile dare una risposta

4. *Indicare quale sarà il primo numero composto nella formula* $P(n)=n^2-n+7$:
a) Il secondo termine
b) Il terzo termine
c) Il quarto termine
d) Il quinto termine
e) Il sesto termine

5. *Per* $n=c$ *il polinomio* $P(n)=n^2-n+c$ *è uguale a:*
a) c^2

b) $2c$
c) $2c+1$
d) c
e) $c-1$

6. *Per $n=(c-1)$ il polinomio $P(n)=n^2-n+c$ è uguale a:*
a) c^2-2c+2
b) c^2+2
c) c^2-2c
d) c^2+2c
e) c^2

7. *Per $n=(c+1)$ il polinomio $P(n)=n^2-n+c$ è uguale a:*
a) c^2-2c+2
b) c^2+2
c) c^2-2c
d) c^2+2c
e) c^2

Tabella dei numeri primi fino a 10007

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889
1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053
2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129
2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287
2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357
2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423

2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531
2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617
2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741
2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819
2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999
3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257
3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331
3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511
3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571
3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821
3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989
4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231
4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297
4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493
4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583
4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751
4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003
5009	5011	5021	5023	5039	5051	5059	5077	5081	5087
5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279
5281	5297	5303	5309	5323	5333	5347	5351	5381	5387
5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521
5527	5531	5557	5563	5569	5573	5581	5591	5623	5639
5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791
5801	5807	5813	5821	5827	5839	5843	5849	5851	5857
5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053
6067	6073	6079	6089	6091	6101	6113	6121	6131	6133
6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301
6311	6317	6323	6329	6337	6343	6353	6359	6361	6367
6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473
6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571
6577	6581	6599	6607	6619	6637	6653	6659	6661	6673
6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833
6841	6857	6863	6869	6871	6883	6899	6907	6911	6917
6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103
7109	7121	7127	7129	7151	7159	7177	7187	7193	7207
7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411
7417	7433	7451	7457	7459	7477	7481	7487	7489	7499
7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643
7649	7669	7673	7681	7687	7691	7699	7703	7717	7723
7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829

7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919
7927	7933	7937	7949	7951	7963	7993	8009	8011	8017
8039	8053	8059	8069	8081	8087	8089	8093	8101	8111
8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179	8191	8209	8219
8221	8231	8233	8237	8243	8263	8269	8273	8287	8291
8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387
8389	8419	8423	8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501
8513	8521	8527	8537	8539	8543	8563	8573	8581	8597
8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669	8677
8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741
8747	8753	8761	8779	8783	8803	8807	8819	8821	8831
8837	8839	8849	8861	8863	8867	8887	8893	8923	8929
8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001	9007	9011
9013	9029	9041	9043	9049	9059	9067	9091	9103	9109
9127	9133	9137	9151	9157	9161	9173	9181	9187	9199
9203	9209	9221	9227	9239	9241	9257	9277	9281	9283
9293	9311	9319	9323	9337	9341	9343	9349	9371	9377
9391	9397	9403	9413	9419	9421	9431	9433	9437	9439
9461	9463	9467	9473	9479	9491	9497	9511	9521	9533
9539	9547	9551	9587	9601	9613	9619	9623	9629	9631
9643	9649	9661	9677	9679	9689	9697	9719	9721	9733
9739	9743	9749	9767	9769	9781	9787	9791	9803	9811
9817	9829	9833	9839	9851	9857	9859	9871	9883	9887
9901	9907	9923	9929	9931	9941	9949	9967	9973	10007

Sarà vero, ma non ci credo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	

Contesto
Aritmetica: numeri primi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo ciclo quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro-esempi.
L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Nell'attività sono prese in considerazione congetture semplici, verificabili numericamente e non dimostrate algebricamente, in modo da giustificare l'affermazione: Sarà vero ma non ci credo**.**

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".
All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici. E' utilizzata *la metodologia dell'apprendistato cognitivo*[1] intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.
L'attività può essere presentata autonomamente o, meglio, inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Quel che vedo è sempre vero, Non è vero che è sempre vero e Condizione necessaria ma non sufficiente**.**

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.

Prima fase

L'attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione algebrica.

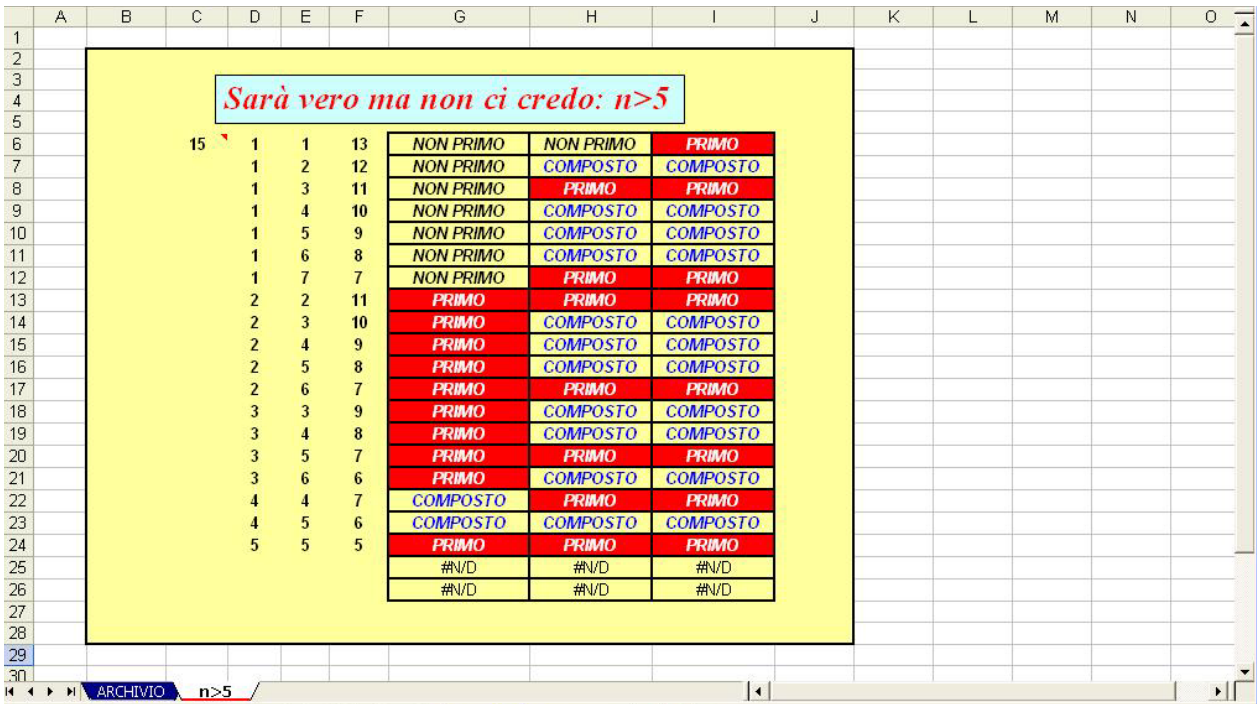
- L'insegnante enuncia agli studenti le seguenti affermazioni:
  - ✓ "*Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi p e q (non necessariamente distinti) tali che n=p+q*"**;** congettura di Cristian Goldbach (1690 – 1764).
  - ✓ "*Per ogni numero dispari n>5, esistono tre numeri primi p, q e r (non necessariamente distinti) tali che n=p+q+r*"**;** problema di Cristian Goldbach sui Numeri Dispari.
  - ✓ "*Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi***"**, congettura di Polignac (1849).
- L'insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici (anche con utilizzo di una calcolatrice) tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni mediante riscontro mediante riscontro su una tabella come quella riportata alla fine dell'attività 4 (*Non è vero che è sempre vero*), che si trova facilmente in rete cliccando su 'prime numbers' con un qualsiasi motore di ricerca.
- L'insegnante evidenzia come il computer, e in particolare l'uso del foglio elettronico, può velocizzare il lavoro, aumentare il numero delle esplorazioni e utilizzare numeri più grandi.

Seconda fase

L'attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L'insegnante descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni in modo da verificare l'affermazione: "*Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi p e q (non necessariamente distinti) tali che n=p+q*", e a ricercare eventuali controverifiche della congettura.

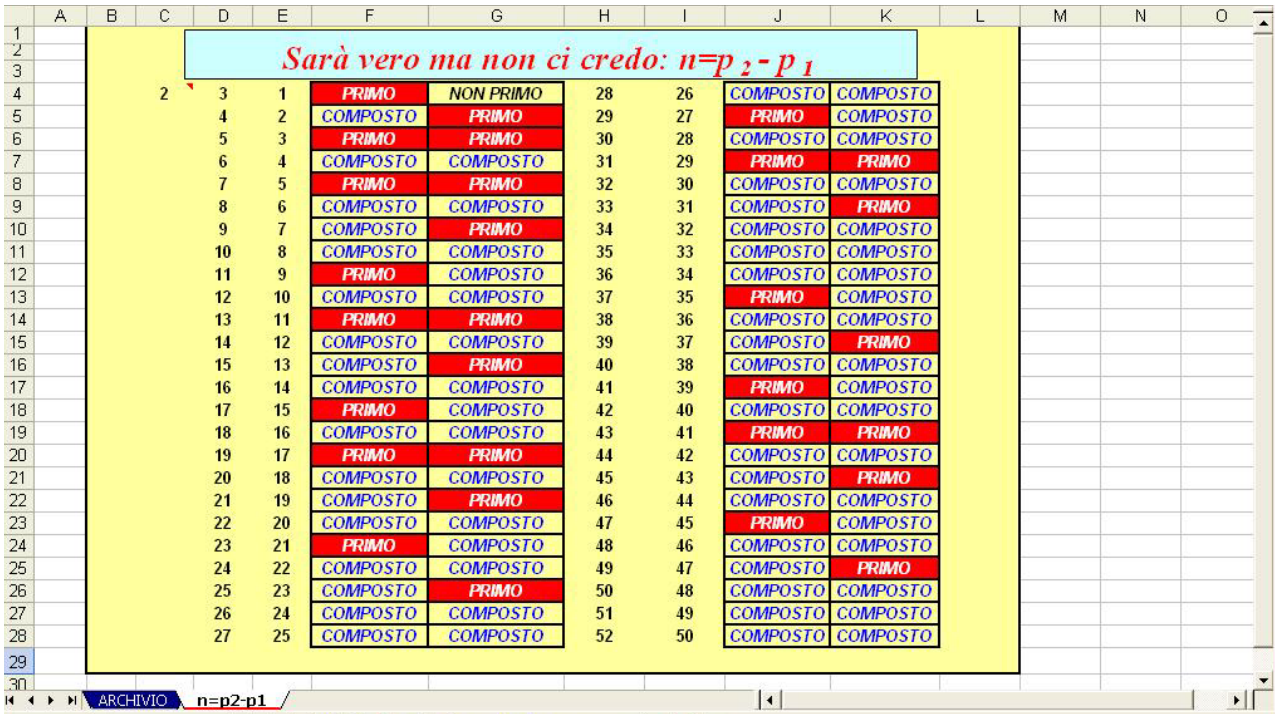
- L'insegnante stimola gli studenti a verificare la successiva affermazione: "*Per ogni numero dispari n>5, esistono tre numeri primi p, q e r (non necessariamente distinti) tali che n=p+q+r*", e a ricercare eventuali contro verifiche della congettura.



15	1	1	13	NON PRIMO	NON PRIMO	PRIMO
	1	2	12	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	3	11	NON PRIMO	PRIMO	PRIMO
	1	4	10	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	5	9	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	6	8	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	7	7	NON PRIMO	PRIMO	PRIMO
	2	2	11	PRIMO	PRIMO	PRIMO
	2	3	10	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	2	4	9	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	2	5	8	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	2	6	7	PRIMO	PRIMO	PRIMO
	3	3	9	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	3	4	8	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	3	5	7	PRIMO	PRIMO	PRIMO
	3	6	6	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	4	4	7	COMPOSTO	PRIMO	PRIMO
	4	5	6	COMPOSTO	COMPOSTO	COMPOSTO
	5	5	5	PRIMO	PRIMO	PRIMO
				#N/D	#N/D	#N/D
				#N/D	#N/D	#N/D

Figura 1

- L'insegnante stimola gli studenti a verificare l'ultima affermazione: *Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi* e a ricercare eventuali



Sarà vero ma non ci credo: $n=p_2 - p_1$

2	3	1	PRIMO	NON PRIMO	28	26	COMPOSTO	COMPOSTO
	4	2	COMPOSTO	PRIMO	29	27	PRIMO	COMPOSTO
	5	3	PRIMO	PRIMO	30	28	COMPOSTO	COMPOSTO
	6	4	COMPOSTO	COMPOSTO	31	29	PRIMO	PRIMO
	7	5	PRIMO	PRIMO	32	30	COMPOSTO	COMPOSTO
	8	6	COMPOSTO	COMPOSTO	33	31	COMPOSTO	PRIMO
	9	7	COMPOSTO	PRIMO	34	32	COMPOSTO	COMPOSTO
	10	8	COMPOSTO	COMPOSTO	35	33	COMPOSTO	COMPOSTO
	11	9	PRIMO	COMPOSTO	36	34	COMPOSTO	COMPOSTO
	12	10	COMPOSTO	COMPOSTO	37	35	PRIMO	COMPOSTO
	13	11	PRIMO	PRIMO	38	36	COMPOSTO	COMPOSTO
	14	12	COMPOSTO	COMPOSTO	39	37	COMPOSTO	PRIMO
	15	13	COMPOSTO	PRIMO	40	38	COMPOSTO	COMPOSTO
	16	14	COMPOSTO	COMPOSTO	41	39	PRIMO	COMPOSTO
	17	15	PRIMO	COMPOSTO	42	40	COMPOSTO	COMPOSTO
	18	16	COMPOSTO	COMPOSTO	43	41	PRIMO	PRIMO
	19	17	PRIMO	PRIMO	44	42	COMPOSTO	COMPOSTO
	20	18	COMPOSTO	COMPOSTO	45	43	COMPOSTO	PRIMO
	21	19	COMPOSTO	PRIMO	46	44	COMPOSTO	COMPOSTO
	22	20	COMPOSTO	COMPOSTO	47	45	PRIMO	COMPOSTO
	23	21	PRIMO	COMPOSTO	48	46	COMPOSTO	COMPOSTO
	24	22	COMPOSTO	COMPOSTO	49	47	COMPOSTO	PRIMO
	25	23	COMPOSTO	PRIMO	50	48	COMPOSTO	COMPOSTO
	26	24	COMPOSTO	COMPOSTO	51	49	COMPOSTO	COMPOSTO
	27	25	COMPOSTO	COMPOSTO	52	50	COMPOSTO	COMPOSTO

Figura 2

- L'insegnante stimola gli studenti a ricercare la differenza tra verifica e dimostrazione in una congettura e a giustificare l'espressione: Sarà vero ma non ci credo, ossia congetture sempre verificabili aritmeticamente ma non dimostrabili algebricamente.

Possibili sviluppi

- Per consolidare l'esperienza l'insegnante propone di verificare altre congetture:

➢ Per *ogni numero dispari n, esistono due numeri primi p e q tali che n = p - q.*
Congettura formulata da Chen nell'esame del problema di Goldbach.

➢ *Esistono infiniti numeri primi gemelli.*
Due numeri primi p e q si dicono gemelli se e solo se p-q=2. Nel 1919 Brun ha dimostrato che la somma dei reciproci delle infinite coppie di numeri primi gemelli converge ad una costante detta, appunto, costante di Brun, *B=1,902160577783278.*

➢ *Esiste sempre un numero primo tra due quadrati perfetti consecutivi.*

Elementi di prove di verifica

1. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera*

a) Per ogni numero n esistono tre numeri primi distinti p, q e r tali che n > p + q +r
b) Per ogni numero n>2 esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n > p + q
c) Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n=p+q
d) Per ogni numero dispari n>2, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n=p+q
e) Per ogni numero pari n>2 esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n = p - q

2. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera*

a) Per ogni numero n esistono tre numeri primi distinti p, q e r tali che $n > p + q + r$
b) Per ogni numero $n>5$, esistono due numeri distinti p e q tali che $n > p + q$
c) Per ogni numero pari $n>5$, esistono due numeri primi (non necessariamente distinti) p, q e r tali che $n = p + q + r$
d) Per ogni numero dispari $n>5$, esistono due numeri primi (non necessariamente distinti) p, q e r tali che $n = p + q + r$
e) Per ogni numero $n>5$, esistono tre numeri dispari (non necessariamente distinti) p, q e r tali che $n = p + q- r$

3. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è una verifica della congettura di Goldbach*

a) $17 = 15 + 2$
b) $22 = 17 + 5$
c) $22 = 20 + 2$
d) $26 = 11 + 15$
e) $4 = 1 + 3$

4. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è una verifica della congettura di Goldbach*

a) $45 = 53 – 5 – 3$
b) $45 = 3 \cdot (17 – 2)$
c) $45 = 3 \cdot (2 + 13)$
d) $45 = 5 \cdot 3 \cdot 3$
e) $45 = 23 + 17 + 5$

5. *La congettura di Polignac asserisce che:*

a) Ogni numero dispari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri consecutivi
b) Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi
c) Ogni numero dispari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi
d) Ogni numero pari e maggiore di 5 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi
e) Ogni numero dispari e maggiore di 5 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi

Condizione necessaria ma non sufficiente

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	

Contesto
Aritmetica: numeri primi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro-esempi.
L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Nell'attività sono prese in considerazione espressioni semplici, verificabili algebricamente, in modo da comprendere l'affermazione: Condizione necessaria ma non sufficiente.

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".
All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici. E' utilizzata *la metodologia dell'apprendistato cognitivo*[1] intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.
L'attività può essere presentata autonomamente o, meglio, inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Quel che vedo è sempre vero, Non è vero che è sempre vero e Sarà vero ma non ci credo.

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.

Prima fase

L'attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione numerica.

- L'insegnante enuncia agli studenti le seguenti affermazioni:
  - ✓ *"Ogni numero primo p si può scrivere nella forma $p=n^2+1$"*, con *n* elemento di *R*.
  - ✓ "*Ogni numero n^2+1 è un numero primo p"*, con *n* elemento di *R*.
- L'insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici (anche con utilizzo di una calcolatrice) tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni mediante riscontro mediante riscontro su una tabella come quella riportata alla fine dell'attività 4 (*Non è vero che è sempre vero*), che si trova facilmente in rete cliccando su 'prime numbers' con un qualsiasi motore di ricerca.
- L'insegnante evidenzia come il computer e in particolare l'uso del foglio elettronico può velocizzare il lavoro e aumentare il numero delle esplorazioni, anche con numeri più grandi.

Seconda fase

L'attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L'insegnante descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni in modo da verificare l'affermazione: *Ogni numero primo p si può scrivere nella forma $p=n^2+1$*, e a ricercare eventuali controverifiche della congettura.
- L'insegnante rileva la banalità della ricerca e quindi, per rendere più interessante l'esplorazione, li invita a operare nell'insieme *N* osservando come talune proprietà hanno diversa validità a seconda dell'insieme in cui opera.

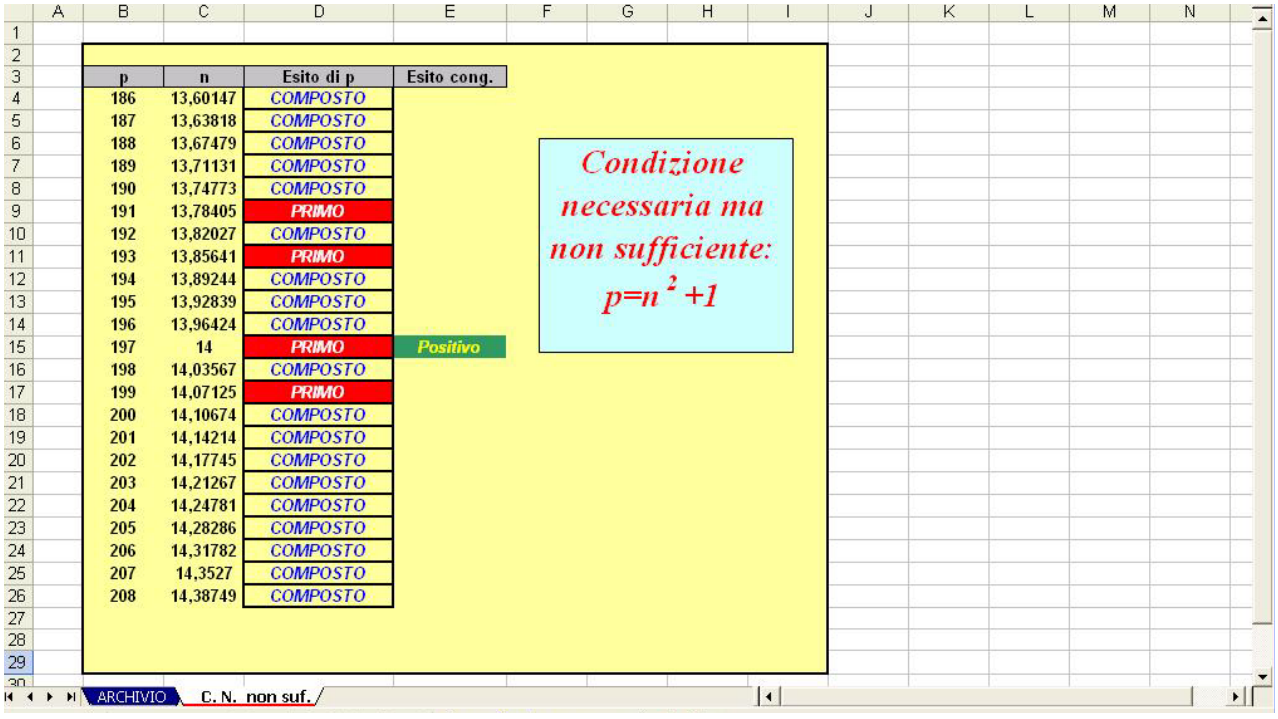
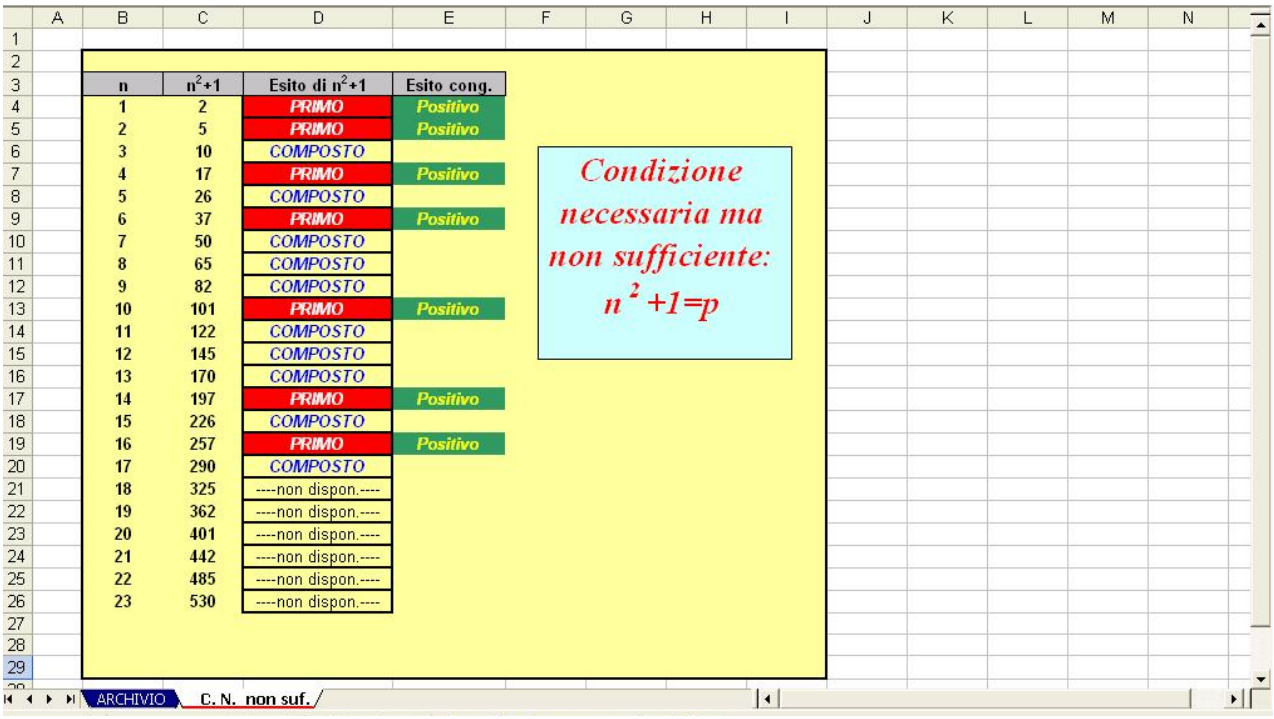


Figura 1

- L'insegnante invita gli studenti a verificare anche l'altra asserzione, ossia: "*Ogni numero n^2+1 è un numero primo p*".



n	n^2+1	Esito di n^2+1	Esito cong.
1	2	PRIMO	Positivo
2	5	PRIMO	Positivo
3	10	COMPOSTO	
4	17	PRIMO	Positivo
5	26	COMPOSTO	
6	37	PRIMO	Positivo
7	50	COMPOSTO	
8	65	COMPOSTO	
9	82	COMPOSTO	
10	101	PRIMO	Positivo
11	122	COMPOSTO	
12	145	COMPOSTO	
13	170	COMPOSTO	
14	197	PRIMO	Positivo
15	226	COMPOSTO	
16	257	PRIMO	Positivo
17	290	COMPOSTO	
18	325	----non dispon.----	
19	362	----non dispon.----	
20	401	----non dispon.----	
21	442	----non dispon.----	
22	485	----non dispon.----	
23	530	----non dispon.----	

Condizione necessaria ma non sufficiente: $n^2+1=p$

Figura 2

- L'insegnante stimola gli studenti a commentare gli aspetti semantici e logici del costrutto: Condizione necessaria ma non sufficiente ed eventualmente Condizione necessaria e sufficiente.

Possibili sviluppi

- Per consolidare l'esperienza l'insegnante prospetta agli studenti di verificare altre affermazioni:

  Teoremi di aritmetica

  - *La somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per due* – non è vero che *ogni numero divisibile per due è somma di due numeri dispari consecutivi*.
  - Un numero è primo se ha due divisori – non è vero che *ogni numero che ha due divisori è primo*.
  - *Un numero è primo se ha soltanto due divisori, uno e se stesso* – è anche vero che *qualunque numero che ha soltanto due divisori, uno e se stesso, è primo*.
  - *Un numero è composto se ha più di due divisori* – è anche vero che *qualunque numero che ha più di due divisori, è composto*.

  Teoremi di geometria

  - *Ogni quadrato è un rettangolo* – non è vero che *ogni rettangolo è un quadrato*.
  - *In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti* – è vero che *un triangolo avente gli angoli alla base congruenti è isoscele*.
  - *Due rette parallele tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti* – è vero che *due rette tagliate da una trasversale formano due angoli alterni interni congruenti sono parallele*.

Elementi di prove di verifica

1. *Stabilire quali delle seguenti affermazioni è vera*:

a) La formula $p=n^2+1$ genera tutti i numeri primi
b) La formula $p=n^2+1$ non genera numeri primi
c) La formula $p=n^2+1$ genera numeri primi solo per n dispari
d) La formula $p=n^2+1$ genera numeri primi solo per n pari

e) Nessuna delle precedenti

2. *Il numero generato dalla formula $p=n^2 + 1$ per $n=12$:*
a) È dispari ed è primo
b) È pari ed è primo
c) È dispari ed è il prodotto di 5 numeri primi
d) È dispari ed è il prodotto di 3 numeri primi
e) È dispari ed è il prodotto di 2 numeri primi

3. *Il primo numero "non primo" generato dalla formula $p=n^2 + 1$ è*:
a) 10 b) 15 c) 26 d) 45 e)33

4. *Condizione sufficiente affinché un triangolo sia isoscele è che sia un triangolo equilatero.*
a) L'affermazione è sempre vera
b) L'affermazione è vera solo per alcuni triangoli isosceli
c) L'affermazione è sempre falsa
d) Non si può esprimere un giudizio in merito
e) Nessuna risposta è esatta

5. *Per conseguire la patente in Italia è necessario essere maggiorenni.*
a) L'affermazione è vera ed è sufficiente
b) L'affermazione è vera ma non è sufficiente
c) L'affermazione è sempre falsa
d) Non si può esprimere un giudizio in merito
e) Nessuna risposta è esatta

Attività con software geometrico

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a contro-esempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.	Argomentare, congetturare, dimostrare Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Figure geometriche.

Nel seguito sono proposte attività di risoluzione di problemi presentati in forma "aperta", cioè che presentano le seguenti caratteristiche:
- hanno un enunciato abbastanza corto;
- non contengono in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi;
- non inducono automaticamente a uno specifico metodo di risoluzione;
- non contengono l'esplicitazione di tutte le richieste; le domande poste sono del tipo:

"*Quali configurazioni assume ... Quali relazioni puoi trovare tra ...*".

I problemi si presentano come situazioni in cui lo studente deve esplorare, utilizzando ciò che gli viene suggerito e anche ciò che egli stesso ritiene utile, per trarre delle conclusioni che non si configurano come "il risultato", ma come le conseguenze delle premesse che ha usato.
Gli studenti generalmente risolvono i problemi sul foglio del quaderno, mentre qui il software di geometria dinamica affianca l'uso di carta e matita.
I livelli di utilizzo del software sono diversi. A un primo livello il software è utilizzato per mostrare un disegno "costruito bene", quindi come uno strumento utile a soppiantare carta e matita laddove si voglia raggiungere un alto grado di precisione. In questo caso l'utilità rimane a livello grafico, senza sfiorare la dinamicità del trattamento delle figure.
A un secondo livello può essere utilizzato per visualizzare oggetti geometrici che, se trascinati, mettono in evidenza proprietà e invarianti legati alla trattazione degli argomenti curricolari di geometria. In questo caso si sfrutta la potenzialità della "funzione di trascinamento" (dragging), ma l'uso del pacchetto è ancora nelle mani dell'insegnante, che mostra risultati di procedure preparate precedentemente.
Un terzo livello di lavoro è quello in cui il software viene utilizzato dagli studenti, per costruire figure geometriche sotto precise consegne, giustificando o meno le scelte fatte.
Infine, il software può essere utilizzato per scoprire proprietà indagando su figure costruite.

È difficile che il primo livello di utilizzazione del pacchetto incida molto sull'attività tradizionale di spiegazione-studio-dimostrazione-esercizio, mentre col secondo livello di utilizzo è più facile che ci sia una modificazione non solo dell'approccio degli studenti a un problema di geometria, ma anche della visione che essi hanno dei contenuti, dei metodi e dello statuto conoscitivo della disciplina stessa.
Vengono proposti agli studenti due tipi di problemi: quelli con richiesta di congetture e dimostrazioni, detti "di esplorazione", e quelli con richiesta di costruzione e validazione, detti "di costruzione".
L'attività di costruzione e quella di esplorazione nel software risultano in realtà strettamente interdipendenti.
Ad esempio, una volta formulata una congettura in un problema di esplorazione, si può cercare di fare una costruzione per validare la scoperta: si può costruire una figura con la proprietà congetturata e vedere se essa supera il test del trascinamento.
Ogni proposta di lavoro nei problemi di esplorazione, si articola in tre fasi diverse:
Prima fase - lavoro a gruppi utilizzando il software e compilazione di schede;
Seconda fase - discussione in classe sulle scoperte e sistematizzazione da parte dell'insegnante;
Terza fase - dimostrazione delle congetture.
Lo studio della geometria affrontato per scoperta e non in modo passivo rende il lavoro più stimolante di quello di un percorso tradizionale.

Prima fase
In questa fase l'insegnante ha un ruolo molto delicato; egli deve riuscire a:
- evitare che i suoi interventi "chiudano" il problema;
- evitare che i suoi interventi sopprimano l'autonomia dell'alunno;
- incoraggiare la ricerca;
- non classificare un risultato in "giusto" o "sbagliato", ma far capire allo studente che qualunque tentativo può farlo progredire nella sua ricerca;
- non stabilire a priori che cosa si può fare e che cosa non si può fare;
- interagire con i vari gruppi senza che i suoi interventi orientino in modo determinante l'attività degli studenti.

Al termine del lavoro in laboratorio l'insegnante raccoglie tutte le schede e qualunque altro materiale utilizzato per la produzione dei risultati.

Seconda fase
La seconda fase è collettiva, in essa sono presentate e discusse le decisioni e le soluzioni di ogni gruppo. Questa discussione di bilancio consiste nell'interazione del gruppo-classe orchestrata dall'insegnante. In questi problemi si sottolineano con gli studenti gli elementi delle procedure del software che sono già passi di dimostrazione, procedendo così in modo continuo dalla congettura alla dimostrazione. Spesso le dimostrazioni possono già essere fatte in classe durante il lavoro a gruppi, direttamente ragionando sulle figure del software. Nella fase di discussione esse vengono esplicitate, poi vengono riscritte in modo preciso. In realtà non si insiste sull'aspetto formale delle dimostrazioni, prestando invece maggiore attenzione alla loro costruzione.

Terza fase
L'ultima fase viene svolta singolarmente dagli studenti, che consegnano poi all'insegnante la dimostrazione delle congetture.
Durante l'attività di gruppo il ruolo dell'insegnante è di aiuto per coloro che si trovano in difficoltà nella risoluzione della proposta di lavoro. Egli non suggerisce né risolve il problema al posto degli studenti, bensì pone domande opportune, in modo che siano gli stessi allievi a trovare le risposte ai loro dubbi.

Descrizione dell'attività
Nel seguito vengono proposti alcuni problemi da risolvere con l'uso di un software geometrico.
In queste attività viene usato il software Cabri Géomètre, ma l'insegnante potrebbe usare eventualmente anche un altro software. I problemi sono di tre livelli e vanno affrontati nell'ordine proposto.

Livello A

Problemi di costruzione
1. Costruire l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo senza utilizzare i comandi del menu.
2. Costruire un triangolo equilatero di lato dato.
3. Dividere un segmento in *n* parti uguali mediante una costruzione.
4. Costruire un quadrato di lato dato.

Problemi di esplorazione
1. *Sia data una circonferenza di centro O.*
   Proposta di lavoro:
   - costruire un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza; siano *A*,*B*,*C*,*D*, i suoi vertici;
   - facendo variare il quadrilatero *ABCD*, quali quadrilateri particolari si possono ottenere?
   - C'è una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Si può trovare una condizione per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza?

2. *Sia dato un parallelogramma ABCD, tre rette passanti per A, B, C e parallele tra loro e una retta qualunque passante per D. Siano E, F e G i punti di intersezione delle tre rette parallele con quella uscente da D.*
   Proposta di lavoro: studiare le relazioni che sussistono tra il segmento *BF* e i segmenti *AE*, *CG*
   - al variare della retta per *D* in un fascio tenendo fisse le parallele;
   - al variare delle parallele tenendo fissa la retta per *D*.

3. *Sia dato un triangolo equilatero.*
   Proposta di lavoro: studiare la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolari condotti da un punto interno (esterno) a ciascuno dei tre lati.

4. *Sia dato un triangolo ABC.*
   Proposta di lavoro: quali ipotesi si devono aggiungere su *ABC* affinché risulti divisibile in due triangoli isosceli?

Livello B

Problemi di costruzione
1. *Siano dati una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t.*
   Proposta di lavoro:
   - costruire la circonferenza che passa per *P* e *Q* ed è tangente a *t* in *P*;
   - giustificare la correttezza della costruzione.

2. *Costruire un parallelogramma data la lunghezza delle sue diagonali.*
3. *Costruire una circonferenza dati due suoi punti e la lunghezza del raggio.*
4. *Costruire una parabola come luogo geometrico*.

Problemi di esplorazione

1. *Siano date due circonferenze C e C' con centri O e O' che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su C e C'.*
   Proposta di lavoro:
   - che relazione c'è tra i punti *D*, *B* ed *E*?
   - Quali relazioni ci sono tra i segmenti *DE* e *OO'* ?
   - Che tipo di quadrilatero è *DOO'E*?
   - Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?

2. *Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.*
   Proposta di lavoro:
   - quali proprietà ha il quadrilatero *LMNP*?
   - Quali configurazioni particolari assume il quadrilatero *LMNP*?
   - Quali ipotesi occorre fare sul quadrilatero *ABCD* affinché *LMNP* assuma tali configurazioni particolari?

   Scrivere le proprie congetture e dimostrarle.

3. *Sia dato un triangolo.*
   Proposta di lavoro:
   - tracciare le mediane, le altezze e gli assi;
   - studiare la relazione che esiste tra baricentro, ortocentro e circocentro.

4. *Sia dato un quadrilatero ABCD. Tracciare gli assi a del lato AB, b del lato BC, c del lato CD, d del lato DA. Sia H il punto di incontro degli assi a e b, K il punto di incontro di a e d, L il punto di incontro di c e d, M il punto di incontro di c e b.*
   Proposta di lavoro:
   - studiare come varia *HKLM* al variare di *ABCD*;
   - dimostrare le congetture prodotte durante l'esplorazione fatta in Cabri.

5. *Sia ABCD un parallelogramma qualsiasi. Si costruisca il punto P_2 proiettando il suo centro su AB, parallelamente a BC. Il segmento P_2D incontra la diagonale AC in un punto; si costruisca il punto P_3, proiettando tale punto su AB, parallelamente a BC. Analogamente si costruiscano i punti P_4, P_5, …, P_n.*
   Proposta di lavoro: qual è la lunghezza di AP_n , in funzione di *AB*?

Livello C

Problemi di costruzione

1. *Costruire una tangente comune a due circonferenze.*
2. *Data una circonferenza C_1 e una circonferenza C_2 tangente internamente a C_1, costruire una circonferenza C_3 tangente esternamente a C_2 e internamente a C_1.*

Problemi di esplorazione

1. *Sia* dato *un quadrilatero ABCD. Considerare le bisettrici dei quattro angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M (in senso orario).*
   Proposta di lavoro:
   - far variare *ABCD*, esaminando tutti i casi particolari: come cambia la figura *HKLM*?
   - Scrivere tutte le scoperte e congetture e dimostrarle.

2. *Tre circonferenze aventi lo stesso raggio passano per un punto comune P.*
   Proposta di lavoro:
   - esiste una relazione tra gli altri tre punti di reciproca intersezione?
   - E tra i loro tre centri?

3. *È stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:*
   vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo *M* un pino *P* e una quercia *Q*. Da *M* dirigiti in linea retta fino a giungere in *P*. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di *MP*. Pianta in questa posizione un paletto P_1. Quindi ritorna in *M* e da qui dirigiti verso *Q* in linea retta. Giunto in *Q* gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di *MQ*. Pianta, in questa posizione un paletto P_2. Il tesoro *T* si trova nel punto medio del segmento P_1P_2.
   Proposta di lavoro: Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo *M*. Ci sono *P* e *Q* ma non c'è *M*. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

4. *Sia dato un quadrilatero ABCD. Sui suoi lati costruire quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Determinati i centri dei quattro quadrati, unirli per ottenere il quadrilatero EFGH.*
   Proposta di lavoro:
   - quali configurazioni può assumere *EFGH*, al variare di *ABCD*?
   - Dimostrare le congetture formulate.

Quante rette per *n* punti?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici. Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura. Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) per affrontare problemi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Punti e rette nel piano.

Questa attività può essere svolta in un primo o in un secondo anno del primo biennio con l'obiettivo specifico di motivare gli studenti alla produzione e alla validazione di congetture. Più in generale, si tratta di un'attività che dovrebbe consentire un significativo e graduale avvio alla dimostrazione.
Il contesto è quello scolastico della geometria e dell'aritmetica elementare; nell'ambiente di lavoro si utilizza, insieme alla carta e alla matita, un software per la rappresentazione di figure geometriche che aiuta nella rappresentazione dei dati ed, eventualmente, un foglio elettronico per l'elaborazione dei dati.
L'attività è fondata su due ipotesi didattiche:

1. Il percorso di apprendimento degli studenti è caratterizzato da tre fasi fondamentali. La prima è quella in cui si risponde a domande del tipo "com'è?", che richiedono l'osservazione attenta di un ambiente al fine di descriverlo. Vi è poi la fase del "perché?" che richiede abilità non solo descrittive, ma anche esplicative: si deve spiegare perché un certo ambiente ha determinate caratteristiche. Si deve quindi utilizzare una teoria, che consenta di rispondere in modo pertinente alle domande. Vi è poi la fase del "cosa succederebbe se...?"; le risposte a domande di tale tipo richiedono l'uso dell'analogia, della simulazione e del pensiero ipotetico-deduttivo.
2. L'utilizzazione di micromondi([1]) come particolari ambienti informatici è assai utile nella didattica della matematica per favorire attività di risoluzione di problemi, passando attraverso tutte e tre le fasi sopra elencate. Infatti lo studente è portato a mettere in gioco, nell'attività di

[1] Un micromondo è un ambiente messo a disposizione di un utilizzatore per fare esplorazioni, per compiere esperienze: l'esplorazione dell'ambiente è condotta sovente per tentativi ed errori; favorisce l'immaginazione, la creatività; invita a formulare ipotesi, a produrre congetture; sollecita attività di carattere prevalentemente euristico.

risoluzione di problemi, abilità a diversi livelli, forse anche perché sente che deve interagire con un mezzo (l'elaboratore elettronico) che non conosce già le risposte (come invece accade quasi sempre per l'insegnante) e questo lo induce a lavorare per tentativi ed errori, con metodi essenzialmente euristici. In un certo senso l'elaboratore affievolisce quel rapporto di sudditanza che esiste tra insegnante e studente e che probabilmente lo porta ad assumere posizioni passive, di ascolto e inibisce l'attività congetturale.

Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in due fasi, la prima delle quali prevede la proposta del problema e la sua risoluzione in piccoli gruppi collaborativi e la seconda una discussione collettiva di bilancio nella quale l'insegnante commenta le diverse soluzioni proposte dai vari gruppi, organizza e sistema tecniche e conoscenze utili a risolvere il problema.

Prima fase

L'insegnante presenta a piccoli gruppi collaborativi la seguente proposta di lavoro:

1. Dati tre punti non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?
2. Dati quattro punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?
3. Dati cinque punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?
4. Dati *n* punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?

Per rispondere alle varie domande si può utilizzare, oltre alle conoscenze, l'elaboratore elettronico[2].
In genere le prime tre domande non comportano particolari problemi e servono, più che altro, a fare entrare nella logica del problema gli studenti. Il ruolo dell'insegnante, in questa prima fase è quello di osservare le differenti strategie risolutive e incoraggiare idee originali, senza preoccuparsi eccessivamente che queste convergano verso la soluzione del problema, ossia verso la determinazione della relazione funzionale che lega il numero di rette al numero di punti.

Seconda fase

L'insegnante avvia una discussione *matematica di bilancio* con l'intera classe, presentando le diverse strategie risolutive attuate dai vari gruppi, evidenziandone limiti e potenzialità. A titolo di esempio che, ovviamente, non esaurisce tutte le possibili strategie risolutive proposte dagli studenti, si presenta la seguente discussione matematica di bilancio condotta dall'insegnante alla presenza di tutta la classe[3].

Discussione matematica di bilancio

Le strategie risolutive presentate dai vari gruppi si possono ridurre essenzialmente alle quattro seguenti:

1. Alcuni studenti, dopo aver organizzato i dati in tabelle (vedi Tabella 1)

numero di punti	*numero di rette*
2	1
3	3
4	6
5	10
.....	…….

Tabella 1

[2] Si intende qui un foglio elettronico e un software per la rappresentazione di figure geometriche. Si precisa che tali ambienti non sono comunque necessari.

[3] Si tratta di una discussione che è il risultato di varie osservazioni e discussioni effettivamente condotte in classi reali sul problema proposto.

passano ai tentativi di generalizzazione. Alcuni, anche perché aiutati da software che consentono di rappresentare figure geometriche, si accorgono che il numero di rette può essere determinato contando, in luogo delle rette, lati e diagonali di poligoni convessi aventi tanti vertici quanti sono i punti considerati.

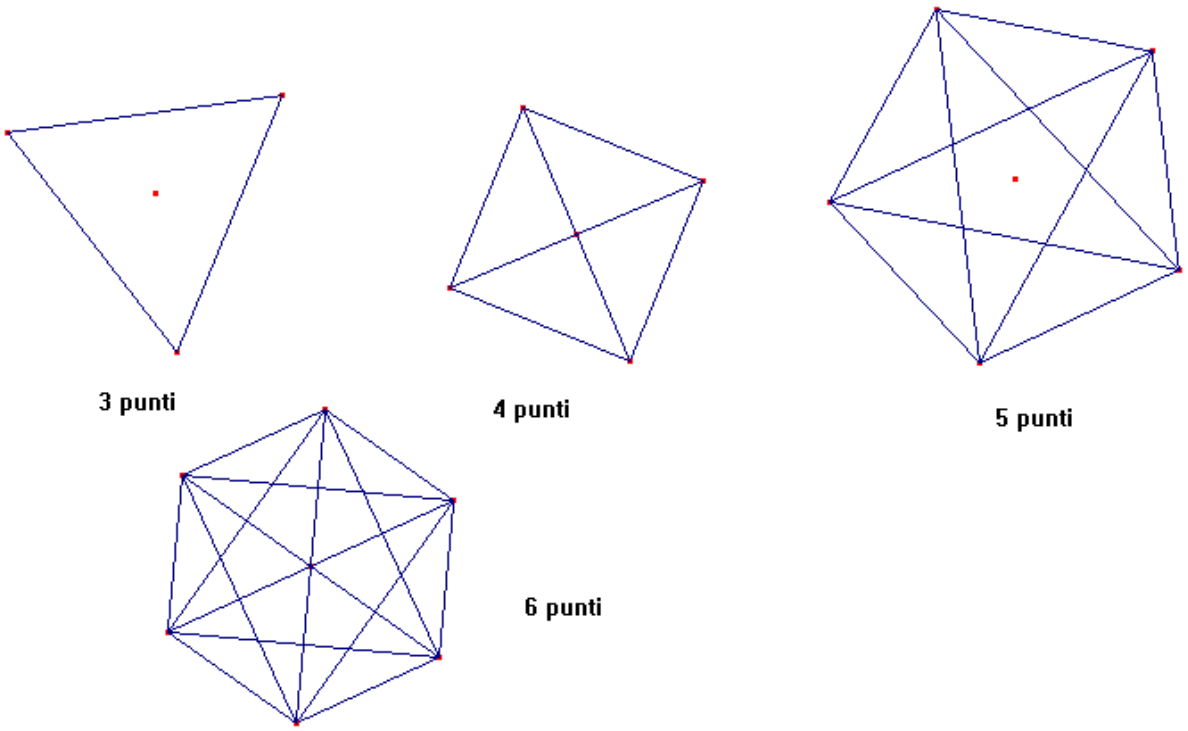


Figura 1

Si può notare che per un numero *n* di punti a tre a tre non allineati passa un numero di rette uguale alla somma fra il numero di punti e il numero di diagonali di un poligono che ha per vertici quei punti. Ciò che si cerca è una formula che permetta, conoscendo soltanto il numero dei punti a tre a tre non allineati a disposizione, di ricavare il numero delle rette. Un'osservazione coordinata tra tabella numerica e figure, ossia condotta sia nel registro numerico che in quello grafico geometrico, consente di congetturare che il numero di rette passanti per un numero *n* di punti risulta dalla somma di tutti i numeri naturali inferiori al numero di punti.
Infatti, nel caso ci siano tre punti, il primo punto è collegato con gli altri due, il secondo punto con un punto, l'ultimo con nessuno, per cui 2+1=3. Quando abbiamo 4 punti, 3+2+1=6. Quando abbiamo 5 punti, 4+3+2+1=10. Quando abbiamo 6 punti 5+4+3+2+1=15. Quando abbiamo 7 punti 6+5+4+3+2+1 = 21… e così via. Ovviamente questa è una congettura, non ancora dimostrata, ma l'osservazione e il ragionamento effettuati consentono di porre in tale congettura una certa fiducia.
Chi ha seguito questa strategia risolutiva può notare che il problema è simile a quello di determinare la somma dei primi *n* numeri naturali.
2. Altri studenti scoprono cosa accade con 6 punti, a tre a tre non allineati; poi con 7 (c'è anche chi arriva fino a 10). Le prove sono fatte per tentativi: non c'è ancora alcuna congettura. L'idea è che una ricca raccolta di dati relativi a casi particolari, possa aiutare a evidenziare regolarità che non sono rilevabili con pochi dati a disposizione.
Un gruppo di studenti che ha scelto questa via, dopo qualche prova affinando la strategia si accorge che, continuando a tracciare rette, già con 6 punti è difficile contare il numero delle stesse.

Allora utilizzando i colori, noterà che è sufficiente contare i lati e le diagonali dei poligoni aventi per vertici i punti dati ed elabora la seguente tabella:

3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	10	15	21	28	36	45

Tabella 2

Osserva che il numero di rette che passano per *n* punti, addizionato con *n*, dà il risultato del numero di rette che passano per *n*+1 punti. Dietro questa affermazione c'è la formula:

$$S(n) = n\text{-}1 + S(n\text{-}1) \text{ e } S(3) = 3$$

con *S*(*n*) che indica il numero delle rette passanti per *n* punti.

3. Altri studenti provano a vedere che cosa accade aggiungendo un punto a quelli dati. Gli stessi constatano di aver intuito una regolarità che viene confermata con la costruzione di una ulteriore tabella. In questo caso la fase del calcolo è successiva all'individuazione della risposta corretta (e viene attuata forse anche per confermare o per convincere chi legge della bontà dell'intuizione avuta). Gli studenti di questo gruppo notano che aggiungendo un nuovo punto e dovendolo congiungere con gli altri preesistenti, si creano tante nuove rette quanti sono i punti presi in considerazione. Il numero di queste nuove rette va addizionato a quello delle rette preesistenti. Questo gruppo di studenti lavora utilizzando l'analogia con il problema della somma dei primi numeri naturali, risolto in una precedente attività e propone la tabella:

Numeri Punti	Somma numeri	Somma rette
0	0	0
1	1	0
2	3	1
3	6	3
4	10	6
5	15	10
6	21	15
7	28	21
8	36	28
9	45	36

Tabella 3

Si nota che la colonna riguardante il numero delle rette risulta "spostata" di un posto verso il basso. Quindi, adattando opportunamente la formula riguardante la somma dei primi numeri naturali, ossia $S(n)= n(n+1)/2$, risolve il problema. La formula è $R(p)=p(p-1)/2$, cioè il numero *R* di rette passanti per *p* punti è uguale alla metà del numero *p* moltiplicato per la differenza tra il numero *p* di punti e uno. Questo gruppo manifesta una buona capacità di attivare e collegare registri diversi per giungere alla risoluzione e sente il bisogno di spiegare una formula con mezzi retorici. Infatti scrive prima la formula e poi la descrive utilizzando il linguaggio naturale, probabilmente per avere maggior controllo su di essa. Sembra che l'utilizzazione del linguaggio naturale abbinato a quello algebrico sia un valido strumento per favorire il controllo e per ridurre il rischio di una perdita di significato.

4. Gli studenti di questo gruppo attivano insiemi di conoscenze cercando analogie per risolvere il problema posto. Uno dei due componenti del gruppo scrive: "mi sono ricordato una sera in cui ci chiedemmo quanti cin-cin potevamo fare escludendo le volte già fatte. Trasportando quella esperienza al quesito vidi che il procedimento è lo stesso. Ovvero, per il primo punto passano tante rette quanti sono gli altri punti; per il secondo tante rette quanti sono gli altri punti meno uno, poiché è già stato legato al primo punto. E con il terzo punto lo stesso, tante rette quanti sono i punti

meno 2 e così via fino a che l'ultimo punto sarà già legato a tutti gli altri. Poi tramite l'osservazione di vari esempi notai che vi era una costante tra tutti, ovvero che se si moltiplicava per se stesso il numero di punti, lo dividevo per due, poi gli sottraevo il numero di rette che passavano per essi. Messi in formula risulta: $n^2/2 - n/2$. Si può giungere alla risposta anche con un ragionamento effettuato in un diverso ambiente. Per esempio si può pensare ai brindisi tra 5 persone. Quante volte in totale si può fare fare cin-cin? Essendo in 5 si può farne 5 ognuno, quindi 25. In effetti sono solo 4 ognuno, poiché uno non può fare cin-cin da solo, quindi 20; però bisogna eliminare le coppie già fatte e che quindi si deve sottrarre a 20 il numero di cin-cin già fatti. Sono 10 e 20 - 10 = 10. In 5 si possono fare 10 cin-cin. Per riportarlo in una tabella:

5 cin-cin: 0 * * * *
* 0 * * *
* * 0 * *
* * * 0 *
* * * * 0

Si può notare che il numero dei doppioni è sempre uguale alla metà del totale di coppie (esclusi quindi i 5 cin-cin che non si possono fare, perché uno non può fare cin-cin da solo).
Mettendo in formula $(n^2 - n)/2$.
Per tornare al nostro caso, le rette sono paragonabili ai cin-cin (individuabili sia l'uno sia le altre da due elementi, bicchieri o punti che siano) e il bicchiere singolo che non può fare cin-cin al punto singolo che non può individuare da solo una e una sola retta.
Quindi la formula che vale per i cin - cin vale anche per i punti e le rette".
L'uso dei verbi al singolare, suggerisce un basso livello di collaborazione tra i componenti del gruppo. Come si può notare, in tal caso l'utilizzazione dell'analogia è il punto di partenza del procedimento risolutivo, diversamente dal gruppo considerato al punto precedente.

Possibili sviluppi

- Successioni definite per ricorrenza.
- Programmi per il calcolo di successioni definite per ricorrenza.
- Complessità di calcolo per iterazione e ricorsione.
- Le differenze finite per la determinazione di leggi polinomiali.

Elementi di prove di verifica

1. *Il numero delle diagonali di un poligono*

Determinare la relazione che lega il numero delle diagonali di un poligono al suo numero di lati.

2. *La somma degli angoli interni di un poligono*

Determinare la relazione che esiste tra la somma degli angoli interni di un poligono e il numero dei lati del poligono.

3. *Il numero di regioni piane formato da n rette*

Quante sono le regioni di piano individuate da n rette a due a due incidenti e tali che non più due di esse concorrano in uno stesso punto?

Si può fare un riassunto in matematica?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici. Analizzare semplici testi del linguaggio naturale. Calcolare somma, prodotto, quadrato di polinomi. Utilizzare le proprietà delle operazioni tra i numeri per risolvere equazioni.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. I polinomi e le loro operazioni. Il grafo di calcolo di un'espressione. Funzioni elementari. Zeri di una funzione lineare, equazioni.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni	Lingua italiana Lingue straniere

Contesto
Linguaggi.

L'interdisciplinarità tra matematica e lingua può essere interpretata secondo due modalità diverse e complementari:

a) da una parte, se si mette al centro dell'attenzione il mezzo linguistico di comunicazione, ad esempio la lingua italiana (e questo vale anche per le altre lingue moderne usate nella comunicazione) si nota che la lingua, in quanto mezzo di espressione comune, offre a tutte le discipline la possibilità di capirsi; cioè, ci si esprime in italiano, sia per parlare di matematica, sia di fisica, sia di storia, sia, ovviamente, di italiano;
b) dall'altra, se si guardano le cose dal punto di vista della matematica, si nota che la matematica (e questo vale anche per le altre discipline) come oggetto di studio, può essere spiegata e studiata sia in italiano, sia nelle altre lingue parlate e scritte.

Ora la lingua, ora la matematica, offrono, a seconda del punto di vista, la possibilità di "tradurre" qualcosa da un campo all'altro.
Il passaggio semantico può verificarsi o da una disciplina all'altra (matematica, storia, chimica, ecc.) se la lingua è la stessa, quindi l'elemento comune è la lingua; o da una lingua all'altra (italiano, inglese, francese, ecc.) se tutte trattano una medesima disciplina, ad esempio la matematica e quindi l'elemento comune è la matematica.
Abilità acquisite all'interno di una disciplina possono utilizzarsi in un'altra di solito vista come lontana. Le formule sono un espediente per scrivere in modo sintetico (riassumere) concetti che si possono esprimere anche a parole.
In matematica, oltre alle operazioni, si possono fare anche riassunti così in lingua, oltre ai riassunti, si possono fare operazioni!
Si può definire operazione linguistica qualsiasi intervento su un enunciato che ne trasformi la formulazione.
L'attività vuole mostrare come operazioni "linguistiche" di traduzione e riassunto siano utilizzate costantemente anche in ambito matematico, in particolare è evidente la loro funzione nella costruzione di enunciati che rappresentano definizioni o parti essenziali di proposizioni e, teoremi.

Infatti tali enunciati devono possedere due elementi fondamentali: devono *riassumere* la natura, la forma o altre caratteristiche e proprietà degli oggetti e concetti matematici a cui si applicano e devono *tradurre* in *linguaggio specifico* il *linguaggio naturale*.

Descrizione dell'attività

L'insegnante chiede agli studenti: *sapete dare una definizione di circonferenza?*
Dopo un momento di perplessità gli studenti provano a dare una risposta.
Ecco alcuni esempi di risposte:

1. La circonferenza è la curva che racchiude il cerchio.
2. E' una linea chiusa che non cambia curvatura.
3. La circonferenza è una figura piana a contorno curvo.
4. La circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.
5. La circonferenza è il perimetro del cerchio.
6. La circonferenza è una curva che ha equazione $x^2+y^2=r^2$.
7. La circonferenza è

Nelle risposte si osserva che, a parte alcuni errori che nascono dalla confusione peraltro molto diffusa tra circonferenza e cerchio, le risposte date dagli studenti si possono classificare su diversi livelli:

Livello A: definizione discorsiva, con linguaggio naturale corretto, non matematico.
La circonferenza è la curva che racchiude il cerchio.

8. E' una linea chiusa che non cambia curvatura.

Livello B**:** discorsiva, in lingua italiana ma con linguaggio matematico corretto.
La circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.
Livello B bis**:** riassunto in lingua italiana con linguaggio matematico non corretto.
La circonferenza è il perimetro del cerchio.
Livello C**:** con linguaggio simbolico interamente matematico.

9. La circonferenza è una curva che ha equazione $x^2+y^2=r^2$.

Livello D**:** rappresentazione grafica della definizione:

la circonferenza è

Per analizzare i livelli si utilizzano le definizioni della nota 1 della terza attività del nucleo *Relazioni e Funzioni*; in particolare si possono evidenziare le seguenti "traduzioni":

- a) passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio naturale (parafrasi o riassunto);
- b) passaggio dal linguaggio naturale a quello algebrico;
- c) passaggio dalla forma algebrica al grafico.

Tipologia di traduzione	*Discipline letterarie e matematiche*
a)	▪ parafrasi ▪ riassunto ▪ riscrittura secondo registri diversi
b)	▪ dalla matematica all'italiano e viceversa ▪ dall'inglese all'italiano e viceversa
c)	▪ dalla espressione linguistica di un problema alla sua riscrittura in linguaggio matematico ▪ dalla rappresentazione analitica a quella grafica

L'insegnante fa riflettere gli studenti sul fatto che, anche in matematica, si possono fare senza accorgersene riassunti e traduzioni; infatti è ciò che gli studenti hanno fatto rispondendo alla domanda.
L'insegnante chiarisce che:

- il passaggio dal livello A al livello B e dal livello B al livello B bis è un "riassunto" perché passa dalla lingua italiana ad una parafrasi sempre in lingua italiana;
- il passaggio dal livello B al livello C è una traduzione fra "lingue" diverse perché passa dalla lingua italiana al linguaggio simbolico;
- l'equazione $x^2+y^2=r^2$ si può considerare un riassunto del livello B (anche se limitata a un caso particolare);
- il passaggio dal livello C alla rappresentazione grafica è una traduzione di tipo c) perché si passa dalla scrittura simbolica alla rappresentazione grafica.

L'ultimo passaggio è analogo al trasferimento di un racconto scritto nelle sequenze di un racconto per immagini.
Per consolidare questi concetti, l'insegnante propone ulteriori esempi:

1. *Individuare il significato del simbolo = nella seguente espressione letterale:*

$$a(a-2)+1-(1-a)\,(1+a) = a(a-2)+1-(1-a^2) = a^2-2a+1-1+a^2 = 2a^2-2a = 2a\,(a-1)$$

Con la guida dell'insegnante gli studenti osservano che il primo *uguale* rappresenta un "riassunto" in quanto si è scritto in altro modo il prodotto di due binomi; il secondo *uguale* rappresenta una parafrasi perché, (eseguendo i prodotti) spiega l'espressione precedente; il terzo è un riassunto per somma algebrica ed è affine al riassunto in lingua italiana.
Si osserva che in matematica, rispetto alla lingua italiana, il riassunto può seguire regole più rigide.
Se si uguaglia a zero, l'espressione precedente diventa un'equazione e, adesso, questo *uguale* significa un'altra cosa:

$$a(a-2)+1-(1-a)\,(1+a) = 0.$$

Usiamo il riassunto trovato e avremo:

$$2a\,(a-1) = 0;$$

ma quando un prodotto è uguale a zero? Quando almeno uno dei due fattori è uguale a zero:

$$2a=0 \Rightarrow a=0$$
$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

L'equazione $2a\,(a-1) = 0$, si può anche risolvere per via grafica (cioè traducendo l'equazione in un grafico): infatti le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione:

$f(a)= 2a^2-2\ a$

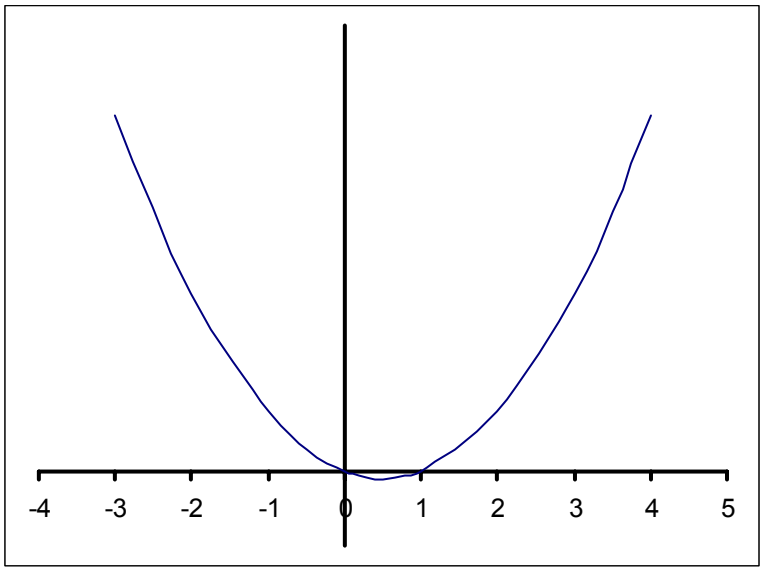


Figura 1

2. *Scomporre in fattori primi i seguenti numeri*: 225; 456; 1890.

Scomposizione in fattori primi:

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$
$$456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$$
$$1890 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$$

In ciascuna delle uguaglianze precedenti uno dei due membri può essere considerato come il riassunto dell'altro, quale?

Questo esempio si può classificare come una riscrittura secondo registri diversi.

3. *Scrivere tutti i numeri tre cifre che si possono ottenere cambiando l'ordine delle cifre* (permutazione) *nel numero* 324.

Permutazioni:

324; 234; 423; 342; 432; 243.

- La cifra 3 presente nel primo numero ha lo stesso valore in tutti gli altri?
- Se si interpreta il numero come una "parola" del linguaggio matematico, si può dire che queste parole hanno tutte uguale significato?
- Questo esempio si può classificare come una traduzione fra "lingue" diverse?

La risposta all'ultima domanda è affermativa anche se, in questo caso, la parafrasi è scorretta.
Rispetto agli esempi precedenti, la permutazione produce oggetti di significato profondamente diverso: lo spostamento "posizionale" dei termini non è indifferente ai fini del senso, analogamente a quanto succede nella lingua italiana:

bravo ragazzo e ragazzo bravo

giorno più giorno meno e più giorno meno giorno

I linguisti possono distinguere, in tale ambito, diversi tipi di parafrasi e riassunti:

- Parafrasi per semplice spostamento di parole (corretta). *Il senso non cambia.*
- Parafrasi per spostamento di parole (scorretta per sintassi). *Il senso cambia o si perde*.
- Parafrasi redatta per rendere il testo più chiaro e comprensibile. Si opera sia sul lessico, sia sulla sintassi *(con prolungamento dell'estensione del testo e per spiegare testi poetici e renderli più chiari)*.
- Parafrasi redatta per cambiare registro: burocratico, aulico, ironico, enfatico, ecc..
- Riassunto per nuclei concettuali, sottrazione, ….

Dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico: prove di verifica

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici. Analizzare semplici testi del linguaggio naturale, individuando eventuali errori di ragionamento. Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se…allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). Costruire la negazione di una frase.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Spazio e figure	Lingua italiana Lingue straniere

Contesto
Linguaggi.

Oggi, per l'importanza sempre più grande che hanno assunto i linguaggi artificiali, si impone la necessità di un'attenzione non episodica alle regole che governano un linguaggio.
Sembra che questo campo, sempre più, stia diventando di pertinenza del pensiero matematico oltre che del linguista o del filosofo.
Questo offre al docente di matematica grandi spazi per attività sperimentali ed interdisciplinari, con il docente di lettere e non solo, visto che la conoscenza del linguaggio è un fatto trasversale rispetto a tutte le discipline scolastiche.
L'obiettivo è quello di far capire agli studenti che un'espressione algebrica è una frase scritta in linguaggio simbolico e che in Algebra si possono commettere errori di "grammatica" allo stesso modo che nella lingua italiana.
Il linguaggio è l'insieme delle proposizioni ben formate, la grammatica è l'insieme di un alfabeto e delle regole utilizzate per costruire proposizioni ben formate.
La logica matematica studia i processi che portano a sviluppare un ragionamento, con il fine di controllarne la correttezza.
Nel linguaggio naturale, definiamo proposizione una frase che esprime un pensiero compiuto, in logica la proposizione (o affermazione o enunciato) è quella ben formata della quale si può dire se è vera o falsa.

Si può iniziare con alcuni esempi di proposizioni in senso logico

- Il 13 dicembre è Santa Lucia
- Il numero 7 è primo
- Il numero 12 è dispari

Le prime due sono proposizioni "vere" e la terza è una proposizione "falsa".

Nota: "Vera" per chi sa cos'è un numero primo, per chi conosce il calendario, ecc..

Le seguenti affermazioni

- Napoli è una città bella
- Che bella giornata!

non sono proposizioni dal punto di vista logico perché non è possibile stabilirne il valore di verità.
Anche in matematica, come in italiano, la semantica studia il significato delle proposizioni (insieme dei significati) e la sintassi ne esprime la struttura (l'insieme delle regole e delle convenzioni).
Non si propone qui una trattazione sulla logica delle proposizioni, sui connettivi e sui quantificatori ma si invitano gli studenti a fare un'analisi sia delle proposizioni scritte nel linguaggio naturale che di quelle scritte nel diversi linguaggi simbolici dell'algebra, della geometria e della logica.

L'attenzione è così rivolta all'uso corretto di locuzioni della lingua italiana che hanno valenza logica e all'analisi di semplici testi del linguaggio naturale per individuare eventuali errori di ragionamento.

A tal fine si propongono esercizi del tipo:

Completa opportunamente usando il connettivo se…allora:

- ….. è europeo ….. è francese
- ….. il triangolo è equilatero ….. il triangolo è isoscele
- ….. è quadrato….. è rombo
- ….. è numero primo….. è divisibile per 1

Particolare attenzione si pone alle espressioni del tipo:

Se manca la benzina la macchina si ferma

in cui il significato può essere spesso mal interpretato: la mancanza di benzina implica certamente ($\Rightarrow$) che la macchina si fermi, ma se la macchina si è fermata non è detto che la causa sia la mancanza di benzina!

Si ha la possibilità di distinguere tra implicazione ($\Rightarrow$) e doppia implicazione ($\Leftrightarrow$) e tra condizione necessaria, condizione sufficiente e condizione necessaria e sufficiente.

Analogamente non si intende fare una trattazione sui quantificatori ma porre l'attenzione sul fatto che, per esempio, è diverso dire

Il *triangolo ABC è ottusangolo*

dal dire

In geometria euclidea ***un*** *triangolo ABC ottusangolo ha la somma degli angoli interni uguale a 180° gradi.*

Nella prima frase si usa il quantificatore esistenziale $\exists$ e nella seconda il quantificatore universale $\forall$
Dal punto di vista linguistico la differenza sta nell'articolo ***il*** e ***un***. E' importante allora capire il ruolo che in una frase italiana hanno gli articoli determinativi e indeterminativi.
Si osserva che intervengono conoscenze di due discipline diverse, italiano e matematica, ed è sorprendente rendersi conto che concetti studiati all'interno di una materia possono applicarsi ad un'altra, a priori anche molto diversa; inoltre questa può essere la via per riconoscere che in matematica, anche quando si usano formule, si ha a che fare con affermazioni di senso compiuto (è la visione della matematica come scienza e non come strumento).

Elementi di prove di verifica

1. *Considerare le seguenti frasi:*

a) Madrid è la capitale della Spagna
b) Oggi c'è il sole
c) Viva il Milan

d) Il Tevere è un fiume della Francia
e) *x* è un numero pari
f) Tutti i triangoli equilateri hanno i lati uguali
Quali di queste sono proposizioni ?

2. *Sotto quali ipotesi le seguenti proposizioni sono vere?*
a) Antonio parla e scrive
b) Oggi piove o tira vento
c) Febbraio è il mese più corto dell'anno e in questo periodo si festeggia l'ultimo giorno di Carnevale

3. *Riconosere il tipo di disgiunzione (inclusiva o esclusiva) usata nelle seguenti proposizioni:*
a) Il prossimo nascituro sarà maschio o femmina
b) Mio nipote canta o suona
c) Mia sorella guarda la televisione o telefona
d) Il poligono è concavo o convesso

4. La proposizione *non è vero che non sono interessato* equivale ad una sola delle seguenti affermazioni. *Quale?*
a) sono disinteressato
b) non sono disinteressato
c) non è vero che sono interessato
d) non sono interessato

5. Dalla proposizione*: Il professore non ha detto che non avrebbe interrogato* si può trarre una sola delle seguenti deduzioni. *Quale?*
a) Il professore interrogherà certamente
b) Forse il professore interrogherà
c) E' sicuro che il professore non interrogherà
d) Il professore non ha intenzione di interrogare

6. La proposizione: *Tutti i rettangoli sono parallelogrammi* equivale ad una sola delle seguenti affermazioni. *Quale?*
a) Almeno un rettangolo è parallelogramma.
b) Tutti i parallelogrammi sono rettangoli
c) Nessun parallelogramma è rettangolo
d) Non c'è nessun rettangolo che non sia un parallelogramma

7. Data la proposizione vera:
Due triangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso
individua tra le seguenti affermazioni l'unica vera:
a) basta che due triangoli abbiano due lati ordinatamente uguali perché siano uguali
b) condizione sufficiente perché due triangoli siano uguali è che abbiano ordinatamente uguali due lati
c) condizione necessaria perché due triangoli siano uguali è che abbiano ordinatamente uguali due lati
d) se due triangoli hanno un angolo uguale sono uguali

8. La proposizione:
Se non hai finito i compiti non vai al cinema equivale ad una sola delle seguenti proposizioni. *Quale?*

a) se hai finito i compiti vai al cinema
b) se vai al cinema hai finito i compiti
c) se non vai al cinema non hai finito i compiti
d) se vai al cinema non hai finito i compiti

9. Siano le proposizioni:
A : esco
B : vado in discoteca
C : mi diverto
Traduci in linguaggio naturale la forma enunciativa :

$$(A \wedge B) \Rightarrow C$$

10. Inventa una proposizione *D* del linguaggio naturale che traduca la seguente proposizione scritta in linguaggio simbolico :

$$((A \vee B) \wedge (\sim C)) \Rightarrow D$$

Grissini e triangoli

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici. Produrre congetture. Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano. Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Eventi e probabilità. Rette, segmenti, poligoni. Equazioni e disequazioni. Semplici funzioni razionali.	Argomentare, congetturare, dimostrare Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Probabilità e geometria

L'attività si colloca al primo anno del secondo biennio quando gli studenti hanno già acquisito l'abilità di usare ed analizzare in varie situazioni linguaggi simbolici, produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e sono in possesso di conoscenze relative allo spazio degli eventi nel caso finito e alla valutazione classica di probabilità.
L'attività è finalizzata a favorire negli studenti l'evoluzione dall'argomentare al dimostrare privilegiando le loro capacità di ragionamento stimolate dal fatto che il problema proposto non suggerisce, a priori, neppure intuitivamente la soluzione.

Descrizione dell'attività
Il grissino
Un grissino di lunghezza b viene spezzato in tre punti a caso. Qual è la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo?
Si invitano gli studenti a formulare delle congetture (magari provando a spezzare in tre parti un grissino…) dalla discussione emerge che affinché i tre pezzi di grissino formino un triangolo essi devono avere una certa lunghezza!
La necessità di porre condizioni sulla lunghezza porta a tradurre il problema in linguaggio matematico: si consideri il grissino come un segmento che deve essere diviso in parti in modo da poter formare un triangolo.
Si rappresenti un segmento di lunghezza b e siano x e y due delle sue parti:

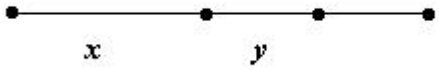


Figura 1

E' facile capire che $x + y < b$ traduce, in linguaggio formale, la condizione che il segmento possa essere diviso in tre parti.
Si sa che ciascuna delle tre parti per poter formare un triangolo deve avere una lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri due, che tradotto formalmente:

$$x < b/2 \; ; \quad y < b/2; \quad x + y > b/2$$

Il passaggio dal grissino al segmento non è banale!
Richiede un processo di astrazione che, in questo contesto, si propone di realizzare utilizzando le abilità relative al calcolo delle probabilità. Per giungere ad esso è opportuno aver già abituato i ragazzi a calcolare la probabilità nel caso di spazi infiniti di eventi come rapporto di aree, proponendo ad esempio esercizi del tipo seguente.
Si vuole colpire un bersaglio di forma circolare. Qual è la probabilità di colpire il bersaglio in un punto più vicino al centro che alla circonferenza?

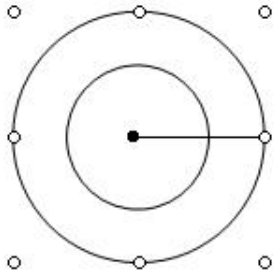


Figura 2

E' necessario osservare che il segmento, a differenza del grissino, è omogeneo rispetto ai suoi punti per cui si può congetturare che tutti i punti sono equiprobabili (cioè il segmento si può "spezzare" in ogni punto); si può quindi applicare la definizione classica di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
Per il calcolo dei casi favorevoli si utilizzano le condizioni:

$$x < b/2 \; ; \quad y < b/2; \quad x + y > b/2$$

Per il calcolo dei casi possibili si utilizzano le condizioni:

$$x>0; \quad y>0; \quad x + y < b$$

che nel caso continuo (per un segmento) possono diventare $x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad x + y \leq b$ includendo così anche i casi limite.

Se si interpretano le disequazioni precedenti nel piano cartesiano si conclude che la probabilità cercata è data dal rapporto tra l'area $A1$ del triangolo rettangolo (indicato in arancio in Figura 3) e l'area A del triangolo rettangolo che ha i cateti di lunghezza b.

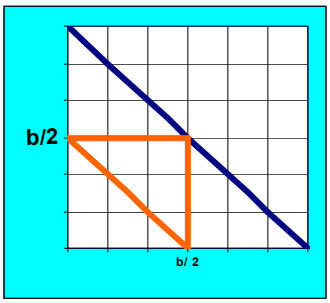


Figura 3

Se si indica con p la probabilità cercata, si ha:

$$p = A_1/A = 1/4$$

La risposta 1/4 non era assolutamente prevedibile!
Nel calcolo delle probabilità spesso le soluzioni dei problemi sono tutt'altro che intuitive e questo fatto ha una valenza didattica notevole soprattutto sul piano della motivazione.
Per aumentare il livello di astrazione si possono seguire due direzioni, aumentare:
a. il numero dei pezzi;
b. le condizioni sul tipo di triangolo.

Caso a
Se il segmento in questione si divide in quattro parti qual è la probabilità che si ottenga un quadrilatero?
Se il segmento si divide in cinque parti? …e in *n* parti?
Gli studenti, per rispondere, possono formulare congetture, pensando a un:
- grissino "ideale" che si può dividere in *n* parti;
- segmento divisibile all'infinito.

La discussione permetterà di consolidare la distinzione tra caso discreto (*grissino*) e caso continuo (*segmento*).

Caso b
Se la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo è 1/4, qual è la probabilità di ottenere un triangolo:
- equilatero?
- rettangolo?

Triangolo equilatero:

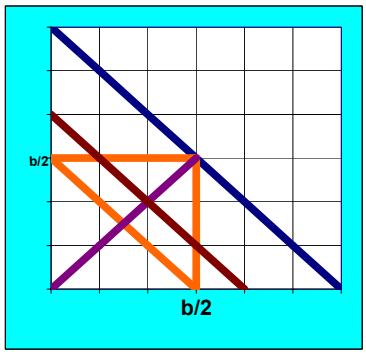


Figura 4

Il triangolo è equilatero se $x = y = b/3$
I casi favorevoli sono costituiti dal punto di intersezione (Figura 4) della bisettrice $y=x$ con la retta

$$x+y = 2/3\ b$$

Ne consegue che la probabilità di ottenere un triangolo equilatero dividendo a caso in tre parti un segmento è 0.
Questo non vuol dire che l'evento non si possa verificare!
Ma è un evento di probabilità nulla (come vincere alla lotteria)!

Triangolo rettangolo:
Dalla relazione Pitagorica:

$$x^2+y^2 = (b-x-y)^2$$

si perviene, con semplici calcoli, all'equazione:

$$y = \frac{b(x-\frac{b}{2})}{x-b}$$

che rappresenta, con i vincoli posti dal problema considerato, il ramo di iperbole disegnato azzurro in figura:

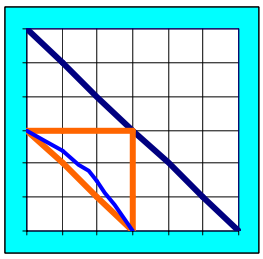


Figura 5

I casi favorevoli sono i punti del ramo di iperbole e i casi possibili sono sempre dati dall'area del triangolo rettangolo che ha per cateti b.
Se si suppone che si sia ottenuto un triangolo, per calcolare la probabilità che sia rettangolo, si deve tener conto che i casi favorevoli restano gli stessi mentre i casi possibili sono dati dall'area del triangolo rettangolo in arancio.
Quanto vale p?
Essendo l'area di un arco di curva uguale a zero la probabilità è in ogni caso 0.

Osservazione**:** Comprendere che una curva ha area 0 è un concetto che richiede una capacità di astrazione molto elevata.

Possibili sviluppi
- Il caso b può essere ulteriormente sviluppato cercando la probabilità che il triangolo sia ottusangolo. La probabilità è sempre un rapporto di aree in questo caso però, la sua valutazione quantitativa richiede la conoscenza del calcolo integrale (area di una figura a contorno curvilineo).

Area di un rettangolo: come cambia variando la lunghezza dei lati

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a contro-esempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	Argomentare, congetturare, dimostrare Relazioni e funzioni Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Figure geometriche e loro relazioni.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del secondo biennio in un contesto matematico in cui gli allievi sono stimolati a formulare congetture di fronte a una situazione problematica. Con esplorazioni successive, alcune di queste congetture saranno confutate, mentre quella corretta sarà corroborata. Rimane però da spiegare il *perché*, che non appare intuitivamente evidente. Solo il passaggio al linguaggio algebrico e alla sua traduzione grafica nel piano cartesiano permetterà di comprendere e dimostrare le ragioni per cui la congettura è vera.
Si userà sia il quadro algebrico che quello cartesiano: la lettura opportuna delle rappresentazioni usate permetterà un inquadramento teorico delle esplorazioni numeriche iniziali.
E' opportuno che gli studenti dapprima congetturino e facciano previsioni, successivamente esplorino esempi numerici concreti e, infine, utilizzando il linguaggio algebrico, esplicitino in forma matematicamente compiuta la proprietà studiata.
L'attività può essere affrontata con una conoscenza preliminare del piano cartesiano, della parabola e dell'iperbole equilatera come funzioni.

Descrizione dell'attività
Prima fase
Presentazione del problema.
Si consideri un rettangolo; come varia la sua area se un lato diminuisce del 10% e l'altro aumenta del 10%?

Possibili risposte degli studenti:
- l'area non cambia,
- dipende da quale lato (il maggiore o il minore) aumenta/diminuisce ….

L'insegnante invita gli studenti a fare degli esempi. I calcoli mostrano che c'è sempre una diminuzione dell'area. Di quanto diminuisce? Di poco, di tanto?
Il lavoro degli studenti, opportunamente guidato dall'insegnante, si precisa via via, definendo i termini del problema in forma sempre più netta.
È solo con il ricorso al linguaggio algebrico che il problema può essere interpretato in forma chiara e incontrovertibile:
se le dimensioni dei lati del rettangolo di partenza sono a e b, le dimensioni del secondo rettangolo sono $1{,}1a$ e $0{,}9b$; e *l'area* vale quindi:

$$1{,}1a \cdot 0{,}9b = 0{,}99ab$$

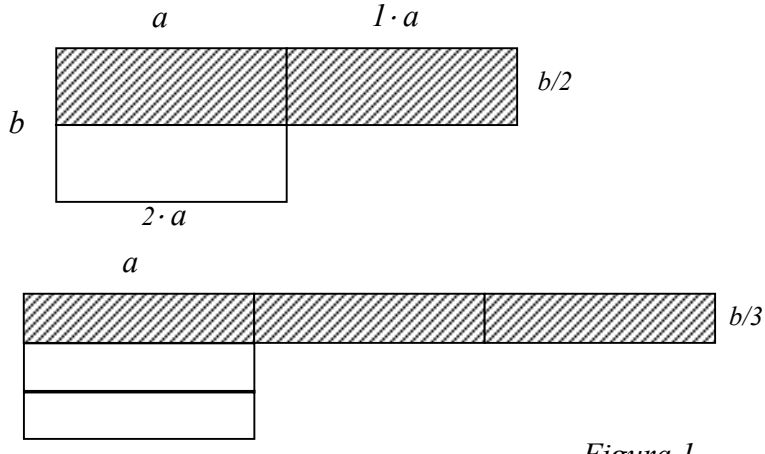
cioè diminuisce dell'1%.

Seconda fase
Generalizzazione del problema.
La seguente generalizzazione è occasione di discussione fra gli studenti sulle varie strategie risolutive.
I lati, di misura a e b, di un rettangolo vengono incrementati, uno secondo un fattore h (cioè a diventa $a+h\cdot a$) e un altro secondo un fattore k (cioè b diventa $b+k\cdot b$).
Come varia l'area del rettangolo?

Il problema ha senso per $h > -1$ e $k > -1$, perché per h e k uguali a -1 le dimensioni del rettangolo si ridurrebbero a zero.
L'area aumenta se h e k sono entrambi positivi.
Ha senso, invece, porsi il problema per h e k discordi.

Possibili approcci risolutivi al problema
- Esplorazione grafica

L'alunno può provare a raddoppiare, triplicare, ecc., un lato ed osservare che l'area resta invariata se l'altro lato viene dimezzato, diventa un terzo del lato iniziale, ecc.
Quindi l'area aumenta solo se il secondo lato diminuisce meno della metà, meno dei 2/3 , ecc.



h = 1
k = – 1/2
(k>-1/2)

h = 2
k = –2/3
(k>-2/3)

Figura 1

- Esplorazione numerica

L'alunno può costruire una tabella di valori, eventualmente tramite l'uso di un foglio elettronico, attribuendo diversi valori agli elementi del problema (può far variare tutti gli elementi, oppure può rendersi conto che la soluzione è indipendente dalle dimensioni iniziali del rettangolo; ancora, può accorgersi che il problema è simmetrico e far variare solo uno tra h e k).
Entrambe le esplorazioni possono sfociare, poi, in un

- Approccio algebrico

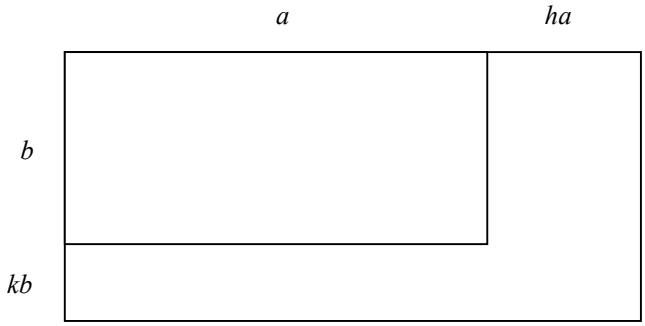


Figura 2

Dette A ed A' rispettivamente l'area del rettangolo dato e l'area del rettangolo i cui lati sono stati incrementati, in generale è $A' > A$ se:

$$(a + ha)(b + kb) > ab$$

cioè se:

$$a(1 + h)b(1 + k) > ab$$

da cui si ricavano le seguenti disuguaglianze:

$$(1 + h)(1 + k) > 1, \quad h + k + hk > 0, \quad k(h + 1) > -h,$$

ed essendo $h > -1$, si ha $k > -\dfrac{h}{h+1}$.

E' interessante osservare, cosa generalmente non banale per gli studenti, che nella formula

$$(1 + h)(1 + k)$$

che esprime il rapporto tra le aree, h, k possono essere negativi.

Le condizioni trovate, $k > -\dfrac{h}{h+1}$, $h > -1$, possono essere interpretate graficamente in un riferimento cartesiano Ohk come la parte di piano "sovrastante" un opportuno arco di iperbole equilatera.

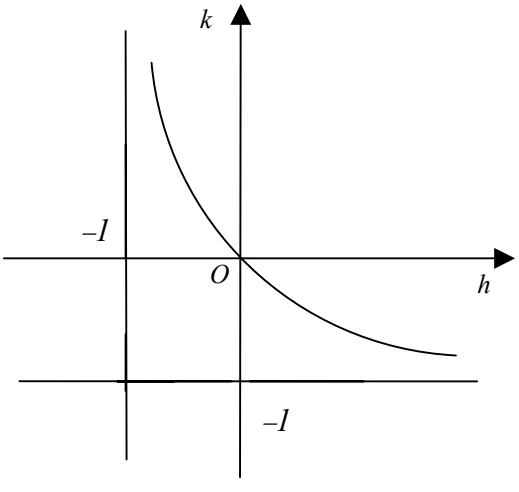


Figura 3

Possibili sviluppi

Si aggiunge un vincolo al problema precedente, per esempio la condizione $h + k = c$ con c reale fissato.

Cosa succede per c=0?

Per quali valori di h e k si ottiene il massimo incremento dell'area?

Il rapporto tra le aree, cioè l'incremento relativo, si può esprimere in funzione di c, sostituendo, per esempio, $k = c - h$, $\frac{A}{A'} = 1 + c + h(c - h)$.

Studiando il grafico (Figura 4) di tale funzione, $y = (1 + c) + ch - h^2$, si trova il massimo per

$$h = k = c/2.$$

Si osserva che un analogo metodo può essere applicato allo studio della propagazione degli errori nel prodotto (cfr. nucleo Misurare).

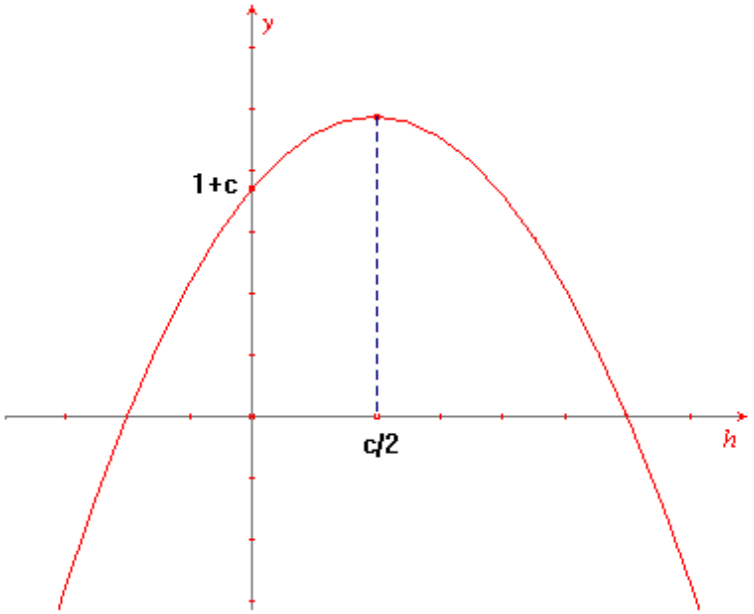


Figura 4

Tasselli del domino e induzione

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Applicare in semplici casi il principio d'induzione. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazione.	Schemi di ragionamento.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Ragionamenti combinatori.

L'attività è consigliata per la seconda classe del secondo biennio.
Quali prerequisiti?
Quali obiettivi?
Quali strumenti?
L'induzione matematica rappresenta un'elaborazione molto astratta di forme di ragionamento più intuitive, ma meno complete. Come tale essa rappresenta una sistemazione "matura" e rigorosa di conoscenze acquisite precedentemente in forma intuitiva e quasi empirica.
Il seguente esempio illustra bene la questione.

E' noto che la somma dei primi n naturali vale $\frac{n(n+1)}{2}$.

Vi sono vari modi per comprendere il perché di questa formula
Il primo è *visivo* ed è illustrato dalla Figura 1, che non richiede parole:

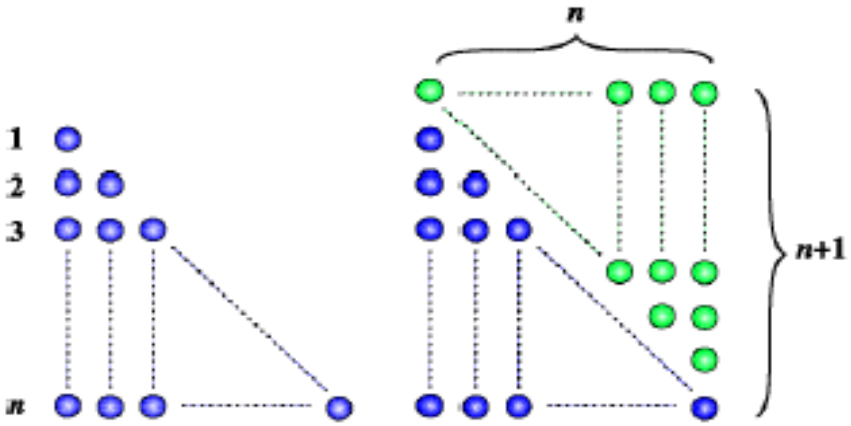


Figura 1

Il secondo risulta dalle seguenti due diverse scritture per la somma cercata:

$$1+\quad 2\quad +\quad 3\quad +.....+(n-2)+(n-1)+n$$

$$n+(n-1)+(n-2)+.....+\quad 3\quad +\quad 2\ +1$$

Sommando le coppie di termini in colonna, si ottiene n volte la somma $(n+1)$, cioè il valore $n(n+1)$, pari al doppio della somma cercata.

A livello intuitivo le due "dimostrazioni" (che sono in realtà la stessa dimostrazione, la prima con i "pallini" usati quali unità per rappresentare numeri generici, la seconda con le lettere dell'algebra che adempiono alla stessa funzione) sono convincenti, ma non esenti da critiche. Quella più seria riguarda la presenza dei "puntini" in entrambe: mentre i pallini e a maggior ragione le lettere possono trovare una traduzione rigorosa nel linguaggio matematico, non è così per i puntini di sospensione. Per superare questo scoglio i matematici ricorrono all'induzione matematica.

Tale metodo dimostrativo si è affermato solo in tempi relativamente recenti. Il primo a usarla in forma precisa, a quanto pare, è stato Pascal per dimostrare la celebre formula sul binomio che porta anche il suo nome. Solo con Dedekind e Peano[1] il metodo di dimostrazione per induzione è stato compreso e sistemato in modo completo, evidenziandone il carattere fondante della struttura dei numeri naturali.

Si tratta di un metodo molto astratto e "delicato", cui si può giungere alla fine di un percorso didattico in cui gli studenti abbiano fatto esperienza di esplorazioni numeriche nella ricerca di regolarità e si siano abituati a formulare congetture sulle medesime, cercandone delle "dimostrazioni" intuitive. Tale metodo dimostrativo può acquistare concretezza affrontando le definizioni di successioni per ricorrenza in ambienti informatici, ad esempio il fattoriale o la successione di Fibonacci: il supporto tecnologico può costituire un formidabile strumento di mediazione.

Le dimostrazioni per induzione rappresentano la sistemazione rigorosa di tutto il percorso.

Descrizione dell'attività

Prima fase

Viene proposto alla classe di risolvere individualmente (le soluzioni trovate vengono poi discusse collettivamente) il seguente problema:

Provare che una scacchiera da dama con $2^n \times 2^n$ *quadrati* (*o celle*) *dalla quale un quadrato angolare è stato rimosso, può essere ricoperta esattamente da "trimini"* come in Figura 2.

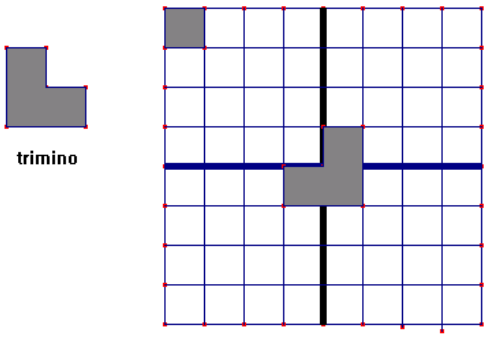


Figura 2

[1] Il principio di induzione è così formulato: se una proprietà P(n) vale per n=0 e, supposto che, ogniqualvolta vale per k, allora vale anche per k+1, ne segue che la proprietà vale per ogni naturale n.

Gli studenti vengono invitati ad esplorare i casi n = 2, 3, 4. Ci si rende conto che conviene mettere il trimino al centro della scacchiera come indicato in Figura 2.
La strategia suggerita dalle esplorazioni è la seguente per il caso generico $2^n \times 2^n$: suddividere la scacchiera in quattro grandi quadrati uguali, ciascuno con $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ celle; si pone un singolo pezzo (un "trimino") al centro della scacchiera come in Figura 2. Risulta così ricoperta esattamente una cella in ciascuno dei tre quadrati in cui non è stata tolta la cella. Si ricade così nella situazione in cui si hanno quattro scacchiere $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ e da ciascuna è stata tolta una cella. Quindi la soluzione relativa alla scacchiera $2^n \times 2^n$ è ricondotta al caso precedente, cioè la scacchiera $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Seconda fase
Si propone di trovare la somma dei primi $n+1$ numeri dispari:

$$1+3+5+.....+(2n+1)$$

Può essere utile disegnare la seguente Figura 3 (una dimostrazione "visuale") che fornisce una previsione del risultato:

$$1+3+5+.....+(2n+1) = (n+1)^2$$

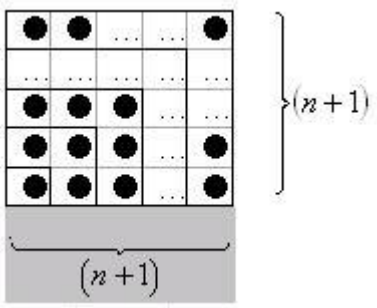


Figura 3

A questo punto l'insegnante propone la dimostrazione per induzione che la somma dei primi $n+1$ numeri dispari sia $(n+1)^2$.

Terza fase
Numeri di Fibonacci con il domino.
Problema: *In quanti modi si può ricoprire una scacchiera* $2 \times n$ *con tasselli di domino* 2×1?

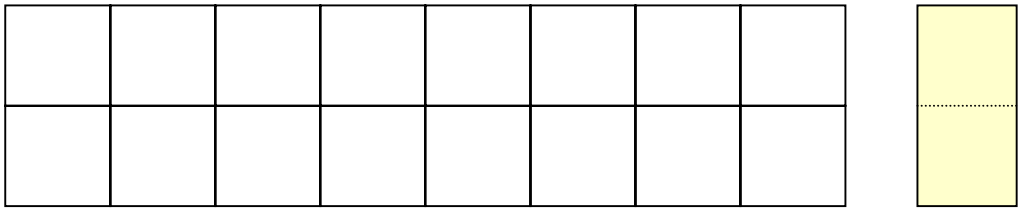


Figura 4

Gli studenti esplorano concretamente la situazione proposta; si suggerisce loro di organizzare il ricoprimento secondo le due seguenti strategie:
1ª strategia - il ricoprimento inizia come in figura 5
2ª strategia - il ricoprimento inizia come in figura 6

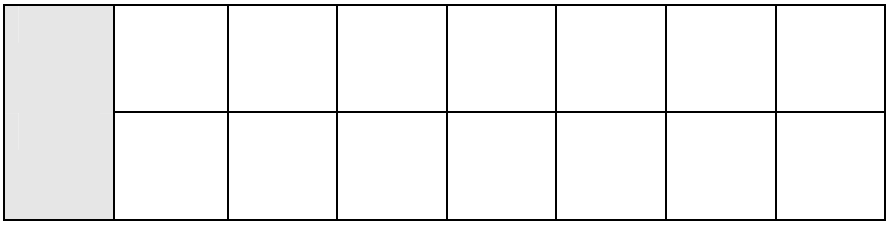


Figura 5

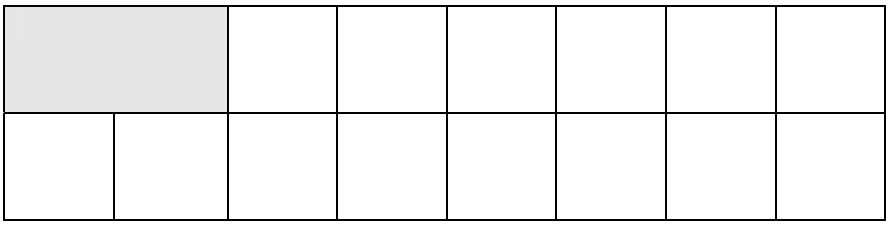


Figura 6

Nel primo caso ci si riconduce a dover risolvere il problema per una scacchiera $2\times(n-1)$ con tasselli di domino 2×1.
Nel secondo caso ci si riconduce a dover risolvere il problema per una scacchiera $2\times(n-2)$ con tasselli di domino 2×1.
Se il numero di modi cercato è indicato con T_n , allora nel primo caso ci si riconduce a risolvere il problema di determinare $T_{n\text{-}1}$ e nel secondo caso il problema $T_{n\text{-}2}$. Poiché i due casi sono disgiunti, abbiamo che $T_n = T_{n\text{-}1} + T_{n\text{-}2}$, con $T_1 = 1$ e $T_2 = 2$

L'introduzione dei numeri di Fibonacci è l'occasione per far ricavare agli studenti la regola per doppia ricorrenza: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ che definisce la successione una volta assegnati i valori iniziali $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.

Possibili sviluppi
Come ulteriore sviluppo si può implementare questa regola in un foglio elettronico oppure in una calcolatrice programmabile.

Elementi di prove di verifica

1. Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza che esprime la somma dei primi n quadrati

$$1+4+9+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2. Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza che esprime la somma di una serie (serie di Mengoli):

$$s_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F., Barbero, R., Desantis, L., Tartaglione, A., *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Morano*,* Napoli, 1992.

Bernardi, C., *L'uso delle lettere in algebra e in logica*, Quaderni MPI n. 7, 1994

Bernardi, C., *Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della e*, Progetto Alice, vol. 1° , 2000.

Boyer, C.B., *Storia della matematica*, Introduzione di L. Lombardo Radice, Milano, Arnoldo Mondadori, 1980

Campedelli, L., *Fantasia e logica nella matematica*, Milano, Feltrinelli, 1966

F. M. Dellisanti - *Congetture sui Numeri primi – aspetti semantici e matematici,*. Una esperienza nella scuola dell'Autonomia - IPSIA "Archimede" - Barletta, a. s. 1999-00.

D. Di Sorbo, *La persuasione e la retorica sul ramo dell'iperbole*, da *Sotto il segno di Michelstaedter*, a cura di Toni Iermano, Avellino, Periferia, 1995

Hofstadter, D.R., *Godel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi, 1984.

Jakobson, R., *Saggi di linguistica generale*, Milano, Feltrinelli, 1966, p. 57

H. Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, introduzione di L. Lombardo Radice, Torino, Boringhieri, 1973

D. Paola - *Un'esperienza di insegnamento dell'algebra in una prima liceo classico sperimentale*, Atti del V Convegno Internuclei per la Scuola Secondaria Superiore a cura di Luciana Bazzini.

G. Prodi - *Matematica come scoperta* Vol. 1° Ed. G. D'Anna.

Queneau, R., *Esercizi di stile*, Torino, Einaudi, 1992

Russell, B. *Introduzione alla filosofia matematica*, introduzione di Flavio Manieri, Perugia, Newton Compton Italia, 1971

Siti Web (2003)

http://utenti.lycos.it/mate_fisica/matematica/presentazione.htm

http://www.geocities.com/congetture/congetture.htm

http://www.geocities.com/congetture/teoria-numeri.htm

http://www.geocities.com/congetture/altro.htm

MISURARE

Misurare

La misura fa parte della vita quotidiana di adulti e ragazzi: usando strumenti di misura, si possono raccogliere dati, da utilizzarsi con una varietà di tecniche, allo scopo di descrivere quantitativamente il mondo che ci circonda. A scuola, la misura aiuta gli studenti a collegare ambiti matematici con ambiti di altre discipline, nello sforzo di costruire strumenti interpretativi della realtà. Per questo occorre che gli studenti misurino diversi tipi di grandezze, progettando anche esperimenti di misura, per passare poi a descrivere quantitativamente i loro risultati, in un processo che dovrà portare, nella parte finale dei loro studi, a comprendere le differenze tra la misura come procedimento pratico, tipico delle scienze sperimentali, e la misura come teoria, tipica della matematica, collegata con i grandi nodi concettuali che l'hanno contraddistinta storicamente e che riguardano i numeri reali, l'analisi, la probabilità.

Il nucleo persegue le abilità, a livello di primo biennio, di effettuare misure e di rielaborare dati di misura (in contesti matematici e non), utilizzando diverse modalità rappresentative o di calcolo, in un processo di continuità con la scuola del primo ciclo. Occorre inoltre gettare le basi per due tipi di attività da sviluppare nel secondo biennio: la modellizzazione, legata a interpretare matematicamente situazioni della realtà circostante, e la costruzione di una teoria. Infatti, è indispensabile potenziare negli allievi la padronanza del significato della misura, riferita a contesti matematici o a contesti esterni, insieme con la capacità di operare con numeri reali o decimali.

Lo sviluppo del nucleo coinvolge diversi aspetti, che sono integrati tra loro, e che devono essere evidenziati dall'insegnante nel corso delle attività. Il primo è l'aspetto legato al procedimento di misura, quando si rende necessario identificare le grandezze misurabili, le unità di misura, il processo di misura, la scrittura della misura. È opportuno che l'insegnante sottolinei, in questa fase, il grado di affidabilità dello strumento, qualunque esso sia, (dal centimetro da sarto, al calibro, al software), onde evitare, da parte degli studenti, errori di utilizzo, di interpretazione o di scrittura della misura. Un altro aspetto è quello della gestione dei dati di misura, quando si rende necessario scrivere la misura tenendo conto dell'incertezza, strumentale o calcolata, oppure nelle stime di misura. Ultimo, ma non meno importante, è l'aspetto del significato, che viene messo in gioco quando ci si riferisce alla misura di una grandezza come fondata sui numeri reali per quanto riguarda la matematica (misura come funzione che associa un numero reale a una grandezza) e sui numeri decimali finiti per quanto riguarda le scienze sperimentali.

Costituiscono nodi concettuali di fondamentale importanza i seguenti, che sono tipici della misura nelle scienze sperimentali:

- la scrittura della misura di una grandezza come numero, seguito da un'unità di misura e da un intervallo di incertezza, che ci dà indicazione su quanto affidabile sia la misura;
- l'identificazione dell'intervallo di incertezza, che potrebbe basarsi semplicemente sulla sensibilità dello strumento di misura, oppure sul calcolo di propagazione dell'incertezza sulle misure dirette, se la misura della grandezza avviene indirettamente, a partire dalla misura diretta di altre grandezze;

e i seguenti, che sono tipici della misura in matematica:

- la misura come funzione a valori nell'insieme dei numeri reali non negativi, che gode della proprietà additiva;
- la misura come funzione che associa esattamente un numero reale (e non un intervallo) a un insieme misurabile.

Tenendo presente questi nodi concettuali, l'insegnante tratterà una serie di contenuti essenziali, quali: la misura di grandezze, la scrittura di una misura, le cifre significative, l'intervallo di incertezza assoluta di una misura, l'incertezza relativa, l'additività della misura, le misure in geometria: lunghezze, aree, volumi tramite procedimenti approssimati ed esatti, la determinazione approssimata di π, grandezze commensurabili e incommensurabili, i modelli funzionali e le loro rappresentazioni e simbolizzazioni.

Per fare esempi di collegamenti tra il nucleo sulla misura e quello sulle funzioni, possiamo citare: la simbolizzazione di proprietà e regole del calcolo algebrico, visualizzata geometricamente da segmenti, rettangoli, parallelepipedi; la messa in formula di una relazione trovata sperimentalmente dalle misure di due grandezze, per esempio, di una proporzionalità diretta, oppure la formula di area o volume di un solido; la modellizzazione di situazioni problematiche, come per esempio la determinazione della retta di regressione in un fenomeno descritto da una legge lineare. In queste attività, è utile, ai fini del controllo di eventuali errori, l'analisi dimensionale. Per esempio, quando si risolvono problemi di geometria o di trigonometria, può essere utile controllare

dimensionalmente le formule ottenute, onde evitare errori banali come la somma di due quantità che rappresentano una un'area e l'altra una lunghezza. A questo proposito, è opportuno insistere sulla competenza "tradurre in equazione" un problema piuttosto che su quella del "risolvere un'equazione". Oggi ci sono infatti strumenti, come software o calcolatrici, che risolvono le equazioni, ma non ci sono ancora strumenti che traducano in equazione una situazione problematica.

Si possono fare considerazioni sulla natura dei numeri associati a una misura, da un punto di vista fisico o matematico. Nel primo caso, per motivi dovuti alla sensibilità dello strumento di misura, si raggiungono sempre numeri razionali, per quante cifre si riesca ad ottenere dopo la virgola. Nel secondo caso invece, essendo la misura considerata da un punto di vista teorico e non solo pratico, si introducono anche i numeri irrazionali come ragione dell'impossibilità di confrontare tutte le misure. Per esempio, se si tratta della diagonale del quadrato misurata dal lato, allora il risultato è un numero non razionale, come quando si misura la lunghezza della circonferenza con il raggio della stessa.

Vista la pervasività degli strumenti informatici nella scuola, occorre fare opportune riflessioni sulle misure fornite in ambienti informatici come software di geometria dinamica o software algebrici.

È opportuno tenere presente che certi argomenti tradizionali, sviluppati in modo sovrabbondante su alcuni libri di testo, andrebbero ridimensionati, per esempio i calcoli pedanti su perimetri, aree e volumi di grandezze geometriche, spesso semplici pretesti per fare eseguire operazioni di una certa laboriosità, non indirizzati verso la costruzione di significati, ma unicamente verso i meccanismi del calcolo.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
1° biennio	Il nonio decimale	Strumenti di misura	Fisica, Chimica, Laboratorio tecnologico-professionale	
1° biennio	Camminiamo e corriamo	Moti	Fisica	
1° biennio	I tre punti sono allineati?	Piano cartesiano	Disegno tecnico	
1° biennio	In che modo si cresce?	Figure geometriche		
1° biennio	Quante stelle possiamo vedere in cielo?	Il cielo	Astronomia, Scienze, Laboratorio di Fisica-Chimica	
2° biennio	Il triangolo di area massima	Figure geometriche		
2° biennio	Gli aghi di pino	Raccolta di dati	Fisica	
2° biennio	Gli incrementi finiti di una funzione	Grandezze variabili	Fisica	
2° biennio	Crescite veloci e crescite lente	Modelli	Biologia, Chimica, Scienze della terra, Fisica	
2° biennio	Un numero misterioso: π	Numeri	Fisica	
2° biennio	Superfici scomode	Figure geometriche	Fisica	
2° biennio	Quanto è lontana la luna?	Corpi celesti	Astronomia, Filosofia, Fisica, Scienze	

Il nonio decimale

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze. Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura. Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. Rappresentazione dei numeri sulla retta.	Misurare Numeri e algoritmi	Fisica Chimica Laboratorio tecnologico-professionale

Contesto
Strumenti di misura.

Il contesto cui ci si riferisce è quello della costruzione di uno strumento di misura al fine di comprenderne il principio di funzionamento.

Descrizione dell'attività
Con questa attività vogliamo far riflettere gli studenti su aspetti operativi come la costruzione di uno strumento di misura, su aspetti applicativi, come l'utilizzo di uno strumento di misura e su aspetti di significato, come la misura di una grandezza e la sua incertezza. Quindi si guidano gli studenti alla costruzione di un nonio decimale, con materiale povero e facilmente reperibile come il cartoncino.
Successivamente si riflette sullo strumento in sé, prima di passare al suo utilizzo.
È consigliabile iniziare l'attività con una lettura che contestualizzi storicamente la scelta di una unità di misura condivisibile a livello universale: il metro.
"*Nel giugno del 1792, durante gli ultimi giorni della monarchia francese, mentre la rivoluzione elettrizzava il mondo con le sue promesse di eguaglianza, due astronomi partirono verso due direzioni opposte per una missione straordinaria. Jean-Baptiste-Joseph Delambre, erudito cosmopolita, partì da Parigi dirigendosi verso Nord, mentre Pierre-François-André Méchain, accorto e scrupoloso, si diresse verso sud. Entrambi lasciarono la capitale su una carrozza appositamente costruita e fornita degli strumenti scientifici più sofisticati allora disponibili, accompagnati da un assistente esperto. La loro missione consisteva nel misurare il mondo, o almeno quella parte dell'arco meridiano compresa tra Dunkerque e Barcellona. Il loro obiettivo era fissare la nuova unità di misura -il metro- in un diecimilionesimo della distanza tra il Polo Nord e l'Equatore.*
Il metro sarebbe stato eterno perché tratto dalla Terra, che a sua volta è eterna. Allo stesso modo, il metro sarebbe stato patrimonio di tutti gli esseri umani, proprio come la terra appartiene a tutti. Stando alle parole del loro rivoluzionario collega Condorcet -fondatore della "matematica sociale" e fautore di una visione ottimistica della storia- il sistema metrico-decimale era destinato a tutti gli uomini e a tutti i tempi" (tratto da *La misura di tutte le cose* di Ken Alder).

Prima fase
Occorrono due cartoncini rivestiti di carta millimetrata, uno di circa 3×10 cm^2, l'altro di 3×20 cm^2. Con il cartoncino più lungo si costruisce un regolo graduato in millimetri (di scala 10:1); con il secondo, della stessa scala, si traccia il nonio decimale (vedi figura).

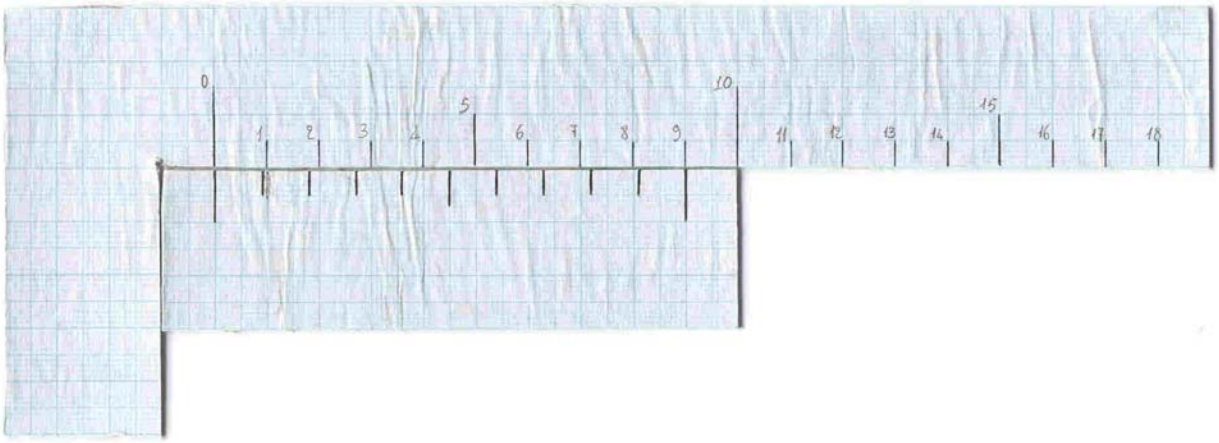


Figura 1

Seconda fase

L'insegnante pone agli studenti una serie di domande guidate al fine di far loro comprendere il funzionamento dello strumento costruito.

Proposta di lavoro

a) Di quanto sono più piccole le divisioni del nonio rispetto a quelle del regolo?
b) Si accosti ora il nonio al regolo in modo che lo zero del nonio coincida con un tratto del regolo.
c) Di quanto è arretrata la seconda tacca del nonio rispetto a quella del regolo? E la terza? E la quarta?
d) Di quanto deve avanzare lo zero del nonio perché il primo tratto del nonio stesso venga a coincidere con un tratto della scala principale? E il secondo? E il terzo?
e) Sai spiegare il funzionamento del nonio?
f) Qual è l'errore massimo che si può commettere nella lettura del nonio decimale?

Terza fase

Gli studenti verificano la conoscenza dello strumento in esperimenti di misurazione in laboratorio con l'aiuto anche degli insegnanti di fisica e chimica.

Situazione

Avete a disposizione tre gruppi di oggetti: uno di viti, uno di chiodi e uno di bulloni. Ciascun gruppo è composto di oggetti dello stesso tipo.

Proposta di lavoro

- Misurate con il nonio che avete costruito la lunghezza di ciascun oggetto di ogni gruppo.
- Rappresentate sulla retta dei numeri le misure che avete trovato, dopo aver scelto opportunamente l'unità di misura sulla retta stessa.
- Determinate la media aritmetica delle misure di ciascun gruppo, trovando anche l'intervallo di variazione (la differenza tra la misura più grande e la misura più piccola), e l'incertezza assoluta di misura (come la metà dell'intervallo di variazione).
- Calcolate l'incertezza relativa della misura di lunghezza in ciascun gruppo (come rapporto tra l'incertezza assoluta di misura e la media aritmetica).
- Quale unità di misura usate per: la media aritmetica, l'incertezza assoluta e l'incertezza relativa?

Possibili sviluppi

- Si utilizza il nonio decimale o il nonio ventesimale da laboratorio, per effettuare misure di lunghezze.
- Oppure si utilizza un calibro per misure di diametri di cavità.
- Dal punto di vista dei significati matematici, si può effettuare un'attività volta a misurare più volte la stessa grandezza (anziché molte grandezze), per vedere come si possono ottenere diverse misure della stessa grandezza, onde elaborare poi una misura più probabile tramite il calcolo della media.
- Un ampliamento possibile è quello di coinvolgere gli studenti in aspetti di progettazione, dando loro compiti di costruzione di oggetti servendosi di questi strumenti di misura, dopo aver ricercato sul territorio quale uso ne venga fatto da parte del mondo artigianale.

Camminiamo e corriamo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura. Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze. Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineare, quadratica).	Numeri decimali e calcolo approssimato. Il piano cartesiano. Distanza tra due punti. Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Moti.

Il contesto è quello dei moti, con particolare attenzione a: aspetti del grafico (p. es. crescita e descrescita, concavità), andamenti (p.es. lineare, costante, quadratico), modelli funzionali.

Descrizione dell'attività
Si presenta una serie di attività, in ognuna delle quali gli studenti prima congetturano su una situazione di moto, compilando singolarmente una scheda di lavoro, quindi realizzano l'esperienza raccogliendo i dati con sensore e calcolatrice, lavorando come gruppo-classe coordinato dall'insegnante.
Il lavoro consiste nella realizzazione di un tipo di moto, da parte di uno o più studenti, mentre il sensore è collegato alla calcolatrice e questa a un view-screen, in modo che tutta la classe possa seguire su uno schermo il generarsi del grafico del moto realizzato e confrontarlo con quello congetturato in precedenza.
All'esperimento segue una discussione matematica con tutta la classe, coordinata dall'insegnante, volta a confrontare le varie posizioni degli studenti e a convergere verso un significato comune e condiviso per l'esperienza e per il grafico. Se necessario, l'insegnante istituzionalizza il sapere costruito socialmente, introducendo terminologia o concetti unificanti.
L'attenzione è focalizzata sui modi in cui gli studenti costruiscono il significato del grafico, in termini di ordinata (posizione rispetto al sensore) in funzione dell'ascissa (tempo).
I contenuti sviluppati sono: il moto e le sue caratteristiche (stato di quiete e di moto, necessità di un sistema di riferimento), le rappresentazioni grafiche di moti nel piano cartesiano, attraverso l'uso di nuove tecnologie per la rilevazione dei dati spazio/tempo relativi al moto.
I nodi concettuali messi in gioco in queste attività sono: l'aspetto variazionale di una funzione, ossia la dipendenza dell'ordinata in funzione dell'ascissa, analizzata non solo attraverso i valori assunti dall'ordinata, ma anche in termini di variazione e variazione della variazione (pendenza e suo tasso

di cambiamento).

È opportuno iniziare con una breve lettura tratta da *I sistemi di misura* di M. Fontana e G. Ghiandoni per far riflettere gli alunni sul fatto che l'unità di misura del tempo non è basato sul sistema decimale come per altre grandezze.
"*Il nostro cuore batte una volta al secondo circa. Una secondo è un sessagesimo di minuto (che è per esempio il tempo che impieghiamo a lavarci i denti) che è a sua volta un sessagesimo dell'ora (il tempo di un pranzo al ristorante). Perché i sessagesimi invece delle potenze di 10 cui ci siamo abituati? La responsabilità sembra essere dei Sumeri (antico popolo che abitava la zona del Medio Oriente attualmente occupata dalla Siria e dall'Iraq), che scelsero il numero 60 come riferimento perché divisibile per il massimo numero di interi compresi fra 1 e 9 : 2, 3, 5, 6".*

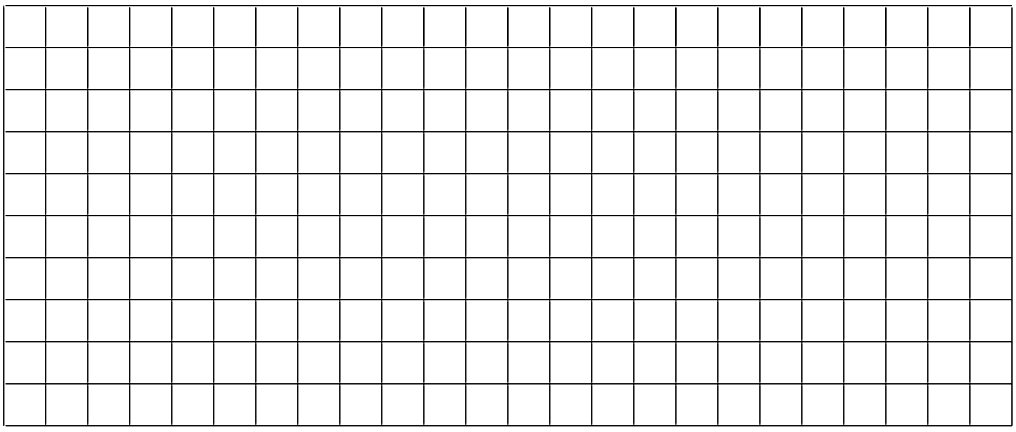
Prima fase
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di costruire individualmente un grafico prima di effettuare un'esperienza, di descriverlo a parole e di argomentare sulla ragione delle scelte fatte. Questo per farli riflettere sulle grandezze in gioco, sulle unità di misura, sulla forma del grafico, sugli aspetti quantitativi e variazionali del grafico, ecc.

Situazione

Supponiamo di camminare in linea retta a passo costante percorrendo 4 metri in 3 secondi e poi di fermarci per altri 3 secondi.

Proposta di lavoro

- Dopo aver tracciato il sistema di assi cartesiani nello spazio qui sotto e aver scelto opportune unità di misura, costruisci il grafico che rappresenti questa camminata.
- Descrivi il grafico che hai costruito.
- Spiega perché lo hai fatto in quel modo.



Seconda fase
La seconda fase mira alla costruzione e all'interpretazione di grafici a partire da moti realizzati dagli studenti. Si tratta di una fase sperimentale, in cui si collega un sensore di moto a una calcolatrice. Si effettua il moto descritto nella proposta di lavoro, mentre la calcolatrice visualizza sullo schermo il grafico della legge oraria.
L'insegnante quindi guida una discussione, ponendo domande-stimolo e raccogliendo gli interventi degli studenti. Per esempio, essi possono giungere alla conclusione che il tratto orizzontale corrisponda a una fermata, in quanto lo spazio non cambia mentre il tempo avanza, il tratto obliquo "in su" corrisponda a un allontanamento dal sensore, "in giù" a un avvicinamento al sensore, ecc.
Gli interventi dell'insegnante, in questa fase di discussione, non sono mai di carattere informativo,

teorico o autoritario, ma di stimolo alla riflessione, per esempio: “Quali sono le unità di misura? Che cosa sono quella *x* e quella *y* che compaiono sul display? Perché il grafico è venuto così? E se Sabrina si fosse fermata a 3 metri dal sonar che cosa sarebbe cambiato nel grafico? Si potrebbe ottenere una linea sotto l’asse delle *x*? Si potrebbe pensare che la linea del grafico parta a sinistra dell’asse *y*?”

Altre attività dello stesso tipo di quella vista sopra, che si possono eseguire in modo analogo, ossia passando attraverso una prima fase di congettura e una seconda fase di sperimentazione diretta del moto, sono le seguenti:

Proposta di lavoro

- Riproduci un moto uniforme camminando davanti al sensore per alcuni secondi; fermati per 4 secondi e poi torna indietro con la stessa andatura.
- Riproduci un moto accelerato correndo davanti al sensore.

Terza fase

L'esperienza può proseguire con un'attività di approfondimento, volta a costruire uno strumento matematico interpretativo di un grafico di moto, ossia la pendenza della retta tangente, ottenuta in modo approssimato dalla pendenza di una retta secante per due punti vicini.

Viene effettuata in modo guidato dall'insegnante, con calcolatrice, sensore e view-screen, quindi gli studenti si dividono a gruppi e lavorano alla seguente consegna:

Proposta di lavoro

Misura

A rotazione camminate o correte nel corridoio in modo da riprodurre i seguenti moti (per il punto 3 usate la pallina di gomma da noi fornita):

1. moto uniforme (avanti e indietro)
2. moto accelerato
3. moto di una palla che rimbalza
4. moto periodico

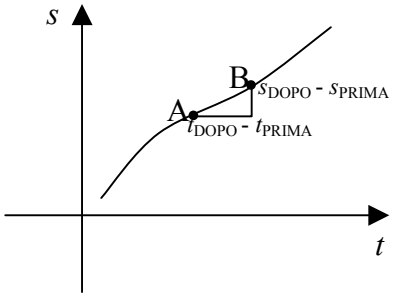
Dati: tabella e grafico

Per ogni moto di cui ricevete i dati, avete un grafico e una tabella con i valori del tempo (in s) e della distanza (in m) - ogni volta dovete costruirvi la tabella e darle un nome (moto1, moto2, moto3, moto4).

a) Descrivete “a parole” il tipo di moto che avete fatto nel corridoio.
b) Utilizzando il grafico e/o la tabella, provate a descrivere “a parole” come varia lo spazio rispetto al tempo (i dati dello spazio crescono, non crescono, crescono in modo regolare, crescono di quantità diverse…)
c) Analizzate il grafico.
   Assomiglia a una retta?
   Assomiglia a una curva?
   Curva che cresce? Decresce? …

Modello

d) Osservate attentamente le due figure seguenti.
   Nella figura 1 è rappresentato un moto qualunque di un oggetto: la curva fornisce la legge oraria del moto, cioè fornisce ad ogni istante la posizione dell’oggetto.
   Nella figura 2 è invece rappresentata una tabella simile a quelle che voi avete costruito.
   t_{DOPO} ed s_{DOPO} sono due valori che compaiono sia sul grafico che sulla tabella.



A(t_{PRIMA}, s_{PRIMA})
B(t_{DOPO}, s_{DOPO})

Figura 1

Tempo (t)	*Spazio (s)*
c1	*c2*
…	…
…	…
t_{PRIMA}	s_{PRIMA}
t_{DOPO}	s_{DOPO}
…	…
…	…

Tabella 1

Considerate il numero m dato da:

$$m = \frac{(s_{DOPO} - s_{PRIMA})}{(t_{DOPO} - t_{PRIMA})}$$

Tale numero ci dice come varia (cresce, decresce, …) lo spazio in funzione del tempo, quindi è un indicatore significativo dell'andamento del grafico.
Provate a studiarlo per i vari moti che avete riprodotto, servendovi del grafico e/o della tabella sulla vostra calcolatrice.

Quarta fase

La quarta fase mira alla progettazione e realizzazione di moti corrispondenti a grafici dati dall'insegnante.

Situazione-problema

Riproduci davanti al sensore i moti che abbiano grafici il più possibile simili a quelli disegnati qui sotto.

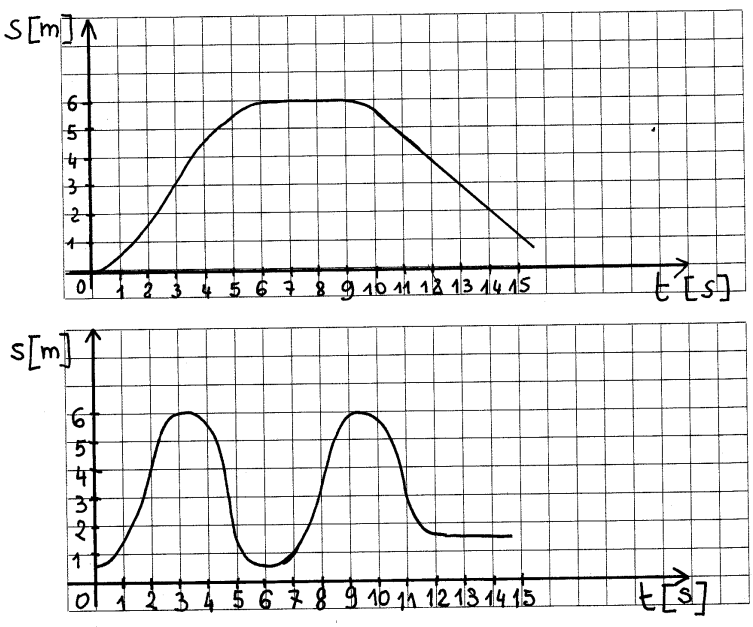


Figura 2

Possibili sviluppi

Questa serie di attività si può sviluppare in due direzioni: da una parte, la continuazione degli esperimenti di moto, utilizzando camminate varie, giocattoli come per esempio automobiline, palloni ecc., con attenzione alle caratteristiche del grafico che si ottiene, dall'altra la modellizzazione in termini simbolici, ossia la determinazione di famiglie di funzioni come quelle lineari, legate a moti uniformi, quelle quadratiche, legate a moti con accelerazione costante, e così via.

Inoltre, è possibile utilizzare altri sensori oltre a quello di moto, per modellizzare fenomeni come riscaldamento o raffreddamento di corpi (sensore di temperatura), variazione di pressione (sensore di pressione). L'attenzione in queste attività è posta più sul grafico e sulla funzione che modellizza che non sul fenomeno fisico in sé e sulle grandezze coinvolte.

Elementi di prove di verifica

1. Come cammino?

Supponiamo che io cammini nel corridoio e che il sensore rilevi i dati dello spazio e del tempo del mio movimento. La legge oraria del moto è la legge che esprime come varia la mia posizione s al variare del tempo t. Supponiamo che all'istante 0 io sia davanti al sensore, quindi posso dire che, quando t = 0, s = 0. Quando comincio a muovermi, in 1 secondo percorro 0,5 metri, in 2 secondi 2 metri e in 3 secondi 4,5 metri.

a) Supponendo di muovermi con questa modalità, quanti m avrò percorso dopo 5 s?
b) Quanti m avrò percorso dopo 8 s? Riportate i dati che avete in una tabella e in un grafico.
c) Provate a spiegare "a parole" cosa si deve fare per trovare quanti m vengono percorsi in un numero qualsiasi k di secondi.
d) Scrivete una legge generale che spieghi come varia la posizione s al variare del tempo t: s = …….

2. Quale aumento?

Considerate i seguenti grafici e rispondete alle domande.

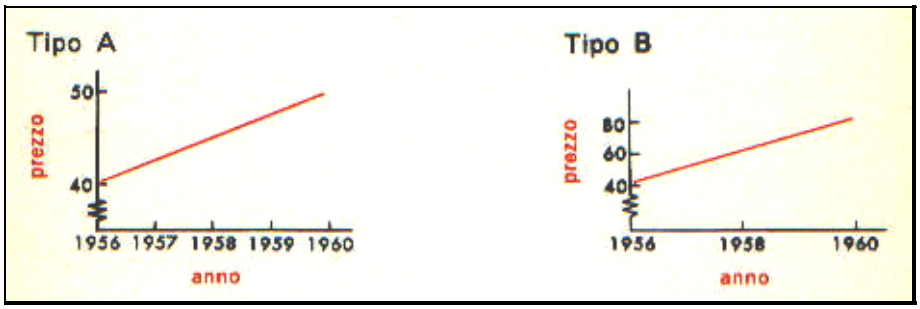


Figura 3

I grafici rappresentano l'aumento di prezzo (in lire) che due prodotti (prodotto di tipo A e prodotto di tipo B) hanno subito negli anni dal 1956 al 1960.

- Quale prodotto ha avuto il maggiore aumento annuo di prezzo?
- Quale è aumentato maggiormente nel biennio 1958-1960?

I tre punti sono allineati?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure con particolare attenzione alle cifre significative.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. Rappresentazione dei numeri sulla retta. Lunghezze. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza fra due punti. Relazioni d'ordine.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	Disegno tecnico

Contesto
Piano cartesiano.

Il contesto è quello del piano cartesiano, con particolare attenzione al calcolo delle lunghezze dei segmenti. È importante che gli studenti che utilizzano le calcolatrici grafiche affrontino le questioni riguardanti il problema delle approssimazioni.

Descrizione dell'attività
Questa attività mette in evidenza le difficoltà che possono incontrare gli studenti che usano uno strumento tecnologico che consente loro di lavorare sia in modalità esatta sia in modalità approssimata. Si lavora sul piano cartesiano e si utilizza unicamente una funzione distanza costruita insieme agli studenti sfruttando le potenzialità di programmazione della calcolatrice.

Prima fase
L'insegnante propone agli studenti di rappresentare tre punti sul piano cartesiano utilizzando il foglio a quadretti del quaderno: $A(-4, -2)$, $B(2, 3)$, $C(4, 5)$ e pone la seguente domanda: i tre punti sono allineati?
Ricorda loro che tre punti A, B, C sono allineati (e B è compreso tra A e C) se

$$\text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, C) = \text{dist}(A, C) \qquad (*)$$

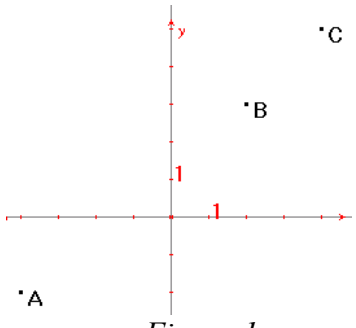


Figura 1

Per dist(A, B) si intende la distanza tra i punti A e B calcolata con il Teorema di Pitagora nel piano cartesiano, facilmente implementabile su una calcolatrice grafico-simbolica.
Gli studenti, che hanno a disposizione una calcolatrice grafico-simbolica, vengono divisi in due gruppi: al primo gruppo viene data la consegna di eseguire i calcoli in modalità esatta, il secondo gruppo dovrà invece approssimare ciascun risultato alla prima cifra decimale. A quel punto l'insegnante chiede ai due gruppi la risposta al quesito.

I Gruppo

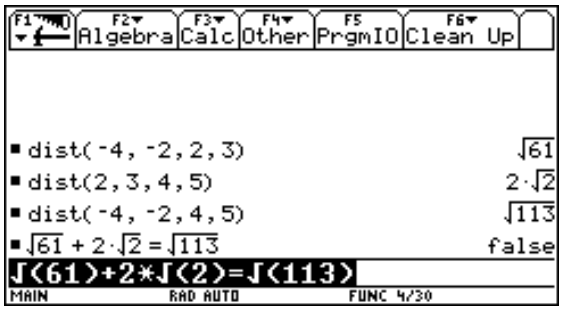


Figura 2

II Gruppo

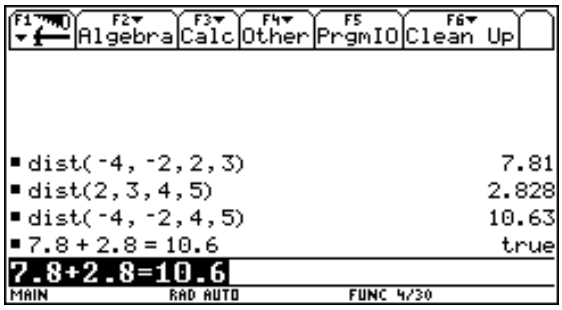


Figura 3

I risultati sono chiaramente in contrasto e quindi è necessario approfondire la questione dell'allineamento, solo in apparenza semplice.

Seconda fase

- A questo punto l'insegnante interviene presentando le due seguenti figure, che sfruttano le diverse possibilità di rappresentazione dello strumento.

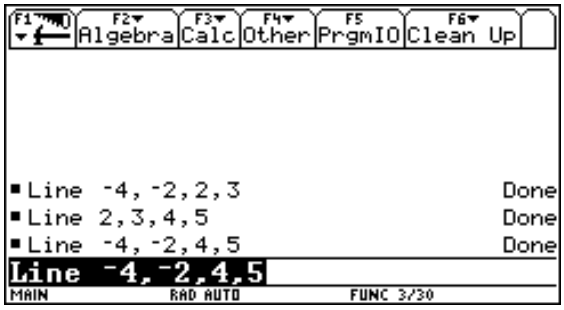


Figura 4

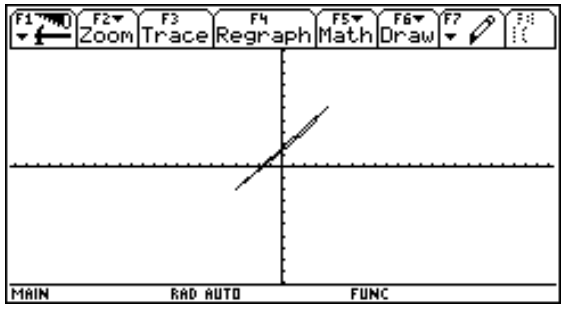


Figura 5

Osservando la figura 5 gli studenti si convincono facilmente che i tre punti sono i vertici di un triangolo molto "schiacciato". Quindi ha giocato un ruolo negativo l'approssimazione introdotta.

- L'insegnante propone allora la stessa questione con un'altra terna di punti sicuramente allineati: $A(-1, -1)$, $B(2, 2)$, $C(15, 15)$, precisando agli studenti che, quando lavorano in modalità approssimata, possono scegliere il numero di cifre decimali da utilizzare. A questo punto i risultati che si ottengono sono ancora differenti.

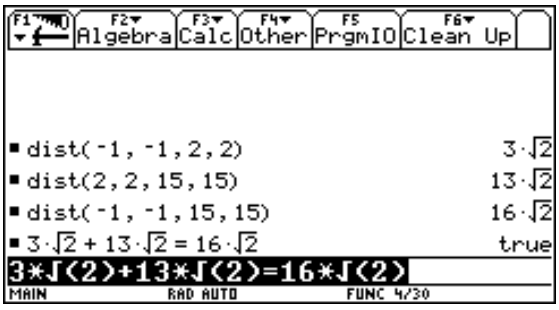


Figura 6

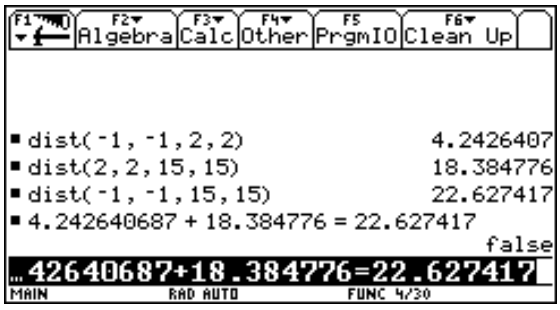


Figura 7

Si invitano quindi gli studenti a riflettere sulla domanda "Quante sono le cifre decimali significative?". Dopo aver dato spazio ai ragazzi, che dopo la prima fase si erano convinti che l'errore era dovuto al fatto che si era considerata una sola cifra decimale e che adesso, invece, hanno rivisto le loro convinzioni alla luce dell'ultimo risultato, l'insegnante potrà affermare in modo categorico che l'unica risposta veramente corretta è: "Dipende!".
Certamente questa proposta di lavoro non ha come obiettivo quella di confondere le idee agli studenti o di lasciare aperta la questione dell'allineamento di tre punti. Vuol essere, invece, il punto di partenza per due tipi di riflessione: una di carattere più prettamente matematico ed una di carattere più applicativo. In primo luogo occorre che gli studenti facciano riferimento al significato dell'allineamento, in quanto tre punti distinti sono allineati se uno di essi appartiene alla retta per gli altri due. Per verificare questo fatto si può scegliere come strumento matematico quello della distanza, secondo la relazione (*). In secondo luogo, volendo verificare questa relazione facendo uso di uno strumento di calcolo automatico, occorre prestare attenzione all'ambiente e alle modalità di lavoro in cui si opera. Come si è visto nella prima terna di punti (opportunamente scelta), in modalità esatta la relazione (*) non è soddisfatta, mentre lo è in modalità approssimata, invece nella seconda terna di punti la situazione è ribaltata. Queste attività dovrebbero indurre gli studenti a far sempre riferimento alla teoria che soggiace all'ambiente scelto e alla modalità di calcolo utilizzata, per poter essere sicuri dell'attendibilità dei risultati.

Possibili sviluppi

- Preparazione di un programma che permetta di lavorare sia nella modalità esatta sia nella modalità approssimata in modo da confrontare i risultati nelle diverse situazioni.
- Affrontare la stessa situazione problematica nel piano cartesiano risolvendola con lo strumento teorico della pendenza di una retta per due punti.
- Affrontare la stessa situazione problematica nel piano euclideo senza riferimento cartesiano e senza metrica.
- Analisi di situazioni analoghe nello spazio.

In che modo si cresce?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure. Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni.	Rappresentazioni scientifica ed esponenziali dei numeri razionali. Rappresentazione dei numeri sulla retta. Lunghezze e aree relative ai poligoni. Funzioni elementari.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Figure geometriche.

Il contesto è quello delle figure geometriche, con particolare attenzione ai problemi relativi al calcolo delle aree.
È possibile affrontare situazioni problematiche che coinvolgono funzioni complesse già nel biennio della scuola superiore. Infatti uno strumento tecnologico integrato come una calcolatrice grafico-simbolica consente diversi tipi di rappresentazione (numerica, algebrica, grafica), creando collegamenti significativi all'interno dello stesso concetto matematico. Ulteriori vantaggi dello strumento utilizzato sono da ritrovare nella possibilità di amplificare e riorganizzare gli aspetti tradizionali del processo di insegnamento-apprendimento e nel permettere agli studenti di sperimentare una nuova "realtà matematica".

Descrizione dell'attività
In questa attività si mettono in evidenza i due modi in cui gli studenti collegano tra loro le rappresentazioni consentite dallo strumento utilizzato: un modo meccanico-algebrico in cui gli studenti combinano velocemente le due rappresentazioni senza che ci sia sotto un pensiero del tutto organizzato; un metodo in cui si recuperano pienamente i significati: nel caso specifico il misurare.
Gli studenti devono già aver fatto pratica dell'uso delle calcolatrici grafiche. Inoltre l'insegnante deve essere consapevole della necessità di mantenere l'inter-relazione tra la rappresentazione grafica e il modello algebrico del fenomeno.

Prima fase
L'insegnante propone alla classe, precedentemente suddivisa in piccoli gruppi, la seguente situazione che riguarda i rettangoli che crescono.

Situazione

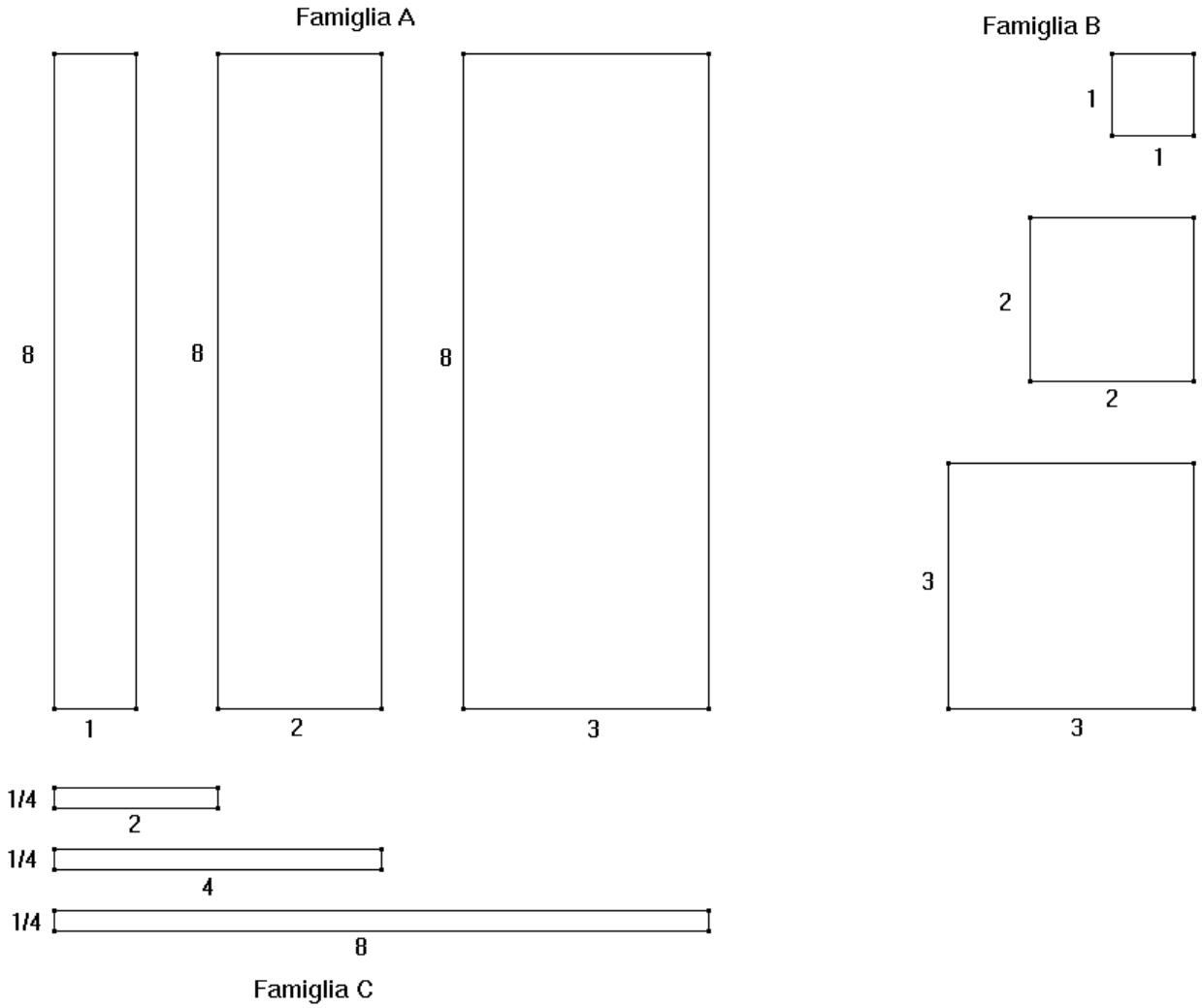


Figura 1

Nella famiglia A la larghezza dei rettangoli cresce di una unità ogni anno, mentre la lunghezza mantiene il valore costante di 8 unità. Nella famiglia B la larghezza e la lunghezza dei rettangoli crescono di una unità ogni anno. Nella famiglia C la lunghezza raddoppia ogni anno, mentre la larghezza resta sempre uguale a 1/4.

Proposta di lavoro

Formulate varie ipotesi riguardanti le seguenti questioni:

1) Confrontate le aree delle tre famiglie di rettangoli negli anni. Quali sono le situazioni iniziali? Quale famiglia (o famiglie) "supera" le altre famiglie (o famiglia) e quando?
2) In quanti anni l'area dei rettangoli di ogni famiglia supererà le 1000 unità quadrate?

Adesso verificate le vostre ipotesi con le calcolatrici grafiche.

Seguite queste indicazioni:

- Cercate di essere più accurati possibile.
- Scrivete una relazione per ogni gruppo.
- Descrivete le vostre congetture esplicitando su casa si sono basate e verbalizzate tutte le discussioni all'interno del gruppo.
- Discutete il modo in cui avete risolto il problema e l'uso che avete fatto della calcolatrice.

Seconda fase

L'insegnante discute con la classe le congetture formulate e le strategie adottate. Esperienze precedenti hanno evidenziato diverse situazioni tipiche. Gli studenti riportano, nelle loro relazioni, che nell'ottavo anno i tre rettangoli (uno per ogni famiglia) hanno la stessa area e che da quell'anno in poi la famiglia C si distacca dalla famiglia A, mentre la famiglia B rimane nel mezzo. La situazione ottenuta con l'uso ripetuto della calcolatrice per le rappresentazioni grafiche è in contrasto, però, con ciò che avevano supposto intuitivamente alla luce dei primi calcoli mentali, ossia che fosse la famiglia A o la famiglia B a crescere più velocemente.

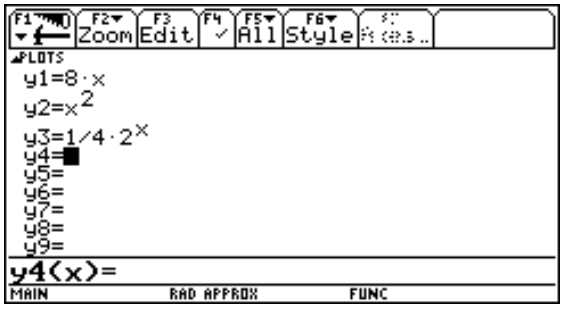


Figura 2

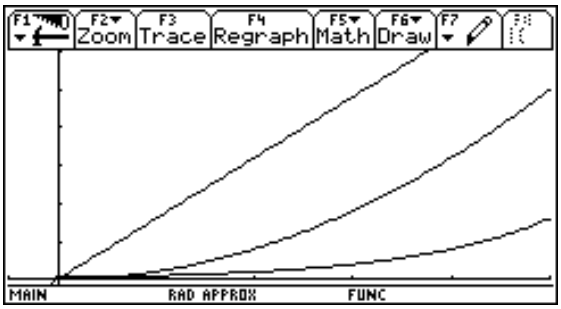


Figura 3

L'interazione con lo strumento informatico ha giocato un ruolo fondamentale nel convincere gli studenti della differenza sostanziale fra i tre modelli di crescita.

Le schermate che seguono sono alcune di quelle scelte nei gruppi come più significative del percorso di ricerca.

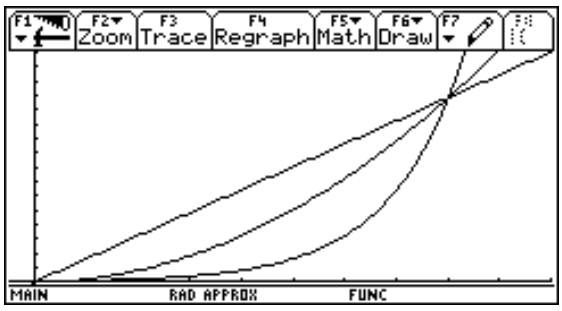


Figura 4

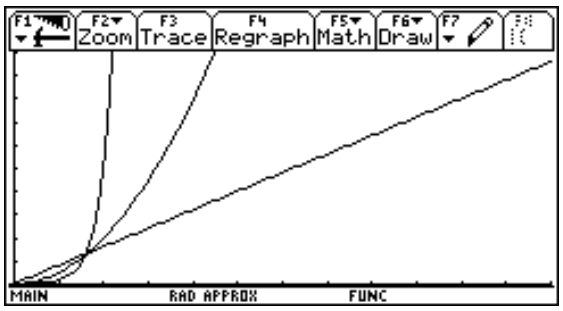


Figura 5

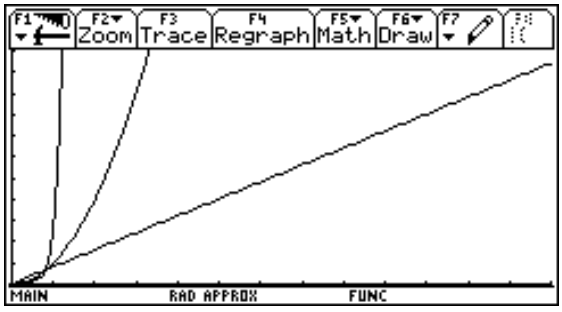


Figura 6

Le ultime due schermate sotto riportate sono prodotte dall'insegnante. La figura 8 è quella sulla quale le osservazioni degli studenti sull'ordine di grandezza della variabile trovano la conferma numerica dei risultati dedotti per via grafica.

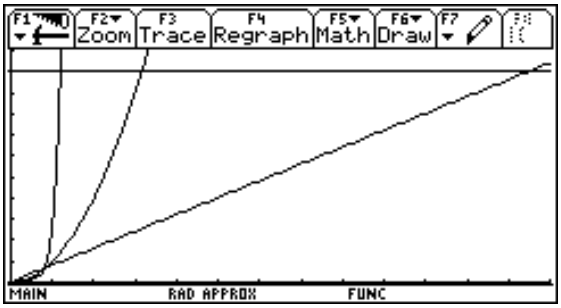
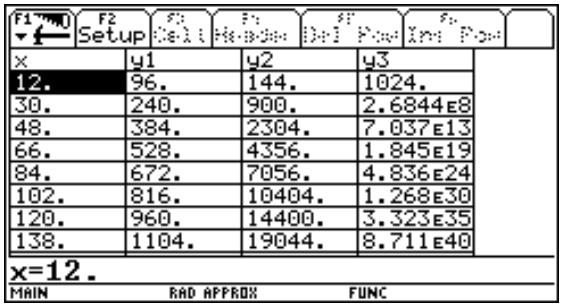


Figura 7



x	y1	y2	y3
12.	96.	144.	1024.
30.	240.	900.	2.6844E8
48.	384.	2304.	7.037E13
66.	528.	4356.	1.845E19
84.	672.	7056.	4.836E24
102.	816.	10404.	1.268E30
120.	960.	14400.	3.323E35
138.	1104.	19044.	8.711E40

Figura 8

Possibili sviluppi

- Costruire modelli in ambito geometrico che mettano in relazione lunghezze (lati, perimetri, …), aree (superfici laterali, superfici totali, somme di superfici, …), volumi (somme di volumi, …).
- Esplorazione di figure per determinare condizioni di massimo o di minimo. Un esempio può essere il seguente problema: è dato un segmento di lunghezza *L*. Costruisci due quadrati con i lati adiacenti sul segmento, e trova la configurazione che ha perimetro minimo.
  Studia come varia il perimetro della configurazione e rappresentalo con una formula.

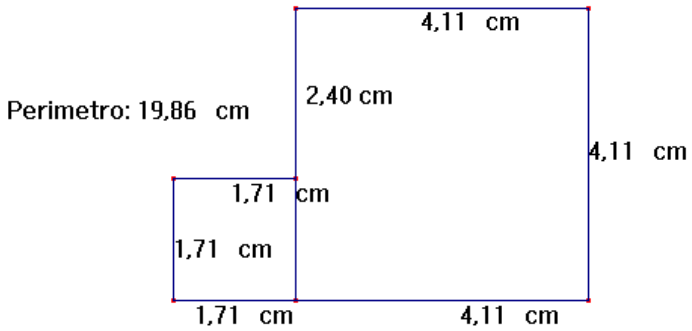


Figura 9

È utile in questo caso sfruttare le potenzialità di un software di geometria dinamica per l'esplorazione (con la funzione trascinamento) della configurazione in esame. L'ambiente calcolatrice contenuto nel software viene utilizzato per effettuare calcoli sulle misure coinvolte. In tal modo gli studenti possono osservare le variazioni delle lunghezze dei lati e del perimetro e fare le loro congetture sulla configurazione che corrisponde al perimetro minimo.

Elementi di prove di verifica

1. Una famiglia numerosa

I batteri si riproducono per divisione cellulare. Supponiamo di avere una famiglia di batteri caratterizzata dal fatto che essi si dividono ad ogni secondo. Se all'inizio abbiamo un solo batterio, possiamo dire che all'istante iniziale $t = 0$, $n = 1$, dove t è il tempo ed n il numero di batteri.

a) Supponendo che nessun batterio muoia, quanti batteri ci saranno nella nostra popolazione dopo 10 s?
b) Quanti batteri ci saranno dopo 100 s? Riportate i dati che avete in una tabella e in un grafico.
c) Spiegate a parole come fareste a calcolare il numero n dei batteri dopo un numero qualsiasi h di secondi.
d) Scrivete una legge generale che spieghi come varia il numero di batteri al variare del tempo t: $n =$ …….
e) Confrontate ora le due leggi che avete ottenuto, sulla base delle tabelle, dei grafici e delle formule.
   Hanno analogie? Differenze? Spiegate la vostra opinione.

Quante stelle possiamo vedere in cielo?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Conoscere ed usare il sistema internazionale delle unità di misura. Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze. Stimare l'ordine di grandezza di una misura	Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali. Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. Proprietà dei principali indici statistici di posizione e di dispersione.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Astronomia Scienze Laboratorio di fisica-chimica

Contesto
Il cielo.

Il contesto dell'attività è quello dell'osservazione del cielo. Si tratta in particolare di stimare in modo ragionevole il numero di stelle osservabili ad occhio nudo in un certo luogo, servendosi di uno strumento appositamente costruito.

Descrizione dell'attività
Questa attività può essere introdotta nell'ambito del primo biennio, dal momento che richiede conoscenze di aritmetica e di geometria del tutto elementari.
Prerequisiti: angoli e loro misura, angoli solidi, proporzionalità tra grandezze, frazioni algebriche.
Obiettivi: utilizzare semplici concetti aritmetici e geometrici in un contesto significativo, preso dalla realtà, coinvolgendo direttamente gli studenti in un'attività concreta di misurazione, al fine di ricavare un risultato non facilmente prevedibile a priori.

Prima fase
La sollecitazione del problema prevede una prima ricognizione delle convinzioni degli studenti, che vengono invitati a prevedere, magari dopo aver osservato in prima persona il cielo notturno, quale possa essere il numero approssimativo di stelle visibili in cielo durante una notte limpida. Si tratta di una richiesta estremamente semplice, che però può risultare molto complessa da soddisfare, poiché gli studenti si rendono subito conto di non avere punti di riferimento per rispondere in modo attendibile. In questa fase l'insegnante conduce una discussione collettiva che coinvolge tutta la classe, volta a focalizzare l'attenzione sia sulla stima del numero di stelle, sia sui metodi e sugli strumenti che possono essere adottati per ottenere questa stima. E' opportuno che, alla fine di tale discussione, l'insegnante archivi le proposte e le stime degli studenti, per poi confrontarle alla fine dell'attività con i risultati dell'esperimento.

Seconda fase
Dopo aver preso coscienza del problema, si passa alla fase operativa, che prevede di affrontare la questione mediante un'attività concreta di osservazione del cielo. Si propone a questo scopo la

costruzione di un tubo per osservazioni, di raggio interno R e di lunghezza L, aperto ad entrambe le estremità. Il tubo viene dipinto di nero opaco all'interno e l'estremità in corrispondenza della quale gli studenti devono collocare un occhio, viene chiusa con un piccolo coperchio che presenta un foro centrale di circa 10 mm di diametro. Per realizzare osservazioni accurate è opportuno che il tubo venga fissato ad un treppiede.

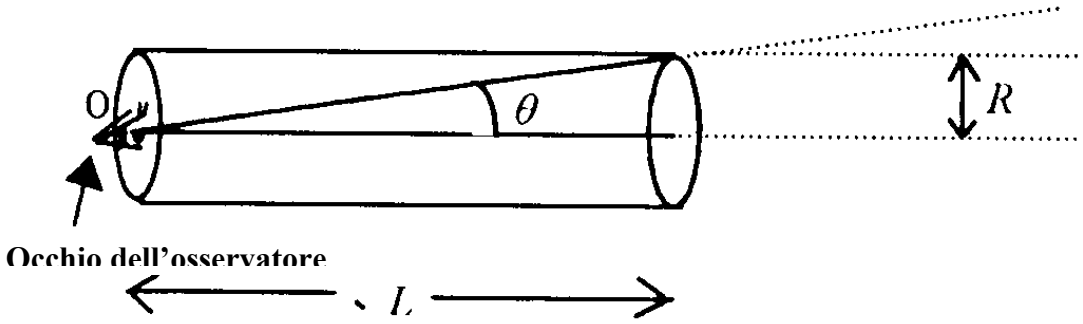


Figura 1

Si verifica subito che la misura del raggio del tubo viene vista sotto una dimensione apparente $\vartheta = \frac{R}{L}$ e che l'angolo solido sotto il quale gli studenti vedono l'estremità del tubo opposta a quella in cui collocano il proprio occhio, è $\Omega = \frac{\pi R^2}{L^2}$. Questa formula indica di conseguenza la porzione di cielo osservabile, che corrisponde per l'appunto ad un opportuno angolo solido: tale grandezza geometrica trova in questo esempio, come del resto avviene in generale in astronomia, una applicazione significativa. Poiché l'angolo solido Ω_1 corrispondente alla totalità della sfera celeste è 4π steradianti (sr), si ricava subito una relazione di proporzionalità tra l'angolo solido delimitato dal tubo e l'angolo solido corrispondente alla totalità del cielo: $\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{R^2}{4L^2}$.

Terza fase

Dal luogo di osservazione scelto si punta il tubo secondo una certa direzione e, senza muoverlo, si conta il numero n di stelle visibili ad occhio nudo entro l'apertura del tubo (in queste condizioni il numero di stelle è generalmente piccolo e facile da determinare). In seguito si punta il tubo in un'altra direzione e si ripete il conteggio. È consigliabile eseguire almeno 15 conteggi, in riferimento a diverse direzioni di osservazione.

Quarta fase

Si passa quindi all'elaborazione dei risultati, con il calcolo della media aritmetica dei valori raccolti nelle diverse operazioni di conteggio. Questo valore rappresenta il numero medio $\overline{n}$ di stelle visibili entro l'angolo solido Ω precedentemente definito. Poiché si ragiona in base al numero medio di stelle osservabili entro il dato angolo solido, il numero di stelle osservabili è direttamente proporzionale all'angolo solido di osservazione. Si ricava quindi una stima del numero N di stelle visibili ad occhio nudo nella totalità della sfera celeste: $N = \frac{4L^2\overline{n}}{R^2}$.

(Per dare un'idea di quello che ci si può aspettare da un esperimento del genere, si segnala che, con un tubo di lunghezza L = 40,0 cm e raggio R = 3,0 cm, in presenza di buone condizioni di osservazione si può prevedere un valore per $\overline{n}$ pari a circa 8,1, il che conduce ad una stima per N pari a circa 5800).

Quinta fase

Vale la pena soffermarsi a commentare ed analizzare i risultati ottenuti in base a varie considerazioni, per abituare gli studenti a sviluppare un certo senso critico nei confronti dei risultati numerici che un'attività di misurazione permette di ricavare. In primo luogo è evidente che, trovandosi sulla superficie terrestre, in un dato istante è visibile soltanto una metà della sfera celeste, pertanto in media ci sono $\frac{N}{2}$ stelle accessibili a un osservatore ad occhio nudo, essendo N il dato sperimentale ottenuto.

Possibili sviluppi

In collegamento con l'insegnamento di Scienze o di Laboratorio di Fisica-Chimica, si può ampliare il discorso ed affrontare la questione dell'influenza dell'atmosfera terrestre sull'assorbimento della luce stellare, il che riduce l'effettivo numero di stelle visibili ad occhio nudo, considerando inoltre gli effetti dovuti alle condizioni atmosferiche, all'eventuale inquinamento dell'aria ed alla specifica collocazione del sito di osservazione.

A tal scopo si riporta la seguente scheda di approfondimento.

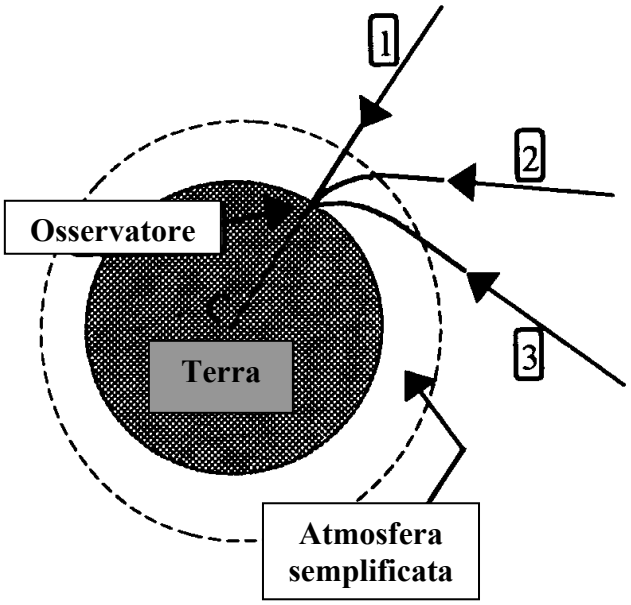


Figura 2

L'influenza dell'atmosfera terrestre.

Nella figura 2 sopra riprodotta si può vedere che, supponendo un modello di atmosfera semplificato (ovvero, con uno spessore perfettamente delimitato e con un indice di rifrazione decrescente con l'altezza), il percorso del raggio luminoso 1 attraverso l'atmosfera è molto più breve di quello del raggio 2, mentre quest'ultimo è, a sua volta, più breve di quello del raggio 3. In tali condizioni l'assorbimento della luce stellare da parte dell'atmosfera è minimo nelle vicinanze dello zenit (il caso del raggio 1) ed è massimo per gli astri che si trovano in corrispondenza di una piccola altezza,

vicino cioè all'orizzonte. Stando così le cose, si comprende come la luce delle stelle più vicine all'orizzonte sia maggiormente assorbita rispetto alla luce delle stelle che si trovano ad un'altezza maggiore. Si verifica inoltre che una data stella, poco dopo che è spuntata sull'orizzonte, ha apparentemente una minore brillantezza (a causa dell'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera) di quella che possiede più tardi, quando si trova ad un'altezza maggiore rispetto all'orizzonte. Ad esempio, una stella visibile con qualche difficoltà nelle vicinanze dello zenit (caso 1) è del tutto invisibile ad occhio nudo quando si trova ad un'altezza di circa 8°. Pertanto, la figura 2 spiega il motivo per cui, benché nelle condizioni precedentemente descritte fosse ammissibile che si vedessero ad occhio nudo 2900 stelle, in realtà il numero di stelle visibili è minore; in prossimità dell'orizzonte molte stelle che sarebbero individuabili se fossero più in alto, non sono più visibili a causa dell'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera. Considerando questo effetto, il numero di stelle osservabili ad occhio nudo, in un dato luogo ed in un certo momento, è soltanto il 70% del valore $\frac{N}{2}$ che ci si dovrebbe aspettare se non ci fosse l'assorbimento atmosferico: in questo caso ci sarebbero soltanto circa 2000 stelle visibili ad occhio nudo. E' interessante ed istruttivo eseguire comunque l'esperienza descritta in qualsiasi luogo l'osservatore si trovi, sia che esso risulti un buon sito dal punto di vista astronomico, sia che risulti mediocre oppure, al contrario, eccezionale. Se il valore $\overline{n}$ fosse, ad esempio, pari a 1,7 (si tratterebbe di un sito francamente di cattiva qualità), l'equazione ottenuta darebbe per N il valore $1{,}2 \cdot 10^3$, il che suggerirebbe un valore di circa 420 stelle visibili ad occhio nudo in un dato istante, senza l'ausilio di un qualsiasi strumento ottico di osservazione (avendo già considerato l'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera). Persino in un luogo eccezionale (in assenza totale di inquinamento, in presenza di aria secca e ad una grande altitudine), nel caso di un osservatore allenato e con una vista eccellente, un valore per $\overline{n}$ pari a 11,0 permette di ottenere $N = 7{,}8 \cdot 10^3$ stelle. In queste condizioni veramente particolari, un osservatore può scorgere pertanto, nella migliore delle ipotesi, circa 2700 stelle. In effetti, in un certo istante si può vedere un po' di più di metà della sfera celeste, dal momento che la rifrazione atmosferica aumenta l'altezza degli astri, un fenomeno evidenziato nella figura 3 in modo decisamente più marcato di quanto accada in realtà.

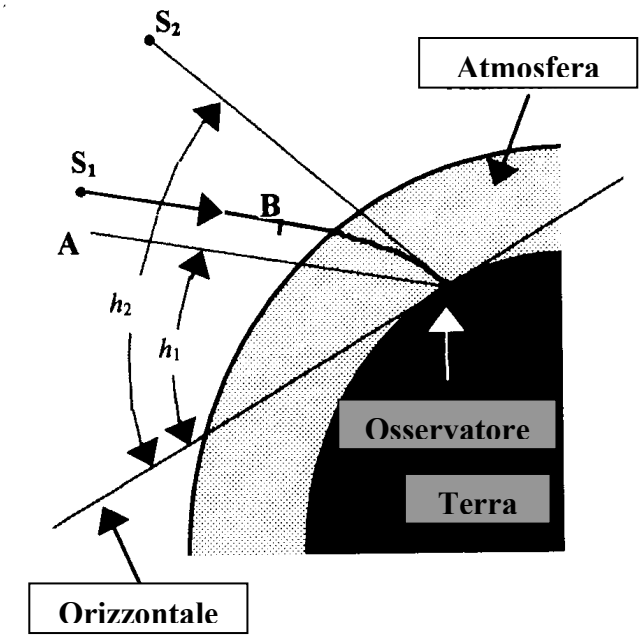


Figura 3

La figura 3 mostra, non in scala, il cammino di un raggio luminoso, emesso dalla stella S_1, che raggiunge l'osservatore posto nel punto O. Se non esistesse l'atmosfera, la stella sarebbe vista in corrispondenza all'altezza h_1 (AO e S_1B sono direzioni parallele, come è ovvio). A causa della rifrazione atmosferica, per un certo osservatore tutto avviene come se l'astro si trovasse nella posizione S_2 ed esso viene visto in corrispondenza dell'altezza $h_2 > h_1$. L'innalzamento apparente dell'astro (Δh) è dato dalla differenza $h_2 - h_1$ ed è tanto minore quanto maggiore è la sua altezza. Per questo motivo un astro sembra essere più alto di quanto sarebbe se venisse osservato in assenza dell'atmosfera terrestre. Tale effetto è massimo nelle vicinanze dell'orizzonte e diminuisce gradualmente con l'altezza, fino ad annullarsi allo zenit. D'altro canto, è bene ricordare che l'innalzamento apparente degli astri può raggiungere un valore massimo di soli (0,57)° circa. Di conseguenza è facile concludere che il piccolo aumento dell'estensione della sfera celeste osservabile, provocato dal fenomeno della rifrazione, dà un contributo del tutto trascurabile alla determinazione del numero di stelle visibili ad occhio nudo.

Elementi di prove di verifica

Livello scolare: 1° biennio

1. Diamo un nome ai rapporti

In ognuno dei seguenti casi si fa il rapporto tra la prima grandezza e la seconda. In quali casi le due grandezze sono dello stesso tipo? Che cosa indica il loro rapporto?

a) peso/altezza;
b) n° pezzi prodotti in una fabbrica/n° ore di lavoro;
c) lunghezza di un tavolo/larghezza dello stesso tavolo;
d) km percorsi/litri di benzina consumati;
e) km percorsi in un viaggio/km da percorrere;
f) litri di vino venduti/n° di abitanti;
g) spazio percorso/tempo impiegato a percorrerlo;
h) peso di un oggetto/volume occupato;
i) distanza su una carta tra due paesi/distanza reale.

2. Un cambio poco conveniente

Supponete di avere ancora su un deposito bancario 15.000.000 di vecchie lire e vi danno la possibilità di cambiarle in euro, ma a condizione che accettiate un arrotondamento del valore dell'euro a 2000 lire. Senza fare calcoli, valutate l'ordine di grandezza della vostra perdita in lire? Provate a verificare la vostra ipotesi calcolando esattamente la differenza tra la cifra in euro che effettivamente vi spetta e quella che vorrebbero darvi.

3. Impariamo a viaggiare

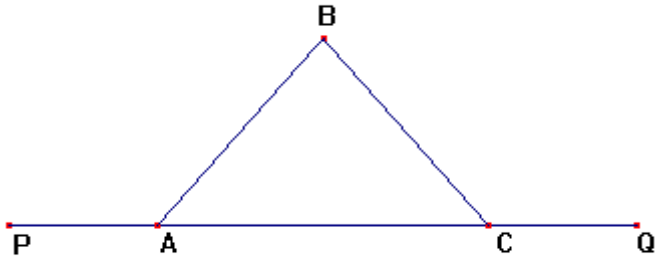
Una carta geografica ha scala 1:100.000. Sulla carta rilevo le seguenti distanze:

- tra *A* e *B*: 6 cm;
- tra *C* e *D*: 3,5 cm;
- tra *E* ed *F*: 0,5 cm.

Quali sono le distanze reali?

4. Le pecore

Un allevatore di pecore delle Highlands possiede due pezzi di steccato della stessa lunghezza con i quali racchiudere le sue pecore. Fortunatamente nelle vicinanze c'è un muro di mattoni diritto.
Essendo allenato a fare matematica egli sa che, con questo materiale, può costruire un recinto triangolare mettendo gli steccati *AB* e *BC* contro il muro *PQ* nelle posizioni *A* e *C*, come in figura.



Ma quale tipo di triangolo deve essere *ABC* per formare un recinto di area massima?
(E' previsto qui l'uso di un software di geometria dinamica, ma con altri approcci la verifica è proponibile al secondo biennio)

5. Approssimiamo…
Le misure delle due dimensioni di un rettangolo, 200,03 cm e 100,04 cm vengono approssimate a meno di un decimo e viene calcolata l'area del rettangolo di 2×10^4 cm^2. Qual è l'ordine di grandezza dell'incertezza dell'area?

6. La piramide Maya
Si vuole costruire una piramide ottenuta sovrapponendo ad una base composta da un quadrato di $2n\times2n$ blocchi cubici di spigolo unitario uno strato di $2(n-2)\times2(n-2)$ blocchi dello stesso tipo dei precedenti fino a raggiungere l'ultimo piano composto da un quadrato di 2×2 blocchi. Esprimere il numero totale dei blocchi e la superficie esterna in funzione di n.

Il triangolo di area massima

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure. Confrontare variazioni di grandezza. Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze.	Aree dei poligoni. Equazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	Misurare Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Figure geometriche.

Il contesto di riferimento è quello delle figure geometriche; l'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi di questo contesto e contribuire a consolidare alcune conoscenze di geometria che gli studenti hanno già conseguito.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. Nella prima si propone agli studenti una situazione in cui viene assegnato un insieme di triangoli isosceli di dato lato e si richiede di osservare con attenzione, anche se a livello qualitativo, quali sono le costanti e le variabili della situazione problematica. Nella seconda fase si chiede agli studenti, che lavorano in un ambiente di geometria dinamica, di determinare il triangolo di area massima fra quelli assegnati. Nella terza fase, l'insegnante, in una discussione di bilancio, presenta, commenta e confronta le varie soluzioni proposte, soffermandosi su considerazioni legate anche alla potenzialità e ai limiti delle soluzioni degli studenti e di quelle suggerite dall'insegnante stesso.

È possibile iniziare l'attività con una lettura che metta in evidenza sia l'aspetto sociale della misurazione sia l'operatività come insieme di assunti condivisi.
"*Spesso sentiamo dire che la scienza è una forza rivoluzionaria che impone nuove e radicali idee alla storia dell'umanità. Ma essa emerge anche dall'interno della storia umana, dando nuova forma ad azioni consuete, alcune delle quali sono così abituali che difficilmente ci accorgiamo di compierle. La misurazione è una delle nostre azioni più consuete. Noi parliamo la stessa lingua ogni volta che, con precisione, scambiamo informazioni o commerciamo oggetti. Questa sua vera e propria onnipresenza rende invisibile la misurazione. Per essere operative, le unità di misura devono agire come un insieme di assunti condivisi, l'inesplorato substrato di conoscenze nei confronti del quale possiamo trovare accordi e fare distinzioni. Perciò non stupisce il fatto che noi diamo per scontata e consideriamo banale la misurazione. Inoltre, proprio nell'uso che una società*

fa delle unità di misura trova espressione il suo senso di onestà. Per questa ragione la bilancia è un diffuso simbolo di giustizia" (tratto da *La misura di tutte le cose* di Ken Alder).

Prima fase
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:

Situazione

E' dato un segmento di lunghezza 5 unità.

Proposta di lavoro

Costruite un triangolo isoscele che abbia i due lati uguali della stessa lunghezza del segmento dato.
Effettuate una costruzione che rappresenti tale triangolo in un ambiente di geometria dinamica. Osservate quindi come si modifica il triangolo, trascinando i punti della costruzione che si possono muovere.
L'ambiente di geometria dinamica, infatti, consente di osservare le grandezze che si modificano e quelle che rimangono costanti quando si trascinano dei vertici liberi (per esempio la lunghezza dei due lati assegnati rimane costante, analogamente alla somma degli angoli interni del triangolo, mentre variano, in generale, le altre grandezze geometriche). Alcuni studenti fanno uso anche in questa prima fase dello strumento misura eventualmente fornito dal software. Questo comportamento, che può apparire a prima vista ingenuo, in quanto assolutamente non necessario, consente, però, agli studenti di entrare nella logica del problema e di prepararsi alla seconda fase.

Seconda fase
L'insegnante invita gli studenti a individuare le caratteristiche del triangolo di area massima fra quelli della famiglia considerata. Si può richiedere che tale quesito venga affrontato in piccoli gruppi collaborativi.
In questa fase l'insegnante dovrebbe limitarsi a osservare con attenzione il lavoro svolto nei gruppi; in particolare può essere importante osservare l'eventuale uso della misura, di approcci analitici, piuttosto che sintetici o viceversa; la preferenza per un approccio di tipo numerico (tabelle dei valori, tabelle delle differenze), oppure geometrico-grafico o, infine, formale (determinazione della formula che rappresenta la variazione dell'area rispetto a una determinata grandezza scelta come variabile indipendente).
Una prima risposta che in genere viene fornita da molti studenti è che il triangolo di area massima sia quello equilatero. All'origine di questa risposta ci sono probabilmente ragioni di simmetria, di apparente analogia con i problemi di area massima dei poligoni isoperimetrici, di vaga fiducia nella soluzione più semplice, motivi che si potrebbero anche definire estetici. Ciò che interessa, però, è che il problema porta gli studenti a effettuare una previsione, una congettura che può essere validata nell'ambiente di geometria dinamica, attraverso la funzione di trascinamento e l'osservazione di ciò che accade in seguito al trascinamento. L'ambiente non è inerte, perché, grazie alla funzione misura, in genere disponibile in un ambiente di geometria dinamica, dà una risposta inattesa: una volta ottenuto il triangolo equilatero, l'area continua a crescere e cresce per un bel po', prima di tornare a decrescere. Ciò genera sorpresa e stupore negli studenti e spinge loro a chiedersi *perché*. Polya sosteneva che è proprio la nascita di domande del tipo *perché?* che spinge alla ricerca di giustificazioni e quindi motiva alla dimostrazione (e questo anche quando si è convinti della correttezza di una congettura, non solo quando si ottengono, come in questo caso, risposte sorprendenti).

Terza fase
L'insegnante avvia una discussione di bilancio coinvolgendo l'intera classe, presentando e commentando le varie strategie risolutive seguite dai diversi gruppi di studenti e proponendo egli stesso, eventualmente, altre risoluzioni.

Si descrivono di seguito alcune possibili risoluzioni del problema, che differiscono notevolmente per i mezzi messi in gioco.

Approccio sintetico
Questo tipo di soluzione fa capire che il problema potrebbe essere anche proposto a studenti del primo biennio. Può essere suggerito da particolari modalità di esplorazione nell'ambiente di geometria dinamica che gli studenti hanno a disposizione: infatti, trascinando il vertice B, come suggerisce la figura 1, gli studenti si rendono conto che, poiché AC è costante, l'area massima si ha per il massimo di BH, ossia con H coincidente con A, quindi il triangolo di area massima è il triangolo rettangolo isoscele.

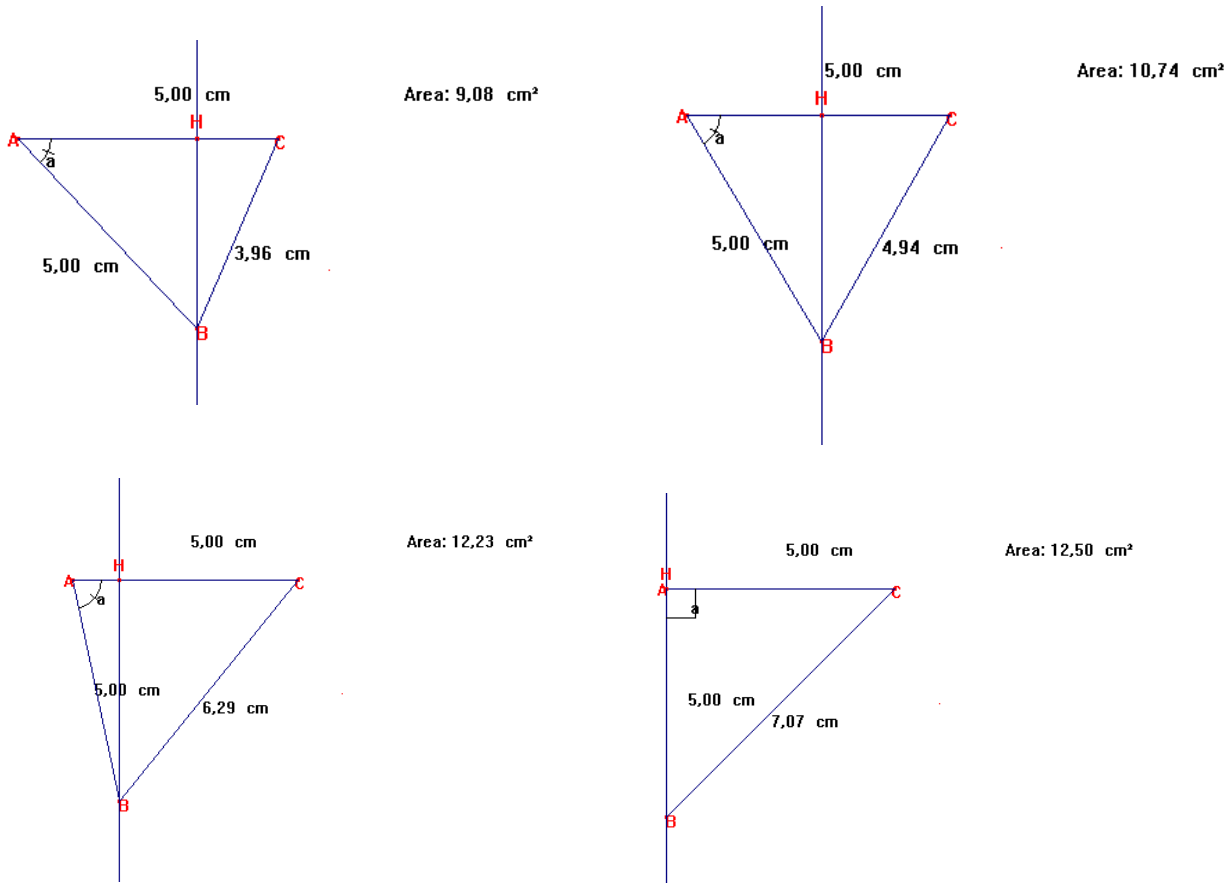


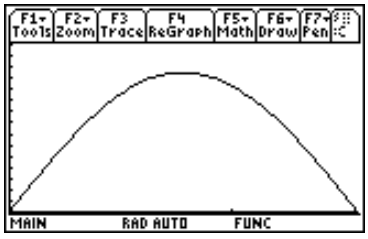
Figura 1

Approccio numerico
Gli studenti si limitano a fornire una stima numerica delle misure dei lati e degli angoli del triangolo di area massima utilizzando la funzione misura fornita dal software, senza riuscire, però, a capire bene il perché quella trovata è la soluzione del problema.

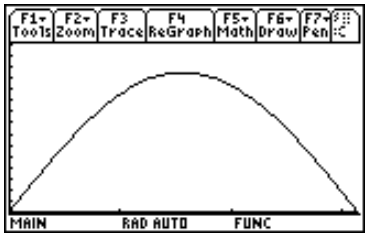
Approccio analitico-funzionale
Gli studenti determinano una funzione che rappresenta la variazione dell'area del triangolo rispetto a una grandezza scelta come variabile indipendente. In questo caso l'insegnante dovrebbe far notare che la scelta della grandezza da considerare come variabile indipendente può risultare strategica e che, in ogni caso, è necessario specificarne l'insieme di variabilità.
Qui di seguito vengono riportate alcune delle funzioni che è possibile considerare (y rappresenta l'area del triangolo e per la notazione degli angoli e dei lati si fa riferimento ai triangoli della figura 1):

- in funzione dell'angolo ACB = x, si ha $y = 25\dfrac{\sin(2x)}{2}$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$;
- in funzione dell'angolo BAC = x, si ha $y = 12{,}5 \sin x$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;
- in funzione della proiezione KC = x di uno dei lati uguali sulla base si ha $y = x\sqrt{25 - x^2}$ con $0 \le x \le 5$;
- in funzione della proiezione HC della base BC su uno dei lati uguali si ha $y = \dfrac{5\sqrt{25 - x^2}}{2}$ con $0 \le x \le 5$;
- in funzione dell'altezza relativa a uno dei lati uguali, BH = x si ha $y = \dfrac{5}{2}x$ con $0 \le x \le 5$.

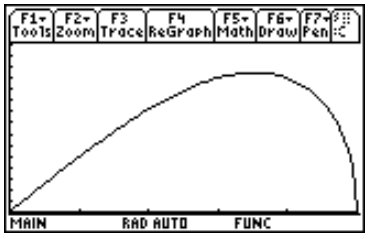
Con un software di manipolazione grafico-simbolica è anche possibile rappresentare il grafico delle varie funzioni, cercare di comprenderne le caratteristiche, in particolare capire la ragione dell'assenza o della presenza di eventuali simmetrie (vedere la figura 2).



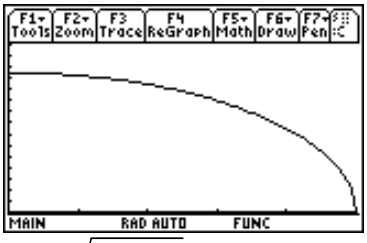
$y = 25\dfrac{\sin(2x)}{2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$



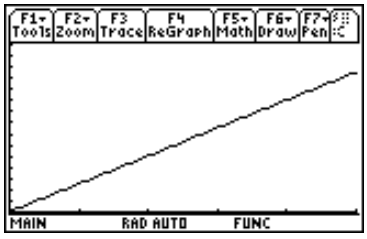
$y = 12{,}5\sin x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$



$y = x\sqrt{25 - x^2}, \quad 0 \le x \le 5$



$y = \dfrac{5\sqrt{25 - x^2}}{2}, \quad 0 \le x \le 5$



$y = \dfrac{5}{2}x, \quad 0 \le x \le 5$

Figura 2

L'insegnante può anche far vedere come i grafici possono essere determinati direttamente nell'ambiente di geometria dinamica, inserendo gli assi cartesiani e definendo opportunamente le relazioni tra l'area e la variabile scelta come indipendente. Nella figura 3 vengono rappresentate in un ambiente di geometria dinamica le funzioni area in funzione di BH, BC e BAC.

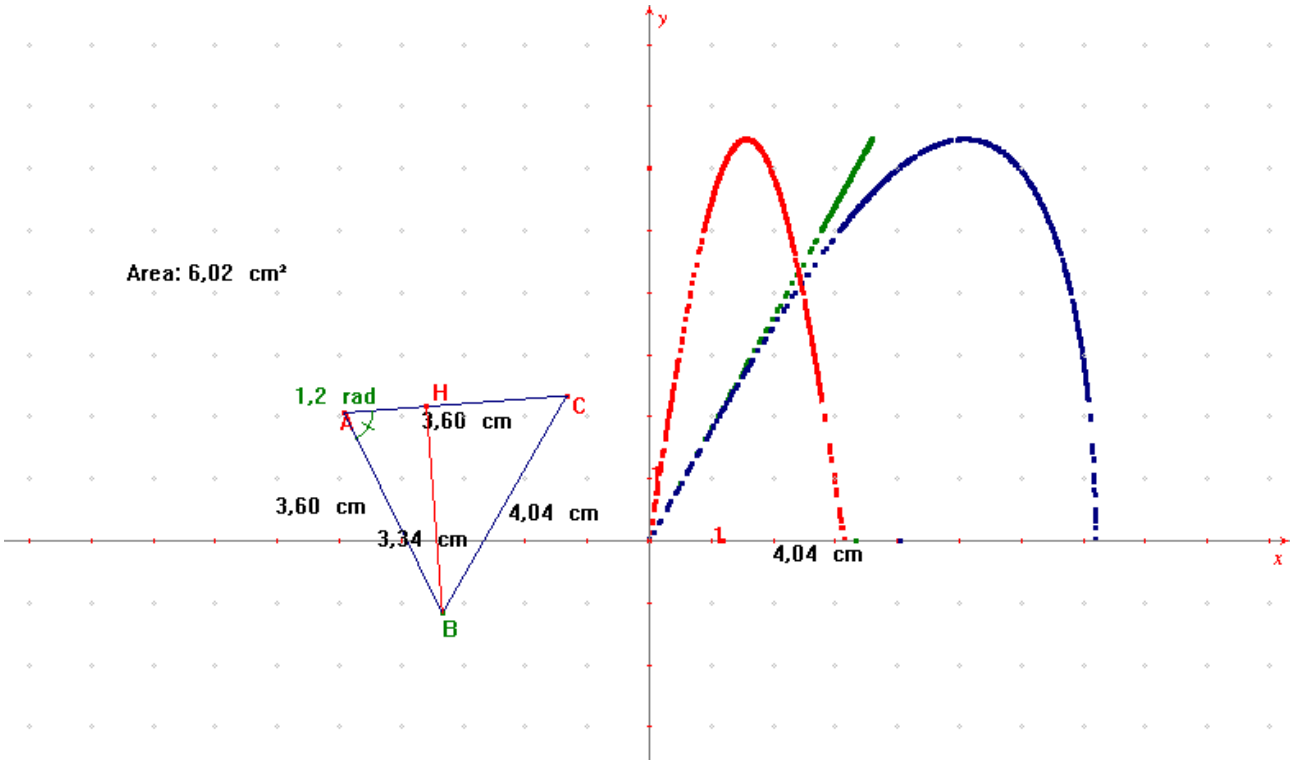


Figura 3

Possibili sviluppi

- Generalizzare il problema a un triangolo qualunque di cui è assegnato un lato.
- Problemi di massimo e minimo.
- Dimostrazioni sintetiche di alcune proprietà determinate per via analitica.

Elementi di prove di verifica

1. Triangoli inscritti in una semicirconferenza
Tra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza determinare quello di area massima.

2. Rettangoli equiestesi
Tra tutti i rettangoli di ugual area, determinare quello di perimetro minimo.

Gli aghi di pino

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura. Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze. Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze. Riconoscere la curva a campana nella distribuzione empirica di misure ripetute della stessa grandezza	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze.	Misurare Dati e previsioni Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Raccolta di dati.

Il contesto cui ci si riferisce è quello della raccolta di dati, ad esempio le lunghezze degli aghi di pino, con particolare attenzione a:

- organizzazione dei dati in una tabella e conseguente suddivisione degli stessi in intervalli di misura;
- rappresentazione dei risultati ottenuti in un grafico misura-frequenza;
- calcolo di medie e scarti;
- analisi finale del diagramma ottenuto con commenti e riflessioni anche su forme analoghe derivanti da esperimenti successivi.

Descrizione dell'attività
Si presenta una serie di attività, nelle quali gli studenti conducono un'esperienza di misura di lunghezze di aghi di pino, analizzano e rappresentano i dati, elaborano indici statistici, simulano fenomeni come il lancio di dadi, rappresentano graficamente i risultati per poi trovare delle analogie tra gli andamenti grafici di fenomeni diversi.
L'insegnante, infatti, deve far in modo che gli studenti riescano a familiarizzare con una curva teorica, quale la gaussiana, riconoscendola come elemento unificante di fenomeni diversi.
All'esperimento di misura, relativo agli aghi di pino, segue una discussione matematica con tutta la classe, coordinata dall'insegnante, volta sia ad analizzare i dati ottenuti che ad organizzare la loro rappresentazione.
Successivamente, simulando il lancio di dadi, l'insegnante dà luogo ad un'ulteriore discussione in classe, con l'intento di far analizzare agli studenti i grafici ottenuti, spingendoli così a determinare le possibili analogie o differenze, evidenziando infine gli andamenti comuni.

Prima fase
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di misurare le lunghezze di aghi di pino (di uno stesso albero) con l'utilizzo di un righello tarato al millimetro. Dopo aver raccolto qualche centinaio di aghi di pino, si passa alla fase della misura: gli studenti devono quindi riportare su un foglio

elettronico i dati raccolti, raggruppati per classi di uguale ampiezza, indicandone la frequenza assoluta. Questa fase può essere realizzata anche a livello di primo biennio, con lo scopo di familiarizzare gli studenti alla misura e alla raccolta e organizzazione dei dati relativi alla misura di una o più grandezze.

Seconda fase

La seconda fase mira alla costruzione e all'interpretazione di grafici, a partire dalle tabelle precedentemente realizzate. L'insegnante guida gli studenti alla costruzione di un istogramma delle frequenze assolute, al calcolo della media aritmetica m e dello scarto quadratico medio s.
L'intervento successivo, da parte dell'insegnante, deve costituire uno stimolo alla riflessione attraverso alcuni quesiti quali, ad esempio: "Quale forma assume la figura così ottenuta?"; "Quanti valori in percentuale sono compresi rispettivamente negli intervalli $(m - s, m + s)$, $(m - 2s, m + 2s)$, $(m - 3s, m + 3s)$?". Si ottengono dati molto vicini a quelli teorici della distribuzione normale, che danno indicazioni agli studenti delle percentuali di riferimento contenute nei suddetti intervalli.
Le risposte a tali interrogativi gettano le basi per lo studio della distribuzione normale.

Terza fase

La terza fase mira alla realizzazione di altre esperienze, la cui elaborazione porta gli studenti alla constatazione di come esperimenti diversi possano avere rappresentazioni grafiche analoghe. Tali attività sono stimolanti per i risultati che offrono.
Ad esempio, si potrebbe considerare il lancio di due, tre, quattro o più dadi e determinare le frequenze di uscita della somma dei punteggi delle facce. Questa attività può essere effettuata con il lancio manuale, oppure con la simulazione al calcolatore. Per effettuare tale simulazione, si può utilizzare un software simbolico con le funzioni statistiche, che abbia la funzione di generazione di numeri casuali, oppure un linguaggio di programmazione del calcolatore o di una calcolatrice. Ma un ambiente particolarmente favorevole per la simulazione del lancio di dadi può essere il foglio elettronico, in quanto consente la visualizzazione del numero in una cella, il calcolo numerico, la rappresentazione grafica dei dati.
Il lavoro può essere condotto con un duplice obiettivo: da una parte, il calcolo delle frequenze di uscita della somma dei punteggi delle facce dei dadi, su un numero di lanci sufficientemente alto, dell'ordine di qualche centinaio, dall'altra, la determinazione delle probabilità di uscita dei valori della variabile somma dei punteggi delle facce. Questi due insiemi di dati possono essere utilizzati separatamente per osservare il grafico che si ottiene considerando sull'asse delle ascisse il valore della somma dei punteggi delle facce e sull'asse delle ordinate le relative frequenze o probabilità, oppure insieme, in modo da sovrapporre i due grafici e confrontarli. Inoltre, si osserva che la distribuzione di tale somma, mentre per un dado solo è uniforme, per la somma dei punteggi delle facce nel lancio di più dadi cambia forma, passando, man mano che aumentano i dadi, da quella "triangolare" a quella "a campana", come si può osservare nelle figure seguenti (in 300 lanci di uno, due, tre dadi rispettivamente) e le probabilità dell'evento somma dei punteggi delle facce.

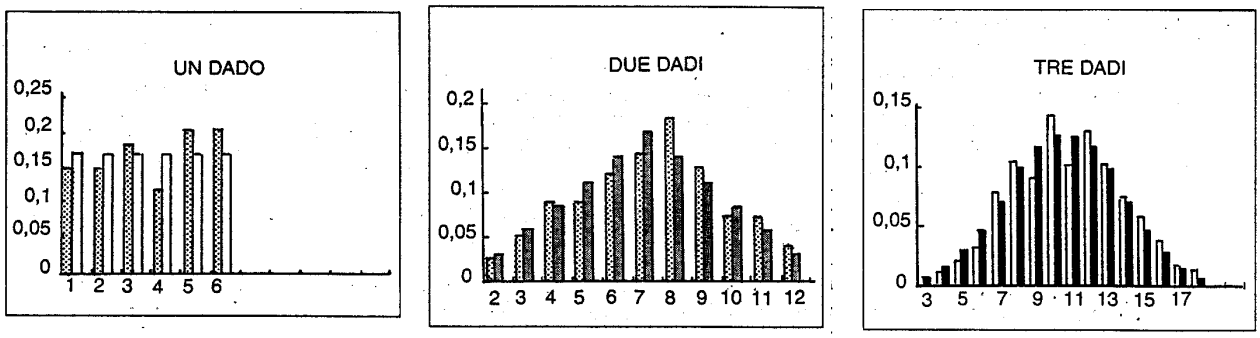


Figura 1

Elementi di prove di verifica

1. I voti d'esame
Per sostenere un esame scritto gli studenti devono rispondere a 20 domande a risposta multipla.
I punteggi per i 213 studenti che sostengono l'esame sono riportati nella seguente tabella:

Punteggi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N° Studenti	1	1	5	7	12	13	16	15	17	32	17	21	12	16	8	4	7	5	4	0

Calcolare la media e lo scarto quadratico medio. Fare una rappresentazione grafica dopo aver raggruppato le intensità in classi di ampiezza due. Quali considerazioni si possono fare sul grafico ottenuto?

Gli incrementi finiti di una funzione

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre. Confrontare variazioni di grandezze utilizzando i concetti di pendenza e di variazione di pendenza. Stimare l'ordine di grandezza di una misura.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Incrementi a passo costante, pendenza media.	Misurare Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Grandezze variabili.

Il contesto dell'attività è quello dello studio della variazione di grandezze.

Descrizione dell'attività
Mediante il calcolo degli incrementi finiti di funzioni che legano queste grandezze in semplici casi particolari, per cogliere nel fenomeno certe regolarità che preludono all'introduzione formale del concetto di derivata nell'ambito dell'analisi matematica. L'attività offre anche precisi riferimenti storici al problema della determinazione delle rette tangenti ad una curva assegnata in un suo punto, allo studio delle variazioni di una funzione attraverso la sua rappresentazione grafica ed alla determinazione della velocità istantanea del moto di un corpo a partire dalla sua legge oraria.
Prerequisiti: grafici di funzioni polinomiali di primo e secondo grado, calcolo letterale, frazioni algebriche, legge oraria del moto di un corpo.

Prima fase
Assegnato un grafico di una funzione sconosciuta (ad esempio, quello di una cubica con un punto di massimo relativo ed un punto di minimo relativo), tracciato su di un foglio, si propone agli studenti, come lavoro individuale oppure di gruppo, di descrivere qualitativamente per scritto le variazioni della variabile dipendente in relazione alle variazioni della variabile indipendente. Gli studenti hanno il compito di provare ad individuare le zone del grafico loro fornito in cui tali variazioni avvengono con maggiore o minore rapidità e di collegare questi fatti con le caratteristiche del grafico della funzione stessa.

Proposta di lavoro

Analizza il grafico riprodotto nel foglio che ti è stato dato.
Descrivi come cambiano i valori della variabile dipendente y al variare dei valori della variabile indipendente x; controlla in particolare se le variazioni di y si manifestano con una certa "uniformità" al variare dei valori di x oppure no. Trova un collegamento tra l'andamento del grafico ed il modo in cui variano i valori della variabile y e scrivi quali sono le tue opinioni a proposito.

Si mettono a confronto le osservazioni emerse nella prima fase durante una discussione collettiva in classe. Si propone quindi di continuare l'analisi con un approccio quantitativo al problema.

Seconda fase

Si passa da un'analisi qualitativa ad un'analisi quantitativa, restringendo però il campo d'azione alla situazione più semplice che gli studenti conoscono: l'ambito delle funzioni polinomiali. L'indagine, che si può ben avvalere di un foglio elettronico, procede dallo studio di un caso particolare verso la descrizione di un caso qualsiasi, così da porre ancora una volta l'accento sul potere generalizzante del linguaggio dell'algebra letterale e da permettere di pari passo la rilettura di quanto scoperto mediante il calcolo algebrico nelle proprietà del grafico associato alla funzione considerata. Uno degli aspetti caratterizzanti l'intera proposta è quello di non limitarsi alla sola determinazione delle differenze finite tra i valori della variabile dipendente, in funzione degli incrementi della variabile indipendente: in effetti per la funzione di secondo grado si calcolano anche gli incrementi delle differenze stesse (dette "prime differenze"), per ottenere le "seconde differenze" e verificare che queste ultime si mantengono costanti, mentre per la funzione di terzo grado si giunge a calcolare le "terze differenze", che risultano ugualmente costanti.

Nasce subito un problema aperto da proporre agli studenti: il comportamento delle funzioni di secondo e terzo grado può essere generalizzato? Si può dimostrare qualcosa a questo proposito?

Proposta di lavoro 1

Considera la funzione $y = 2x + 1$ e rappresenta il suo grafico in un riferimento cartesiano ortogonale xOy. Dati i seguenti valori di x: 0, 1 , 2, 3, 4, 5, 6, organizza con un foglio elettronico una tabella che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di y. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di y. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di x ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo. Prova a ritrovare le tue conclusioni nel grafico che hai rappresentato. Che cosa accade, secondo te, se si considera una funzione qualunque del tipo $y = m\,x + n$, essendo m ed n parametri assegnati? Ripeti il precedente esperimento di calcolo, annotando quello che scopri.

Proposta di lavoro 2

Considera adesso una funzione generica di secondo grado, del tipo $y = x^2$. Dati i seguenti valori di x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, organizza una tabella con un foglio elettronico che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di y. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di y e determina inoltre le differenze tra le differenze successive che hai appena calcolato. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di x ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo.

Che cosa accade, secondo te, se si considera una funzione qualunque del tipo $y = ax^2$, essendo a un parametro assegnato? Ripeti il precedente esperimento di calcolo, annotando quello che scopri.

Proposta di lavoro 3

Considera adesso una funzione generica di terzo grado, del tipo $y = ax^3$. Dati i seguenti valori di x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, organizza con un foglio elettronico una tabella che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di y. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di y, determina come prima le differenze tra le differenze successive che hai appena calcolato e stavolta determina anche i valori delle differenze tra queste ultime differenze consecutive ottenute. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di x ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo.

Riesci ad immaginare che cosa accadrebbe se ripetessi il procedimento per una funzione di quarto grado del tipo $y = ax^4$? Puoi prevedere un comportamento generalizzabile per le funzioni del tipo $y = ax^n$, con n esponente intero positivo qualsiasi?

Osservazioni
Ciò che in conclusione deve emergere da queste prime fasi dell'attività è una specifica metodologia di analisi del comportamento di una funzione che trova immediata applicazione nella ricerca del coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione assegnata in un suo punto. Tale ricerca viene condotta in stretto collegamento con la determinazione della velocità istantanea del moto di un corpo secondo una certa legge oraria, come descritto nella fase successiva dell'attività.

Terza fase
Si passa ora all'applicazione del metodo degli incrementi finiti per la determinazione della velocità media di un corpo in movimento, a partire dall'espressione algebrica della legge oraria. In seguito si determina l'espressione della velocità istantanea al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente t e si giunge a prevedere quella che è in fondo la legge generale della derivata della funzione $s(t) = at^n$.

Proposta di lavoro 1
Immagina di dover studiare il moto di un corpo che si muove secondo la seguente legge oraria: $s(t) = at + b$. Calcola la velocità media in relazione all'intervallo di tempo $[t_1 , t_2]$. Che cosa ottieni? E se il valore di t_2 si avvicina sempre di più a t_1, che cosa puoi dire del valore della velocità media che hai prima calcolato? Pensi che si possa dare un significato preciso alle tue osservazioni? Prova a ripetere adesso lo stesso calcolo, indicando per semplicità l'istante di tempo t_2 come $t_1 + h$, per la legge oraria $s(t) = at^2$ e per la legge oraria $s(t) = at^3$, immaginando che il valore di h si avvicini sempre più a 0. C'è qualche regolarità in quello che hai trovato? Spiega le tue risposte.

Osservazioni
L'obiettivo della discussione da far seguire alla precedente consegna è evidentemente l'introduzione in modo intuitivo del concetto di velocità istantanea del moto di un corpo, senza però ricorrere alla formalizzazione del concetto di limite del rapporto incrementale.

Proposta di lavoro 2
Prova adesso a generalizzare tutto quello che fino ad ora si è scoperto. Cerca di prevedere quale potrebbe essere una legge di carattere generale per la velocità associata alle leggi orarie del tipo $s(t) = at^n$, con n esponente intero positivo qualsiasi. Cambiando un po' le cose, si potrebbe dire qualcosa per la velocità associata alla legge oraria di un moto uniformemente accelerato, come quello di caduta dei corpi nel vuoto? Ricorda che la legge oraria è in tal caso $s(t) = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0$. Scrivi quello che pensi a proposito.

Possibili sviluppi
A questo punto un naturale sviluppo dell'attività consiste nel collegare il problema della ricerca di un'espressione per la velocità istantanea di un corpo in moto secondo una legge oraria assegnata, almeno per il caso polinomiale, al problema della ricerca dell'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto. Ciò conduce ad interpretare il coefficiente angolare della retta tangente ad un grafico come il valore della velocità istantanea del corpo in moto secondo la legge oraria associata a tale grafico, senza arrivare per il momento ad una teoria compiuta della derivazione.

Crescite veloci e crescite lente

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire modelli, a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni. Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre. Confrontare variazioni di grandezze.	Esempi di funzioni e dei loro grafici. La funzione esponenziale; la funzione logaritmica.	Misurare Relazioni e funzioni Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Biologia Chimica Scienze della terra Fisica

Contesto
Modelli.

Il contesto è quello dei modelli. Un approccio laboratoriale alla funzione esponenziale e alla funzione logaritmica, che prenda spunto da situazioni legate al mondo reale, è qui articolata intorno a diversi fenomeni che si rappresentano con curve di crescita esponenziale o si misurano con scale logaritmiche.

Descrizione dell'attività
L'intento è di arrivare gradualmente ad alcune proprietà delle funzioni in questione, costruendone i significati; si propongono tabelle e grafici e si guidano le osservazioni dei ragazzi verso l'uso che si fa delle due funzioni in ambiti diversi.
Contemporaneamente, in collegamento con altri nuclei, si ha occasione di parlare di numeri irrazionali e dell'uso dei logaritmi nei calcoli (numeri e algoritmi) ma anche di scegliere alcune dimostrazioni delle proprietà dei logaritmi (argomentare, congetturare, dimostrare).
Prima fase

- L'insegnante propone una tabella che rappresenta alcuni dati di un fenomeno di crescita esponenziale, tratto dalla biologia, invitando gli studenti a completare qualche riga in più e, in particolare la *n*-esima riga.

"Una popolazione di 20 milioni di individui cresce del 2,5% al giorno".

giorno	Popolazione in milioni
0	20
1	$20+20*25/1000 = 20*(1+0{,}025) = 20*1{,}025$
2	$20*1{,}025+20*1{,}025*0{,}025=20*(1{,}025)*(1+0{,}025) = 20*(1{,}025)^2$
3	$\ldots.= 20*(1{,}025)^3$
n	$20*(1{,}025)^n$

Tabella 1

- Sarà cura dell'insegnante dare alcune indicazioni sui termini specifici che si utilizzano più comunemente in problemi che hanno un modello analogo.
- La consegna per gli studenti prevede ora che, con le indicazioni scelte in questo esempio, siano in grado di costruire i grafici relativi alle due situazioni, utilizzando un foglio elettronico.

Situazione

Una crescita esponenziale è spesso descritta in termini di percentuale, come nel precedente esempio dove il fattore di crescita è a = 1+ 25/1000 = 1,025 e il tasso di crescita è r = 0,025; considerato che 20 è costante e possiamo chiamarlo K, in generale una funzione di questo tipo che esprime una crescita si può scrivere $Y = Ka^x = K(1+r)^x$. In questo caso quindi $Y = 20*1{,}025^x = 20*(1+0{,}025)^x$, con x variabile che rappresenta i giorni.
Analogamente per un fattore di decadimento a = 1- 2/1000 quindi con tasso di decadimento r = 0,002 la funzione che rappresenta il fenomeno di decadimento (dello 0,2% al minuto) è $Y = Ka^x = K(1-r)^x$ con x variabile che rappresenta i minuti.

Proposta di lavoro

Costruisci i grafici che rappresentano le precedenti situazioni.
Costruisci un esempio di una crescita lineare, rappresentalo graficamente e confronta i due modelli di crescita.

- Si prosegue con la lettura di un breve brano che illustra il metodo di datazione del Carbonio-14 e si propone un esercizio applicativo.

<u>Il metodo di datazione del Carbonio-14</u>

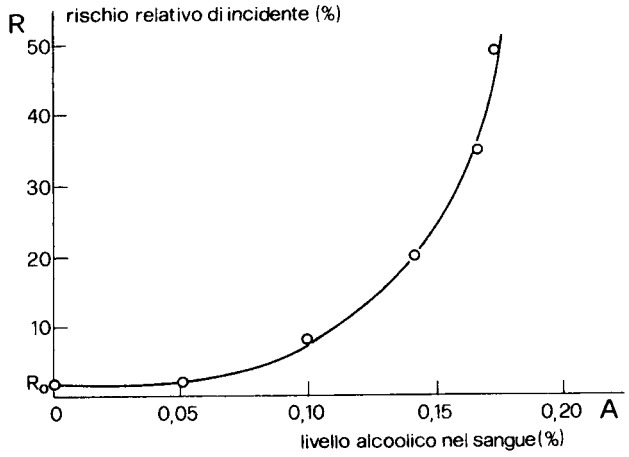
Uno dei più famosi e semplici metodi di datazione dei reperti archeologici è il cosiddetto "metodo del Carbonio-14" ideato alla fine degli anni quaranta dal chimico statunitense Walter F. Libby (che ricevette per questo il Premio Nobel nel 1960).
L'atmosfera terrestre è bombardata continuamente da raggi detti "cosmici", i quali danno luogo alla produzione di Carbonio-14 (C^{14}), che è radioattivo. Il C^{14} viene assorbito dalle piante e assimilato così dagli animali. L'assorbimento del C^{14} nei tessuti viventi è compensato esattamente dal decadimento radioattivo, per cui si crea uno stato di equilibrio. Quando un organismo cessa di vivere, la concentrazione di C^{14} diminuisce col tempo perché esso non ne assimila più e quindi ha luogo soltanto il fenomeno di decadimento. Ora l'ipotesi fondamentale su cui poggia il metodo del C^{14}, è che l'intensità di bombardamento della superficie non è mai variata. Ciò implica che il decadimento del C^{14} in un campione, per esempio, di carbon fossile, si verificava all'origine con la stessa intensità con cui si verifica oggi. Queste osservazioni consentono di determinare l'età di un campione di carbon fossile e quindi di reperti archeologici ritrovati assieme ad esso. È possibile ricavare una equazione in cui l'unica incognita è l'età del carbon fossile; essa si ottiene dalla più generale equazione di crescita esponenziale applicata ai fenomeni di decadimento radioattivo (fenomeno studiato fin dagli inizi del secolo da E. Rutherford).

Proposta di lavoro

"Il tempo di dimezzamento" di una sostanza radioattiva corrisponde al tempo necessario affinché il numero di atomi della sostanza si dimezzi. Per il Carbonio-14 il tempo di dimezzamento è di 5730 anni. Determina, con ragionevole approssimazione, l'età di un reperto per il quale la concentrazione di C^{14} risulta pari al 12% di quella di analoghi organismi viventi (si può calcolare un valore adeguato di $(1/2)^n$ dove n è il numero dei tempi di dimezzamento o risolvere l'equazione esponenziale $(1/2)^x = 0{,}12$ ricordando che l'unità di misura è 5730 anni).

- L'insegnante propone adesso due grafici

Istogramma del rischio di incidente automobilistico per ingestione di alcool, confrontato con la curva di crescita esponenziale



Curve della concentrazione di penicillina nel sangue in casi di somministrazione di diverse dosi iniziali

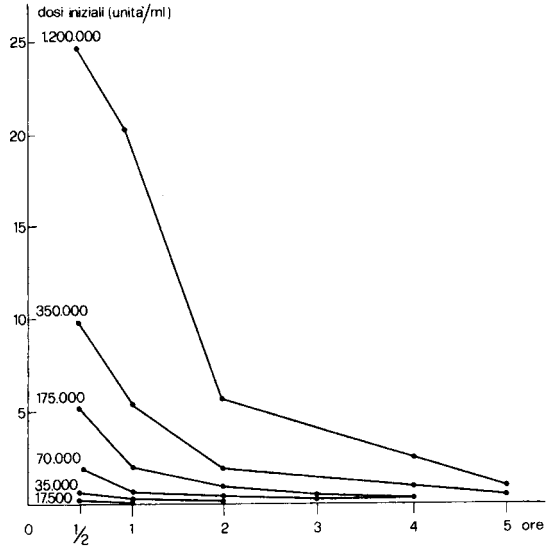


Figura 1

Proposta di lavoro

Confronta i due grafici con gli altri da te ottenuti e fai le tue osservazioni in non più di cinque righe.

Seconda fase

Si propongono alcune brevi letture, oggetto di una precedente ricerca su Internet con gli studenti, sulle scale logaritmiche.

Il terremoto

L'intensità: misura la grandezza di un terremoto attraverso gli effetti sull'uomo, sulle costruzioni, sull'ambiente.

Pertanto in luoghi diversi, per uno stesso terremoto, essa assume valori differenti e ciò deriva dal fatto che gli effetti tendono a divenire più deboli con l'aumentare della distanza dall'epicentro. L'intensità di un terremoto viene espressa tramite la scala Mercalli.

La magnitudo: misura la forza di un terremoto attraverso le registrazioni (sismogrammi) degli strumenti ed è stata definita nel 1935 dal famoso sismologo C.F. Richter come misura oggettiva della quantità di energia elastica emessa durante il terremoto. Esprime la grandezza di un terremoto attraverso la misura dell'ampiezza massima della traccia registrata dal sismografo. La scala della magnitudo è una scala logaritmica, per cui un aumento di una unità nelle magnitudo corrisponde a un aumento di un fattore 10 nell'ampiezza del movimento della terra, e a una liberazione di energia circa 30 volte maggiore. La magnitudo è un parametro indipendente dagli effetti che il terremoto provoca sull'uomo e sulle costruzioni; essa permette di confrontare tra loro eventi sismici avvenuti nelle diverse parti del mondo ed in tempi differenti. I terremoti più piccoli percettibili dall'uomo hanno una magnitudo intorno a 2,5, mentre quelli che possono provocare danni alle abitazioni e vittime hanno generalmente una magnitudo superiore a 5,5.

Nella seguente tabella si può vedere l'equivalenza fra le scale comunemente usate per indicare l'intensità di un terremoto: la scala Richter e la scala Mercalli (MCS).

Gradi scala Mercalli [MCS]	Gradi scala Richter	Quantità equivalente di tritolo [kg]
0	1,0	20
1	2,0	625
2	2,5	3.500
3	3,0	20.000
4	3,5	110.000
5	4,0	625.000
6	4,5	3.500.000
7	5,0	20.000.000
8	5,5	110.000.000
9	6,0	625.000.000
10	6,5	3.500.000.000
11	7,0	20.000.000.000
12	7,5	110.000.000.000

Tabella 2

È comunque conveniente tradurre l'ultima colonna in notazione scientifica.

Proposta di lavoro

Rappresenta i dati dell'ultima colonna su scala logaritmica, in modo da poterli confrontare con quelli della scala Richter prima e della Scala Mercalli poi.

L'idea di Richter

L'ampiezza massima delle onde registrate da un sismogramma (indicata con A) può essere usata come misura della "grandezza" di un terremoto se viene messa a confronto con l'ampiezza massima (A_0) delle onde fatte registrare da un terremoto scelto come riferimento (terremoto standard). Egli

scelse un terremoto che produce su un sismografo standard, posto a 100 km dall'epicentro, un sismogramma con oscillazione massima uguale a 0,001 mm.
Poiché l'ampiezza massima registrata sul sismogramma di un forte sisma può essere anche milioni di volte maggiore di un terremoto debole, al fine di evitare numeri di magnitudo troppo grandi, ritenne opportuno ricorrere al logaritmo in base 10 del rapporto fra l'ampiezza massima del terremoto (misurata in micrometri) e l'ampiezza che verrebbe prodotta dal terremoto standard alla stessa distanza epicentrale: $M = log\ A/A_0$; non esiste un limite teorico della magnitudo ma, in pratica, nel XX secolo la massima magnitudo registrata è stata poco meno di 9.

La scala decibel del suono

L'apparato uditivo umano è sensibile alle variazioni di pressione atmosferica che, tramite un complesso sistema meccanico, chimico e nervoso traduce in variazione di segnali elettro-chimici che viaggiano verso il cervello.
Il punto è che questo legame non è lineare. E cioè, al raddoppio dell'intensità del suono non avvertiamo il raddoppio della sensazione di volume, ma molto di meno. Il legame è di tipo logaritmico. In linea di massima, se l'intensità dell'onda sonora aumenta di dieci volte, noi avvertiamo soltanto un raddoppio del volume.
La definizione di dB passa appunto per i logaritmi. La scala decibel nasce in questa maniera: se P' è la pressione standard di 0,0002 microbar (approssimativamente corrispondente alla soglia audio, cioè al minimo segnale rilevabile dal nostro orecchio) la pressione sonora P è così definita:

$$20\ log\ (P/P')$$

Per le proprietà dei logaritmi, sappiamo che:

$$log\ (ab) = log\ a + log\ b$$
$$log\ (a/b) = log\ a - log\ b$$

per cui, se nell'appartamento accanto il nostro c'è una festa e il rumore raggiunge la pressione P_2 mentre nella nostra stanza il volume della tv raggiunge una pressione P_1 avremo che la differenza in pressione fra le stanze adiacenti, espressa in decibel, sarà pari a:

$$20\ log\ (P_1/P') - 20\ log\ (P_2/P') = 20\ log\ (P_1/P_2)$$

In genere l'orecchio è capace di rilevare differenze solo oltre i 3dB. Se la pressione acustica raddoppia, si produce un incremento di circa 6dB rispetto a quello iniziale. Oltre i 130dB avvertiamo dolore, mentre una esposizione continua (per esempio negli impianti industriali) a intensità superiori agli 80dB finisce per danneggiare l'udito in maniera irreversibile.

Esercizio
Qual è la pressione acustica massima che può sopportare il nostro orecchio senza avvertire dolore? Esprimi la risposta in microbar.

La scala del pH

È possibile esprimere la concentrazione dello ione idrogeno (in pratica l'acidità o la basicità di una sostanza) mediante l'introduzione di una funzione che eviti l'uso di numeri molto piccoli. Questa è la scala del pH, metodo largamente usato per misurare l'acidità. Il pH di una soluzione è definito come l'opposto del logaritmo in base 10 della concentrazione dello ione idrogeno:

$$pH = -\ log\ [H^+]$$

Si osserva che il calcolo di un logaritmo è incorporato nelle definizione stessa della misura del pH. Occorre poi saper interpretare correttamente i dati numerici: se il pH di una soluzione passa dal valore 6 al valore 5, questo significa che la concentrazione di ione idrogeno risulta decuplicata (essendo passata da 10^{-6} a 10^{-5}).

Esercizio
Tenendo conto che la concentrazione dello ione idrogeno presente in una sostanza si misura in moli per litro, determinare il pH delle seguenti sostanze: pomodori (con $[H^+] = 6{,}3\times10^{-5}$ moli/litro) e latte (con $[H^+] = 4\times10^{-7}$ moli/litro).
Se, invece, si sa che il pH del succo di limone è uguale a 2,3, qual è la concentrazione dello ione idrogeno misurata in moli per litro nel succo di limone?

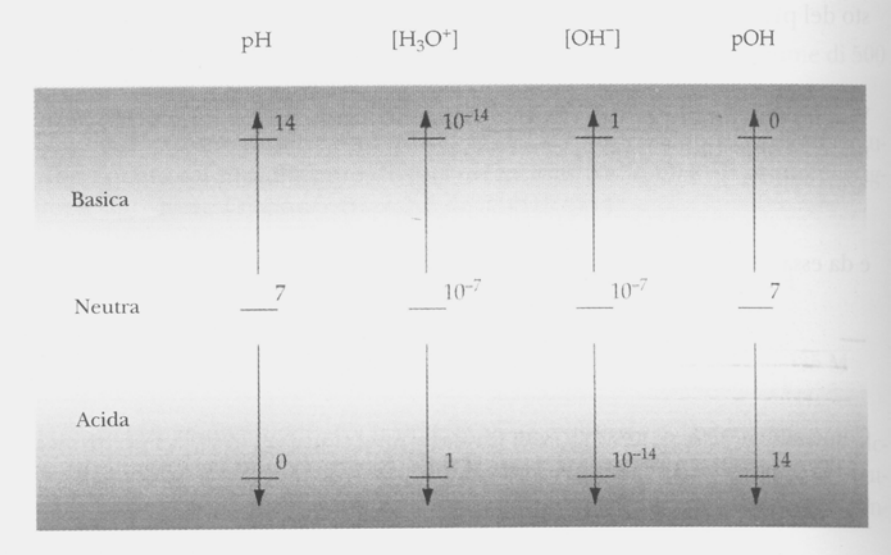


Figura 2

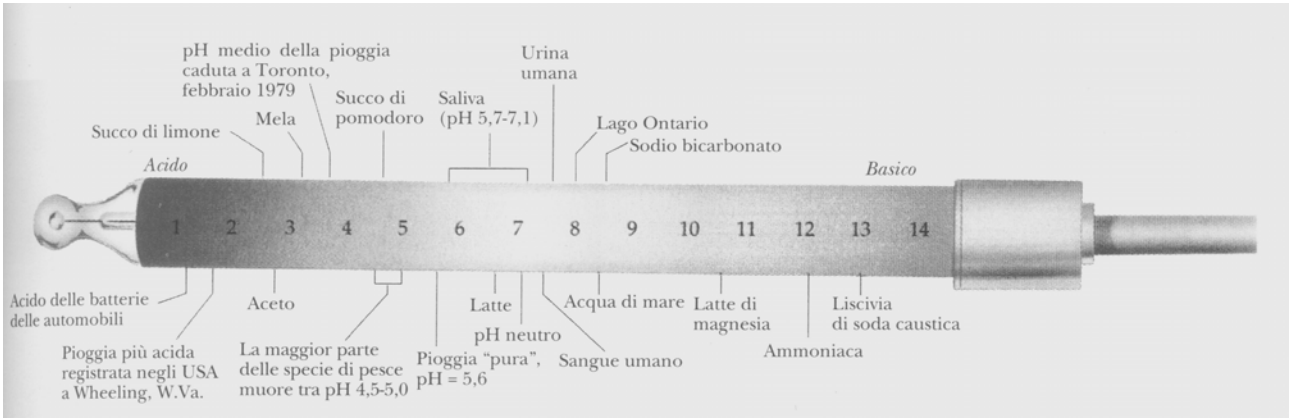


Figura 3

- Qualche osservazione sulle scale logaritmiche è utile farla in questo contesto, per esempio l'insegnante mette in evidenza che: la scala logaritmica permette la rappresentazione delle sole misure positive della grandezza che intendiamo visualizzare. Man mano che le misure delle grandezze si avvicinano a zero, i corrispondenti valori dei logaritmi tendono a $-\infty$. In altre parole, la scala logaritmica dilata la rappresentazione grafica dei valori (positivi) piccoli, ma, nel contempo, comprime la rappresentazione grafica dei valori grandi. Infatti quando le misure delle grandezze che intendiamo visualizzare assumono valori sempre più grandi, anche i corrispondenti valori dei logaritmi tendono a $+\infty$, ma i loro punti immagine sulla scala logaritmica risultano via via più ravvicinati.

Possibili sviluppi
- Numeri irrazionali.

- Potenzialità e limiti di un modello.
- Storia della matematica: le spirali.

Elementi di prove di verifica

1. Scale grandi e piccole

- Determina il valore reale k tale che, per ogni x, si ha: $10^x = e^{kx}$.

- Nella formula $A = kB^x$ trova x sapendo che $A = 12,6$, $k = 0,0012$ e $B = 21,9$.

- In un'elezione un partito politico ha avuto una percentuale del 5% dei voti. Da un certo momento in poi il numero dei votanti per quel partito politico si dimezza ad ogni successiva elezione. Esisterà un momento in cui esso non avrà più voti?

- Siano p, q ed r tre termini di una progressione geometrica. Verifica, con esempi, se $\log p$, $\log q$ e $\log r$ sono tre termini di una progressione aritmetica. Costruisci una catena di deduzioni per dimostrare che la proprietà in questione è vera sempre.

Un numero misterioso: π

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scegliere e utilizzare strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze. Determinare approssimazioni di lunghezze. Dimostrare l'irrazionalità di alcuni numeri. Determinare l'incertezza relativa che si propaga in un quoziente di grandezze misurate.	I numeri irrazionali. Approssimazioni. Il numero π. Esempi di grandezze incommensurabili. Schemi di ragionamento.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Numeri.

Questa proposta è riferita al contesto dei numeri e può essere introdotta nel terzo anno.

Descrizione dell'attività
L'attività prevede che gli studenti abbiano già acquisito una certa abilità nella lettura di algoritmi, nell'affrontare i problemi connessi al misurare ed alla rappresentazione dei dati sperimentali. Essa si caratterizza per la ricchezza degli spunti e offre non solo un contributo significativo alle conoscenze disciplinari, ma concorre a potenziare la capacità degli stessi ad analizzare situazioni e formulare congetture. Tale attività concorre alla costruzione del senso del numero, come ordine di grandezza, perché dà un significato a quella formula (la lunghezza della circonferenza) che spesso viene ricordata mnemonicamente, senza che gli studenti si rendano conto di quanto "sia grande π". Contribuisce, inoltre, alla formazione culturale globale degli studenti.

Prima fase
Gli studenti conoscono π come simbolo, in quanto l'hanno già probabilmente incontrato in precedenza nei loro studi, ma non hanno forse ancora approfondito i problemi ad esso connessi. L'insegnante in questa proposta introduce gli studenti al problema della determinazione di π come numero irrazionale.

L'insegnante propone agli studenti la lettura del seguente passo del libro *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan per porre il problema della misura della circonferenza.
"*... la domanda fu questa: è possibile per un esperto geometra trovare l'esatto rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio?*
Così rispose l'Uomo Che Contava: "Non è possibile calcolare esattamente una circonferenza, pur conoscendone il diametro. Il rapporto tra le due misure è un numero ben determinato, ma non siamo in grado di conoscerne il vero valore. Gli antichi cultori dell'astrologia credevano che la circonferenza fosse tre volte il diametro, ma le cose non stanno così. Archimede il greco trovò che,

se la misura della circonferenza è di 22 cubiti, il suo diametro deve misurarne circa 7. Ma i matematici indiani non sono d'accordo, e il grande al-Kwarizmi ha affermato che la regola di Archimede è ben lungi dall'essere esatta".
E Beremiz, rivolgendosi al sapiente con il naso camuso, così concluse: "Questo numero è in realtà avvolto dal mistero, e Allah solo potrebbe svelarne le occulte qualità".

L'insegnante sottolinea come questo numero fondamentale abbia una storia di origine 'costruttiva' e pone la seguente domanda: quanto deve essere lungo il raggio per costruire la circonferenza di una data lunghezza?
E' il problema che probabilmente si pose l'abile artefice fenicio che sembra abbia edificato una vasca circolare all'interno del Tempio di re Salomone. Secondo il *Primo libro dei Re* della Bibbia, la circonferenza misura 3 volte il diametro: 'Fece pure il mare di metallo fuso, a forma circolare, di dieci cubiti di diametro, cinque d'altezza e trenta di circonferenza'.
Per la Bibbia, dunque π è uguale a 3: è la prima approssimazione del suo valore di cui abbiamo testimonianza.

Seconda fase
L'insegnante propone agli studenti, divisi in piccoli gruppi, una fase operativa, di seguito riportata, perché attraverso la "manipolazione" possano constatare quali difficoltà si incontrano nel ricavare un'approssimazione di π. E' opportuno che l'insegnante guidi gli alunni a riconoscere le difficoltà peculiari della misurazione. Con questa attività si possono reperire dati tramite misure e perseguire l'obiettivo di indagare sulla relazione tra due grandezze.
Queste prime due fasi si possono realizzare anche a livello del primo biennio.

Situazione

Considerate alcuni barattoli di forma cilindrica, aventi dimensioni differenti (diversa circonferenza di base, diversa altezza).

Proposta di lavoro

Misura

- Misurate la lunghezza del diametro di base di ciascun barattolo e annotate i valori su un foglio.
- Come potete misurare la lunghezza della circonferenza di base di ogni barattolo? Misuratela e annotate i valori sul foglio.
- Completate le prime due colonne della tabella 1, inserendo, per ciascun barattolo, i valori misurati per le lunghezze di diametro e circonferenza.

diametro [cm]	circonferenza [cm]	
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…

Tabella 1

- Cosa accade alla lunghezza della circonferenza quando la lunghezza del diametro aumenta? E quando diminuisce?
- Dividete la lunghezza della circonferenza per la lunghezza del diametro e riportate i valori dei rapporti nella terza colonna della tabella.
- Cosa osservate? Come variano i valori dei rapporti che avete ottenuto?

- Che relazione c'è tra la circonferenza e il diametro? Provate a descriverla a parole.
- Disegnate su un grafico le coppie di numeri delle prime due colonne della tabella.

Dati
Rispondete alle seguenti domande, sulla base dei dati e del grafico:
- Come si dispongono i punti?
- Se aveste un barattolo di diametro di lunghezza 4,5 cm quanto sarebbe lunga la circonferenza?
- Quale sarebbe la lunghezza del diametro di base di un barattolo avente circonferenza di 17,2 cm?
- Se la lunghezza del diametro passa da un valore al suo doppio, come cambia la lunghezza della circonferenza?
- E se il diametro diventa la metà, come diventa la circonferenza?
- E se la circonferenza diventa il triplo, come cambia il diametro?

Modello
Supponete di avere un barattolo con un diametro di lunghezza k.
- Quanto vale la lunghezza della circonferenza?
- E se aveste un barattolo di diametro di lunghezza $2k$, quanto sarebbe lunga la circonferenza?
- Ora scrivete una legge algebrica che rappresenti la variazione della circonferenza y in funzione del diametro x, servendovi di ciò che avete capito nell'esperimento.

L'insegnante nel momento di intergruppo si adopera per far comprendere agli studenti che, senza utilizzare formule o tanto meno "numeri fissi", il rapporto tra le misure di circonferenza e di diametro, nei limiti dell'incertezza, è costante e che tra le due grandezze c'è una relazione di proporzionalità diretta. L'indagine successiva sul grafico permette, inoltre, di legare tale relazione alla disposizione delle coppie di numeri della tabella nel piano: i punti (le coppie di misure), infatti, sono all'incirca allineati. Per raffinare ulteriormente l'indagine, è possibile richiedere agli studenti di determinare l'incertezza relativa ed assoluta del rapporto tra la circonferenza ed il diametro, a partire dall'incertezza assoluta di misura delle due grandezze.
Nel momento conclusivo di questa fase si procede verso l'astrazione: gli studenti, guidati dalle domande dell'insegnante, devono esplicitare in simboli le eventuali relazioni ottenute (introdurre un simbolo per la costante e tradurre in formula la proporzionalità).

Terza fase
L'insegnante sottopone all'attenzione degli studenti alcune considerazioni storiche, in particolare presenta il ruolo di Archimede nello studio di π, riferendo che π è detto anche numero di Archimede. Egli fu, infatti, il primo a formulare una procedura geometrica per il suo calcolo approssimato. Il suo metodo consisteva nel racchiudere una circonferenza in due esagoni regolari-uno inscritto ed uno circoscritto-dei quali era in grado di calcolare il perimetro. Mediante il progressivo raddoppio del numero dei lati dei poligoni, raggiunse approssimazioni sempre migliori di π. Giunto a 96 angoli ottenne: $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$.
Dopo aver affrontato l'approssimazione di π con il confronto fra il diametro e la circonferenza come misure dirette (seconda fase), si propone un altro metodo per ottenere valori approssimati della lunghezza della circonferenza con il calcolo dei perimetri di poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza. Dai perimetri dei poligoni inscritti si ottengono valori di π approssimati per difetto, dai perimetri dei poligoni circoscritti valori approssimati per eccesso.

Situazione
Data una circonferenza, per semplicità di raggio unitario, inscrivere e circoscrivere ad essa poligoni regolari.

Proposta di lavoro

Determinate una misura approssimata della circonferenza, considerando poligoni regolari inscritti e circoscritti. Per fare ciò prendete in considerazione un quadrato inscritto, calcolate il valore del perimetro del quadrato. Successivamente raddoppiate il numero dei lati, in modo da avere un ottagono regolare inscritto, si calcoli il valore del perimetro anche in questo caso. Ora suddividete ulteriormente la figura e ottenete un poligono regolare di 16 lati, calcolate il perimetro. Se volete, provate anche a costruire un poligono regolare di 32 lati. Successivamente prendete in considerazione i poligoni circoscritti e procedete in modo analogo.
Quali considerazioni potete trarre dal confronto delle misure dei perimetri prima considerati?

L'insegnante conduce gli studenti alla consapevolezza che il procedimento è iterativo e quindi alla costruzione di una procedura.
Di seguito si propone il programma ottenuto con una calcolatrice grafico-simbolica. E' comunque del tutto indifferente rispetto all'efficacia dell'attività l'utilizzo di un qualsiasi altro strumento informatico per implementare la procedura.

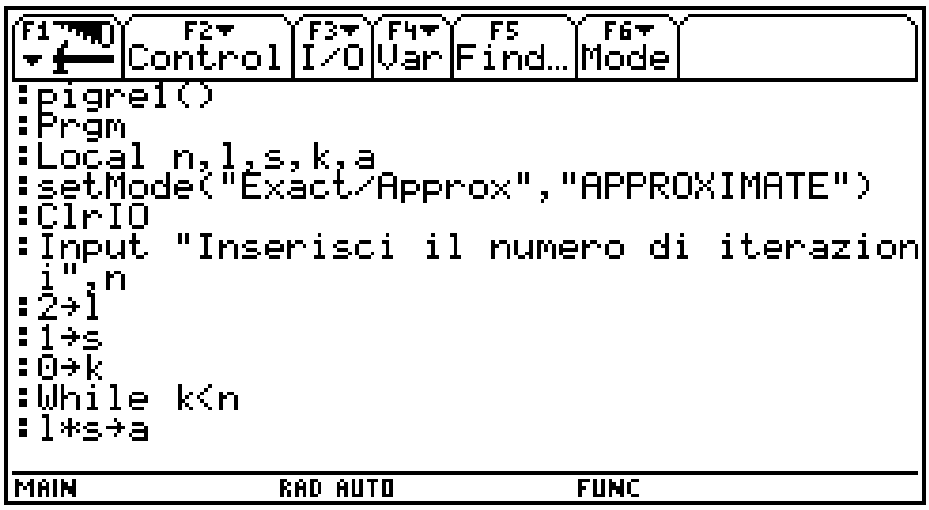


Figura 1

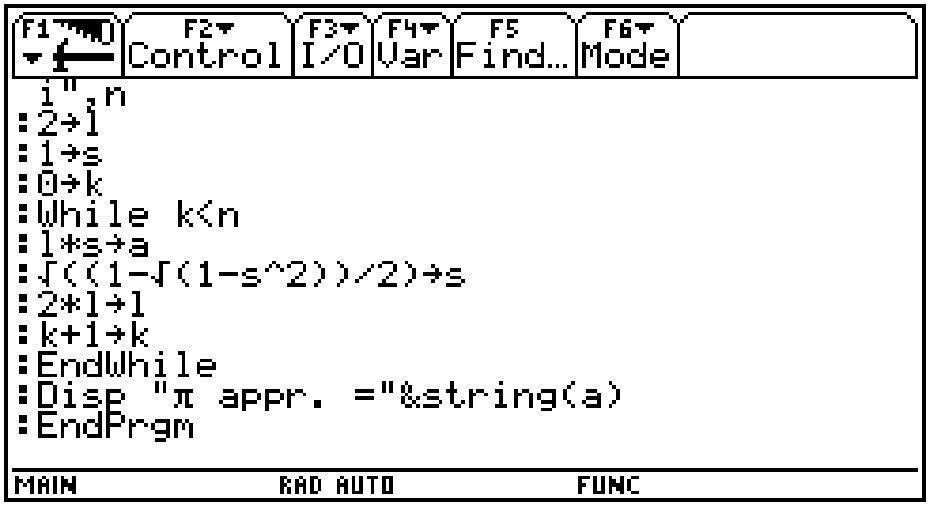


Figura 2

Figura 3

Quarta fase

L'insegnante ora propone la determinazione di π con un metodo che ricorre alla misura approssimata dell'area del cerchio mediante rettangoli. Si lavora sul piano cartesiano e gli studenti devono utilizzare l'equazione della circonferenza con centro nell'origine degli assi. L'insegnante può tener presente l'attività "Superfici scomode".

Situazione

E' data una circonferenza di raggio 1, rappresentata sul piano cartesiano con il centro nell'origine.

Proposta di lavoro

Determinate una misura approssimata dell'area racchiusa dalla circonferenza, utilizzando il metodo dei rettangoli.

Per fare ciò prendete in considerazione soltanto il primo quadrante, per via della simmetria della figura.

Determinate i valori approssimati per eccesso, eseguendo il calcolo nei seguenti tre casi:

- Divisione della base in 2 parti uguali.
- Divisione della base in 4 parti uguali.
- Divisione della base in 8 parti uguali.

Confrontate, ordinate i valori ottenuti e fate le vostre osservazioni.

L'insegnante fa notare agli studenti che all'aumentare delle divisioni della base si ottengono valori che approssimano sempre di più la misura dell'area del quarto di cerchio.

Quinta fase

Al termine dell'attività gli studenti, divisi in piccoli gruppi, producono una relazione sintetica dell'attività svolta, che può essere oggetto di valutazione.

Possibili sviluppi

- Numeri irrazionali. Il passaggio dal momento in cui il rapporto è uguale a un numero razionale, ottenuto da misure, a quello in cui si intuisce l'impossibilità di rappresentarlo come rapporto di numeri interi, è sicuramente un argomento che va approfondito successivamente (per es. logaritmi

in base 10 di un numero e potenze a esponente razionale).

- Numeri trascendenti. La natura trascendente del numero π può essere affrontata all'interno di altri nuclei tematici (numeri e algoritmi).
- Grandezze incommensurabili.
- Lo sviluppo dell'informatica.
- Approccio intuitivo al concetto di limite.

Elementi di prove di verifica

1. Il metodo di Archimede

- In un cerchio di diametro *r* è inscritto un esagono regolare; il suo lato è dunque lungo *r*, e il perimetro è *6r*.

Determinare il perimetro dell'esagono regolare circoscritto, calcolando il rapporto tra gli apotemi dei due esagoni (si osservi che i due esagoni sono simili).

Determinare poi un valore di π, confrontando la lunghezza della circonferenza sia con il perimetro dell'esagono inscritto sia con il perimetro dell'esagono circoscritto.

- Archimede trova che la lunghezza della circonferenza è minore di 3 volte il diametro più 1/7 del diametro stesso, ed è maggiore di 3 volte il diametro più 10/71 del diametro.

Quali valori approssimati di π, per eccesso e per difetto, si ottengono?

Superfici scomode

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza.	L'insieme dei numeri reali. Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Approssimazione dell'area sottesa da un grafico.	Misurare Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Figure geometriche.

Il contesto è quello delle figure geometriche del piano, con particolare attenzione alla questione relativa all'area, da un punto di vista esatto ed approssimato.

Descrizione dell'attività
Il progetto del percorso didattico si può suddividere in due parti: la prima riguarda le attività in ambiente carta e matita, che si può fare al terzo anno, la seconda le attività col supporto della tecnologia (calcolatrici o calcolatori), che può essere realizzata al quarto anno. Si può utilizzare una metodologia di lavoro di gruppo[1] e una di discussione collettiva, per la messa in comune e l'istituzionalizzazione del sapere coinvolto.
In una sperimentazione in classe di queste attività, il lavoro di gruppo, stimolando la comunicazione delle idee e delle strategie di risoluzione, è stato funzionale all'esplicitazione dei processi cognitivi degli allievi, oltre che svolgere un ruolo fondamentale nella costruzione della conoscenza in un contesto di interazione sociale. La parte di lavoro collettivo, importantissima dal punto di vista didattico per la fase di istituzionalizzazione dei saperi coinvolti, si è rivelata altresì interessante, in quanto ha permesso di mettere in luce elementi rimasti in ombra durante le attività di gruppo, attraverso il confronto tra gli allievi con la conduzione dell'insegnante.
I nodi concettuali messi in gioco con questa serie di attività sono:

- la misura, come processo di approssimazione (caratterizzata da incertezza) e come calcolo esatto (caratterizzata da un risultato non soggetto a incertezza);
- il discreto e il continuo.

I contenuti sviluppati sono: l'area di una figura piana irregolare, ottenuta con metodi di approssimazione; l'area sottesa da una curva sul piano cartesiano, ottenuta con calcoli esatti; l'area sottesa da una curva sul piano cartesiano, che non si possa ottenere con calcoli esatti, quindi ottenuta con calcoli approssimati, come nel primo caso; l'area sottesa da una curva sul piano

[1] Gruppi di due-quattro elementi, ciascuno con un'unica scheda di lavoro e, ove previste, una o due calcolatrici.

cartesiano (in un intervallo), in modo che tale area sia non un numero, ma una funzione dipendente dal secondo estremo dell'intervallo.
Può essere opportuno leggere agli studenti un brano storico che illustri come il metodo della quadratura, utilizzato da Archimede per la determinazione dell'area sottesa da una parabola, possa essere esteso ad altre funzioni. Questa fu una delle scoperte determinanti a metà del diciassettesimo secolo, per la nascita del calcolo integrale. Il brano è tratto da *De aequationum localium trasmutatione et emendazione*, di Pierre de Fermat, 1657:
"Archimede si è servito della progressione geometrica nella sola quadratura della parabola; in tutti gli altri casi, confrontando quantità eterogenee, si è limitato alla sola progressione aritmetica. Forse perché aveva verificato che la sola progressione geometrica era meno adatta…? O forse perché il peculiare artificio richiesto da quella progressione [esaustione sulla somma dei triangoli di area massima] *per quadrare la prima parabola* [$y=x^2$] *può difficilmente applicarsi alle altre? Ad ogni modo, io ho riconosciuto e provato che questo tipo di progressione è estremamente fecondo nelle quadrature, e volentieri comunico ai geometri moderni la mia scoperta, che permette di quadrare con lo stesso identico metodo sia le parabole* [$y=x^k$] *sia le iperboli* [$y=x^{-k}$] *... con l'unica eccezione dell'iperbole apolloniana* [$y=x^{-1}$]…"

Prima fase
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di determinare l'area di una figura piana a forma di ameba, lasciando il problema aperto e non suggerendo metodi di calcolo.

Proposta di lavoro 1
Determinate l'area della figura in cartoncino, scegliendo uno o più metodi; spiegate quale/i metodo/i avete utilizzato e perché li avete scelti.

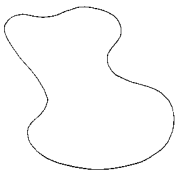


Figura 1

Una discussione collettiva segue questa attività, con lo scopo di confrontare i diversi metodi utilizzati dagli studenti, che potranno essere di triangolazioni, quadrettature, misure dirette o calcoli. L'insegnante fa convergere la discussione all'utilizzo di un metodo condiviso da tutta la classe, che consiste nell'ottenere una misura dell'area approssimata per difetto e una approssimata per eccesso, in modo tale da poter quantificare l'approssimazione stessa (come differenza tra le due misure).

Proposta di lavoro 2
Determinate l'area della figura in cartoncino, utilizzando le tre griglie quadrettate che vi vengono fornite: con quadretti di lato rispettivamente 1 cm, 0,5 cm e 0,1 cm.

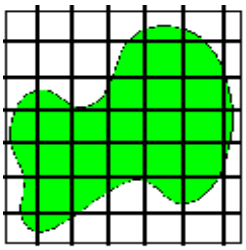


Figura 2

Tramite questa attività, gli allievi sovrappongono la figura ameboide a una griglia quadrettata per volta, ottenendo varie misure dell'area della figura stessa, tramite il conteggio dei quadretti che contengono la figura (misura per eccesso) e di quelli che sono interamente contenuti nella figura (misura per difetto).
Tale attività ha l'obiettivo di far riflettere sul fatto che si raggiunge un'approssimazione migliore con la quadrettatura più fine, riuscendo a quantificare la misura dell'area come semisomma delle misure per eccesso e per difetto (media aritmetica delle due) e dell'intervallo di incertezza come differenza tra la misura per eccesso e per difetto.
La discussione che segue l'attività ha lo scopo di raccogliere i dati ottenuti dai gruppi di studenti, che in generale non è detto che coincidano (per scelte effettuate di calcolo di quadretti o per errori vari).
In una sperimentazione effettuata in classe, per rispondere all'esigenza manifestata da alcuni allievi di conoscere il valore esatto dell'area della sagoma, si è partiti dal confronto degli intervalli di misura ottenuti mediante l'impiego delle tre quadrettature. Sono stati scritti alla lavagna gli intervalli di misura e le incertezze assolute e relative ottenute nei tre casi, utilizzando correttamente la tecnica della misura, cioè andando a considerare i quadretti contenuti interamente nella figura (area per difetto) e quelli contenenti interamente la figura (area per eccesso).
I dati in possesso erano i seguenti:

- quadretti grandi (unità di misura q_1, di lato 1 cm):
$$93 < A < 164, \quad i_{ass} = 71\ q_1, \quad i_{rel} = 27{,}6\ \%$$
- quadretti medi (unità di misura q_2, di lato 0,5 cm):
$$436 < A < 576, \quad i_{ass} = 140\ q_2 = 35q_1, \quad i_{rel} = 13{,}8\ \%$$
- quadretti piccoli (unità di misura q_3, di lato 0,1 cm):
$$12252 < A < 1364, \quad i_{ass} = 812\ q_3 = 8{,}12\ q_1, \quad i_{rel} = 3{,}2\ \%.$$

Ulteriori sviluppi di questa attività possono essere rivolti alla misura di aree di figure piane note, come ellissi, circonferenze, con metodo di approssimazione delle quadrettature, in modo che gli studenti possano eventualmente anche scegliere di rappresentare tali figure sul piano cartesiano.

Seconda fase

Le attività della prima fase proseguono ora con un'apertura al piano cartesiano, che ha come obiettivo quello di portare la riflessione della misura approssimata di aree dalle figure ameboidi alle regioni limitate da curve sul piano cartesiano.

Situazione

Nelle figure seguenti trovate rappresentate delle funzioni sul piano cartesiano.

Proposta di lavoro

Determinate le aree indicate nelle seguenti figure; spiegate i metodi scelti e perché li avete usati.
Valutate l'incertezza delle misure trovate.
Area compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 2$, la retta $x = 5$ e l'asse delle ascisse, indicata in figura:

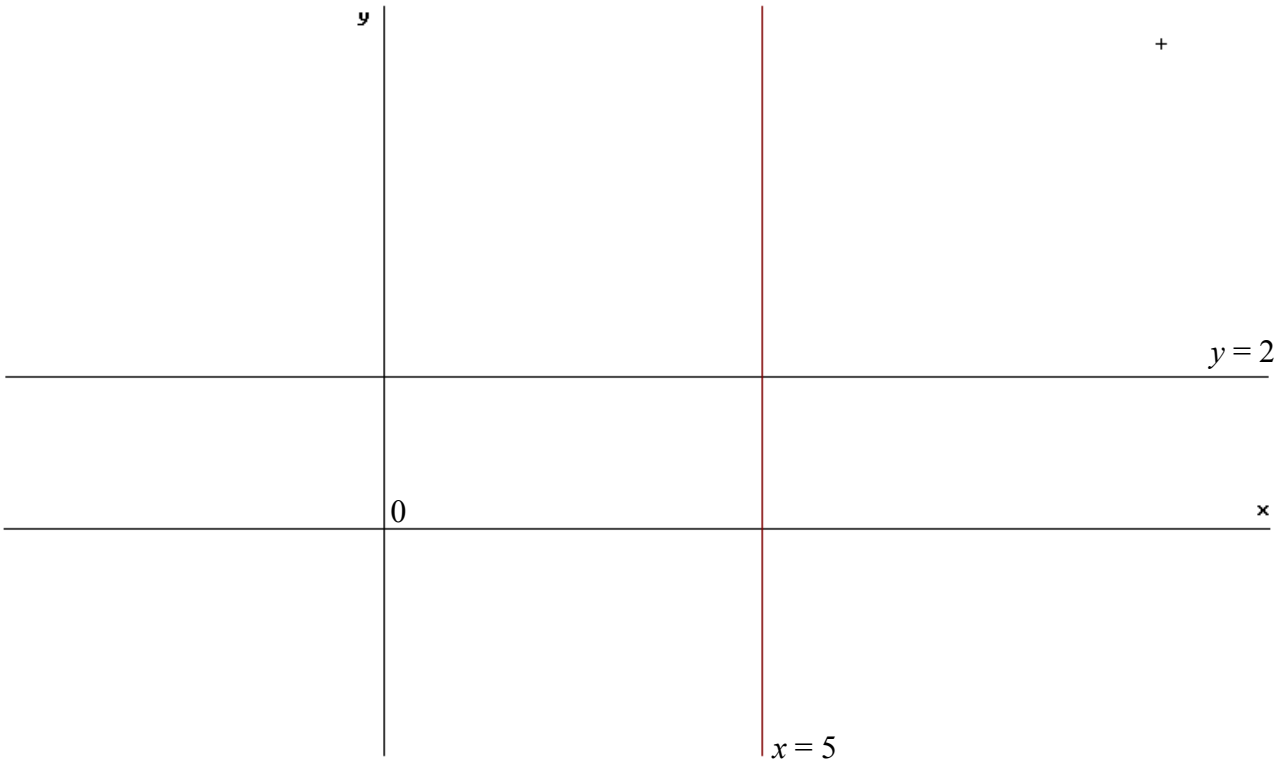


Figura 3

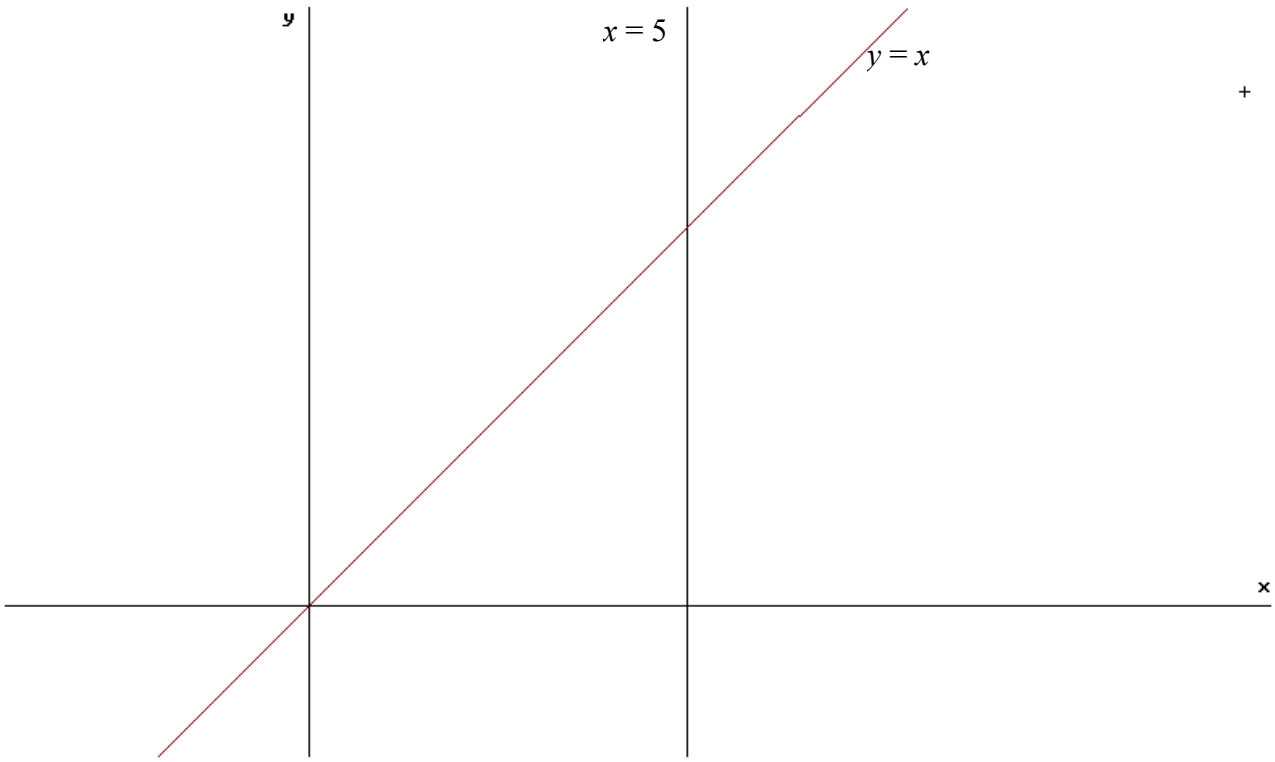


Figura 4

Area compresa tra la parabola $y = x^2$, la retta $x = 3$ e l'asse delle ascisse, indicata in figura:

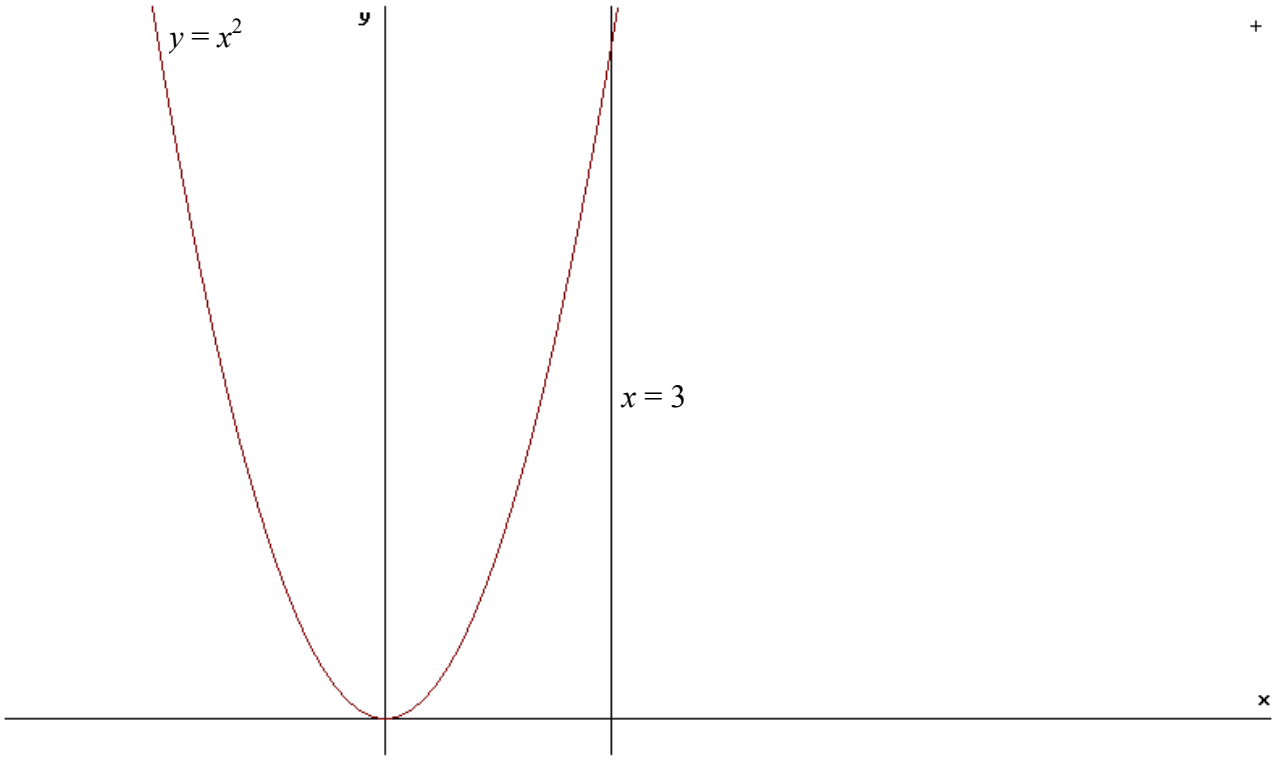


Figura 5

Questa attività presenta due situazioni in cui l'area può essere ottenuta come calcolo esatto, nel caso di un rettangolo e di un triangolo, mentre il terzo caso si presenta come diverso dai due precedenti, in quanto l'area non può essere ottenuta come risultato esatto. In questo caso, gli studenti attiveranno nuovamente metodi di approssimazione, che possono ricalcare quelli usati in precedenza per la forma ameboide, o essere nuovi. Da una sperimentazione effettuata in classe, si è visto che gli studenti, dopo aver suddiviso ulteriormente l'intervallo di misura, introducono metodi di calcolo approssimato con rettangoli contenuti e/o contenenti il grafico della parabola, oppure utilizzano trapezi con lato obliquo per due punti della funzione, o ancora trapezi con lato obliquo tangente al grafico della funzione.
Dalla discussione che segue, l'insegnante guida gli studenti a scegliere un metodo implementabile sulla calcolatrice o sul calcolatore, in modo che sia possibile quindi scrivere un algoritmo di calcolo. Si sceglie il metodo dei rettangoli (in analogia alle quadrettature utilizzate nella prima fase), per avere una valutazione dell'incertezza e si applica tale metodo in vari casi di determinazione di aree sottese da funzioni continue e monotone su intervalli limitati.

Dopo aver discusso del metodo dei rettangoli facendo riferimento ad una figura esplicativa alla lavagna, si può passare a tradurre l'algoritmo nella sintassi dei comandi della calcolatrice, per poi inserirlo nella stessa (nell'apposito ambiente di programmazione) assegnandogli un nome.
La figura 6 mostra un programma che calcola un'approssimazione per difetto dell'area sottesa dalla parabola $y = x^2$, e che è stato chiamato appunto ardif; la figura 7 mostra il programma analogo per l'area per eccesso (arecc), tali programmi sono nel linguaggio delle calcolatrici grafico-simboliche, ma possono essere implementati in un linguaggio di programmazione o tramite un foglio elettronico.

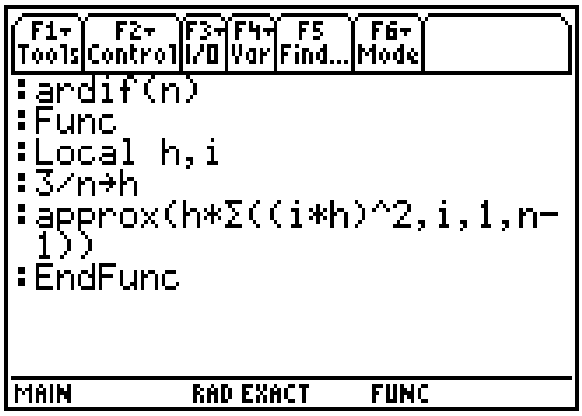


Figura 6

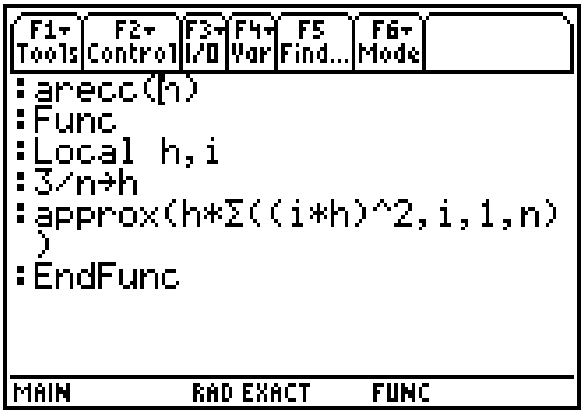


Figura 7

Nelle seguenti figure si può osservare la convergenza delle due successioni di risultati verso il valore 9:

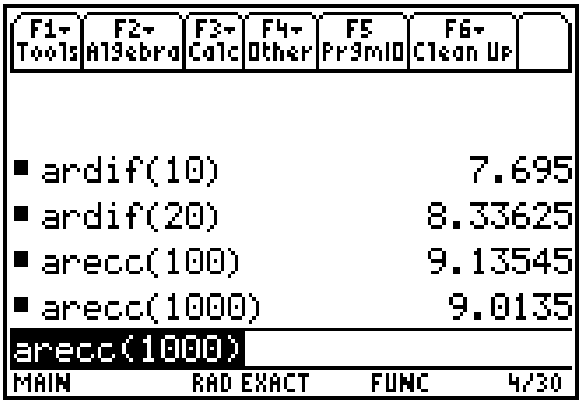


Figura 8

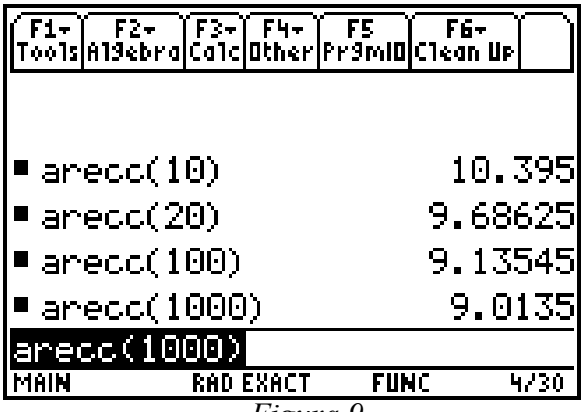


Figura 9

Possibili sviluppi

Questa attività si può sviluppare ulteriormente in varie direzioni: per esempio, può evolvere nella direzione di determinare aree in cui l'estremo destro dell'intervallo di misura non è un numero, ma una variabile k: ciò comporta che l'area sia funzione di k, come nelle proposte seguenti:

- Determinare l'area compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 2$, la retta $x = k$ e l'asse delle ascisse. Qual è la funzione che rappresenta l'area considerata?

- Determinare l'area compresa tra la retta $y = x$, la retta $x = k$ e l'asse delle ascisse. Qual è la funzione che rappresenta l'area considerata?

Oppure si può arrivare all'utilizzo del comando di integrazione in un software di calcolo simbolico o in una calcolatrice grafico-simbolica, per poter avere uno strumento di calcolo di aree sottese da funzioni, prima ancora di fondare il concetto di integrale dal punto di vista formale dell'analisi matematica.

L'intero percorso ha come obiettivo quello di fondare il significato di integrale definito, prima di ricorrere alla teoria dell'analisi matematica, ma puntando a metodi e processi di calcolo esatto e approssimato, in ambito di geometria piana e di ambiente cartesiano.

Quanto è lontana la Luna?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze. Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre. Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza.	Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali. La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili. Seno, coseno e tangente di un angolo. Coordinate polari. Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Astronomia Filosofia Fisica Scienze

Contesto
Corpi celesti.

Il contesto dell'attività è quello del moto dei corpi celesti, con particolare riguardo alla rivoluzione della Luna intorno alla Terra ed al fenomeno (relativamente frequente) dell'eclisse totale di Luna.

Descrizione dell'attività
Servendosi di opportuni dati astronomici, rintracciati sui repertori ufficiali, e di alcune immagini, prelevabili da Internet, dell'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001, con l'ausilio di alcuni calcoli trigonometrici, si giunge a stimare la misura della distanza Terra-Luna.
Prerequisiti: angoli e loro misura, seno, coseno, tangente e teoremi sui triangoli rettangoli, conoscenze sul fenomeno delle eclissi.
Obiettivo: fornire un contesto nel quale applicare nozioni elementari di trigonometria per ricavare una misura indiretta di una grandezza astronomica significativa.

Prima fase

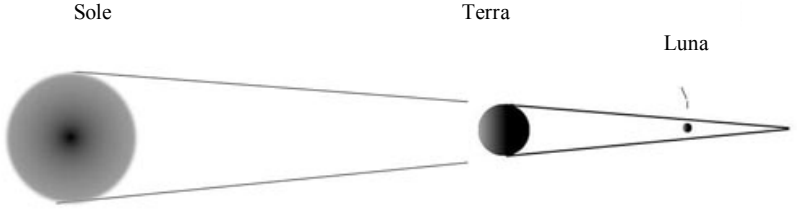


Figura 1

Partendo da alcuni dati astronomici noti, servendosi di alcune immagini fornite dall'insegnante, si procede al calcolo della lunghezza del cono d'ombra prodotto dalla Terra.
Come è noto, la Terra produce un cono d'ombra nello spazio.

Seconda fase
Si effettua la misurazione indiretta dell'ampiezza angolare del cono d'ombra prodotto dalla Terra in occasione di un'eclisse di Luna.
La misura dell'apertura di tale cono d'ombra può essere rintracciata nei repertori di dati astronomici. Per quel che riguarda l'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001, tale apertura è pari a (0,54)°. Si procede adesso al calcolo della lunghezza del cono d'ombra terrestre, indicata con il simbolo $R_S = R_{Shadow} = R_{Ombra}$.

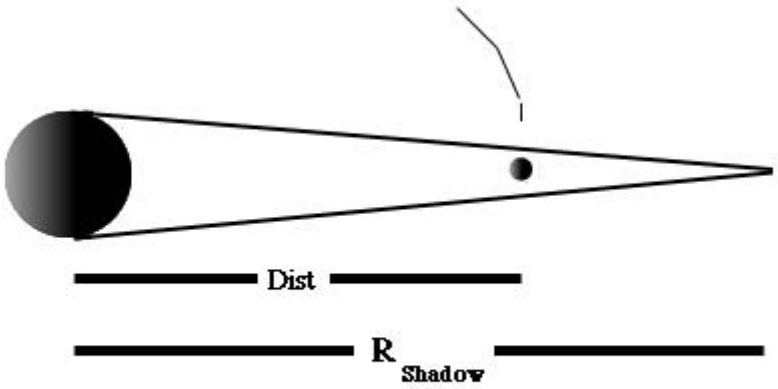


Figura 2

Prima di tutto si ricorda che il raggio terrestre è circa pari a 6372 km. Pertanto la lunghezza del cono d'ombra terrestre misura circa $R_S = 6372 / sen\ (0.27)° = 1352185$ km $\approx 1{,}352 \times 10^6$ km.

Terza fase
Si elabora una formula trigonometrica per valutare la distanza Terra-Luna.

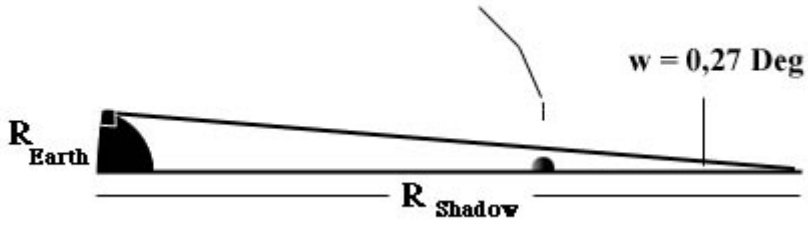


Figura 3

Come mostra il precedente disegno, il diametro dell'ombra diminuisce all'aumentare della distanza dalla Terra. Misurando la semiampiezza angolare *v* dell'ombra durante l'eclisse, si è in grado di determinare la distanza Terra-Luna.

Figura 4

Si suddivide allora il triangolo sopra riportato in una parte destra ed in una parte sinistra. Si denomina poi con *h* l'altezza di tale triangolo. Considerando il triangolo di sinistra si ottiene:

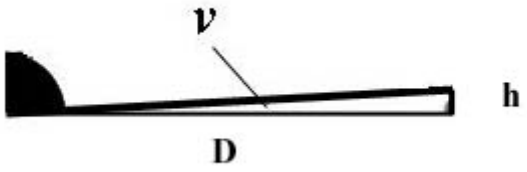


Figura 5

$$\tan(v) = \frac{h}{D}$$

Dal triangolo di destra della figura 4 si ricava anche:

$$\tan(w) = \frac{h}{R_s - D} \quad .$$

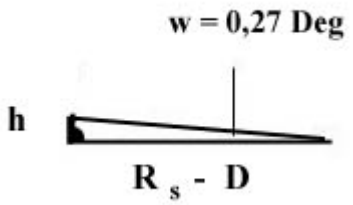


Figura 6

Combinando queste due ultime equazioni si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\tan(w)}{\tan(v)} = \frac{R_s - D}{D} = \frac{R_s}{D} - 1 \quad ,$$

ovvero

$$\frac{\tan(w)}{\tan(v)} + 1 = \frac{R_s}{D} \quad ,$$

dalla quale si ricava:

$$D = \frac{R_S}{\frac{\tan(w)}{\tan(v)} + 1} \quad .$$

Come annotazione significativa dal punto di vista storico, si può ricordare che Aristotele (384–322 a.C.) osservò la forma circolare dell'ombra prodotta dalla Terra proprio durante un'eclisse di Luna e dedusse correttamente che il nostro pianeta ha forma sferica!

Quarta fase

Si procede al calcolo della distanza Terra-Luna mediante la formula in precedenza ricavata, analizzando l'incertezza del risultato e confrontandolo con i dati ufficiali.

L'angolo v in precedenza considerato può essere stimato uguale a circa la metà di (1,42)°, ovvero (0,71)°. Il valore di (1,42)° è ricavato direttamente dagli studenti, i quali, servendosi della figura 9, misurano il diametro angolare dell'ombra prodotta dalla Terra, confrontandolo anche con quello ricavabile dalla figura 8 e tenendo conto dell'unità di misura di 1° riportata direttamente sulle immagini utilizzate. Questa operazione di misurazione può essere effettuata in gruppo o individualmente e si presta ad un'analisi della variabilità dei risultati. Inserendo il valore di v – insieme con il valore dell'apertura angolare del Sole (semidiametro) w = (0,27)° (come riportato in un repertorio di dati astronomici) – nella precedente formula si ricava:

$$D = \frac{1{,}352 \times 10^6}{\frac{\tan(0{,}71)}{\tan(0{,}27)} + 1} = 3{,}72 \times 10^5 \,\text{km}$$

Gli studenti possono valutare, a titolo di esercizio, l'incertezza da cui sono affette le misure ottenuta nel corso dell'attività. In particolare, partendo da una ragionevole incertezza di 1 km nella valutazione della misura del raggio della Terra e di 0,01° nella valutazione dell'ampiezza dell'angolo w , si può ricavare una stima per l'incertezza della misura R_S. In seguito, analizzate le incertezze relative ai valori angolari w e v, sulla base delle leggi di propagazione degli errori nelle moltiplicazioni e nelle divisioni, si perviene ad una stima dell'errore commesso sulla valutazione della distanza D. E' istruttivo poi determinare la differenza percentuale tra il valore di D ricavato con questa analisi ed il valore di D fornito da un programma di calcolo astronomico, ad esempio "MOONCALC": in relazione al valore sopra indicato, tale differenza ammonta appena al 5%!

Immagini dell'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001

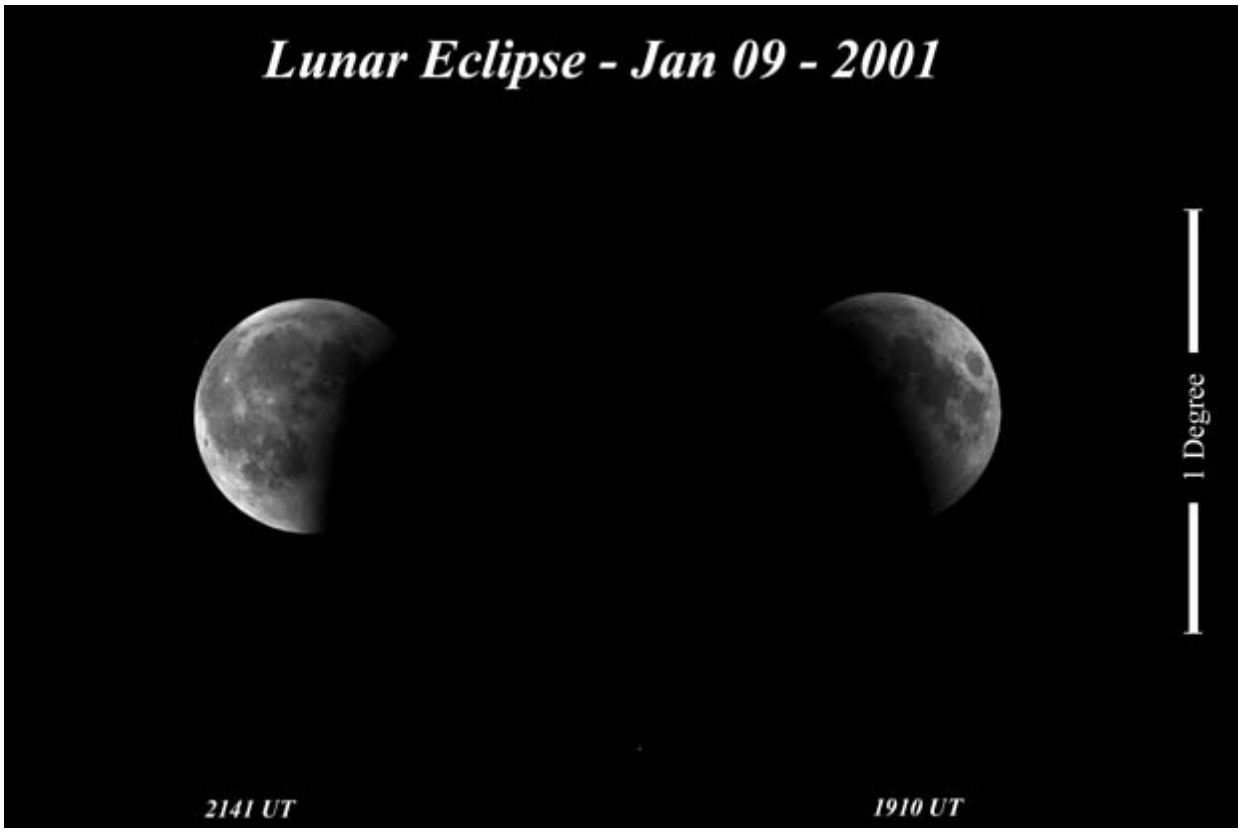


Figura 7

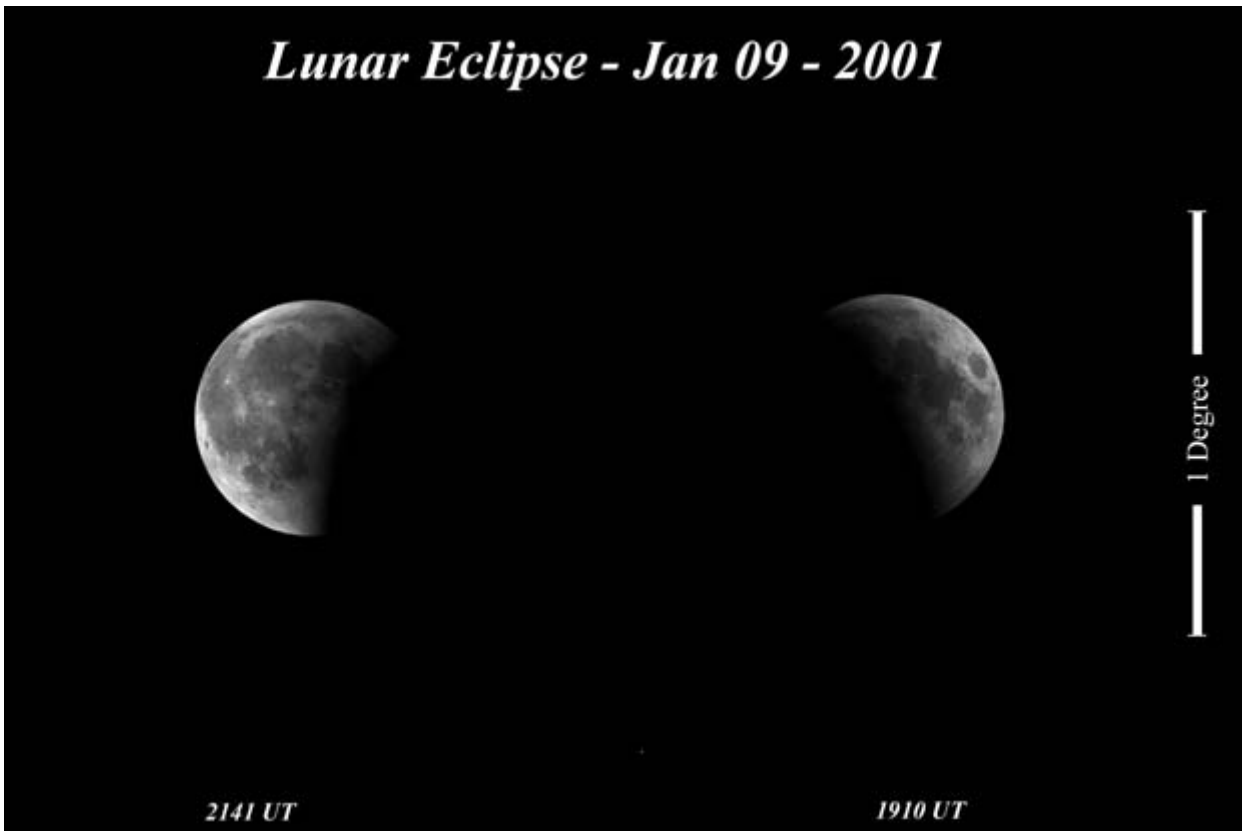


Figura 8

(La precedente immagine è una combinazione di due immagini distinte. L'effetto è stato ottenuto sovrapponendo con attenzione le due immagini, a partire da accurate misurazioni astronomiche effettuate durante ciascuna esposizione).

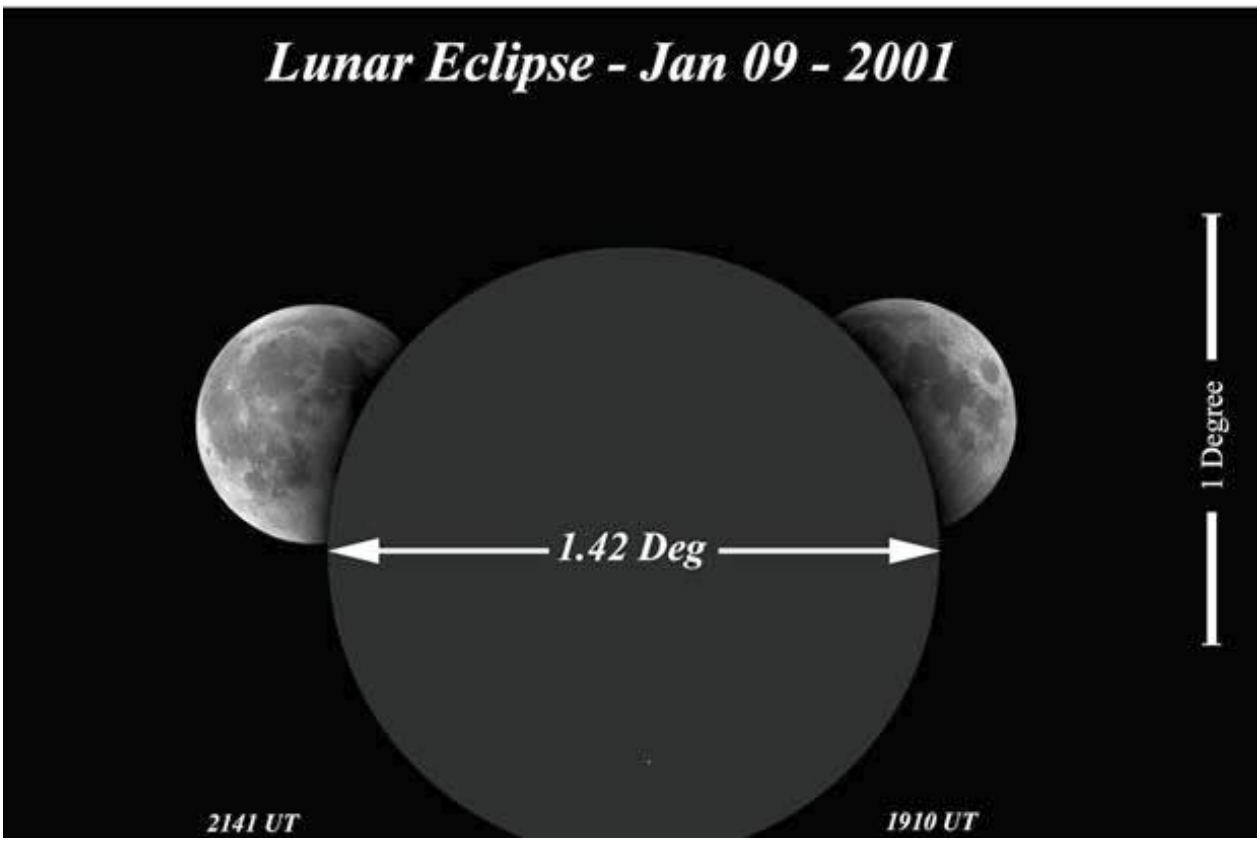


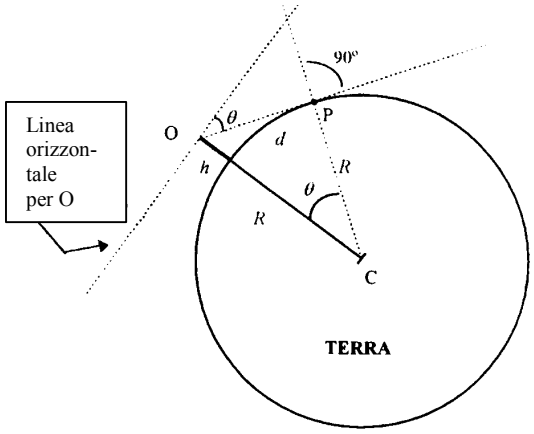
Figura 9

Elementi di prove di verifica

1. A quale distanza dai nostri occhi si trova l'orizzonte?
L'immensità dei grandi spazi aperti fa normalmente ritenere che l'orizzonte geografico si trovi molto lontano da un osservatore, ad esempio a svariate decine di chilometri di distanza secondo alcuni, addirittura ancora più lontano secondo altri. Prova adesso a valutare se in realtà è veramente così.
Immagina che la Terra sia una sfera di raggio R. Considera un osservatore posto nel punto O ad un'altezza h rispetto alla superficie terrestre. Il punto P appartiene alla linea dell'orizzonte, che è definita come il luogo geometrico dei punti di tangenza alla superficie del globo, relativi alle direzioni che escono dal punto O.

a) Descrivi geometricamente la linea dell'orizzonte in base alla precedente definizione, giustificando la tua risposta.

b) Considera il triangolo OCP e ricava un'espressione letterale per la distanza OP, in funzione dei dati R e h. Spiega perché, dal momento che, in generale, è $h \ll R$, si può scrivere, senza avere una grande incertezza, $d = \sqrt{2Rh}$.



Figura

c) Nel caso della Terra (R = 6,372 · 10^6 m), supponendo che l'osservatore si trovi nel mezzo dell'oceano (al fine di evitare gli inconvenienti legati alla presenza di rilievi sul terreno), a bordo di un'imbarcazione e con gli occhi posti ad un'altezza h = 15,0 m rispetto alla superficie dell'acqua, determina qual è il valore della distanza d.

Quando dirige lo sguardo verso il punto P, l'osservatore non guarda secondo la direzione orizzontale, bensì secondo l'angolo ϑ al di sotto della linea orizzontale stessa passante per O (questo angolo ϑ è generalmente noto con il nome di depressione apparente dell'orizzonte).

d) Ricava una formula goniometrica per determinare l'angolo ϑ e il suo valore, servendoti dei dati precedentemente forniti.

e) Utilizzando le espressioni che hai in trovato precedenza, nel caso di un osservatore che si trovi lungo una spiaggia, con gli occhi posti ad un'altezza di 1,60 m rispetto alla superficie dell'acqua, ricava i valori di d e di ϑ.

D'altra parte, la formula ottenuta nel punto *b)* mostra che il valore di d dipende da R e ciò ha alcune curiose conseguenze.

f) Considera infatti un corpo celeste di piccole dimensioni, come ad esempio Cerere (R≈480 km), il quale è approssimativamente sferico. Stabilisci dove un osservatore di altezza h = 1,60 m, in piedi, vede il punto P e valuta anche l'ampiezza dell'angolo ϑ. Analizza quindi come cambiano le due risposte precedenti nel caso del Sole (R = 7,0 · 10^8 m), ammettendo che esso abbia una superficie solida ed una temperatura sopportabile e che l'elevato valore del campo gravitazionale non crei alcun effetto sul fenomeno considerato.

A questo punto si è verificato che la linea dell'orizzonte non si trova così lontana come in apparenza potrebbe sembrare. L'analisi svolta ammette la presenza di superfici perfettamente sferiche, il che non è vero nel caso della Terra e degli altri corpi celesti.

g) Dal momento che, di solito, si considerano piccole distanze nelle vicinanze del punto O, per quale motivo si può affermare che le semplificazioni adottate nei precedenti calcoli sono ragionevolmente legittime? Esprimi la tua opinione a proposito.

Elementi di prove di verifica

Livello scolare: 2° biennio

1. Troppa precisione!

Una ragazza misurò la lunghezza e la larghezza di un rettangolo e trovò 2,3 cm e 3,6 cm; calcolò l'area ed ottenne 8,28 cm^2. Quando si sentì dire dal suo insegnante che il suo risultato era di gran lunga troppo accurato, fu molto disorientata – non avrebbe mai pensato di riuscire a fare qualcosa in modo più che accurato. Perché l'insegnante fece questo commento?

2. Il cannocchiale

Il terreno su cui sorge un fabbricato è piano, ma inclinato. Si ha a disposizione uno strumento per determinare il livello del terreno: esso è costituito da un teodolite sistemato orizzontalmente che può ruotare attorno al suo asse verticale e da un'asta graduata verso cui si può puntare il cannocchiale per poter leggere la differenza di livello. L'oculare del cannocchiale è munito di una scala graduata che consente di determinare anche la distanza dell'asta.

Qual è il modo più semplice per trovare l'inclinazione del terreno e la direzione dell'inclinazione?

3. Misura dell'arco

Determinare la misura dell'arco della curva, grafico della funzione $y = \sqrt{x^3}$ fra i punti di ascissa 1 e 2.

4. Calcolo della temperatura

Supponiamo che le temperature, rilevate ogni due ore, di una certa giornata dell'anno, siano quelle riportate nella seguente tabella. Calcolare, per approssimazione, l'area compresa tra l'asse x e la curva che congiunge i valori assegnati. Determinare, tramite essa, la temperatura media durante la giornata.

Ora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura	16	15	13	12	15	21	28	31	28	20	15	13

5. L'orologio

Un orologio, allo scoccare della mezzanotte ufficiale, segna le 23 e 59. Qual è l'incertezza assoluta e quella relativa?

6. La calcolatrice

Una calcolatrice rappresenta i numeri in forma esponenziale (in base 10) e ha a disposizione 2 posti per le cifre del numero e 1 posto per quelle dell'esponente. La cifra prima della virgola è sempre diversa da zero; si può inoltre specificare sia il segno del numero sia quello dell'esponente.

a) Quali sono il numero minimo e quello massimo rappresentabili da questa calcolatrice?

b) Quanti sono i numeri positivi rappresentabili inferiori ad 1?

c) Quanti sono in tutto i numeri macchina rappresentabili da tale calcolatrice?

7. π è un numero normale?

Nelle prime 200 cifre decimali di π qual è la frequenza di 0, di 1, di 2, …? Qual è la proporzione delle cifre pari? Quante sono le sequenze di due cifre che si ripetono? E quante quelle di tre cifre?

Riferimenti bibliografici

Alder, K. (2002). *La misura di tutte le cose,* Rizzoli, Milano.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2002). *Matematica*, collana: Professione Docente, La Scuola, Brescia.

Barozzi, G. C. & Cappuccio S. (1997). *Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, Pitagora, Bologna.

Blatner, D. (1999). *Le gioie del* π, Garzanti, Milano.

Castelnuovo, E., Gori Giorgi, C. & Valenti, D. (1986). *La matematica nella realtà-geometria analitica, logaritmi, geometria dello spazio, statistica,* la Nuova Italia, Firenze.

Fontana, M. & Ghiandoni, G. (1987). *I sistemi di misura. Introduzione alla metrologia: regole, convenzioni, scrittura,* Editori Riuniti, Roma.

Israel, G. (2002). *Modelli matematici. Introduzione alla matematica applicata*, F. Muzzio, Padova.

Lombardo Radice, L. & Mancini Proia, L. (1979). *Il metodo matematico*, vol. 3, Principato, Milano.

Maraschini, W. & Palma (2001). *Format. SPE (triennio),* Paravia, Torino.

Maraschini, W. & Palma (2002). *Multiformat. Numeri, macchine e metodi numerici,* Paravia, Torino.

Maraschini, W. & Palma (2002). Problemi e modelli della Matematica, vol. A, Paravia, Torino.

Maraschini, W., Menghini, M. & Palma (1990). *Strategie matematiche*, Paravia, Torino.

Nolli, N., Pivetta, M., Robutti, O. & Rossetto, R. (1998). Statistica e probabilità. Modulo quinquennale, *Nuova Secondaria*, 8, 37-47.

Robutti, O. & Sabena, C. (2003). La costruzione del significato di integrale, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol.26B, n.4, 473-498.

Robutti, O. (2001). Matematica, in: A. Colombo, R. D'Alfonso, M. Pinotti, *Curricoli per la scuola dell'autonomia*, La Nuova Italia, Firenze, 206-224.

Robutti, O. (2002). La tecnologia nell'insegnamento della matematica (parte I), *Progetto Alice*, 7, 99-121.

Robutti, O. (2002). La tecnologia nell'insegnamento della matematica (parte II), *Progetto Alice*, 8, 347-364.

Tahan, M. (1996). *L'uomo che sapeva contare*, Salani, Firenze.

Siti Web (2003)

http://www.amtsgym-sdbg.dk/as/moondist2001/uk.htm

http://www5.indire.it:8080/set/comunicazione/comunicazione.htm

Commissione UMI

"Curricolo di Matematica" **Coordinatore:**
Ferdinando Arzarello, Università di Torino

Componenti:
Ajello Marilina, L.S. Cannizzaro, Palermo
Anichini Giuseppe, Università di Firenze
Bernardi Claudio, Università La Sapienza, Roma
Brigaglia Aldo, Università di Palermo
Castagnola Ercole, Professore Scuola Secondaria Superiore a riposo
Chiappini Giampaolo, IMA-CNR, Genova
Ciarrapico Lucia, Ministero Istruzione, Roma
Citrini Claudio, Politecnico di Milano
Dalé Marina, L.S. Copernico, Brescia
D'Aprile Margherita, Università della Calabria
Eugeni Franco, Università di Teramo
Greco Rosario, L.S. Majorana, Caltagirone (Ct)
Impedovo Michele, Liceo Scientifico
Mammana Carmelo, Università di Catania
Marchi Mario, Università Cattolica di Milano
Menghini Marta, Università La Sapienza di Roma
Ottaviani Gabriella, Università La Sapienza, Roma
Paola Domingo, Liceo Scientifico "Issel", Finale Ligure (Sv)
Proia Daniela, L. Virgilio, Roma
Robutti Ornella, Università di Torino
Rossi Carla, Università di Roma II
Ruganti Riccardo, L.C. Forteguerri, Pistoia
Sbordone Carlo, Università di Napoli
Tomasi Luigi, L.S. Galilei, Adria (Ro)
Tortora Roberto, Università di Napoli
Villani Vinicio, Università di Pisa

Seminario "Viareggio 2003"

Responsabili del Progetto:
Prof. Ferdinando Arzarello (UMI)
Isp. Lucia Ciarrapico (MIUR)
Isp. Biagio Dibilio (MIUR)

Direttore organizzativo:
Preside Giuseppe Ciri, Liceo Scientifico "A. Vallisneri", Lucca

Elenco dei partecipanti:

Ajello	Maria	L.S. Cannizzaro, Palermo
Anichini	Giuseppe	Università di Firenze
Arzarello	Ferdinando	Università di Torino
Baruzzo	Gianpaolo	ITIS Zuccate, Mestre
Cagnacci	Roberto	L.S. Vallisneri, Lucca
Cappuccio	Sebastiano	ITA Baracca, Forlì
Casolaro	Ferdinando	Mathesis
Castagnola	Ercole	Professore Scuola Secondaria Superiore a riposo
Ciarrapico	Lucia	Ministero Istruzione, Roma
Corradini	Anna	IPS Einaudi, Grosseto
Dalè	Marina	L.S. Copernico, Brescia
Dellisanti	Francesco	IPSIA Archimede, Barletta
Di Sorbo	Domenica	MIUR, Roma
Filippi	Oronzo	Mathesis
Giovine	Paola	L.C. "Casardi", Barletta (Ba)
Greco	Rosario	L.S. Majorana, Caltagirone (Ct)
Isernia	Giuseppe	ITIS Fermi, Barletta (Ba)
Margiotta	Giovanni	MIUR, Roma
Menghini	Marta	Università La Sapienza di Roma
Nardini	Paolo	L.S. Vallisneri, Lucca
Ottaviani	M.Gabriella	Università La Sapienza, Roma
Paola	Domingo	L.S. Issel, Finale Ligure (Sv)
Piemontese	Giuseppe	ITC Einaudi, Padova
Proia	Daniela	L. Virgilio, Roma
Ricci	Roberto	ITC G. Salvemini, Casalecchio di Reno (Bo)
Rigatti Luchini	Silio	
Robutti	Ornella	Università di Torino
Rossetto	Silvano	ITT Mazzotti, Treviso
Ruganti	Riccardo	L.C. Forteguerri, Pistoia
Santarossa	Renata	L.C. V. Marone, Meta di Sorrento
Tomasi	Luigi	L.S. Galilei, Adria (RO)
Tondini	Daniela	Dipart. M.E.T, Coste S. Agostino, Teramo

RISOLVERE e PORSI PROBLEMI

Risolvere e porsi problemi

Gli argomenti del nucleo "Risolvere e porsi problemi" sono stati introdotti già nel ciclo di studi precedenti per indicare agli studenti quello che, per il cittadino e per il matematico, dovrà essere l'eredità culturale, forse principale, dello studio della matematica a scuola.
La matematica ha molti aspetti: agli occhi di molti studenti appare talvolta come un insieme di rigide "ricette" da imparare solo per prendere un voto all'esame, ma da dimenticare subito dopo; agli occhi di alcuni insegnanti può anche apparire come un insieme di dimostrazioni "rigorose" che, spesso in classe, si risolvono in incomprensibili litanie; ad un "matematico" appare quasi sempre come una sfida intellettuale, un misto fra una congettura ed un tentativo di sperimentazione. Nessuno fra i matematici che hanno fatto la storia della disciplina ha mai enunciato e dimostrato un teorema senza prima averne congetturato la tesi, cambiato e ricambiato le ipotesi, scritto e riscritto la dimostrazione. Il profano non trova affatto sorprendente pensare che un geologo od un astronomo lavorino in questo modo; e probabilmente non si sorprenderebbe neppure di sapere che anche un matematico opera così (se solo sapesse come opera un matematico!). Allora, se le cose stanno così, e tutti sono consapevoli che le cose stanno veramente così, c'è necessità di creare spazio al risolvere e porsi problemi all'interno dell'insegnamento della matematica. La vita quotidiana e le proposte dei mezzi di comunicazione offrono sempre più l'opportunità di motivare gli studenti ad affrontare problemi. Lo studente più motivato si aspetta una soluzione ed è forse in grado lui stesso di prospettarne una prima, ancorché grossolana, risposta: in tal caso l'insegnante che gli ha spalancato il mondo dei problemi si renderà conto che il terreno su cui ha seminato inizia a dare frutti. Ma anche allo studente annoiato dalle cose della matematica, portato quindi a dare risposte casuali e forse insensate, l'insegnante potrà far capire che le risposte che si danno ad un problema (anche non di matematica) devono essere ragionevoli, rispettose del buon senso: anche questo studente dovrà dunque iniziare a prendersi carico della responsabilità delle proprie risposte.
Affrontare problemi non è, generalmente, una cosa semplice. Non ci sono di solito procedure atte a dare una immediata risposta perché altrimenti saremmo di fronte ad un esercizio. Ma deve esserci però un terreno preparato per affrontare i problemi con profitto: le conoscenze disciplinari necessarie e, soprattutto, lo spirito giusto di chi vuol affrontare lo scontro (culturale) in campo aperto e senza una ricetta precostituita. Si può iniziare con argomentazioni che non pretendono di essere né definitive né rigorose ma soltanto provvisorie e "plausibili" per il problema considerato (procedimento *euristico*) tenendo ben presente il fatto, da parte dell'insegnante, che un ragionamento euristico non può sostituire, neppure parzialmente, la procedura corretta.
Vediamo una situazione in cui ci rende conto di esser abituati a congetturare, di esser pronti a predisporre piani di lavoro di fronte ad un problema.
Vediamo un modo per affrontare un problema che, di per se stesso o per opera dell'insegnante, appare affascinante. Viene formulata una congettura che dovrà essere, nella testa di chi sta di fronte al problema, un "mattoncino" necessario per costruire la soluzione: *dal dire al fare…* La congettura è sul tavolo di lavoro ma i dubbi sono ancora tanti, ci sono molti "pro" a favore della sua plausibilità ma ci sono anche alcuni, forse non banali, "contro".
Come portare avanti la procedura a tale stadio? Ovvero, come risolvere e porsi problemi?
Può essere utile seguire uno schema di George Polya, per avere utili "lumi" su quali elementi poter fare affidamento, con fiducia costruttiva, per portare avanti la validazione della congettura.

a) La congettura tiene in considerazione tutti i dati e tutte le informazioni del problema. È la stessa situazione quando, dovendo dimostrare un teorema, ci si rende conto di aver effettivamente utilizzato tutte le ipotesi.
b) La congettura è in grado di fornire un legame fra i dati del problema e l'incognita. Dal tunnel iniziale si inizia a vedere un primo barlume di luce.
c) La congettura mostra caratteristiche che sono state spesso utili per ottenere la soluzione di problemi dello stesso tipo. Buon segno!

d) La congettura è simile a quella utilizzata per affrontare con successo problemi analoghi. Ancora buon segno, purché le analogie siano veramente tali.
e) La congettura ha funzionato per risolvere un problema-caso particolare del problema dato. Ancora una volta non si può che essere incoraggiati e pensare di essere sulla buona strada.
f) La congettura è in grado di dare una risposta ad alcuni punti del problema in questione, visto come una sequenza di "passi" successivi. Siamo sul crinale positivo della ricerca della soluzione: ne abbiamo trovata una particolare o abbiamo trovato un "pezzo". Si tratta di continuare.

L'insegnante potrà utilmente sfruttare la curiosità innata degli studenti per far loro meditare su dati ed informazioni riguardo a problemi che li possono coinvolgere direttamente, anche se tali argomenti possono intrecciarsi con argomenti di fisica, di economia, o di altre discipline. Operare in contesti che interessano, perché derivanti da fenomeni in parte conosciuti, può essere un attivo strumento di lavoro e di stimolo per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica, introducendo gradualmente il linguaggio della matematica, in modo che gli studenti arrivino a percepire che le formule non appaiono più come ricette, ma sono parte fondamentale di un linguaggio che ha il vantaggio della concisione e della non equivocità.

Gli obiettivi di apprendimento della matematica dovranno dunque essere la risultante di alcune importanti finalità dell'insegnamento, ben delineate nei nuclei (tematici e di processo). Nel nucleo *Risolvere e porsi problemi,* la parola chiave è *modello matematico*, cioè la nozione che descrive in termini corretti il modo di passare da una situazione concreta, conosciuta solo intuitivamente o sperimentalmente, ad un insieme di schemi formalizzati (equazioni algebriche, equazioni differenziali, ecc…) che la descrivono quantitativamente e che consentono, anche con l'aiuto odierno del computer, di simularne il comportamento e di formulare previsioni, da verificare poi sul campo, sulla sua evoluzione. I modelli matematici che sono stati costruiti per primi risalgono al lavoro di Galileo ed allo sviluppo della fisica moderna (che deve alla completezza ed alla sempre più sofisticata elaborazione matematica gran parte del suo splendore attuale). Negli ultimi decenni le possibilità di modellizzazione matematica si sono estese a molti altri campi della scienza, dalla biologia alla medicina, dall'economia alle scienze sociali, fornendo in tal modo una vastissima varietà di esempi che possono essere usati per aumentare l'offerta didattica e per incrementare la curiosità degli studenti.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
1° biennio	Il topo e l'elefante	Aritmetica: numeri razionali	Lingua italiana	
1° biennio	Chi occupa il miliardesimo posto?	Numeri naturali, approssimazione numerica	Traffico automobilistico	
1° biennio	Polli e conigli	Aritmetica: numeri interi e razionali		
1° biennio	La condanna dell'astrologo	Mondo delle fiabe		
1° biennio	Ciliegie rosse e ciliegie gialle	Statistica: decisioni.		
2° biennio	Il biliardo	Trasformazioni geometriche	Fisica, Disegno	
2° biennio	Quanto costa la pizza all'equatore?	Misure	Geografia astronomica, Fisica	
2° biennio	L'affondamento del Titanic	Dipendenza stocastica		
2° biennio	E che sia negativa!	Polinomi		
2° biennio	La moneta è truccata!	Statistica		

Il topo e l'elefante

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni, per affrontare problemi. Elaborare schematizzazioni utilizzando metodi simbolici ed interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. Produrre soluzioni del problema attraverso una concatenazione delle azioni necessarie. Formulare congetture per esprimere le regolarità.	I polinomi e le loro operazioni. Equazioni e di primo grado in una incognita. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	Risolvere e porsi problemi Numeri ed algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare e congetturare	Lingua italiana

Contesto
Aritmetica: numeri razionali.

Il contesto è di tipo matematico e si colloca nell'ambito dell'aritmetica dei numeri interi e razionali. Si propone alla classe un semplice problema che presenta dei risvolti interpretativi e si può risolvere utilizzando più metodi. L'intenzione è anche quella di esaminare singolarmente i metodi risolutivi e poi confrontarli con opportune osservazioni.

Vediamo anzitutto alcuni esempi di problemi che presentano una stessa tipologia. Risolveremo in questa fase (quello che appare) il più semplice di essi invitando a seguire una analoga strada per gli altri.

Problema 1**.** *Al mercato di Rifredi, con 36 euro si può comprare un maglione, una camicia e nove paia di calzini. Sapendo che due camicie costano quanto un maglione e quattro paia di calzini, quanto costa ogni singolo pezzo di vestiario?*

Problema 2**.** *Alvaro aveva avuto torroncini in regalo dalla nonna ma quando arrivò a casa li aveva persi tutti. Alla madre che gli chiese quanti torroncini aveva avuto, il nostro amico Alvaro rispose astutamente che la nonna gliene aveva dati in confezioni da tre, Che i torroncini erano prodotto da una famosa ditta di Cremona, che le confezioni erano un numero dispari e che lui aveva pensato che, suddividendole con i suoi quattro amici, ciascuno avrebbe mangiato lo stesso numero di torroncini e che a lui gliene sarebbero rimasti tre in più. Sono sufficienti questi dati per rispondere alla richiesta della madre oppure Alvaro si è dimenticato qualche informazione?*

Il problema precedente presenta tipicamente la richiesta relativa alla (eventuale) esaustività ed alla (eventuale) sovrabbondanza dei dati.

Limitiamoci, come detto a risolvere, come caso propedeutico più semplice, il seguente problema:

Problema**.** *Un elefante ed un topo pesano assieme una tonnellata ed un etto. L'elefante pesa una tonnellata in più del topo. Quanto pesa il topo?*

Descrizione dell'attività
Il problema viene proposto alla classe nella fase di formalizzazione di un testo e ciascun studente è libero di ragionare per trovare la soluzione. Spesso gli studenti procedono subito per tentativi, senza riflettere prima sull'uso di entrambe le informazioni contenute nel testo. I loro ragionamenti si sviluppano in funzione degli stimoli intellettivi. E' bene comunque sottolineare questo aspetto, che forse in questo caso può sembrare banale, ma che in generale serve ad abituare lo studente al corretto esame del testo.

Un modo empirico per risolvere il problema dato può essere il seguente, che acquista forse più significato se chiamato :

- "Per tentativi"

Si parte dalle osservazioni dei ragazzi che in molti casi rispondono affrettatamente "*un etto*" ma subito si accorgono che la cosa non funziona perché contraddicono la seconda informazione "*che l'elefante ed il topo pesano assieme una tonnellata ed un etto*"
Si può allora far notare che il topo non può pesare 0 g (non esisterebbe) e neppure 100 g perché se così fosse, assieme al peso dell'elefante, non rispetterebbe la seconda informazione.
Non è per risolvere un problema così semplice ma essenzialmente per avviare lo studente alla formalizzazione ed al calcolo letterale che si può costruire la seguente tabella (di lavoro):

Peso del topo: T	*Peso dell'elefante:* $E=k+T$	*Totale:* $P=\ldots\ldots$
0 g	**1000 kg**	**1000 kg**
100 g	**1000 kg e 100 g**	**1000 kg e 200 g**

Tabella 1.a

Nota: È stata usata la lettera **k** per indicare la differenza di peso fra i due animali.

In questo modo si invitano gli studenti a tentare di avvicinarsi alla soluzione per successive approssimazioni ed a costruire la tabella in cui riassumere i risultati

Peso del topo: T	*Peso dell'elefante:* $E=k+T$	*Totale:* $P=\ldots\ldots$
Peso del topo	*Peso dell'elefante*	*Totale*
10 g	**1000 kg e 10 g**	**1000 kg e 20g**
20 g	**1000 kg e 20 g**	**1000 kg e 40g**
30 g	**1000 kg e 30 g**	**1000 kg e 50g**
40 g	**1000 kg e 40 g**	**1000 kg e 80g**
50 g	**1000 kg e 50 g**	**1000 kg e 100g**

Tabella 1.b

Si può far notare che questo ragionamento è abbastanza spontaneo da parte degli studenti, ma che è facilitato dal fatto che si sono scelti dati interi.
Come sarebbe la situazione se, elefante e topo pesassero 1000 kg e 133,5 g? Tutto diventa più difficile?
Oppure se l'elefante pesasse 1005 kg?

Peso del topo: *T*	*Peso dell'elefante:* *E=k+T*	*Totale:* *P=…….*
____ g	**1000 kg e____ g**	**1000 kg e 133,5 g**

A queste domande si inizia a rispondere dicendo che sarà bene porre l'attenzione su un risultato importante che può essere dedotto direttamente dalla Tabella 1.b: il peso del topo *è sempre la metà* della differenza fra il peso complessivo topo-elefante e quello dell'elefante stesso. Tale osservazione ci permetterà poi di proporre una generalizzazione del problema ad altri dati possibili, ottenuta per via intuitiva ed empirica senza l'uso di strumenti sofisticati:
Ed ecco dunque una generalizzazione, attraverso l'uso del calcolo letterale, che giustifica l'intuizione ottenuta.

- Attraverso le equazioni.

Sia **P** il peso complessivo, topo-elefante**, k** la differenza -- che può essere scelta a seconda delle esigenze didattiche – fra il peso dell'elefante e il peso del topo; e questi sono i nostri **dati iniziali**. Sia poi **T** il peso del topo e sia **E = k + T** il peso dell'elefante. Si nota che da sola l'informazione data dall'uguaglianza **E = k + T,** non ci permette di trovare una soluzione univoca (per **E** e **T)** conoscendo solo il valore di **k**, senza aver fissato il valore di **P**. Occorrerà a questo punto introdurre uno strumento cognitivo più forte che potrà anche consentire agli studenti di avere la certezza di aver trovato (se c'è !) l'unica soluzione possibile del problema assegnato.
Facciamo allora notare che **P** può anche essere scritto come **(k + T) + T =P** e quindi, usando il calcolo letterale, **P = k + 2T**; e ciò giustifica quello che abbiamo ottenuto per via intuitiva: ovvero **che** P-k = 2T, **cioè il peso complessivo meno la "differenza" data inizialmente** (lavorando dunque solo sui dati del problema) è sempre la metà di questa differenza e che questo ci dà pertanto il peso del topo avendosi T = (P – k) /2.

Si devono invitare gli alunni a considerare la natura di queste grandezze, tutte positive, che occorre fissare rispettando dei limiti iniziali (i cosiddetti vincoli). Ciò abitua i ragazzi ad analizzare un testo ed a scoprire, oltre le regolarità, anche la presenza di limitazioni nei valori che possono essere assegnati.
Questo permette poi di generalizzare il risultato nelle situazioni problematiche esposte sopra.
Ad esempio, se insieme pesassero P= 1000 kg e 133, 5 g e e k = 1000 kg, *quanto peserebbe in più del topo l'elefante*?
Possiamo dire subito che 2T = 133,5 g e quindi, il topo pesa 66,25 g.
Si può anche invitare i ragazzi a provare a cambiare le informazioni iniziali; ad esempio, a trovare il peso dell'elefante sapendo quanto pesa *meno* del topo ed invitarli a fare prove con valori diversi, non interi, ed a trovare analoghe regolarità. Ciò è una stimolo che può spingerli, motivati, ad usare il calcolo letterale, alla generalizzazione, al trovare relazioni sul problema e sulla natura delle grandezze coinvolte. Un ulteriore spunto interessante di questo problema è anche quello di essere un punto di avvio per la considerazione dei sistemi, qualora si volessero usare contemporaneamente entrambe le informazioni.
Uno strumento utile, per la ricerca empirica della soluzione, può infine essere la predisposizione del foglio elettronico per simulare il processo di soluzione con dati iniziali diversi.

Chi occupa il miliardesimo posto?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Esplicitare le proprie aspettative in termini di possibilità di trovare una soluzione. Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni (simbolici, geometrici, numerici, ecc.) e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie. Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie. Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali. Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.	<u>Porsi e risolvere problemi</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare	Traffico automobilistico

Contesto
Numeri naturali, approssimazione numerica.

Il contesto è matematico ed in particolare si rivolge all'ambito del lavoro con i numeri naturali, e delle equazioni in una variabile discreta. Il punto essenziale è la scoperta di regolarità e di analogie fra relazioni, che spinge verso la formalizzazione. Dal punto di vista della ricerca di soluzioni numeriche è altrettanto importante la capacità di cercare semplificazioni e approssimazioni adeguate e funzionali al problema trattato.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Si inizia col proporre il seguente problema:
"Considera la successione di numeri naturali

1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6……
in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, ecc."

Qual è il *miliardesimo* termine di questa successione?

La richiesta può apparire, a prima vista, cervellotica. Vediamo se, riflettendo sull'enunciato, si riesce a trovare un punto di partenza. Un suggerimento usuale (ad esempio, Polya, 1967) è quello di affrontare preliminarmente un problema analogo più semplice. Proponiamoci allora il seguente problema:

"Considera la successione di numeri naturali
1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 ……
in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, ecc."

Qual è il *ventesimo* termine di questa successione?

Qui è sufficiente costruire la successione dei primi venti termini per dare la risposta "6"
Facciamo un ulteriore passo (il 50° termine), e dopo aver trovato, solo un po' più laboriosamente, la soluzione 10, ci si chiede che collegamento esista, se esiste, tra il dato numerico della domanda e la risposta.
La regolarità della costruzione suggerisce che un collegamento deve esistere.
Già nel rispondere ai suoi primi due quesiti "semplificati" lo studente si sarà probabilmente accorto che scrivendo sei volte il numero 6 ha scritto 21 cifre e che, scrivendo dieci volte il numero 10, ha scritto addirittura 55 cifre.
Un'ulteriore semplificazione del problema, che ci porta un po' più avanti concettualmente, consiste nel cercare pertanto il collegamento non fra 20 e 6 o fra 50 e 10, ma fra 6 e 21 e fra 10 e 55.
Probabilmente gli studenti non sono ancora pronti per una formalizzazione del problema.
Conviene quindi continuare a trovare collegamenti fra coppie di numeri, ma è opportuno ricominciare dall'inizio.
Si può addirittura costruire una tabella che evidenzia i collegamenti:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*...*
1	*3*	*6*	*10*	*15*	*21*	*28*	*...*

Forse adesso si vede il collegamento: 21 è la somma dei primi 6 numeri. Verifichiamo che 55 è la somma dei primi 10 numeri.
Ma ci vuole un passo verso l'astrazione: qual è la somma dei primi *n* numeri?
Qui l'insegnante può dare dei suggerimenti che vadano nella direzione dell'"intuizione" di Gauss: ad esempio, far scrivere la successione dei primi 50 numeri naturali, scrivendo soltanto i primi 5 e gli ultimi 5, nel modo seguente

1 2 3 4 5 …. … 46 47 48 49 50.

Adesso ci si accorge che la somma del primo e dell'ultimo numero, del secondo e del penultimo, ecc. è sempre la stessa. Questa somma si ripete per 25 volte (25 coppie).
Passando alla formalizzazione del problema, otteniamo la nota formula $\boldsymbol{n(n+1)/2}$ che fornisce la somma dei primi *n* numeri naturali e dove $n/2$ indica il numero delle coppie.
Qualche studente potrebbe far notare che allora *n* deve essere un numero pari. L'insegnante farà allora verificare che la formula continua a valere anche se *n* è un numero dispari.

Senz'altro ci si è allontanati dal problema di partenza, ma ci si ritorna subito con gli strumenti necessari.

Seconda fase
Cercando la miliardesima cifra della successione relativa al problema iniziale, ed utilizzando quanto appena detto, si arriva a modellizzare il problema nel modo seguente:
$n(n+1)/2 = 10^9$
Questa si presenta come un'equazione di 2° grado, che gli studenti non sanno ancora risolvere. Ma qui il problema può essere enunciato in modo più semplice: trovare due numeri consecutivi il cui prodotto è $2 \cdot 10^9$. A questo punto un'ulteriore, conveniente, approssimazione ci porta alla ricerca della radice quadrata di $2 \cdot 10^9$, che è circa $4.472136 \cdot 10^4$ ovvero 44721,36.
Una prima osservazione:
nell'effettuare i calcoli con una calcolatrice tascabile, è importante non fermarsi prima della quinta cifra decimale, altrimenti la moltiplicazione per 10^4 ci darebbe un valore intero, e ciò non sarebbe plausibile.
Come interpretare il valore decimale ottenuto? Gli studenti a questo punto dovrebbero ricordare che nei loro primi tentativi avevano scritto più termini della successione di quanti ne chiedeva il problema, per "esaurire" il numero considerato. Anche in questo caso il numero si "esaurisce" dopo il miliardesimo termine, ed il risultato è fornito quindi dall'approssimazione per eccesso del risultato, dunque da 44722.

Una seconda osservazione: l'aggiunta dello zero nella tabella iniziale non modifica nulla, in quanto dovrei scrivere zero volte "0". Ma qui si deve fare un po' di attenzione.

Possibili sviluppi
1. Porsi problemi: Cosa succede se la successione è formata, con le stesse regole, solo da numeri dispari?
Commento: i passi da seguire possono essere analoghi al caso trattato, osservando che in questo caso la formalizzazione riguarda la somma dei primi n numeri dispari, che risulta uguale a n^2. In questo caso la regola di Gauss si generalizza in quella della somma dei primi n termini di una successione aritmetica (di differenza 2) ma può anche essere visualizzata graficamente.
Negli anni successivi l'insegnante potrà usare il *principio di induzione* per dimostrare in modo più rigoroso queste regole.

2. Una fila di automobili è ferma davanti a un semaforo. Supponiamo che la distanza fra le parti anteriori di due automobili, l'una dietro l'altra, sia in media di 6 metri e che, quando il semaforo diventa verde, ogni automobile parta a due secondi di tempo dalla precedente, muovendosi con la velocità media di 10 m/s (36 km/h) nel tratto che precede il semaforo. Se il verde dura 40 secondi, quante automobili passano?

I dati numerici forniti potrebbero essere anche decisi in classe collegialmente, chiarendo comunque che una schematizzazione è necessaria (supponendo, ad esempio, che le automobili siano a distanza fissa una dall'altra). Tale schematizzazione può richiedere, anche se a livello intuitivo, il concetto di media. Diamo una traccia di quelli che potrebbero essere i vari passaggi di un'attività guidata dall'insegnante:

Sia n il numero delle automobili che riescono a passare. L'ennesima automobile comincia a muoversi dopo $2(n - 1)$ secondi dallo scattare del verde (2 secondi per ogni automobile che la precede) e, se d è la distanza che la separa dal semaforo, impiegherà un tempo $t = d/v$ per raggiungerlo. Dal momento che vi è un'automobile ogni 6 metri, vale la relazione $d = 6\ (n - 1)$ (in

metri). Il tempo totale in cui l'ennesima automobile raggiunge il semaforo è quindi dato (in secondi) da: $2(n-1) + 6(n-1)/10 = 40$, da cui si ricava $n = 213/13 \cong 16.4$ automobili.
L'insegnante discuterà, come nel caso precedente, il significato da attribuire al risultato ottenuto che è un numero non intero. E' probabile che venga spontaneo dire che il risultato non è accettabile, oppure che deve essere arrotondato per difetto.
Nel problema, invece, si calcola il tempo in cui l'ennesima automobile raggiunge il semaforo con la parte anteriore. Se passano 16.4 automobili vuol dire che la sedicesima automobile non solo raggiunge il semaforo verde con la parte anteriore, ma lo supera per quasi la metà. È quindi il guidatore della diciassettesima automobile che per primo vede il semaforo non più verde.

Polli e conigli

Livello scolare: primo biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolo di base - sistemi Risolvere per via grafica e algebrica problemi che si formalizzano con equazioni. Analizzare semplici testi del linguaggio naturale e interpretarli in linguaggio simbolico. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. Verificare una congettura usando con consapevolezza la verifica.	N e Q, ricorsività. Piano cartesiano. Sistemi e loro interpretazione geometrica. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	

Contesto
Aritmetica: numeri interi e razionali.

Il contesto è di tipo matematico e si colloca nell'ambito dell'aritmetica dei numeri interi e razionali. Si propone alla classe un semplice problema che può presentarsi come un rompicapo e si può risolvere utilizzando più metodi. L'intenzione è di esaminare singolarmente i metodi risolutivi e poi confrontarli con opportune osservazioni.
Un fattore ha polli e conigli. Questi animali hanno 50 teste e 140 zampe. Quanti polli e quanti conigli ha il fattore?

Descrizione dell'attività
Il problema viene proposto alla classe come problem posing, in modo tale che ciascun studente sia libero di ragionare per trovare la risoluzione. Spesso gli studenti procedono subito per tentativi, senza riflettere prima sulla coerenza delle procedure. I loro ragionamenti si sviluppano in funzione degli stimoli intellettivi che genera il linguaggio naturale e delle esperienze personali; ad esempio, a nessuno può venire in mente di pensare che polli e conigli possono essere animali anche con due teste. E' bene comunque sottolineare questo aspetto, che forse in questo caso può sembrare banale, ma che in generale serve ad abituare lo studente alla corretta valutazione della situazione da esaminare.
Un modo empirico per risolvere il problema dato può essere il seguente, che acquista forse più significato se chiamato :

- *"Brancolando"*

Si parte dalla seguente considerazione : se ci sono 50 polli e nessun coniglio, quante zampe avremmo in tutto? E se ci sono 50 conigli e nessun pollo, quante zampe…? E ancora se metà teste sono polli e metà conigli …..?

Per avere sotto mano una visione globale dei tentativi fatti, può essere opportuno tabellare i risultati come nella successiva tabella 1.

Polli	*Conigli*	*Totale zampe*
50	0	100
0	50	200
25	25	150
24	26	152
23	27	154
22	28	156

Tabella 1

Da una prima lettura della tabella, si può dire che, prendendo come riferimento il numero complessivo delle zampe (ovvero 140, *cfr. testo*), si è individuato un intervallo numerico in cui trovare la soluzione: sicuramente i polli ed i conigli non possono essere meno di 1 né più di 49.
Neanche la soluzione 25 polli, 25 conigli va bene.
Decidiamo allora di prendere un numero minore di polli ed incrementiamo quello dei conigli (rispettivamente 24 e 26) abbiamo 152 zampe; non va ancora bene ed allora, procedendo allo stesso modo, incrementiamo ancora di due il numero delle zampe…..
A questo punto si fa notare che il procedimento usato è da abbandonare, in quanto il totale si allontana progressivamente da 140; conviene allora proseguire scambiando il ruolo dei conigli con quello dei polli e si ottiene la seguente tabella 2 che contiene anche la soluzione.

Polli	*Conigli*	*Totale zampe*
26	24	148
27	23	146
28	22	144
29	21	142
30	20	140

Tabella 2

Osservazione: è bene porre l'attenzione sul fatto che con il diminuire del numero dei polli e aumentando quello dei conigli (di un "passo" 1), il numero complessivo delle zampe è incrementato con passo 2, allontanandosi così dal 140 (cfr. tabella1). Ecco perché si abbandona questo procedimento e si continua, incrementando il numero dei polli e diminuendo il numero dei conigli; in questo caso il numero delle zampe diminuisce con passo 2 ed è proprio quest'ultimo procedimento che conduce al risultato 140.
La soluzione è: 30 polli e 20 conigli.
Siamo sicuri che questa è una soluzione unica?

- *"Formalizzando"*

Si può introdurre uno strumento cognitivo più forte che consenta agli studenti di avere la certezza di aver trovato l'unica soluzione possibile del problema assegnato: decodificare il testo, passando dal linguaggio naturale a quello dell'algebra; dopo aver chiamato x il numero dei conigli ed y il numero dei polli, il sistema risolutivo risulta essere il seguente:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

La discussione circa le soluzioni di tale sistema può essere fatta sia analiticamente sia geometricamente.
Ad esempio, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, le due equazioni rappresentano due rette che si intersecano in un punto le cui coordinate sono la soluzione del problema (e tale soluzione coincide con quella ottenuta precedentemente).

Osservazione: premesso che il metodo algebrico offre la possibilità di generalizzare la soluzione, si deve invitare gli studenti a riflettere non sulla coincidenza numerica delle soluzioni ottenute seguendo due ragionamenti diversi, quanto sulla interpretazione geometrica del sistema, da cui è possibile stabilire che la soluzione è unica.
In generale, è bene sempre controllare che le soluzioni analitiche non portino a dei risultati in contraddizione con i dati del problema. In questo caso, ad esempio, i numeri negativi o non interi vanno esclusi.
Si può provare ora a mutare le condizioni di partenza utilizzando una problematica simile.
L'azione didattica può continuare proponendo agli studenti: " e se x è uguale a y"?
Il nuovo problema si risolve algebricamente con il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x = y \end{cases}$$

Sul piano cartesiano le due equazioni rappresentano due rette che si intersecano in un punto le cui coordinate $(x = y = \frac{70}{3})$ sono la soluzione del problema.
In questo caso le soluzioni analitiche portano a risultati in contraddizione con i dati del problema: il numero dei polli deve essere un intero positivo.
Adesso la soluzione che rispetta le condizioni del problema *non esiste*. Esiste però una soluzione approssimata da cercare in un intorno della soluzione analitica $\frac{70}{3} = 23,\overline{3}$

Y=Polli	*X=Conigli*	*Totale zampe*
23	**24**	**140**
24	23	142

Tabella 3

Alcune indicazioni per la verifica.
Problematiche di questo tipo, possono essere modificate contestualizzandole in modi diversi e con dati diversi, è chiaro che una risoluzione subordinata a numeri grandi è più complessa. Per accelerare il processo, si può pensare di utilizzare un foglio di calcolo.

Nella pagina successiva si trova l'esempio di foglio elettronico costruito per simulare passo passo la ricerca della soluzione. Può essere rielaborato dal docente per dati iniziali differenti. Se si vuole attivare il foglio elettronico basta caricarlo dal file (in questo caso Excel) già predisposto: POLLI_CONIGLI.xls

Con questo foglio elettronico si può simulare per tentativi il problema dei polli e dei conigli inserendo i dati

iniziali

	Matrice Unitaria	teste	zampe	teste	zampe		Partenza		
	DATI	50	140	T	Z	x=	**50**	massimo	
x	conigli	1	4	a1	b1	y=T-x	0	minimo	
y	polli	1	2	a2	b2	passo	1		
Per tentativi		conigli		polli		animali			
n. conigli	n.polli	T	Z	T	Z	TESTE	ZAMPE	teste	zampe
x	y	teste:a1*x	zampe:b1*x	teste:a2*y	zampe:b2y	a1*x+a2*y	b1*x+b2*y	Soddisfa ?	Soddisfa ?
50	0	50	200	0	0	50	200	**SI**	**NO**
49	1	49	196	1	2	50	198	**SI**	**NO**
48	2	48	192	2	4	50	196	**SI**	**NO**
47	3	47	188	3	6	50	194	**SI**	**NO**
46	4	46	184	4	8	50	192	**SI**	**NO**
45	5	45	180	5	10	50	190	**SI**	**NO**
44	6	44	176	6	12	50	188	**SI**	**NO**
43	7	43	172	7	14	50	186	**SI**	**NO**
42	8	42	168	8	16	50	184	**SI**	**NO**
41	9	41	164	9	18	50	182	**SI**	**NO**
40	10	40	160	10	20	50	180	**SI**	**NO**
39	11	39	156	11	22	50	178	**SI**	**NO**
38	12	38	152	12	24	50	176	**SI**	**NO**
37	13	37	148	13	26	50	174	**SI**	**NO**
36	14	36	144	14	28	50	172	**SI**	**NO**
35	15	35	140	15	30	50	170	**SI**	**NO**
34	16	34	136	16	32	50	168	**SI**	**NO**
33	17	33	132	17	34	50	166	**SI**	**NO**
32	18	32	128	18	36	50	164	**SI**	**NO**
31	19	31	124	19	38	50	162	**SI**	**NO**
30	20	30	120	20	40	50	160	**SI**	**NO**
29	21	29	116	21	42	50	158	**SI**	**NO**
28	22	28	112	22	44	50	156	**SI**	**NO**
27	23	27	108	23	46	50	154	**SI**	**NO**
26	24	26	104	24	48	50	152	**SI**	**NO**
25	25	25	100	25	50	50	150	**SI**	**NO**
24	26	24	96	26	52	50	148	**SI**	**NO**
23	27	23	92	27	54	50	146	**SI**	**NO**
22	28	22	88	28	56	50	144	**SI**	**NO**
21	29	21	84	29	58	50	142	**SI**	**NO**
20	30	20	80	30	60	50	140	**SI**	**SI**

19	31	19	76	31	62	50	138	**SI**	**NO**
18	32	18	72	32	64	50	136	**SI**	**NO**
17	33	17	68	33	66	50	134	**SI**	**NO**
16	34	16	64	34	68	50	132	**SI**	**NO**
15	35	15	60	35	70	50	130	**SI**	**NO**
14	36	14	56	36	72	50	128	**SI**	**NO**
13	37	13	52	37	74	50	126	**SI**	**NO**
12	38	12	48	38	76	50	124	**SI**	**NO**
11	39	11	44	39	78	50	122	**SI**	**NO**
10	40	10	40	40	80	50	120	**SI**	**NO**
9	41	9	36	41	82	50	118	**SI**	**NO**
8	42	8	32	42	84	50	116	**SI**	**NO**
7	43	7	28	43	86	50	114	**SI**	**NO**
6	44	6	24	44	88	50	112	**SI**	**NO**
5	45	5	20	45	90	50	110	**SI**	**NO**
4	46	4	16	46	92	50	108	**SI**	**NO**
3	47	3	12	47	94	50	106	**SI**	**NO**
2	48	2	8	48	96	50	104	**SI**	**NO**
1	49	1	4	49	98	50	102	**SI**	**NO**
0	50	0	0	50	100	50	100	**SI**	**NO**

La condanna dell'astrologo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	*Nuclei coinvolti*	**Collegamenti esterni**
Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime. Formulare congetturare per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili. Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi; fenomeni riconducibili a uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione e previsione.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato della probabilità e sue valutazioni. Successioni e limiti di successioni (2° biennio).	Risolvere e porsi problemi Dati e previsioni Relazioni e funzioni	

Contesto
Mondo delle fiabe.

L'attività si colloca nell'ambito probabilistico ed è intesa a dare le prime indicazioni di ricerca di strategie. Il problema può essere affrontato a livello di primo biennio quando si conosca la definizione di probabilità e si sappia dare una valutazione di probabilità per eventi indipendenti. Si vuole portare gli studenti a rendersi consapevoli che, analizzando passo per passo una procedura e valutandone volta per volta la convenienza, si può arrivare a definire la strategia migliore possibile.

Descrizione dell'attività
Si pone il seguente problema:
"Un astrologo era stato condannato a morte. Il re decise di lasciargli un'ultima possibilità. Diede all'astrologo la facoltà di mettere in due urne due palline bianche e due nere. Il re doveva poi scegliere a caso una delle due urne e estrarre a caso una pallina: se fosse uscita nera, l'astrologo sarebbe stato ucciso; se fosse uscita bianca avrebbe avuto salva la vita.
Come conveniva all'astrologo inserire le quattro palline nelle due urne, per avere la maggiore probabilità di sopravvivenza?"
Il problema si presenta qui come un indovinello e può essere perciò accattivante. Gli studenti cercheranno di dare subito una risposta.

Di solito la risposta più frequente è quella di proporre di mettere le due bianche in un'urna e le due nere nell'altra.
Si inviteranno gli studenti a considerare tutte le possibili configurazioni.
Per far ciò occorre una prima schematizzazione del problema.

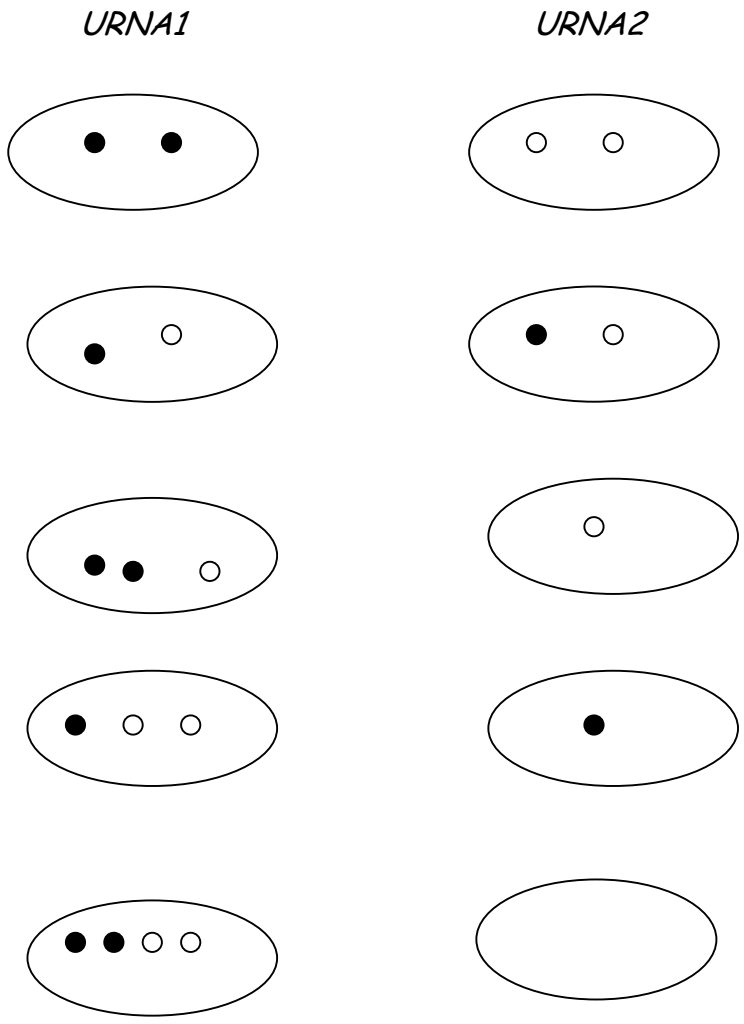


Figura 1

Le palline possono essere disposte due in un'urna e due in un'altra (in tal caso i modi diversi sono due nere e due bianche oppure una nera e una bianca) oppure tre da una parte e una dall'altra oppure tutte e quattro nella stessa urna.
Una possibile schematizzazione è quella che usa i diagrammi di Venn, ma naturalmente se ne possono trovare altre; essa però non ci dice quale di queste combinazioni dia maggiore probabilità di sopravvivenza al nostro astrologo.
Intuitivamente si può prevedere che nel primo caso la quantità delle palline è ininfluente, tutto sta nell'indovinare l'urna giusta, mentre nel secondo caso è l'urna ad essere ininfluente.
Per arrivare ad una valutazione quantitativa può essere opportuna la schematizzazione con un grafo ad albero.

Si può agevolmente calcolare che nei primi due casi la probabilità di sopravvivenza è 1/2.

Nel terzo caso si ha:

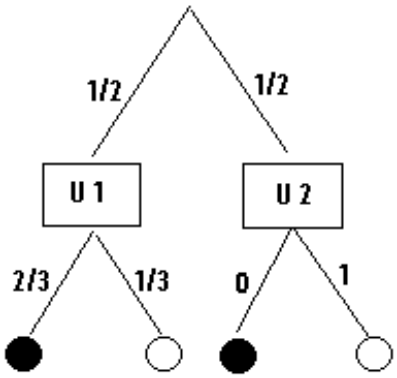


Figura 2

La probabilità che viva è dunque $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Nel quarto caso si ha:

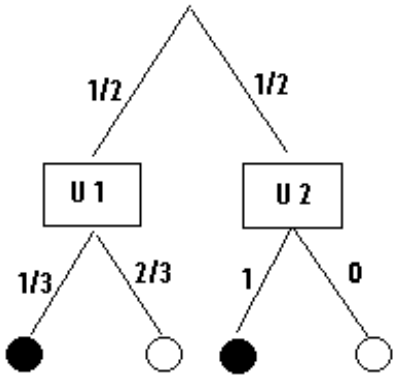


Figura 3

La probabilità che viva è adesso: $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{3}$

Nel terzo caso, dunque, la probabilità è superiore al 50% ed è quindi la strategia più conveniente.
Nell'ultimo caso la probabilità di sopravvivenza si riduce a 1/4.
Il problema si può anche generalizzare. Se disponiamo di due urne e di tre palline per ogni colore, quale sarà la configurazione più conveniente?

Figura 4

In questo caso avremo:

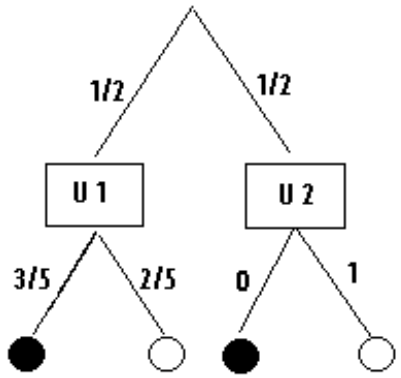


Figura 5

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{7}{10}$$

La probabilità è salita al 70%!!
Seguendo lo schema del primo esempio, abbiamo scelto subito la configurazione con una sola pallina bianca in una delle due urne. Ovviamente gli studenti arriveranno gradualmente a questa conclusione, magari analizzando altri casi.

Ulteriori sviluppi (porsi problemi)

E se le palline sono *n* bianche e *n* nere?
Il "solito" grafo ci dà:

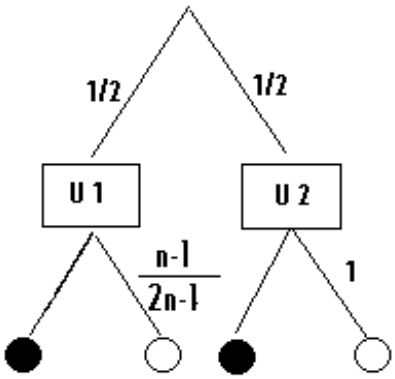


Figura 6

*Calcoliamo**:***

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3n-2}{2n-1}$$

Si è ormai capito che la strategia ottimale consiste nel mettere in una delle due urne una sola pallina bianca. Si può osservare che, al crescere di *n*, questa strategia fornisce probabilità di salvezza crescente. Lo studente potrà verificarlo studiando la crescenza della successione *p=p(n)* appena definita.
A livello di secondo biennio ci si può porre un'ulteriore domanda: al crescere di *n* potremo avere la certezza che il nostro astrologo si salvi?

Si ha anche euristicamente: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{4}$

Dunque, anche se non si vuole introdurre la notazione di limite, si potrà arrivare intuitivamente a definire una stima superiore di questa successione e si ritroverà che in ogni caso la probabilità di salvezza per il nostro astrologo non può, in nessun caso, superare il 75% (e questo dato potrà essere fonte di varie discussioni).

Ciliegie rosse e ciliegie gialle

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione. Usare in varie situazioni linguaggi simbolici.	Eventi e operazioni con gli eventi. Probabilità totale, condizionata e composta. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Variabili e quantificatori. Legami tra connettivi e quantificatori.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Dati e previsioni Argomentare congetturare, dimostrare	Lingua italiana Vita sociale

Contesto
Statistica: decisioni.

L'attività si colloca in ambito sia matematico sia extramatematico: per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito probabilistico e statistico, volto ad indicare capacità di decisione. Questo esempio è riferito ad una situazione reale nella quale molto spesso si possono trovare gli studenti. È un primo esempio di avvio alla riflessione, criticità e decisione.

Descrizione dell'attività.
Il padre di Luigi dice:"…*voi giovani non capite ancora l'importanza dello studio, pensate solo al divertimento! Beh ti voglio fare questa proposta: domenica andrai allo stadio a vedere la partita della Roma, a condizioni però che prima superi con voto sufficiente il compito di matematica*". Luigi aveva programmato anche di andare al cinema, ma sa bene che per superare il compito di matematica in modo sufficiente, dovrà studiare tutto il pomeriggio, e quasi certamente dovrà rinunciare al cinema. Capisce cioè che se vuole aumentare la probabilità di avere una buon voto nel compito di matematica diminuirà, altrettanto inevitabilmente, la sua probabilità di andare al cinema. Che decisione dovrà (o potrà) prendere ?
In generale, la lettura di un problema con riferimento alla vita reale, può disorientare inizialmente lo studente che spesso è portato a distinguere un testo matematico da uno letterario per la sola presenza di numeri. Quello, sopra riportato, è un esempio di problema senza numeri, in cui interviene il concetto di probabilità da un punto di vista che potremo chiamare qualitativo: se Luigi decide di studiare nel pomeriggio, vedrà aumentare la probabilità di vedere la partita e, contestualmente, diminuire la probabilità di andare al cinema.
Un problema di questo genere è considerato "*un problema aperto*", nel senso che non presenta dati numerici; essi si possono inserire di volta in volta, proponendo anche alcune variazioni dipendenti dal contesto. Inoltre, la descrizione della situazione richiede, da parte dello studente, anche una serie

di conoscenze linguistiche ed epistemologiche che gli consentano di sfrondare il testo dalle parti descrittive se quest'ultime non alterano la dinamica degli eventi.
Un esempio di problema, analogo a quello precedente di Luigi, del cinema e della partita, in cui compaiono però i numeri può essere il seguente:

"Siano dati due cestini di ciliegie A e B. Il cestino A contiene 19 ciliegie rosse e 1 ciliegia gialla e il cestino B contiene 4 ciliegie gialle e 1 rossa.Viene presentato uno dei due cestini nascosto da un drappo, si deve decidere di quale cestino si tratta.*"*
Si propone di operare seguendo la seguente regola di decisione:
si pesca dal cestino una ciliegia:
- se è rossa si afferma che si tratta del cestino A,
- se è gialla si afferma che si tratta del cestino B.

Seguendo questa regola, qual è la probabilità di prendere una decisione *corretta* circa il cestino che è stato presentato?
Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*vedi Tabella 1*.) I simboli α e β indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata quando viene presentato (all'insaputa di tutti, naturalmente) il cestino A e la probabilità di prendere una decisione errata quando viene presentato (all' insaputa di tutti) il cestino B.

Regola di decisione	***Situazione effettiva*** *(sconosciuta)*	
	Viene presentato il cestino A	*Viene presentato il cestino B*
Si pesca una ciliegia rossa e si afferma di avere avuto il cestino A	Decisione corretta $1 - \alpha$	Decisione errata β
Si pesca una ciliegia gialla e si afferma di avere avuto il cestino B	Decisione errata α	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 1

Si possono immaginare tre possibili soluzioni riferite a tre possibili specificazioni della domanda:

❖ <u>Sotto il drappo c'è il cestino A</u>. Qual è la probabilità di una decisione corretta?
Si pesca una ciliegia: se è rossa, la regola impone di dichiarare A e porta a una decisione corretta.

P (prendere una decisione corretta avendo avuto il cestino A) =

$$= \text{P (pescare una ciliegia rossa da A)} = \frac{19}{20} = 1 - \alpha$$

❖ Sotto il drappo c'è il cestino B. Qual è la probabilità di una decisione corretta?
Si pesca una ciliegia: se è gialla, la regola impone di dichiarare B e porta a una decisione corretta.

$$P(\text{prendere una decisione corretta avendo avuto il cestino B}) = P(\text{pescare una ciliegia gialla da B}) = \frac{4}{5} = 1 - \beta$$

❖ Sotto il drappo c'è un cestino, ma non si sa quale. Qual è la probabilità di una decisione corretta?
Si pesca una ciliegia e, seguendo la regola, se è rossa si dichiara A se è gialla si dichiara B.
Come si è appena visto ai punti 1 e 2, si può prendere una decisione corretta in due modi:
- viene offerto (all'insaputa di tutti) il cestino A: si pesca una ciliegia rossa e si dichiara A;
- viene offerto (all'insaputa di tutti) il cestino B: si pesca una ciliegia gialla e si dichiara B.

Le due alternative (o si pesca da A o si pesca da B) sono tra loro incompatibili (se si pesca da A non si è pescato da B).
Sia indicata con P_A la probabilità che venga presentato il cestino A e con P_B la probabilità che venga presentato il cestino B. La probabilità di una decisione corretta risulta:

$$\begin{aligned} P(\text{prendere una decisione corretta}) &= P(\text{avere il cestino A e di pescare una ciliegia rossa}) + \\ &+ P(\text{avere il cestino B e di pescare una ciliegia gialla}) = \\ &= P(\text{avere il cestino A})\cdot P(\text{pescare una ciliegia rossa da A}) + \\ &+ P(\text{avere il cestino B})\cdot P(\text{pescare una ciliegia gialla da B}) = \\ &= P_A(1-\alpha) + P_B(1-\beta) = 1 - (P_A\,\alpha + P_B\,\beta) \end{aligned}$$

Si può anche ragionare in modo diverso, partendo dalle probabilità di prendere una decisione errata:

$$\begin{aligned} P(\text{prendere una decisione corretta}) &= 1 - P(\text{prendere una decisione errata}) = \\ &= 1 - [P(\text{avere il cestino A e di pescare una ciliegia gialla}) + \\ &+ P(\text{avere il cestino B e di pescare una ciliegia rossa})] = \\ &= 1 - [P(\text{avere il cestino A})\cdot P(\text{pescare una ciliegia gialla da A}) + \\ &+ P(\text{avere il cestino B})\cdot P(\text{pescare una ciliegia rossa da B})] = \\ &= 1 - (P_A\,\alpha + P_B\,\beta) \end{aligned}$$

Si rileggano adesso le conclusioni precedenti nel caso del nostro amico Luigi, inserendo anche "personali" valutazioni di probabilità (che potranno, naturalmente, essere oggetto di discussione).

Regola di decisione	***Situazione effettiva*** *(alternative possibili)*	
	A - Studio (si rinuncia al cinema)	*B - Non studio (si va al cinema)*
Si prende 8 al compito di matematica e si va allo stadio.	Conclusione coerente (e felice) $1-\alpha = \frac{8}{10}$	Conclusione particolarmente fortunata $\beta = \frac{3}{10}$
Non si riesce a prendere 8 al compito di matematica e non si va allo stadio.	Conclusione particolarmente sfortunata $\alpha = \frac{2}{10}$	Conclusione coerente (ma infelice) $1-\beta = \frac{7}{10}$

Tabella 2

Qual è la probabilità di andare allo stadio?

- Si decide di studiare e si rinuncia al cinema. La probabilità di prendere 8 al compito di matematica e di andare allo stadio è

$$1 - \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

- Si decide di non studiare e di andare invece al cinema. La probabilità di prendere 8 al compito di matematica e di andare allo stadio è

$$\beta = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

- Si lancia la monetina, se viene testa si opta per l'alternativa A (lo studio), se viene croce si decide per l'alternativa B (il cinema), con $P_A = P_B = ½$.

Come si è appena visto ai primi due punti precedenti, si può andare allo stadio in due modi:

- si studia, si rinuncia al cinema, si prende 8 al compito di matematica e, finalmente, si va allo stadio;
- non si studia, si va al cinema, si riesce ciò nonostante a prendere 8 al compito di matematica e si va allo stadio.

Le due alternative (A e B) sono tra loro incompatibili (o si resta a casa a studiare o si va al cinema rinunciando allo studio).

La probabilità di andare allo stadio risulta:

P(andare allo stadio) =

= P(studiare, rinunciando al cinema, e prendere 8 al compito di matematica) +

+ P(andare al cinema, rinunciando allo studio, e prendere 8 al compito di matematica) =

= P(studiare)· P(prendere 8 al compito di matematica avendo studiato) +

+ P(non studiare)· P(prendere 8 al compito di matematica non avendo studiato) =

$$= P_A(1 - \alpha) + P_B\beta) = \frac{1}{2}\frac{8}{10} + \frac{1}{2}\frac{3}{10} = \frac{11}{20} = 0{,}55$$

Osservazione

Con un ragionamento analogo, si invita lo studente a risolvere problemi simili in rapporto alle esperienze personali riferite al suo quotidiano, suggerendogli anche di "inventare" personalmente le misure di probabilità di cui dovrà servirsi.

Nota: Come già abbiamo visto in alcune attività del nucleo Dati e Previsioni, è opportuno fare una piccola considerazione sulla necessità della *Probabilità a priori*. Si tratta cioè di dover completare i dati del problema con valutazioni di probabilità (nel caso in oggetto "andare al cinema" o "studiare tutto il pomeriggio") da assegnare, non attraverso formule prestabilite ma in modo soggettivo-coerente-razionale. Ciò potrà essere fatto esaminando razionalmente il problema *alla luce* di tutte le informazioni a disposizione, discuterne in classe con la guida attenta dell'insegnante che dovrà vigilare perché "soggettivo" non diventi "arbitrario", rendendosi conto della necessità dell'inserimento, fra i dati del problema, anche di tale dato per affrontare compiutamente il problema stesso. Anche nel caso in cui non si abbia alcuna informazione ci si convincerà, presto e facilmente, che tale situazione di *ignoranza* potrà essere significativamente tenuta presente attraverso il concetto di equiprobabilità: se non sappiamo niente non possiamo certo affermare che un evento è più probabile di un altro… Ed allora diamo a tutti la stessa probabilità pronti a considerare gli eventuali futuri aggiornamenti, in seguito ad esperimenti o altro tipo di informazione.

Il biliardo

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi. Produrre una soluzione del problema attraverso un'opportuna concatenazione delle azioni necessarie (costruzioni geometriche). Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie.	Isometrie nel piano: simmetrie e traslazioni. Proprietà delle figure geometriche. Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie.	Risolvere e porsi problemi Spazio e figure	Fisica Disegno

Contesto
Trasformazioni geometriche.

L'attività si colloca nell'ambito sia matematico sia extramatematico; per quest'ultimo aspetto riguarda la vita sociale.
Il problema proposto si colloca nel secondo biennio con l'obiettivo di applicare le isometrie, e non semplicemente definirle e descriverle, ad una situazione reale che è quella che si presenta nel gioco del biliardo, quando si vuole che la biglia colpita segua un certo percorso. Il problema si presta anche ad una soluzione analitica che, tuttavia, si presenta eccessivamente complessa. L'esempio vuole dimostrare l'importanza di una scelta di metodo conveniente per il problema posto. L'alunno deve conoscere le isometrie del piano, le loro composizioni, la disuguaglianza triangolare, e le equazioni e i sistemi lineari.

Descrizione dell'attività
Il problema consiste nell'individuare la direzione di lancio della biglia, che si trova inizialmente in un punto *P* del biliardo, in modo che, dopo aver battuto successivamente contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il punto *P*.

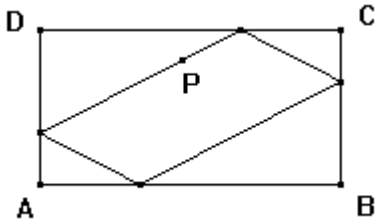


Figura 1

Conviene proporre dapprima dei problemi più semplici al fine di abituare lo studente all'utilizzo delle trasformazioni geometriche come metodo di risoluzione di problemi. Lo studente potrà in tal modo apprezzare la potenza di un metodo diverso da quelli consueti, più idoneo in taluni casi a fornire soluzioni rapide ed eleganti.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti il problema noto come *Problema di Erone*, formulato con riferimento ad un contesto del mondo reale.

- Una persona che si trova in una posizione *A* deve andare a riempire dei secchi d'acqua, attingendo da un ruscello posto ad una certa distanza, e portarli ad una fattoria che si trova in un punto *B* dalla stessa parte di *A* rispetto al ruscello, facendo il cammino più breve. Si chiede di aiutare la persona ad individuarlo.

Lo studente intuitivamente comprende che il cammino deve essere rettilineo dal punto A al ruscello; poi, ancora rettilineo, dal fiume alla fattoria. Rappresentando il fiume con una retta *r* si può visualizzare la situazione con la seguente figura:

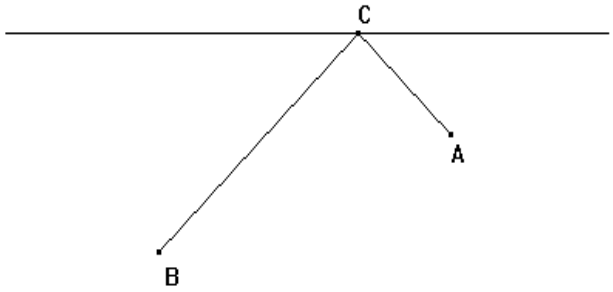


Figura 2

Il problema si presenta allora come un problema di minimo: dati due punti *A* e *B*, posti dalla stessa parte di una retta *r*, determinare su essa un punto *C* tale che $\overline{AC} + \overline{CB}$ sia minimo. La risoluzione analitica è, dal punto di vista operativo, non semplice e utilizza strumenti matematici non ancora noti allo studente.

L'insegnante pone la seguente domanda alla classe.

"Se la fattoria stesse dall'altra parte del ruscello in un punto *B'* e non ci fossero problemi di attraversamento del ruscello, quale sarebbe il cammino più breve?"

La risposta è ovvia: "Il segmento *AB*' ".

L'insegnante chiede ancora: "Dove deve stare il punto *B'* ? "

A questo punto gli studenti intuiscono che *B*' deve essere il simmetrico di *B* rispetto alla retta *r* e, facendo alcune considerazioni sulle proprietà di tale trasformazione (punti e segmenti corrispondenti), pervengono alla risposta corretta: il punto *C* è il punto d'intersezione del segmento *AB'* con la retta *r*.

E' chiaro che il procedimento scelto è rapido ed elegante, specialmente se confrontato con un eventuale procedimento analitico.

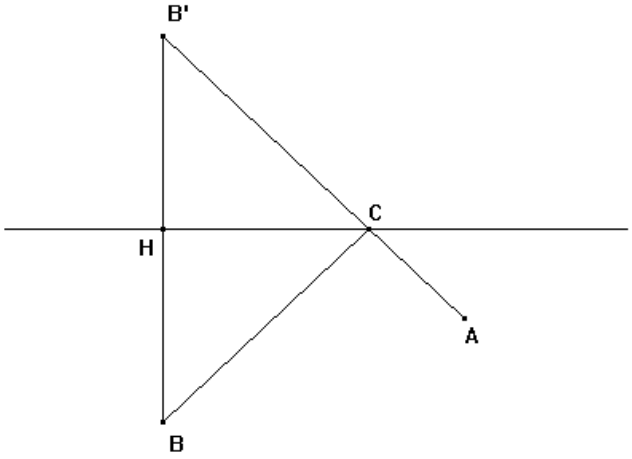


Figura 3

Seconda fase

L'insegnante propone il seguente esercizio:

- Siano date due rette *a* e *b* perpendicolari tra loro in un punto *P* ed una retta *r* passante per *P*. Che relazione c'è tra le rette che si ottengono da *r* come corrispondenti nelle simmetrie assiali rispetto agli assi *a* e *b*?

La risposta degli studenti è immediata: le rette coincidono. L'esercizio è però fondamentale per affrontare il problema del biliardo.

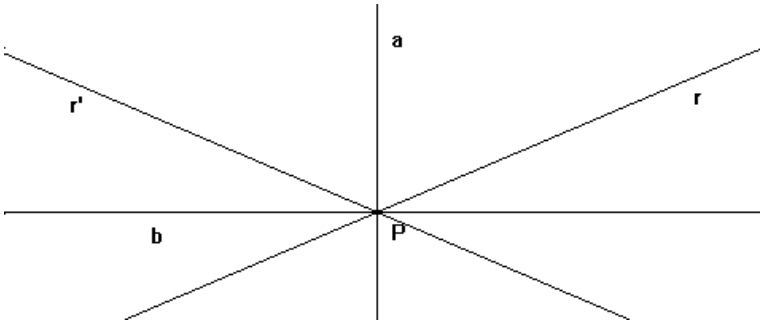


Figura 4

Terza fase

Le considerazioni fatte per la soluzione analitica nel problema del ruscello valgono, a maggior ragione, per il problema del biliardo. Gli studenti hanno raggiunto la convinzione che il metodo analitico può condurre alla soluzione di un sistema lineare la cui soluzione appare subito piuttosto complessa.

L'insegnante invita gli studenti a concentrare l'attenzione sulla legge di riflessione nell'urto (elastico) di una biglia che, muovendosi sul piano del biliardo, batta contro una delle sponde del biliardo stesso. In tale fase egli può coinvolgere il collega di fisica.

Può essere conveniente, a questo punto, utilizzare un software di geometria simulando il percorso come nella figura 5, dove si è supposto che la prima sponda contro cui la biglia batte è il lato *AD*. Gli studenti possono variare la direzione di lancio in modo che la retta ottenuta dopo le quattro riflessioni passi per *P*. La congettura che gli studenti formulano è la seguente:

La direzione secondo cui va lanciata una biglia posta in un punto *P* del biliardo, affinché, dopo aver battuto contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il medesimo punto *P*, è quella della diagonale *AC* (o della diagonale *BD*) del rettangolo che rappresenta il biliardo.

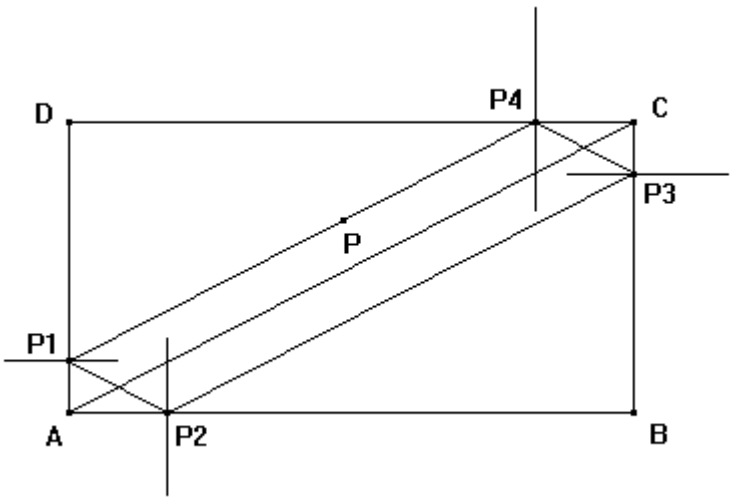


Figura 5

Occorre ora validare o confutare tale congettura.
Ricordando l'esercizio della seconda fase, gli studenti osservano che la retta riflessa della retta PP_1 (cioè P_1P_2) si ottiene non solo dalla simmetria rispetto alla perpendicolare alla sponda ma anche dalla simmetria rispetto alla sponda interessata (ovvero DA). La costruzione si ripete quattro volte con riflessioni assiali rispetto alle quattro sponde del biliardo ottenendo le rette P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 ed una quarta retta che si vuole passi per P.
La composizione delle prime due simmetrie assiali (in quanto gli assi sono ortogonali) dà luogo alla simmetria centrale di centro A (intersezione dei due assi di simmetria) e la composizione delle altre due dà la simmetria centrale di centro C. Quindi la composizione delle quattro simmetrie assiali equivale alla composizione delle due simmetrie centrali di centri A e C che, a loro volta, danno luogo ad una traslazione di un vettore avente come direzione la retta congiungente i due centri di simmetria, cioè la diagonale AC del rettangolo che rappresenta il biliardo.
Le rette, corrispondenti in una traslazione, che passano per uno stesso punto (P) sono quelle aventi la direzione del vettore-traslazione, per cui la direzione di lancio della biglia, affinché dopo le quattro riflessioni ripassi per la posizione iniziale P, è quella della diagonale AC del rettangolo che rappresenta il biliardo (lo stesso risultato si ha se si lancia la biglia nella direzione dell'altra diagonale).

Quanto costa una pizza all'equatore

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi. Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. Confrontare i risultati con le aspettative. Individuare le cause delle inadeguatezze con opportuni elementi di controllo ritenuti importanti all'avvio del processo risolutivo. Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità.	Omotetie e similitudini nel piano. Lunghezza della circonferenza ed area del cerchio. Area e volume dei solidi.	Risolvere e porsi problemi Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare	Geografia astronomica Fisica

Contesto
Misure.

L'attività si colloca trasversalmente a varie conoscenze geometriche.
L'attività descritta rappresenta un buon esercizio sulle similitudini. I problemi proposti, in particolare i primi due, mettono in luce che l'intuizione è un aspetto importante nell'attività matematica, ma che è necessario supportarla con un corretto ragionamento ed una attenta analisi dei risultati. L'intuizione da sola può condurre ad affermazioni errate. Il terzo problema è di tipo aperto e invita a produrre delle congetture su un dato mancante e a sostenerle con ragionamenti pertinenti.
La serie di attività proposte richiede conoscenze che si acquisiscono durante il terzo e il quarto anno del corso di studi, per cui l'attività può essere suddivisa in tali anni. Per il suo svolgimento si utilizzano immagini del globo terrestre ed altre di oggetti tratti dall'esperienza quotidiana. Lo studente deve avere una buona conoscenza delle figure geometriche del piano e capacità di visione spaziale. Deve anche conoscere e sapere applicare le proprietà delle similitudini, nonché i concetti di peso e peso specifico.

Descrizione dell'attività
L'attività prevede la risoluzione di tre problemi che, per la loro apparente semplicità, potrebbero indurre gli studenti a fornire soluzioni di tipo immediato. Esse richiedono, invece, una riflessione attenta sulle proprietà delle figure geometriche e sulle relazioni tra esse.

Primo problema

- Si stende un nastro intorno alla superficie terrestre lungo tutto l'equatore e si osserva che la sua lunghezza deve essere circa 40.076.000 m, essendo il raggio *r* della terra, se questa è assimilata ad una sfera, lungo 6.370.000 m. Se si allunga il nastro di 2π metri (poco più di 6 metri e 28 centimetri), il nuovo nastro, disposto simmetricamente rispetto al centro della terra, si solleva abbastanza da consentire ad un coccodrillo di passarci sotto?
  (Nota: l'altezza media di un coccodrillo è di circa mezzo metro).

L'insegnante invita gli studenti a fornire una risposta e a giustificarla.
(Si avvia una discussione tra gli studenti: eccone una ragionevole sintesi, in una classe immaginaria).

Luca: *Non ci passa sicuramente perché, ben che vada, il nastro si alzerà di pochi millimetri; il nastro lungo quanto l'equatore non si accorge neppure dell'aggiunta di sei metri.*
Giovanni: *Hai ragione, al più ci potrà passare un foglio di carta sotto il nastro.*
Enrico: *Sono d'accordo, però mi piacerebbe sapere di quanti millimetri si solleva precisamente; facciamo il calcolo.*
Osservano allora che la lunghezza del nastro è $2\pi r$ metri e, se si aggiunge un altro pezzo lungo 2π *metri*, la lunghezza del nastro diventa $2\pi r+2\pi = 2\pi (r+1)$ *metri.*
La conversazione riprende:
Luca: *Il raggio della nuova circonferenza misura (r+1) metri. Allora si solleva di un metro!*
Giovanni: *Se mi accuccio ci passo anche io!*
Enrico: *Il risultato sembra strabiliante, ma se ci pensiamo, come sei metri sono pochissimi rispetto alla lunghezza dell'equatore, anche un metro è poco rispetto alla lunghezza del raggio della terra. Infatti, il rapporto tra lunghezza di una circonferenza e del suo raggio è costante e vale* 2π.

Considerazioni matematiche.
Le circonferenze sono figure simili. Il rapporto delle lunghezze delle circonferenze è uguale al rapporto dei loro raggi.

Secondo problema

- Due amici, in pizzeria, ordinano due pizze napoletane: Andrea la prende normale, Paolo invece la sceglie "gigante". Quando gliele portano i due amici osservano che sono perfettamente circolari; la normale ha raggio 20 cm, la gigante 30 cm e sono anche dello stesso spessore. Quando portano il conto, Andrea deve pagare € 6,4 mentre Paolo, vedendo il suo conto, che è di € 12, si sorprende: "*Come mai la mia pizza costa quasi il doppio, mentre il raggio è aumentato solo del 50%" ?*.

Affidiamo la risposta alla nostra solita classe immaginaria.

Luca: *Paolo ha ragione: avendo la pizza più grande il raggio una volta e mezzo quello della più piccola, basta aggiungere la metà di 6,4 € cioè 3,2 €.Il prezzo giusto dovrebbe essere 9,6 €.*
Giovanni: *Però con le pizze così grandi - le maxi pizze - ci si mangia in due e mi ricordo che si paga molto di più.*
Enrico: *Facciamo il calcolo di quanta pizza in più c'è. Calcoliamo l'area del cerchio della prima pizza e quello della maxi pizza e proviamo a fare il rapporto.*

L'area della prima pizza è πr^2; l'area della maxi pizza è $\pi\left(r+\frac{r}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{3}{2}r\right)^2=\frac{9}{4}\pi r^2$.Il rapporto tra l'area della maxi pizza e quella della pizza normale è $\frac{9}{4}=2{,}25$.

Luca: *E' più che raddoppiata!*
Giovanni: *Ecco perché ci si mangia in due.*
Luca: *Che strano il raggio era aumentato solo della metà.*
Enrico: *Già, ma il rapporto tra le aree di due cerchi, che sono figure simili, è uguale al quadrato del rapporto tra i loro raggi. Perciò se si considerano due cerchi di raggi* $\frac{3}{2}r$ *ed r, come sono le pizze considerate, il rapporto tra i loro raggi è* $\frac{3}{2}$ *e il quadrato è* $\frac{9}{4}=2{,}25$. La maxi pizza deve costare 6,4 x 2,25 *€= 14,4 €. Quindi a Paolo, il pizzaiolo, ha fatto addirittura lo sconto !*

Considerazioni matematiche
I cerchi sono figure simili. Il rapporto delle aree dei cerchi è uguale al quadrato del rapporto dei loro raggi.

Terzo problema

- Negli Stati Uniti le monete da 50 cent e da 10 cent sono entrambe d'argento ed hanno un peso proporzionale al loro effettivo valore. Proviamo a disporre delle monetine da 10 cent sulla moneta da 50 cent, senza che si sovrappongano e non debordino dal contorno della moneta grande. Quante monete da 10 cent riusciamo a mettere?

Luca: *Bisognerebbe fare un modellino delle monete.*
Giovanni: *Ritagliamole da un foglio di carta.*
Luca: *Prendo il compasso per disegnarle.*
Giovanni: *Ma che raggi diamo?*
Luca: *La più grande vale 50 cent, la più piccola 10 cent; perciò io darei alla più grande un raggio di 5 cm e alla più piccola di 1 cm.*

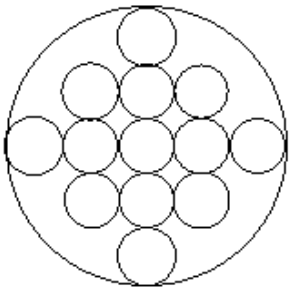


Figura 1

Enrico: *13 monetine mi sembrano troppe. Quando sono stato negli Stati Uniti ho visto le monete e quelle da mezzo dollaro non mi sembravano così grandi. Il problema afferma che le monete hanno un peso proporzionale al loro valore, ovvero la moneta da mezzo dollaro pesa 5 volte la moneta da 10 cent. Essendo entrambe d'argento anche i loro volumi sono nello stesso rapporto. E siccome le monete sono dei cilindri dobbiamo conoscere il loro spessore. Siccome non abbiamo questo dato possiamo tentare delle ipotesi.*
Giovanni: *Le monete potrebbero avere lo stesso spessore.*
Luca: *Mi sembra poco verosimile: ho sempre visto le monete di maggior valore più spesse.*
Giovanni: *Allora potrebbero avere altezze proporzionali.*
Insegnante: *Dovete dire proporzionali a che cosa e in che modo.*

Giovanni: *Potrebbero essere due cilindri simili.*
Insegnante: *Che cosa intendi?*
Giovanni: *Il rapporta tra le misure è costante.*
Insegnante: *Quali misure?*
Giovanni: *Ad esempio quelle dei raggi di base e delle altezze.*
Insegnante: *Questa ipotesi è sensata.*
Enrico: *Proviamo con questa ipotesi a calcolare questo rapporto. Chiamiamolo* $\boldsymbol{k}$*. I raggi di base li chiamiamo r (10 cent) e R (50 cent); le altezze rispettivamente h e H . Il volume del cilindro della moneta da 10 cent è* $\pi r^2 h$ *e quello della moneta da 50 cent è* $\pi R^2 H$*. Poiché* $R = \boldsymbol{k}\, r$ *;* $H = \boldsymbol{k}\, h$ *, il volume della moneta da 50 cent diventa* $\pi (\boldsymbol{k}\, r)^2 \boldsymbol{k} h = \pi \boldsymbol{k}^3 r^2 h$ *. Il rapporto tra il volume della moneta da 50 cent e quello della moneta da 10 cent è dunque* $\boldsymbol{k}^3$*. Allora il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto dei raggi di base e delle altezze. Siccome questo rapporto è 5, risulta* $k = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ *circa. La moneta da 50 cent ha un raggio che non è neppure il doppio di quello della moneta da 10 cent.*
Giovanni: *Con questa ipotesi, dunque, non è possibile metterne neppure due, ma solamente una. Questa risposta mi convince perché lo stesso accade con le nostre monete da 50 e 10 centesimi di euro.*

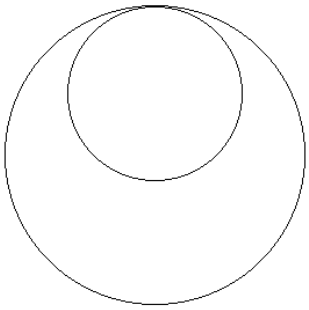


Figura 2

Considerazioni matematiche
I due cilindri, nella ipotesi fatta, sono figure simili (il docente può spiegare intuitivamente il significato di solidi simili). Il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto dei raggi di base oppure al cubo del rapporto delle altezze.

Sintesi matematica
Possono essere messe a confronto le tre situazioni, evidenziando la proporzionalità “lineare”, la proporzionalità “quadratica” e quella “cubica”.

La moneta è truccata!

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	Nuclei coinvolti	**Collegamenti esterni**
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare criticamente le informazioni. Selezionare, produrre ed usare appropriate distribuzioni grafiche.	Il ragionamento induttivo e le basi dell'inferenza. Produrre grafici di relazioni.	Risolvere e porsi problemi Dati e previsioni Relazioni e funzioni <u>Laboratorio di matematica</u>	Lingua italiana Vita sociale

Contesto.
Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale cercando di dare indicazioni di consapevolezza critica verso il mondo circostante.
Giochi di sorte. Si propone alla classe un semplice problema che implica la necessità di una (forse prima) riflessione circa il modo di verificare se una congettura, o una ipotesi, è vera oppure è falsa.
"Si gioca a Testa e Croce con una moneta di cui non si conosce la provenienza...magari per farci delle scommesse. Prima di fare delle puntate, si vorrebbe sapere, con una certa attendibilità, se essa è equilibrata o meno, cioè se si può attribuire la stessa probabilità alle 2 facce, Testa o Croce, cioè se $P(T)=P(C)=1/2$ "

Descrizione dell'attività.
Si propone inizialmente agli studenti di riflettere sul fatto che non sempre, quando sono di fronte a due eventi alternativi, devono pensare che tali eventi abbiano la stessa probabilità di verificarsi. Ciò perché in modo spontaneo, ma non sempre corrispondente alla realtà, gli studenti, messi a confronto con le prime considerazioni probabilistiche, sono portati a considerare equilibrata qualsiasi moneta, e quindi, ad attribuire la stessa probabilità alle due facce.
Per rendere più evidente la cosa facciamo notare che è senz'altro corretto attribuire un alto grado di fiducia, o "verità" a questa congettura, se ci troviamo fra le mani una moneta coniata dalla Zecca di Stato, mentre non sappiamo cosa si può dire se fra le mani ci è capitata una vecchia moneta o se, chi ci propone di usarla per il gioco, sia qualcuno che sospettiamo abbia truccato la moneta, ad esempio, in modo da far venire *mediamente* più Teste che Croci.
Un'altra possibile osservazione, che viene spontanea in classe, è sul significato di frequenza dell'evento: si può ragionevolmente ritenere che, anche se una moneta è equilibrata, in una serie limitata di osservazioni, ciò porti esattamente ad ottenere il 50% di Teste e 50% di Croci?
Prima conclusione che si raggiunge dalla discussione: un numero non molto grande di lanci può non essere sufficiente a scoprire, anche con monete equilibrate, se è attendibile l'ipotesi di equiprobabilità.
Ma vediamo cosa succede se facciamo crescere il numero di prove.

Un modo per "risolvere" il problema dato può essere chiamato "metodo empirico", e risulta particolarmente significativo per la sua valenza didattica.

"Metodo Empirico"

Per creare le premesse per il ragionamento induttivo, si propone ai ragazzi di usare una moneta di uso corrente, ad esempio da 2 Euro, per fare un numero di prove sempre più elevato ed osservare cosa succede della frequenza relativa di successo, ad esempio di Testa, costruendo il grafico che esprime l'andamento delle frequenze relative di successi F_i/N all'aumentare delle prove.
Sarà utile, infine, chiedersi se lo scostamento fra le Frequenze relative osservate, al variare del numero dei lanci, è lontano, in modo significativo da $p = ½$. Se ciò avviene diremo che la moneta è truccata.

1) Si invitano gli studenti a costruire una tabella delle osservazioni (*Tabella 1*), ripetendo più volte il lancio della stessa moneta. Si possono far fare, ad esempio, 60 lanci a ciascuno dei 20 studenti e poi raggruppare in un'unica tabella i dati ottenuti. Nella tabella che segue, dopo aver chiamato con N il numero complessivo dei lanci e con F_i e con F_i/N rispettivamente la frequenza cumulata e la frequenza cumulata relativa, si sono indicati gli estremi dell'intervallo con $p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1{,}5}{\sqrt{N}}$. E' noto infatti che tale intervallo comprende statisticamente più del 99% dei dati e che il centro di tale intervallo è la probabilità p richiesta. Diventa particolarmente significativo osservare dalla Tabella 1 la differenza fra la frequenza ottenuta F_i/N e la probabilità teorica indicata con p nell'ultima colonna.

Lanci complessivi	Freq. Cumulate	**Frequenza relativa**	**Min**	**Max**	**Probabilità**
N	F_i	F_i/N	$p - 1{,}5/\sqrt{N}$	$p + 1{,}5/\sqrt{N}$	p
60	31	0,52	0,39	0,61	0,5
120	65	0,54	0,42	0,58	0,5
180	98	0,54	0,44	0,56	0,5
240	121	0,50	0,45	0,55	0,5
300	151	0,50	0,45	0,55	0,5
360	183	0,51	0,46	0,54	0,5
420	216	0,51	0,46	0,54	0,5
480	246	0,51	0,46	0,54	0,5
540	271	0,50	0,47	0,53	0,5
600	301	0,50	0,47	0,53	0,5
660	331	0,50	0,47	0,53	0,5
720	367	0,51	0,47	0,53	0,5
780	400	0,51	0,47	0,53	0,5
840	430	0,51	0,47	0,53	0,5
900	460	0,51	0,47	0,53	0,5
960	489	0,51	0,47	0,53	0,5
1020	526	0,52	0,48	0,52	0,5
1080	561	0,52	0,48	0,52	0,5
1140	591	0,52	0,48	0,52	0,5
1200	619	0,52	0,48	0,52	0,5

Tabella 1

Si riportano i dati in un grafico su un foglio elettronico per vedere se la frequenza relativa si stringe attorno alla probabilità 0,5 in caso di moneta equilibrata.

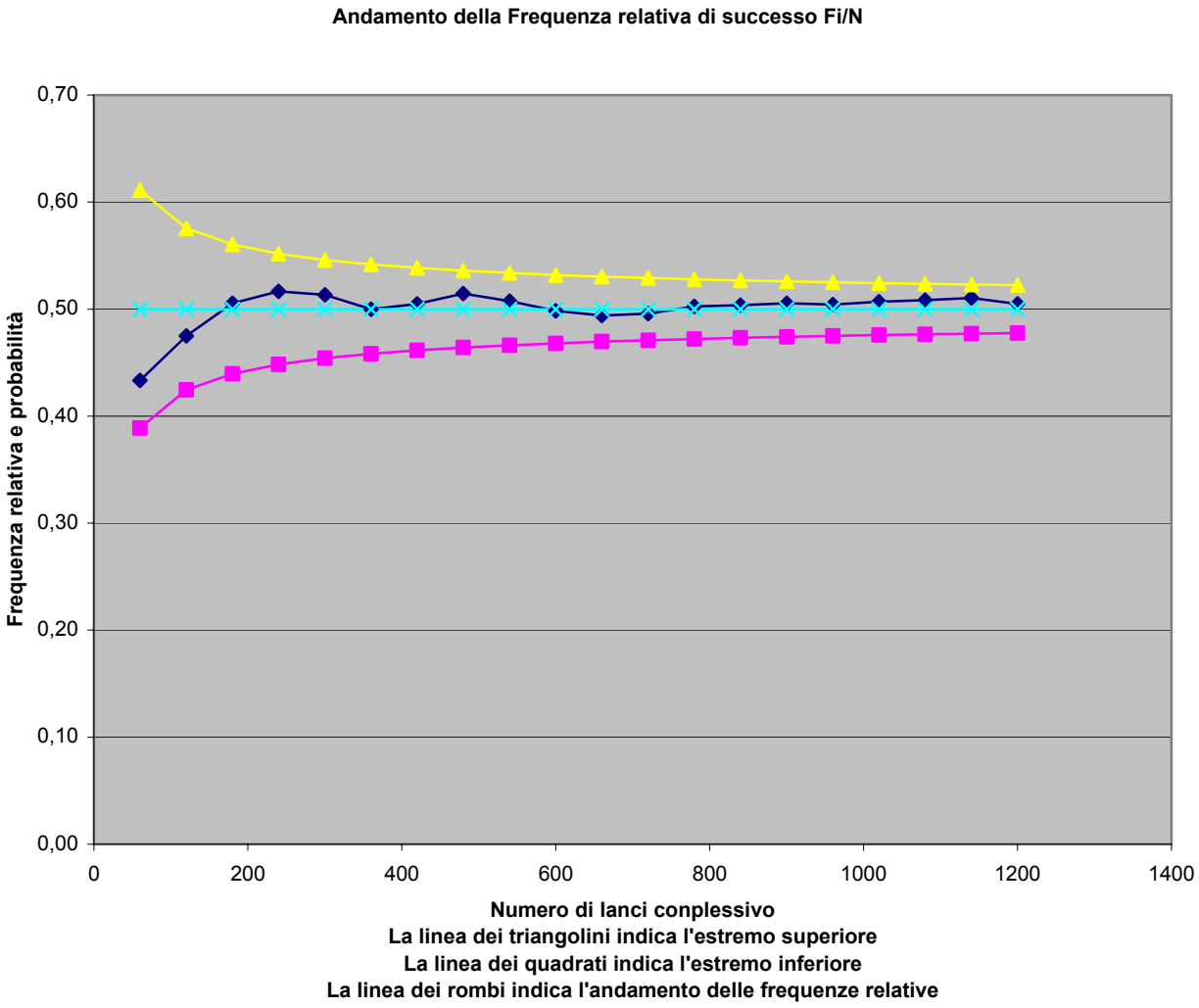


Figura 1

La verifica empirica è simulata, con i limiti dipendenti dalla non perfetta casualità della funzione di Excel usata, sul foglio elettronico allegato: **Lancio_moneta_TCA**
(Per attivare la simulazione è sufficiente inserire un qualsiasi dato nella casella gialla e premere invio). E' anche possibile effettuare la verifica realmente in classe, usando lo stesso foglio e inserendo manualmente i risultati del lancio di 60 monete e il numero dei successi ottenuti da ciascuno dei venti studenti, sostituendo così la funzione casuale che si presenta nella seconda colonna.
Il grafico mostra la convergenza "empirica" della frequenza relativa *Fi/N* dei successi alla probabilità *p*, attraverso il cosiddetto "grafico ad imbuto" che evidenzia come questa approssimazione migliori all'aumentare di *N* .
Osservazione: come è noto, per un certo valore di *N,* la distribuzione di *Fi/N* ha media *p* e varianza *p(1-p)/N*. Si può perciò delimitare una banda di oscillazione attorno a $p = 0{,}5$, visualizzata dal grafico ad imbuto, che rappresenta il valore atteso minimo e massimo delle frequenze relative. Le bande hanno ampiezza $3 \cdot \sqrt{p(1-p)/N}$ rispetto a *p* e contengono circa il 99,7% dei casi. Al

cumularsi dei lanci, cioè al crescere di *N*, si vede come la frequenza relativa dei successi tende a stare nel grafico ad imbuto e ad avvicinarsi a *p.*
Osservazione (qualitativa): all'aumentare del numero di prove, aumenta la probabilità che la frequenza empirica si avvicini al valore teorico $p = 0{,}5$ e, quindi, aumenta la fiducia che *Fi/N* sia una "buona" stima della vera probabilità.
Naturalmente, nel caso si operi con una moneta equilibrata, si osserva che ciò è solo una verifica empirica di quanto già si sapeva: che la frequenza relativa stima bene la probabilità, al crescere di *N*.
Ma in una serie non numerosa di osservazioni, può accadere che la stima sia "lontana" da 0,5, anche in una moneta equilibrata.
Come possiamo, perciò, operando all'inverso, valutare l'attendibilità di tale congettura se non abbiamo una forte informazione iniziale sulla moneta?
Ipotesi nulla: La moneta è equilibrata $p = 0{,}5$
Ipotesi alternativa: La moneta non è equilibrata $p \neq 0{,}5$
Possiamo operare in questo modo:
Costruiamo un criterio di decisione (o Test statistico) basato sulla distribuzione Normale standardizzata dello stimatore della *Fi/N*

$$z = \frac{\frac{Fi}{N} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1 - p)}{N}}}$$

Tale variabile, nel caso in cui la moneta sia equilibrata, si distribuisce come una variabile casuale Normale standardizzata (0,1), di cui si dispone delle necessarie tavole numeriche.
Il procedimento per decidere è il seguente:

Si decide di effettuare un numero di lanci "abbastanza grande": per la ragione appena esposte la frequenza relativa tende alla probabilità p (ad es. si possono fare $N = 100$ lanci).
Si sceglie un grado di attendibilità funzionale alla decisione che vogliamo prendere; se, ad es. fissiamo una attendibilità del 95%, vuol dire che, nel caso la moneta sia equilibrata, siamo pronti ad accettare una probabilità di sbagliare il giudizio, a causa del campionamento, del 5%.
Si determina empiricamente il valore di *Fi /N* nel caso esaminato.
Si determina il valore di *z*, se p=0,5 e N=100.
Si osserva se *z* cade nell'intervallo standardizzato (−1,96 , +1,96); è noto che tale intervallo contiene il 95% circa dei valori di z, nell'ipotesi che p= 0,5 e N=100.
In conclusione:
si accetta l'ipotesi di moneta equilibrata se *z* è compreso nell'intervallo considerato;
si conclude, invece, che la moneta è truccata se *z* cade fuori dell'intervallo considerato.

Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*Tabella 2*). I simboli α e β indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata in presenza di ipotesi nulla e in presenza di ipotesi alternativa. Il grado di attendibilità $1 - \alpha = 0{,}95$ è stato fissato preliminarmente e così pure, ovviamente, $\alpha = 0{,}05$, che rappresenta la probabilità di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi nulla. Rimane indeterminata la probabilità β di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi alternativa.

Regola di decisione	***Situazione effettiva***	
	Ipotesi nulla (moneta equilibrata) $p = ½$	Ipotesi alternativa (moneta non equilibrata) $p \neq ½$
z cade nell'intervallo (–1,96, +1,96): si accetta l'ipotesi nulla	Decisione corretta $1 - \alpha = 0{,}95$	Decisione errata β
z cade fuori dell'intervallo (–1,96, +1,96): si accetta l'ipotesi alternativa	Decisione errata $\alpha = 0{,}05$	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 2

L'affondamento del Titanic

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su una unità statistica formata da 2 elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica. Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. Selezionare, produrre ed usare appropriate rappresentazioni grafiche delle distribuzioni doppie.	Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni doppie rispetto a caratteri di qualsiasi natura. Concetto e significato di modello: dipendenza e indipendenza stocastica. Probabilità semplice, condizionata e composta.	Risolvere e porsi problemi Dati e previsioni Argomentare, congetturare, dimostrare	

Contesto
Dipendenza stocastica.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale e dell'attualità.
Questo esempio è riferito a dati reali che facilmente possono colpire lo studente nella vita quotidiana attraverso notizie provenienti da televisione e giornali. La parte didatticamente più importante è l'attenzione da porre a dati e percentuali che, a prima vista, potrebbero fuorviare.

Descrizione dell'attività
Il Titanic trasportava passeggeri in tre classi: 1ª, 2ª, 3ª. Dopo l'affondamento fu stilata la relazione relativa all'incidente ed a tutte le operazioni di salvataggio successive. Alcuni dati sono sinteticamente riportati nelle seguenti tabelle:

Classe dei viaggiatori	Viaggiatori alla partenza			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1ª Classe	175	144	6	325
2ª Classe	168	93	24	285
3ª Classe	462	165	79	706
Totale	805	402	109	1316

Tabella 1

Classe dei viaggiatori	Sopravvissuti			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1ª Classe	57	140	6	203
2ª Classe	14	80	24	118
3ª Classe	75	76	27	178
Totale	146	296	57	499

Tabella 2

Classe dei viaggiatori	Morti o Dispersi			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1ª Classe	118	4	0	122
2ª Classe	154	13	0	167
3ª Classe	387	89	52	528
Totale	659	106	52	817

Tabella 3

Osservazione 1: I passeggeri delle tre classi non viaggiavano tutti nelle stesse condizioni. Ad esempio, i passeggeri di terza classe erano in gran parte emigranti con famiglia e figli, probabilmente non tutti erano perfettamente padroni della lingua inglese (c'erano emigranti francesi, ma anche inglesi usi a parlare in dialetto) e, inoltre, gli alloggi di terza erano collocati in luoghi della nave da cui non era immediato l'accesso al ponte dove si trovavano le lance di salvataggio. Al contrario, i passeggeri di prima erano persone facoltose abituate a parlare in inglese, in generale coppie senza figli in viaggio di divertimento e gli alloggi di prima si affacciavano sul ponte o erano nelle vicinanze. Per dare forza all'osservazione che in terza classe c'erano molti più bambini che nelle altre classi, si può costruire la Tabella 4 con i dati relativi ai bambini alla partenza.

Classe	Viaggiatori alla partenza		
	Bambini	In totale	Percentuale
1ª Classe	6	325	1,8 %
2ª Classe	24	285	8,4 %
3ª Classe	79	706	11,2 %
Totale	109	1316	8,3 %

Tabella 4

Effettivamente, in terza classe i bambini erano molto più numerosi, rappresentavano l'11,2% dei passeggeri di quella classe, in seconda rappresentavano l'8,4% dei passeggeri e in prima rappresentavano solo l'1,8% dei passeggeri. Rivolgiamoci alcune domande atte a capire come stavano effettivamente le cose.

Domanda: Osservando i dati riportati nelle tabelle, sembra possibile affermare che, a causa delle maggiori difficoltà incontrate nel salvataggio dei passeggeri di terza classe (con famiglie, con bambini, alloggiati in luoghi poco agevoli, con difficoltà di linguaggio), sono stati salvati più passeggeri di seconda e prima classe che di terza. Questa è solo una impressione o può essere confermata da una analisi puntuale ed approfondita dei dati?

Vediamo alcune (possibili) risposte, suddivise per "categorie".

Prima risposta *(uomini)*: Per rispondere alla domanda, si incominci a prendere in considerazione i soli maschi. A partire dalle Tabella 2 e 3 si costruisca la Tabella 5. Salta agli occhi che più della metà dei sopravvissuti maschi (il 51,4%) è di terza classe). Verrebbe da dire, ad una prima affrettata (e, come vedremo, errata) conclusione, che tra gli uomini si sono salvati soprattutto quelli di terza classe (51,4%), seguiti da quelli di prima (39%) e da quelli di seconda (9,6%).

Classe	Sopravvissuti uomini	Ripartizione percentuale dei sopravvissuti uomini	Uomini alla partenza	Ripartizione percentuale degli uomini alla partenza	Percentuale di sopravvissuti sui partenti

1ª Classe	57	39,0	175	21,7	32,6
2 ª Classe	14	9,6	168	20,9	8,3
3 ª Classe	75	51,4	462	57,4	16,2
Totale	146	100,0	805	100,0	18,1

Tabella 5

Guardando con più cura la tabella, però, si nota che anche alla partenza ci sono più uomini in terza classe (57,4%), che non in seconda (20,9%) o in prima (21,7%).
A questo punto si può provare a dare una prima risposta (corretta): tra gli uomini, alla partenza i viaggiatori di terza classe sono il 57,4%; tra i sopravvissuti, invece, gli uomini di terza sono solo il 51,4%. In seconda classe, invece: gli uomini sono il 20,9% dei i partenti, ma il 9,6% dei sopravvissuti. Diversa ancora la situazione in prima: gli uomini sono il 21,7% dei partenti ed il 39% dei sopravvissuti.
L'ultima colonna della Tabella 5 riporta, per i maschi, la percentuale di sopravvissuti sui partenti, classe per classe. Si vede bene, adesso, che in terza i sopravvissuti sono il 16,2% dei partenti, in seconda sono l'8,3% e in prima il 32,6%.

Osservazione 2: Con quanto detto finora, si può fare riferimento alle probabilità condizionate.
Si provi a immaginare di pescare a caso un nome dall'elenco dei viaggiatori: se si pesca tra i nomi di prima classe, la probabilità di trovare il nome di un sopravvissuto è 0,326; se si pesca tra i nomi di seconda classe la probabilità di trovare il nome di un sopravvissuto è 0,083; se si pesca tra i nomi di terza classe la probabilità è 0,162. Appare così evidente, come avevamo sottolineato prima, che è molto più facile trovare il nome di un sopravvissuto in prima classe che non in terza perché le probabilità condizionate di sopravvivenza sono diverse e dipendono dalla classe del viaggiatore.

Seconda risposta *(donne):* E per le donne?
Si cominci a costruire la Tabella 6, analoga alla 5 ma relativa alle donne. Tra le sopravvissute, il 47,3% è di prima classe, il 27% è di seconda e solamente il 25,7% è di terza. Alla partenza, però, le percentuali sono molto diverse: il 35,8% delle donne viaggia in prima, il 23,1% in seconda e il 41,1% in terza.
Se poi si va a vedere l'ultima colonna della Tabella 5, che riporta, per le donne, la percentuale di sopravvissute sulle partenti, classe per classe, si vede bene che in terza le sopravvissute sono il 46,1% delle partenti, in seconda classe sono l'86,0% e in prima sono state salvate praticamente tutte le passeggere (140 su 144, pari al 97,2%).

Classe	Sopravvissute donne	Ripartizione percentuale delle sopravvissute donne	Donne alla partenza	Ripartizione percentuale delle donne alla partenza	Percentuale di sopravvissute sulle partenti
1ª Classe	140	47,3	144	35,8	97,2
2 ª Classe	80	27,0	93	23,1	86,0
3 ª Classe	76	25,7	165	41,1	46,1
Totale	296	100,0	402	100,0	73,6

Tabella 6

Anche adesso si potrebbe dire che, se si pesca a caso un nome dall'elenco delle viaggiatrici, la probabilità di trovare il nome di una sopravvissuta è 0,972, se si pesca tra i nomi di prima classe; è

0,86, se si pesca tra i nomi di seconda classe; è infine 0,461, se si pesca tra i nomi di terza classe. Anche per le donne, è dunque molto più facile trovare il nome di una sopravvissuta in prima classe che non in terza.
Osservazione 3: Anche in questo caso si vede che le probabilità di sopravvivenza sono condizionate alla classe del viaggiatore.

Terza risposta *(tutti = uomini+donne+bambini):* Alla domanda di partenza, può essere risposto anche prendendo in considerazione tutti i passeggeri complessivamente considerati, maschi e femmine, compresi i bambini *(cfr. Tabella 7).*
La domanda di partenza può essere riformulata nei seguenti modi alternativi fra loro equivalenti:

- i passeggeri delle tre classi hanno avuto le stesse opportunità di salvezza?
- la appartenenza a una classe ha modificato in meglio o in peggio le opportunità di salvezza?
- la conclusione favorevole del viaggio è dipesa dalla classe?

Se le opportunità di salvezza sono state (più o meno) eguali per tutti i passeggeri di tutte le classi, in tutte e tre le classi si deve trovare (più o meno) la stessa percentuale di sopravvissuti. Complessivamente, i sopravvissuti sono stati 499 su 1316 passeggeri, pari al 37,9%. La stessa percentuale di sopravvissuti si deve trovare in tutte tre le classi.
Per quanto riguarda la prima classe, il 37,9% di 325 è 123,7: questo è il numero atteso di sopravvissuti nella prima classe, nella ipotesi che questi passeggeri abbiano avuto le stesse opportunità di salvezza degli altri.
Per la seconda classe il 37,9% di 285 è 108,1: questo è il numero atteso di sopravvissuti in seconda, nella stessa ipotesi di indipendenza delle opportunità di salvezza dalla classe.
Analogamente, per quanto riguarda la terza classe, il 37,9% di 706 è 267,7: questo è il numero atteso di sopravvissuti in terza.
Si procede nello stesso modo al calcolo dei morti e dispersi classe per classe. Complessivamente, tra morti e dispersi ci sono stati 817 passeggeri su 1316, pari al 62,1%. La stessa percentuale di dispersi si dovrebbe trovare nelle tre classi.
I numeri attesi, così calcolati, di sopravvissuti e di morti e dispersi sono riportati in ogni casella della tabella 7, in basso a destra, in carattere corsivo.
Si vede che in prima classe i sopravvissuti sono 203, più di quanti (123,2) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. In terza classe, invece, i sopravvissuti sono 178, meno di quanti (267,7) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. Per quanto riguarda i dispersi, avviene il contrario. In prima classe i dispersi sono 122, meno di quanti (201,8) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. In terza classe, invece, i dispersi sono 528, più di quanti (438,3) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe.
Complessivamente, questi risultati permettono di affermare che effettivamente il numero di sopravvissuti, da un lato, e quello di morti e dispersi, dall'altro, sono in qualche modo collegati alla classe dei viaggiatori.

Classe dei viaggiatori	Sopravvissuti	Morti o Dispersi	Totale
1ª Classe	203 *123,2*	122 *201,8*	325
2ª Classe	118 *108,1*	167 *176,9*	285
3ª Classe	178 *267,7*	528 *438,3*	706
Totale	499	817	1316

Tabella 7

Osservazione 4: Si provi a generalizzare i ragionamenti fatti a riguardo dei dati della tabella 7 riguardo al calcolo delle frequenze attese nell'ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. La tabella 8 è fatta come la 7, l'unica differenza è che si riferisce al caso generale di due variabili X con h modalità (h righe) e Y con k modalità (k colonne). Le frequenze osservate, riportate in ogni casella nella prima riga, sono indicate con f_{ij}; le frequenze attese (calcolate nell'ipotesi di indipendenza tra classe e esito del viaggio), riportate in ogni casella nella seconda riga, sono indicate con $\hat{f}_{ij}$. Ricordando come sono state calcolate le frequenze attese della tabella 7, nella tabella 8 risulta, in ogni casella, $\hat{f}_{ij} = T_{i.} T_{.j} / T_{..}$.

Osservazione 5: Verificare che in una tabella a doppia entrata, come la 7 o la 8:

- in ogni riga la somma delle frequenze osservate risulta eguale alla somma delle frequenze attese: $\sum_{i=1}^{h} f_{ij} = \sum_{i=1}^{h} \hat{f}_{ij} = T_{i.}$ *(i=1,2,...h)*;
- in ogni colonna la somma delle frequenze osservate risulta eguale alla somma delle frequenze attese: $\sum_{j=1}^{k} f_{ij} = \sum_{j=1}^{k} \hat{f}_{ij} = T_{.j}$ *(j=1,2,...k)*;
- il totale generale delle frequenze osservate risulta eguale al totale delle frequenze attese: $\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} f_{ij} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \hat{f}_{ij} = T_{..}$ *(i=1,2,...h; j=1,2,...k).*

Osservazione 6: Usando la tabella 7 come un'urna e prendendo in considerazione la prima casella si possono facilmente calcolare tre probabilità: quella di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe, quella di estrarre a caso il nome di un viaggiatore sopravvissuto, quella di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe sopravvissuto.

$P(I^a)$ = P(di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe) = 325/1316
$P(S)$ = P(di estrarre a caso il nome di un viaggiatore sopravvissuto) = 499/1316
$P(I^a \cap S)$ = P(di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe sopravvissuto) = 203/1316

Risulta facile verificare la non indipendenza tra i due eventi: *i)* viaggiatore di prima classe e *ii)* viaggiatore sopravvissuto:
$P(I^a) \cdot P(S) = (325/1316) \cdot (499/1316) = 0{,}09364 \neq P(I^a \cap S) = 203/1316 = 0{,}1543$

Variabile X	Variabile Y					Totale
	y_1	. . .	y_j	. . .	y_k	
x_1	f_{11} $\hat{f}_{11}$	. . .	f_{1j} $\hat{f}_{1j}$	. . .	f_{1k} $\hat{f}_{1k}$	$T_{1.}$
.	.		.		.	.
x_i	f_{i1} $\hat{f}_{i1}$	. . .	f_{ij} $\hat{f}_{ij}$	. . .	f_{ik} $\hat{f}_{ik}$	$T_{i.}$
.	.		.		.	.
x_h	f_{h1} $\hat{f}_{h1}$	. . .	f_{hj} $\hat{f}_{hj}$	. . .	f_{hk} $\hat{f}_{hk}$	$T_{h.}$
Totale	$T_{.1}$	. . .	$T_{.j}$	. . .	$T_{.k}$	$T_{..}$

Tabella 8

Osservazione 7: Per valutare le distanze tra le frequenze osservate della tabella 7 (in carattere normale) e quelle attese nella ipotesi di indipendenza tra classe e esito del viaggio (in corsivo) è possibile utilizzare anche l'indice sintetico χ^2 .
Nel caso generale della tabella 8, l'espressione dell'indice è:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2}{\hat{f}_{ij}}$$

Nel caso particolare della tabella 7, l'indice risulta:
$\chi^2 = (203\text{-}123{,}2)^2/123{,}2 + (122\text{-}201{,}8)^2/201{,}8 + (118\text{-}108{,}1)^2/108{,}1 + (167\text{-}176{,}9)^2/176{,}9 +$
$+ (178\text{-}267{,}7)^2/267{,}7 + (528\text{-}438{,}3)^2/438{,}3 = 133{,}1.$
Questo valore indica un allontanamento dalla situazione di indipendenza stocastica e, quindi, una dipendenza tra classe ed esito del viaggio.

Osservazione conclusiva: Si possono fare due ulteriori considerazioni sul risultato numerico del calcolo dell'indice χ^2.

- Il valore di χ^2 è determinato, oltre che dalla eventuale dipendenza tra i due caratteri X e Y che si vuole misurare, anche dalla numerosità totale T. Infatti, se si moltiplicano tutte le frequenze della tabella 8, e quindi anche il totale T, per una costante k>0, le proporzioni interne alla tabella rimangono invariate, ma si verifica facilmente che il nuovo indice risulta $k\chi^2$

$$\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \frac{(kf_{ij} - k\hat{f}_{ij})^2}{k\hat{f}_{ij}} = k\chi^2$$

- Per avere un indice che permetta confronti e giudizi, senza essere influenzato dal numero totale T dei casi osservati e della dimensione h x k della tabella, si utilizza un indice normalizzato $\tilde{\chi}^2$ compreso tra 0 (nel caso di indipendenza) ed 1 (nel caso di massima dipendenza, compatibile con la struttura della tabella: dimensione h x k e numerosità T).

$$0 \le \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{T \min\{(h-1);(k-1)\}} < 1 .$$

Nel caso della tabella 7, l'indice normalizzato risulta:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{133{,}1}{1316 \min\{(3-1);(2-1)\}} = \frac{133{,}1}{1316 \cdot 2} = 0{,}05 .$$

Questo valore misura l'allontanamento dalla situazione di indipendenza e indica, quindi, una certa dipendenza tra classe ed esito del viaggio.

E che sia negativa!

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi: riconoscere fenomeni riconducibili ad uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione o di previsione. Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.	Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	<u>Porsi e risolvere problemi</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare	

Contesto
Polinomi.

Il contesto è matematico e, più precisamente, riguarda i polinomi, e le equazioni polinomiali in una variabile.
Il punto essenziale è l'utilizzo di proprietà importanti delle funzioni per avere informazioni su particolari richieste. Nella soluzione del problema posto si possono seguire due procedure risolutive diverse, una di tipo esclusivamente concettuale, una di tipo grafico e dunque più pragmatica, per ottenere la stessa risposta.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Si chiede inizialmente di rispondere alla seguente domanda:
L'equazione $x^3 + \pi x^2 + 1{,}763 = 0$ può avere una soluzione negativa?
I coefficienti sono stati scelti ovviamente in modo tale da dissuadere gli studenti dal fare i calcoli, anche se è probabile che qualcuno ci provi lo stesso.
Inizia a questo punto la discussione su come si possa rispondere alla domanda. E' probabile che emergano due diverse indicazioni. Una che privilegia l'aspetto computazionale, l'altra che privilegia l'aspetto grafico. In entrambi i casi si procederà in un primo momento per tentativi, ma l'insegnante farà attenzione a sottolineare quei tentativi che si basano, anche inconsapevolmente, sul concetto di continuità.
Si analizza l'aspetto computazionale. Sicuramente si inizierà col valutare la funzione in corrispondenza di $x = 0$; qui la funzione assume chiaramente un valore positivo. Altrettanto facilmente ci si rende conto che lo stesso accade per ogni valore positivo di x. Gli studenti cominceranno allora a dare a x valori anche negativi; il primo di essi potrebbe essere $x = -1$, il valore è ancora positivo. Per $x = -4$ si trova "finalmente" un valore negativo della funzione. A questo punto non solo ci si rende conto che nell'intervallo [-4; -3] ci sarà sicuramente una soluzione, ma che non ce ne saranno altre in quanto il polinomio si mantiene negativo per ogni valore minore di -4.

Il secondo metodo, quello grafico potrebbe, un primo momento, mettere in crisi gli studenti, per la difficoltà di tracciare il grafico di una funzione polinomiale di 3° grado della quale non è noto calcolare gli zeri, se non ricorrendo di nuovo al computo di alcuni valori. L'insegnante suggerirà allora di trasformare l'equazione in un'altra equivalente, ma con un diverso significato concettuale.
La scrittura $x^3 + \pi x^2 = -1{,}763$ può essere pensata come l'intersezione di una retta di valore costante e di un polinomio di 3° grado, più semplice del precedente. L'insegnante può comunque approfittare dell'occasione per far riprendere agli studenti, a livello qualitativo, l'andamento di una funzione polinomiale, il suo comportamento per valori che tendono all'infinito, il numero massimo dei suoi zeri.
La funzione $y = x^3 + \pi x^2$, a meno della traslazione, può essere scritta $y = x^2 (x + \pi)$; essa tocca l'asse x in $x = 0$ e in $x = -\pi$. Le considerazioni sul segno fanno anche capire che la funzione si mantiene negativa per valori di $x < -\pi$, mentre è sempre positiva per tutti gli altri valori.

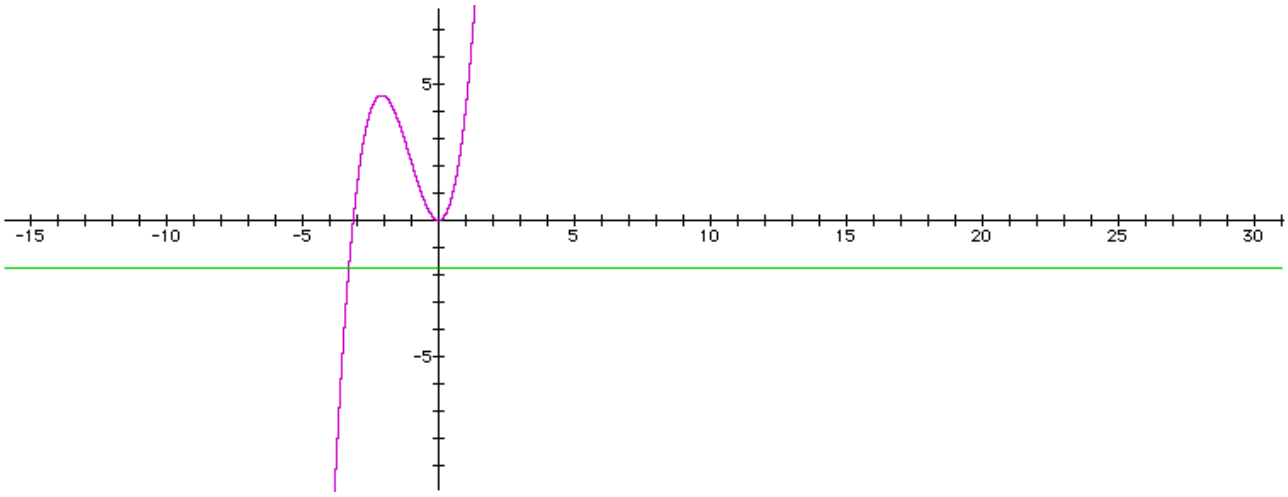


Figura 1

Il grafico fa capire che le due funzioni hanno una sola intersezione, che in questo caso è negativa, e – se disegnato con una certa accuratezza – ci da anche una stima numerica della soluzione.

Seconda fase
Si considera adesso l'equazione $x^3 + ax^2 + b = 0$ a cui si vogliano applicare i due metodi proposti nell'esempio precedente. E' interessante sottolineare subito come la nozione di continuità sia l'elemento fondamentale che consente di portare avanti con successo le due procedure, anche da un punto di vista generale.
Procedendo per casi gli studenti si renderanno conto che se a e b sono positivi, la situazione ricalca del tutto quella precedente. Gli altri casi prevedono però la considerazione di ulteriori sottocasi che portano a rendere complessa la discussione generale dell'equazione. Tuttavia si possono trovare altre condizioni: l'intersezione del polinomio con l'asse x, il fatto che per x che tende a meno infinito il polinomio ha sicuramente segno negativo e che per x tendente a più infinito il polinomio ha segno positivo. Quindi si può affermare che c'è sempre almeno una soluzione reale, di cui però è necessario discutere il segno.
Il metodo grafico visto in precedenza porta invece un po' più avanti. Scriviamo ancora l'equazione come $x^3 + ax^2 = -b$, riferendoci dunque all'intersezione delle due funzioni

$$y = -b \text{ , e } \quad y = x^3 + ax^2 = x^2(x + a).$$

La prima è una retta parallela all'asse delle ascisse, nel semipiano inferiore o superiore a seconda che b sia positivo o negativo. La seconda interseca l'asse x in $x = 0$ e in $x = -a$, è positiva per $x > -a$, e negativa per $x < -a$.
Se a è positivo si ha una grafico con lo stesso andamento di quello visto nell'esempio precedente, ovvero c'è una soluzione negativa per b positivo e una o tre soluzioni se b è negativo.

Se *a* è negativo, il grafico ha un andamento del tipo indicato in figura (in cui abbiamo posto *a* =-3).
Se *b* è positivo, c'è sicuramente una soluzione negativa, se *b* è negativo c'è solo una soluzione positiva.

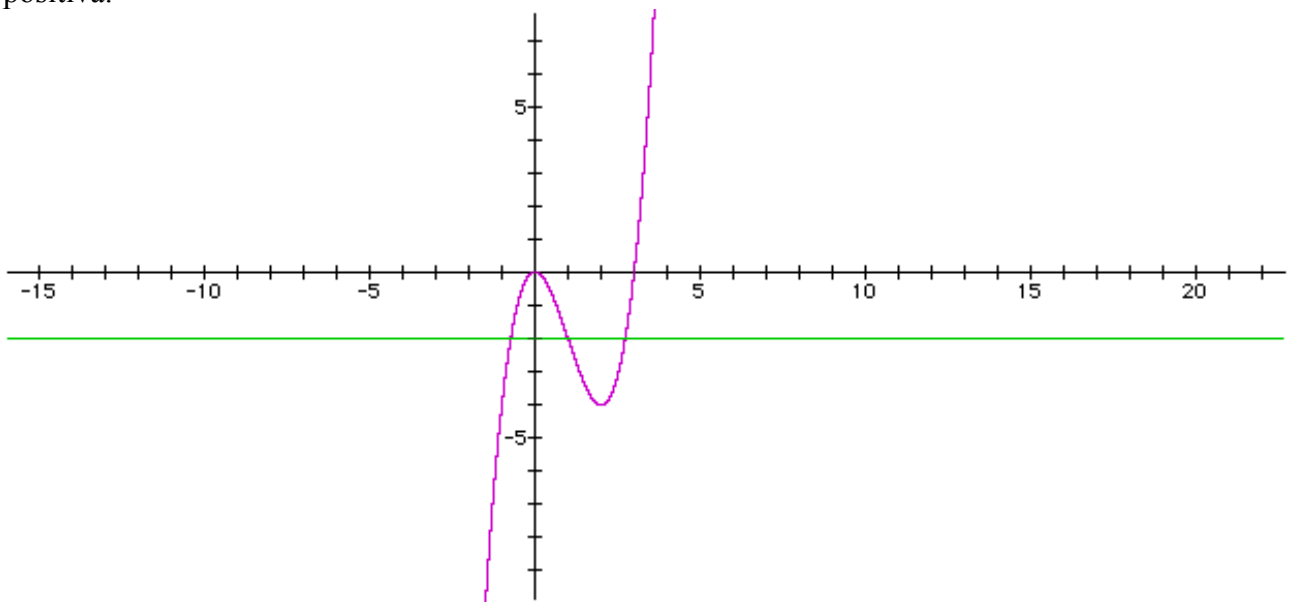


Figura 2

Possibili sviluppi

Il metodo utilizzato, che consiste nell'interpretare un'equazione come intersezione di due funzioni, portando opportunamente alcuni termini a secondo membro, può essere utilizzato vantaggiosamente in molte situazioni, anche per funzioni non polinomiali. Si provi ad esempio a determinare gli intervalli in cui si trovano gli zeri dell'equazione $2\ln(x+2) - x = 0$.
Senza riferirsi alle funzioni, ma utilizzando considerazioni teoriche in modo analogo a quanto fatto nel primo esempio, si può rispondere subito alla domanda, apparentemente mostruosa:
L'equazione $x^5 - 7\mathrm{Log}(x + 1) + \sin x - (x + 1)^{1/2} = 0$ ha radici reali? La risposta è sì (infatti per $x = 0$ il primo membro assume valore -1, mentre per $x = 9$ l'espressione è abbondantemente positiva).

La moneta è truccata!

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare criticamente le informazioni. Selezionare, produrre ed usare appropriate distribuzioni grafiche.	Il ragionamento induttivo e le basi dell'inferenza. Produrre grafici di relazioni.	Risolvere e porsi problemi Dati e previsioni Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	

Contesto
Statistica.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale cercando di dare indicazioni di consapevolezza critica verso il mondo circostante.
Giochi di sorte. Si propone alla classe un semplice problema che implica la necessità di una (forse prima) riflessione circa il modo di verificare se una congettura, o una ipotesi, è vera oppure è falsa.
"Si gioca a Testa e Croce con una moneta di cui non si conosce la provenienza...magari per farci delle scommesse. Prima di fare delle puntate, si vorrebbe sapere, con una certa attendibilità, se essa è equilibrata o meno, cioè se si può attribuire la stessa probabilità alle 2 facce, Testa o Croce, cioè se $P(T)=P(C)=1/2$ "

Descrizione dell'attività
Si propone inizialmente agli studenti di riflettere sul fatto che non sempre, quando sono di fronte a due eventi alternativi, devono pensare che tali eventi abbiano la stessa probabilità di verificarsi. Ciò perché in modo spontaneo, ma non sempre corrispondente alla realtà, gli studenti, messi a confronto con le prime considerazioni probabilistiche, sono portati a considerare equilibrata qualsiasi moneta, e quindi, ad attribuire la stessa probabilità alle due facce.
Per rendere più evidente la cosa facciamo notare che è senz'altro corretto attribuire un alto grado di fiducia, o "verità" a questa congettura, se ci troviamo fra le mani una moneta coniata dalla Zecca di Stato, mentre non sappiamo cosa si può dire se fra le mani ci è capitata una vecchia moneta o se, chi ci propone di usarla per il gioco, sia qualcuno che sospettiamo abbia truccato la moneta, ad esempio, in modo da far venire *mediamente* più Teste che Croci.
Un'altra possibile osservazione, che viene spontanea in classe, è sul significato di frequenza dell'evento: si può ragionevolmente ritenere che, anche se una moneta è equilibrata, in una serie limitata di osservazioni, ciò porti esattamente ad ottenere il 50% di Teste e 50% di Croci?
Prima conclusione che si raggiunge dalla discussione: un numero non molto grande di lanci può non essere sufficiente a scoprire, anche con monete equilibrate, se è attendibile l'ipotesi di equiprobabilità.

Ma vediamo cosa succede se facciamo crescere il numero di prove.
Un modo per "risolvere" il problema dato può essere chiamato "metodo empirico", e risulta particolarmente significativo per la sua valenza didattica.

"Metodo Empirico"
Per creare le premesse per il ragionamento induttivo, si propone ai ragazzi di usare una moneta di uso corrente, ad esempio da 2 Euro, per fare un numero di prove sempre più elevato ed osservare cosa succede della frequenza relativa di successo, ad esempio di Testa, costruendo il grafico che esprime l'andamento delle frequenze relative di successi F_i/N all'aumentare delle prove.
Sarà utile, infine, chiedersi se lo scostamento fra le Frequenze relative osservate, al variare del numero dei lanci, è lontano, in modo significativo da $p = ½$. Se ciò avviene diremo che la moneta è truccata.

1) Si invitano gli studenti a costruire una tabella delle osservazioni (*Tabella 1*), ripetendo più volte il lancio della stessa moneta. Si possono far fare, ad esempio, 60 lanci a ciascuno dei 20 studenti e poi raggruppare in un'unica tabella i dati ottenuti. Nella tabella che segue, dopo aver chiamato con N il numero complessivo dei lanci e con F_i e con F_i/N rispettivamente la frequenza cumulata e la frequenza cumulata relativa, si sono indicati gli estremi dell'intervallo con $p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1{,}5}{\sqrt{N}}$. E' noto infatti che tale intervallo comprende statisticamente più del 99% dei dati e che il centro di tale intervallo è la probabilità p richiesta. Diventa particolarmente significativo osservare dalla Tabella 1 la differenza fra la frequenza ottenuta F_i/N e la probabilità teorica indicata con p nell'ultima colonna.

Lanci complessivi	Freq. Cumulate	Frequenza relativa	Min	Max	Probabilità
N	$\mathbf{F_i}$	$\mathbf{F_i/N}$	$p-1{,}5/\sqrt{N}$	$p+1{,}5/\sqrt{N}$	**p**
60	31	0,52	0,39	0,61	0,5
120	65	0,54	0,42	0,58	0,5
180	98	0,54	0,44	0,56	0,5
240	121	0,50	0,45	0,55	0,5
300	151	0,50	0,45	0,55	0,5
360	183	0,51	0,46	0,54	0,5
420	216	0,51	0,46	0,54	0,5
480	246	0,51	0,46	0,54	0,5
540	271	0,50	0,47	0,53	0,5
600	301	0,50	0,47	0,53	0,5
660	331	0,50	0,47	0,53	0,5
720	367	0,51	0,47	0,53	0,5
780	400	0,51	0,47	0,53	0,5
840	430	0,51	0,47	0,53	0,5
900	460	0,51	0,47	0,53	0,5
960	489	0,51	0,47	0,53	0,5
1020	526	0,52	0,48	0,52	0,5
1080	561	0,52	0,48	0,52	0,5
1140	591	0,52	0,48	0,52	0,5
1200	619	0,52	0,48	0,52	0,5

Tabella 1

Si riportano i dati in un grafico su un foglio elettronico per vedere se la frequenza relativa si stringe attorno alla probabilità 0,5 in caso di moneta equilibrata.

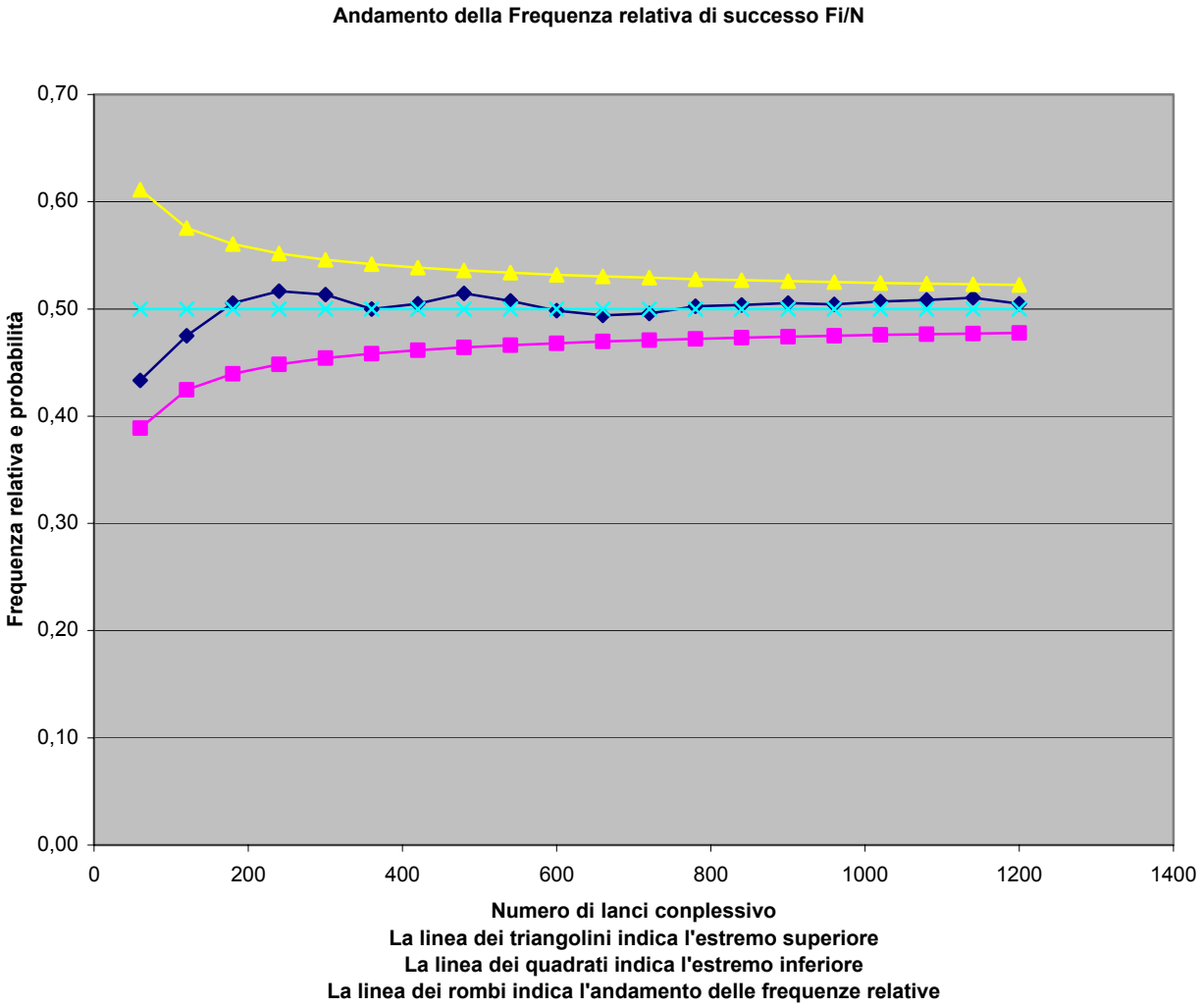


Figura 1

La verifica empirica è simulata, con i limiti dipendenti dalla non perfetta casualità della funzione di Excel usata, sul foglio elettronico allegato: **Lancio moneta TCA**
(Per attivare la simulazione è sufficiente inserire un qualsiasi dato nella casella gialla e premere invio). E' anche possibile effettuare la verifica realmente in classe, usando lo stesso foglio e inserendo manualmente i risultati del lancio di 60 monete e il numero dei successi ottenuti da ciascuno dei venti studenti, sostituendo così la funzione casuale che si presenta nella seconda colonna.
Il grafico mostra la convergenza "empirica" della frequenza relativa *Fi/N* dei successi alla probabilità *p*, attraverso il cosiddetto "grafico ad imbuto" che evidenzia come questa approssimazione migliori all'aumentare di *N* .
Osservazione: come è noto, per un certo valore di *N,* la distribuzione di *Fi/N* ha media *p* e varianza *p(1-p)/N*. Si può perciò delimitare una banda di oscillazione attorno a $p = 0{,}5$, visualizzata dal grafico ad imbuto, che rappresenta il valore atteso minimo e massimo delle frequenze relative. Le bande hanno ampiezza $3 \cdot \sqrt{p(1-p)/N}$ rispetto a *p* e contengono circa il 99,7% dei casi. Al cumularsi dei lanci, cioè al crescere di *N*, si vede come la frequenza relativa dei successi tende a stare nel grafico ad imbuto e ad avvicinarsi a *p*.

Osservazione (qualitativa): all'aumentare del numero di prove, aumenta la probabilità che la frequenza empirica si avvicini al valore teorico $p = 0,5$ e, quindi, aumenta la fiducia che *Fi/N* sia una "buona" stima della vera probabilità.
Naturalmente, nel caso si operi con una moneta equilibrata, si osserva che ciò è solo una verifica empirica di quanto già si sapeva: che la frequenza relativa stima bene la probabilità, al crescere di *N*.
Ma in una serie non numerosa di osservazioni, può accadere che la stima sia "lontana" da 0,5, anche in una moneta equilibrata.
Come possiamo, perciò, operando all'inverso, valutare l'attendibilità di tale congettura se non abbiamo una forte informazione iniziale sulla moneta?
Ipotesi nulla: La moneta è equilibrata $p = 0,5$
Ipotesi alternativa: La moneta non è equilibrata $p \neq 0,5$
Possiamo operare in questo modo:
Costruiamo un criterio di decisione (o Test statistico) basato sulla distribuzione Normale standardizzata dello stimatore della *Fi/N*

$$z = \frac{\frac{Fi}{N} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1 - p)}{N}}}$$

Tale variabile, nel caso in cui la moneta sia equilibrata, si distribuisce come una variabile casuale Normale standardizzata (0,1), di cui si dispone delle necessarie tavole numeriche.
Il procedimento per decidere è il seguente:

Si decide di effettuare un numero di lanci "abbastanza grande": per la ragione appena esposte la frequenza relativa tende alla probabilità p (ad es. si possono fare $N = 100$ lanci).
Si sceglie un grado di attendibilità funzionale alla decisione che vogliamo prendere; se, ad es. fissiamo una attendibilità del 95%, vuol dire che, nel caso la moneta sia equilibrata, siamo pronti ad accettare una probabilità di sbagliare il giudizio, a causa del campionamento, del 5%.
Si determina empiricamente il valore di *Fi /N* nel caso esaminato.
Si determina il valore di *z*, se p=0,5 e N=100.
Si osserva se *z* cade nell'intervallo standardizzato (−1,96 , +1,96); è noto che tale intervallo contiene il 95% circa dei valori di z, nell'ipotesi che p= 0,5 e N=100.
In conclusione:
si accetta l'ipotesi di moneta equilibrata se *z* è compreso nell'intervallo considerato;
si conclude, invece, che la moneta è truccata se *z* cade fuori dell'intervallo considerato.

Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*Tabella 2*). I simboli α e β indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata in presenza di ipotesi nulla e in presenza di ipotesi alternativa. Il grado di attendibilità $1 - \alpha = 0,95$ è stato fissato preliminarmente e così pure, ovviamente, $\alpha = 0,05$, che rappresenta la probabilità di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi nulla. Rimane indeterminata la probabilità β di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi alternativa.

Regola di decisione	***Situazione effettiva***	
	Ipotesi nulla (moneta equilibrata) $p = ½$	Ipotesi alternativa (moneta non equilibrata) $p \neq ½$
z cade nell'intervallo (–1,96, +1,96): si accetta l'ipotesi nulla	Decisione corretta $1 - \alpha = 0{,}95$	Decisione errata β
z cade fuori dell'intervallo (–1,96, +1,96): si accetta l'ipotesi alternativa	Decisione errata $\alpha = 0{,}05$	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 2

Elementi di prove di verifica

1. Bisogna essere precisi

Se abbiamo un cubo di lato $\sqrt{2}$ cm ed una sfera in esso inscritta, di quante cifre decimali esatte di $\sqrt{2}$ e di π abbiamo bisogno per esprimere il volume del solido differenza con due cifre decimali esatte ? E se volessimo 4 cifre decimali esatte per il risultato finale ?

2. In gita scolastica

Un pulmino per una gita scolastica può trasportare 36 passeggeri. Se in una scuola ci sono 1129 studenti e 53 professori, quanti pulmini sono necessari ?
E se si prendono pullman grandi da 61 posti ?
Rispondere alle stesse domande tenendo conto anche che un pullman costa i $2/3$ in più di un pulmino.

3. Al cinema dove? E con chi?

Andrea, Beppe, Carlo, Dario ed Elena vanno al cinema e si siedono in una fila di 10 poltroncine. Supponendo che altre 5 persone si siedano nella stessa fila, qual è:

- la probabilità che Andrea e Beppe siano seduti accanto?
- la probabilità che Carlo, Dario ed Elena siano seduti accanto?
- la probabilità che Carlo, Dario ed Elena siano seduti accanto con Andrea e Beppe lontani?
- la probabilità che Carlo sia seduto fra Dario ed Elena (ma non necessariamente adiacente)?

Nota: Ci si deve porre il problema di come si siedono (*a caso* oppure no?): anche questo problema può essere affrontato in più modi diversi.
E se ci si chiedesse:

- la probabilità che Andrea e Beppe siano seduti accanto ad una ragazza col maglione rosso?
- la probabilità che Andrea e Tiziana non siano seduti accanto?
- la probabilità che Dario decida di non andare al cinema?

di quali altre informazioni avremmo bisogno?

4. Chi è più la più grande ?

Se tagliamo una sfera con un piano è facile vedere che la più grande superficie ottenibile è un cerchio con centro nel centro della sfera. E se tagliamo un cubo con un piano, qual è la più grande superficie ottenibile? E' possibile determinare il numero di piastrelle quadrate (di lato 1 cm) sufficiente per ricoprire tale superficie, supponendo il cubo di lato 1 m ?

5. Serve conoscere?

Si estraggono 2 carte da un mazzo di 52. Qual è la probabilità che la seconda estratta sia una carta di Cuori?
E se si estraggono 9 carte da un mazzo di 52, qual è la probabilità che la nona carta estratta sia di Picche ?

Nota: Ci deve porre il problema della "conoscenza", oppure no, delle carte già estratte e si può affrontare il problema in modi diversi (anche derivanti dall'intuizione).

6. Euro e Dollari

Alla data del 20 febbraio 2003 un Euro vale 1,07 Dollari.

a. quanti Euro vale un dollaro?
b. Come varia il cambio Euro – Dollaro, se il Dollaro è svalutato del 10%?

7. Zeri di funzioni

Nell'intervallo [0; 1] la funzione $3x^2 - e^x + 0{,}5$ ha uno zero. Perché? Possiamo dire che ne ha un altro per $x > 1$?

8.Altezze, mediane e bisettrici.

In un triangolo ABC si tracciano l'altezza, la bisettrice e la mediana uscenti dal vertice C. Le tre rette si possono susseguire in ordini diversi, e in alcuni casi coincidere. A che tipi di triangoli danno luogo le varie configurazioni?

9. Calcio-scommesse.

Nell'ultima domenica di campionato due agenzie di scommesse davano la vittoria della Juventus sul Bologna rispettivamente 3 : 1 e 5 : 2.

a. Quali erano le probabilità di vittoria del Bologna?
b. Perché, secondo te, le due agenzie hanno dato quote diverse?

(Nel rispondere considera anche che le agenzie devono avere un margine di guadagno).

Riferimenti bibliografici

Barsanti, M.- Menghini, M. (1998), *Strategie matematiche: Problemi di analisi,* Pitagora, Bologna.

D'Amore, B. (1993), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving,* Franco Angeli, Collana "La scuola se - Progetto MA.S.E", Milano.

de Finetti, B. (1959), *Matematica Logico Induttiva*, Cremonese, Roma.

Jaglom, I.M. (1983), *Trasformazioni geometriche*: Le Isometrie, Zanichelli Bologna.

Maraschini, W. - Menghini, M. - Palma, M. (1997), *Strategie matematiche: formalizzare per risolvere,* Pitagora, Bologna,

Polya, G. (1967), *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano, 1967.

Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, (2 vol.) Feltrinelli, Milano.

Rossi, C. (1999), *La matematica dell'incertezza: didattica della probabilità e della statistica,* Zanichelli, Bologna.

Schoenfeld, A.H. (1997), *Mathematical Problem Solving,* Academic Press.

Indice

La formazione matematica nella società d'oggi G. Cosentino
Presentazione F. Arzarello, L. Ciarrapico, B.M. Dibilio

Il curricolo di matematica: ciclo secondario
Premessa
Abilità e conoscenze matematiche
Laboratorio di matematica
Indicazioni metodologiche

Attività didattiche e prove di verifica
Numeri e algoritmi
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
Secondo biennio: attività
Spazio e figure
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
Secondo biennio: attività
Relazioni e funzioni
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
prove di verifica
Secondo biennio: attività
prove di verifica
Dati e previsioni
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
prove di verifica
Secondo biennio: attività
prove di verifica
Argomentare, congetturare, dimostrare
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
prove di verifica
Secondo biennio: attività
Misurare
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
prove di verifica
Secondo biennio: attività
prove di verifica
Risolvere e porsi problemi
Introduzione ed elenco delle attività
Primo biennio: attività
Secondo biennio: attività

Commissione UMI: componenti
Seminario di Viareggio 2003: partecipanti