XXII Convegno UMI-CIIM
Ischia 15-17 novembre 2001

Matematica 2001

Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)

Il presente volume, in questa forma provvisoria, è destinato esclusivamente ai lavori del XXII Convegno UMI-CIIM. Si tratta di una prima bozza, soggetta a futuri ampliamenti ed eventuali revisioni. Si ringraziano quanti vorranno segnalare errori e suggerire modifiche (scrivere a umi@dm.unibo.it oppure direttamente ad arzarello@dm.unito.it).

Presentazione

Nel luglio 2000 il Presidente dell'Unione Matematica Italiana (UMI), prof. Carlo Sbordone, facendo seguito ad una delibera della Commissione Scientifica dell'Unione, ha insediato una Commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola elementare, media e superiore, adeguato ai mutati bisogni della società del nuovo secolo. Iniziative analoghe erano intraprese anche da associazioni di matematici in Europa e nel mondo, che avvertivano le stesse esigenze.
La Commissione è coordinata dal Presidente della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), prof. Ferdinando Arzarello, e costituita da docenti sia universitari sia della scuola. In particolare ne fanno parte i membri dell'attuale CIIM e i suoi passati Presidenti.
La Commissione ha deciso di elaborare al momento un curricolo per la scuola elementare, media e superiore, definendo le conoscenze fondamentali in matematica, indipendentemente dalla varietà dei corsi di studio di quest'ultima. E' emersa perciò l'idea della "matematica per il cittadino", cioè di un corpus di conoscenze e competenze fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.
Per ora sono stati completati i lavori relativi alla scuola elementare e alla scuola media, che costituiscono la prima parte del presente volume. È in corso di elaborazione il curricolo relativo alla scuola secondaria superiore.
Alla conclusione della prima fase dei lavori, la Commissione ha deciso di promuovere iniziative volte ad illustrare il significato delle scelte operate all'interno del curricolo. In questa prospettiva ha ritenuto che i messaggi da lanciare al mondo degli insegnanti di matematica sarebbero stati meglio compresi attraverso concrete esemplificazioni.
Perciò un gruppo di 40 esperti (ispettori, docenti universitari, insegnanti della scuola elementare e della scuola media, alcuni dei quali membri della Commissione stessa) ha lavorato per due settimane, durante un seminario residenziale svoltosi a Viareggio, alla produzione di un cospicuo numero di esempi di attività didattiche e di suggerimenti per prove di verifica, coerenti con gli obiettivi del curricolo elaborato.
Tale attività è stata realizzata nell'ambito delle finalità previste da un Protocollo d'Intesa, sottoscritto nel 1993 dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'UMI, esteso nel 1999 alla Società Italiana di Statistica, il cui scopo è una sempre maggiore qualificazione dell'insegnamento della matematica nella scuola italiana.
Il lavoro così prodotto costituisce la seconda parte del presente volume.
Le due parti, curricoli ed esempi, sono organizzate nel seguente modo.
I curricoli sono presentati separatamente per la scuola elementare e per la scuola media. Essi sono preceduti da una *premessa* comune, che individua le linee guida per l'insegnamento della matematica, e dall'indicazione delle *competenze generali e trasversali* che devono essere acquisite in matematica al termine dei due cicli di scuola considerati. L'esposizione dei curricoli proposti è completata da documenti che esprimono il punto di vista della Commissione UMI su vari aspetti, quali l'*approccio didattico*, i *contesti di apprendimento*, la *discussione matematica in classe*, la *valutazione*, il *ruolo delle tecnologie.*
La seconda parte presenta gli esempi di attività didattica e di elementi di verifica organizzandoli in relazione ai vari nuclei previsti nei curricoli; in ogni esempio è indicato il livello scolare più appropriato cui esso si riferisce. Ciò in quanto i docenti di scuola elementare e di scuola media hanno lavorato congiuntamente ai diversi filoni per quella continuità ed osmosi tra i vari gradi di scuola che deve caratterizzare un buon insegnamento.

Ischia, 15 novembre 2001

Indice

La struttura del documento

Il presente documento è suddiviso in due parti.
La prima parte contiene:

- alcune linee guida per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare e nella scuola media, suddivise in una *Premessa*, una discussione sulla *Didattica*, sui *Contenuti* e sui *Tempi dell'apprendimento* in matematica;
- le *Competenze e trasversali* e quelle *generali in matematica* che devono essere acquisite al termine dei due cicli di scuola;
- la descrizione dei quattro *Nuclei tematici* (Il numero, Lo spazio e le figure, Le relazioni, I dati e le previsioni), dove sono evidenziate le competenze specifiche disciplinari e i relativi contenuti, e dei tre *Nuclei di processo* (Argomentare e congetturare, Misurare, Risolvere e porsi problemi), descritti in termini di competenze specifiche. I nuclei sono articolati opportunamente per la scuola elementare e per la scuola media;
- i *Contesti di apprendimento*;
- una serie di allegati che comprende alcune *Indicazioni didattiche*; una riflessione sui *Contesti di apprendimento* per la matematica, sulla *Discussione matematica in classe* e sulla *Valutazione*; un *Documento sulle Nuove tecnologie*.

La seconda parte contiene esempi di *Attività didattiche* ed *Elementi di prove di verifica*, relative al curricolo riportato nella prima parte. Il materiale è organizzato in relazione ai nuclei, sia tematici sia di processo, ed è articolato per livelli scolastici (prima e seconda elementare; terza, quarta e quinta elementare; prima, seconda e terza media).

La matematica nella scuola elementare e media

1. Premessa

L'educazione matematica deve contribuire a una formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni di incertezza. Infatti, la conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. Per questo la matematica concorre, insieme con le scienze sperimentali, alla formazione di una dimensione culturale scientifica. In particolare, l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio astratto di nozioni. La formazione del curriculum scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambe sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato fin dai primi anni della scuola elementare. Dentro a competenze strumentali come contare, eseguire semplici operazioni aritmetiche sia mentalmente che per iscritto, saper leggere dati rappresentati con una tabella, un istogramma, un diagramma a torta, o un grafico, misurare una grandezza, calcolare una probabilità è infatti sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati, non ha senso senza i riferimenti ai calcoli, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, ecc., che costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della matematica traggono alimento. Per questo entrambi i tipi di competenze costituiscono obiettivi di lungo termine, alcuni dei quali potranno essere conseguiti compiutamente nella scuola superiore; la loro costruzione si deve però iniziare già nella scuola elementare e nella scuola media, realizzando una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta. Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà in particolare essere colto dagli alunni proponendo loro opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente, senza forzature e anticipazioni. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà infatti attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli scolari. D'altra parte, è importante che non si operino delle forzature, o peggio si inventi una storia inesistente, per adattare le problematiche storiche alle conoscenze degli alunni: la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata.

Con riferimento alla doppia modalità introdotta sopra, si individuano alcuni nuclei essenziali su cui costruire le competenze matematiche dell'allievo; quattro sono nuclei tematici e caratterizzano i contenuti dell'educazione matematica nella scuola elementare e media: *il numero, lo spazio e le figure, le relazioni, i dati e le previsioni.* L'insegnante dovrà cercare di svilupparli in modo coordinato, cogliendo ogni occasione di collegamenti interni e con altre discipline. Vi sono poi tre nuclei trasversali, centrati sui processi degli allievi: *misurare, argomentare e congetturare, risolvere e porsi problemi.* Il primo consente un approccio corporeo ed esperienziale alle grandezze, in collegamento con le scienze, per ricavare relazioni tra le grandezze esperite e costruire modelli di fenomeni studiati. Il secondo caratterizza le attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive e dai livelli operativi a forme di pensiero più avanzate che, nella scuola superiore, saranno coinvolte nella dimostrazione matematica, nel calcolo algebrico, nell'uso di modelli matematici in contesti vari. Il terzo offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza.

2. Didattica e contenuti

Nella scuola elementare e media la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi e motivanti, che permettano agli allievi esperienze cognitive significative e consonanti con quelle condotte in altri ambiti: scientifici, linguistici, motori, figurativi, ecc.

All'inizio della scuola elementare il bambino ha già fatto una serie di esperienze di carattere matematico – nella scuola dell'infanzia, in contesti di gioco e di vita familiare e sociale – e ha già consolidato alcune fondamentali competenze logico-matematiche. Più precisamente, verso i sei anni egli ha maturato esperienze significative relativamente alle seguenti competenze: contare oggetti e valutarne la quantità sul piano concreto; eseguire semplici operazioni sempre sul piano concreto; confrontare, ordinare, classificare, porre in relazione oggetti in rapporto a diverse proprietà (estensione, lunghezza, altezza, forma, colore,…), ricorrendo a modi più o meno sistematici; utilizzare concretamente semplici strumenti di misura; usare simboli per la registrazione; risolvere semplici problemi tratti dalla vita quotidiana e di interesse immediato; orientarsi nello spazio (sopra/sotto, avanti/indietro,…) e nel tempo (prima/dopo); localizzare persone e oggetti nello spazio; rappresentare percorsi ed eseguirli anche dietro semplici indicazioni verbali. Infine, il bambino comincia a formulare semplici ipotesi in ordine a fatti di vita quotidiana.

Occorre comunque avere ben presente che il percorso per il raggiungimento dei concetti matematici e della loro formalizzazione non è lineare, ma passa necessariamente per momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi in quanto affrontano concetti che possono costituire ostacoli per l'apprendimento o essere fonte di fraintendimenti e misconcetti. Un tipico esempio è l'introduzione dei decimali o delle frazioni. Ad esempio, nell'introdurre le moltiplicazioni con i numeri decimali gli allievi si scontrano con l'ostacolo, indotto dal modello dei naturali, che non sempre il prodotto fra due numeri decimali è maggiore dei due fattori. Analogamente, nel confronto fra numeri decimali, è bene evidenziare, per esempio, che 0,45 è minore di 0,6 (e non viceversa come alcuni allievi credono sulla base che 6 è minore di 45). Per le frazioni, il modello forte dei naturali anche qui può essere fonte di ostacoli; occorrono interventi didattici opportuni per porvi rimedio. Ad esempio, si sconsiglia di introdurre la procedura di addizione di due numeri razionali rappresentati sotto forma di frazione che fa uso della scomposizione in fattori dei denominatori: è invece opportuno insistere sul concetto di frazioni equivalenti, e far notare che, per addizionare due numeri razionali rappresentati sotto forma di frazioni, è sufficiente trasformare le due frazioni date in frazioni equivalenti, ma aventi lo stesso denominatore.

In tutti questi casi, è comunque fondamentale l'attivazione di esplorazioni cognitivamente ricche in campi di esperienza significativi per l'allievo, in sinergia con esperienze parallele condotte nei vari ambiti disciplinari; in tali attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto. La trasposizione didattica della matematica va infatti effettuata dall'insegnante nel concreto della sua classe, tenendo conto che la matematica deve essere strutturata opportunamente in *campi di problemi*, che hanno sia uno statuto epistemologico che cognitivo. Ad esempio, i problemi moltiplicativi fanno riferimento, da un lato, a un complesso di situazioni concrete in cui gli allievi compiono esperienze cognitive varie; dall'altro, corrispondono a concetti matematicamente rilevanti che gli allievi appunto, costruiscono imparando a sintetizzare quanto esperito col linguaggio aritmetico. Gli aspetti ludici possono parimenti favorire situazioni di apprendimento significative per gli allievi e contribuire all'immagine di una matematica dal volto umano.

L'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica. Per esempio, prima di imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'aritmetica, i bambini dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione, utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (il calendario lineare per risolvere problemi legati al tempo; monete o loro rappresentazioni per risolvere problemi di compravendita di beni ...). Analogamente, per le conoscenze legate allo spazio e alle figure sarà essenziale l'esplorazione dinamica in contesti vari, supportata eventualmente da opportuni software di geometria dinamica, e l'uso del linguaggio naturale su cui fondare la transizione dalle esperienze alle notazioni matematiche. In alcuni contesti, l'esposizione al linguaggio simbolico potrà anche precedere l'attività di verbalizzazione, purché essa sia funzionale alla possibilità di provocare negli alunni processi interpretativi fruttuosi in relazione alle problematiche del contesto.
In entrambi i casi l'acquisizione di un linguaggio rigoroso deve essere un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono, col supporto dell'insegnante, a partire dalle loro concrete produzione verbali, messe a confronto e opportunamente discusse nella classe.
E' quindi necessario che l'insegnante progetti e realizzi ambienti di apprendimento adeguati nei vari campi di esperienza: in tali ambienti saranno privilegiate l'attività di costruzione e di soluzione di problemi, nonché quella di matematizzazione e di modellizzazione. In questo contesto è opportuno distinguere tra esercizi, problemi, situazioni da modellizzare. I primi richiedono solo l'applicazione di regole e procedure note e codificate; nei problemi la scelta delle strategie risolutive è lasciata al solutore ed esige un pizzico di fantasia e di inventiva; nella situazione da modellizzare non è nemmeno esplicitata la formulazione delle domande per le quali si intenderebbe cercare una risposta (si parla in questo caso anche di problema aperto). La distinzione è naturalmente relativa al bagaglio di conoscenze degli allievi: ciò che è problema a una data età può diventare esercizio in età successiva. Proporre problemi e situazioni da modellizzare è un'attività indispensabile fin dai primi anni di scolarità; naturalmente si dovranno alternare momenti di posizione e di risoluzione di problemi con fasi di sistemazione e consolidamento delle conoscenze, dove anche gli esercizi hanno un ruolo importante per l'acquisizione e il consolidamento dei principali automatismi di calcolo e di ragionamento. E' comunque cruciale che l'insegnante utilizzi problemi e situazioni da modellizzare al fine di mobilitare le risorse intellettuali degli allievi, anche al di fuori delle competenze strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla loro formazione generale.
Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza e nel supporto alla comprensione del nesso tra idee matematiche e cultura, assumono i contesti ludici e gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili (ad es., il compasso o il righello), fino agli strumenti tecnologici più complessi (tipicamente il computer o le calcolatrici numeriche e simboliche, ma anche le 'macchine', nel senso più ampio del termine, dagli orologi al distributore di bibite, ecc.). Varie ricerche suggeriscono l'importanza di software che, nella loro interfaccia, rendono disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico.

3. Didattica e tempi dell'apprendimento

Il conseguimento delle competenze e conoscenze sopra elencate richiede tempo e partecipazione attiva degli allievi al progetto formativo. I ritmi dell'azione di insegnamento-apprendimento devono essere adeguati alle reali esigenze degli allievi e non possono essere dettati da programmi caratterizzati da un'eccessiva segmentazione dei contenuti o da moduli che presuppongano improbabili percorsi quasi indipendenti fra loro. In altri termini, la progettazione dell'insegnante va condotta secondo una logica di una didattica lunga, attenta a garantire agli allievi possibilità di costruzioni di significato per gli oggetti di insegnamento-apprendimento.

Competenze trasversali

Collocare nel tempo e nello spazio

Avere consapevolezza della dimensione storica e della collocazione spaziale di eventi considerati.

Comunicare

Individuare forme e strumenti di espressione orale, scritta, grafica o iconica per trasmettere un messaggio.

Cogliere i significati di un messaggio ricevuto

Costruire ragionamenti

Organizzare il proprio pensiero in modo logico e consequenziale. Esplicitare il proprio pensiero attraverso esemplificazioni, argomentazioni e dimostrazioni

Formulare ipotesi e congetture

Intuire gli sviluppi di processi analizzati e di azioni intraprese

Generalizzare

Individuare regolarità e proprietà in contesti diversi. Astrarre caratteristiche generali e trasferirle in contesti nuovi

Inventare

Costruire ‘oggetti’ anche simbolici rispondenti a determinate proprietà.

Porre in relazione

Stabilire legami tra fatti, dati, termini.

Porre problemi e progettare possibili soluzioni

Riconoscere situazioni problematiche. Stabilire le strategie e le risorse necessarie per la loro soluzione.

Rappresentare

Scegliere forme di presentazione simbolica per rendere evidenti relazioni esistenti tra fatti, dati, termini. Utilizzare forme diverse di rappresentazione, acquisendo capacità di passaggio dall'una all'altra.

Competenze matematiche nei vari nuclei:

Il numero

In situazioni varie, significative e problematiche, relative alla vita di tutti i giorni, alla matematica e agli altri ambiti disciplinari:

- comprendere il significato dei numeri, i modi per rappresentarli e il significato della notazione posizionale
- comprendere il significato delle operazioni
- operare tra numeri in modo consapevole sia mentalmente, sia per iscritto, sia con strumenti
- usare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi tratti dal mondo reale o interni alla matematica

Lo spazio e le figure

In contesti diversi di indagine e di osservazione:

- esplorare, descrivere e rappresentare lo spazio
- riconoscere e descrivere le principali figure piane e solide
- utilizzare le trasformazioni geometriche per operare su figure
- determinare misure di grandezze geometriche
- usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica

Le relazioni

In vari contesti matematici e sperimentali:

- individuare relazioni tra elementi e rappresentarle
- classificare e ordinare in base a determinate proprietà
- utilizzare lettere e formule per generalizzare o per astrarre
- riconoscere, utilizzare semplici funzioni e rappresentarle
- utilizzare variabili, funzioni, equazioni per risolvere problemi

I dati e le previsioni

In situazioni varie, relative alla vita di tutti i giorni e agli altri ambiti disciplinari:

- organizzare una ricerca
- interpretare dati usando i metodi statistici
- effettuare valutazioni di probabilità di eventi
- risolvere semplici situazioni problematiche che riguardano eventi
- sviluppare e valutare inferenze, previsioni ed argomentazioni basate su dati

Argomentare e congetturare

In contesti diversi, sperimentali, linguistici e matematici:

- osservare, individuare e descrivere regolarità
- produrre congetture, testarle, validare le congetture prodotte
- riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l’importanza delle definizioni che le descrivono

- giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni

Misurare

In contesti interni ed esterni alla matematica, con particolare riferimento alle scienze sperimentali:

- misurare grandezze e rappresentare le loro misure
- stimare misure
- risolvere problemi e modellizzare fatti e fenomeni partendo da dati di misura

Risolvere e porsi problemi

In diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a campi di esperienza scolastici e non:

- riconoscere e rappresentare situazioni problematiche
- impostare, discutere e comunicare strategie di risoluzione
- risolvere problemi posti da altri
- porsi e risolvere problemi

SCUOLA ELEMENTARE

Il numero

-

1° - 2° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• Contare sia in senso progressivo che regressivo • Contare oggetti e confrontare raggruppamenti di oggetti • Confrontare e ordinare numeri, sviluppando il senso della loro grandezza relativa; collocare numeri sulla retta • Leggere e scrivere numeri in base dieci • Comprendere e usare consapevolmente i numeri nelle situazioni quotidiane in cui sono coinvolte grandezze e misure (lunghezze, pesi, costi, ecc.) • Esplorare e risolvere situazioni problematiche che richiedono addizioni e sottrazioni, individuando le operazioni adatte a risolvere il problema; comprendere il significato delle operazioni • Verbalizzare le strategie risolutive e usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle • Collegare le operazioni (addizione e sottrazione) tra numeri ad operazioni tra grandezze (lunghezze, pesi, costi, ecc.) • Calcolare il risultato di semplici addizioni e sottrazioni, usando metodi e strumenti diversi in situazioni concrete • Eseguire semplici calcoli mentali con addizioni e sottrazioni • Eseguire semplici operazioni del tipo: doppio/metà,	• Numeri naturali • Rappresentazione dei numeri naturali in base dieci • Addizione e sottrazione tra numeri naturali

triplo/un terzo	

Nota.
Si suggerisce di non introdurre i numeri e le loro operazioni ricorrendo alla teoria degli insiemi, ma partendo dalla realtà concreta degli allievi.

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• Esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali • Verbalizzare le strategie scelte per la risoluzione dei problemi e usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle • Calcolare il risultato di semplici moltiplicazioni e divisioni • Eseguire semplici calcoli mentali con moltiplicazioni e divisioni, utilizzando le tabelline e le proprietà delle operazioni • Riconoscere e costruire relazioni tra numeri naturali (multipli, divisori) • Comprendere i significati delle frazioni (parti di un tutto unità, parti di una collezione, operatori tra grandezze) • Riconoscere scritture diverse (frazione decimale, numero decimale) dello stesso numero, dando particolare rilievo alla notazione con la virgola • Comprendere il significato e l'uso dello zero e della virgola • Comprendere il significato del valore posizionale delle cifre nel numero naturale e nel numero decimale • Confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi • Attraverso applicazioni in contesti conosciuti, comprendere il significato dei numeri interi (positivi, nulli, negativi) • Rappresentare i numeri naturali, i decimali e gli interi sulla retta • Eseguire addizioni e sottrazioni tra interi avvalendosi della rappresentazione sulla retta • Riconoscere le differenze tra diversi sistemi di numerazione (es. additivo, posizionale); utilizzare i sistemi numerici necessari per esprimere misure di tempo e di angoli • Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni con padronanza degli algoritmi, usando metodi e strumenti	• Moltiplicazione e divisione tra numeri naturali • Proprietà dei numeri. Il numero zero e il numero uno • Numeri decimali, frazioni • Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali • Operazioni tra numeri decimali • Numeri interi • Addizione e sottrazione tra numeri interi • Proprietà delle operazioni • Composizione di operazioni e significato delle parentesi

diversi (calcolo mentale, carta e matita, abaco, calcolatrici, …); controllare la correttezza del calcolo, stimando l’ordine di grandezza • Costruire e rappresentare semplici sequenze di operazioni note tra naturali • Modellizzare e risolvere situazioni problematiche in campi diversi di esperienza con il ricorso a numeri e operazioni in notazioni diverse (es. percentuali)	

Aspetti storici connessi:
la scrittura dei numeri nel passato: origine e diffusione dei numeri indo-arabi; evoluzione della forma delle cifre, dalle cifre arabe a quelle attuali; sistemi di scrittura non posizionali: le notazioni egizie e i numeri romani

Nota.
Si sconsiglia di affrontare in questi tre anni le operazioni e le espressioni con le frazioni. E’ bene, infatti, che i bambini imparino a comprenderne il significato piuttosto che acquisire mere abilità operative.
A questo livello scolastico, il linguaggio degli insiemi può essere un comodo strumento per esprimere in modo sintetico situazioni e per risolvere problemi.

Lo spazio e le figure

1° - 2° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori, …) • Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa • Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma e uso • Progettare e costruire oggetti con forme semplici	• Collocazione di oggetti in un ambiente • Mappe, piantine e orientamento • Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo…)

Nota.
Si consiglia di evitare le definizioni a priori delle figure geometriche

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche • Individuare gli elementi significativi di una figura (lato, angolo, altezza…) • Individuare simmetrie in oggetti e figure date; realizzarle e rappresentarle col disegno • Effettuare traslazioni e rotazioni (movimenti rigidi) di oggetti e figure • Usare in maniera operativa, in contesti diversi, il concetto di angolo (anche mediante rotazioni) • Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche • Riconoscere figure equiscomponibili e usare il concetto di equiscomponibilità per la determinazione di aree e di volumi in casi semplici, senza utilizzare troppe formule • Calcolare perimetri, aree e volumi delle più semplici figure geometriche • Utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti e figure	• Le principali figure del piano e dello spazio • I principali enti geometrici • Simmetrie, traslazioni, rotazioni • Gli angoli e la loro ampiezza • Rette incidenti, parallele, perpendicolari • Uguaglianza tra figure • Scomposizione e ricomposizione di poligoni • Semplici scomposizioni di figure spaziali • Equivalenza di figure • Unità di misura di lunghezze, aree e volumi • Perimetro di poligoni • Area di semplici poligoni • Volume di semplici solidi • Sistema di riferimento cartesiano

Nota.
A fianco di strumenti usati tradizionalmente (riga, squadra, compasso, …), si consiglia di utilizzare anche software di geometria dinamica
Si eviti di fare ricorso a formule di aree di poligoni complessi attraverso l'uso dei numeri fissi.
Si sconsiglia di fare imparare a memoria agli allievi le formule inverse, favorendo invece lo sviluppo di strategie per ricavarle.

Le relazioni

1° - 2° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• In situazioni concrete, classificare oggetti, figure, numeri in base a una data proprietà e, viceversa; indicare una proprietà che spieghi una data classificazione • In situazioni concrete, ordinare elementi in base ad un	• Relazioni (equivalenze, ordinamenti) e prime loro rappresentazioni • Semplici relazioni tra numeri

criterio assegnato e riconoscere ordinamenti dati • Scoprire semplici relazioni tra numeri, a partire da esperienze concrete • Utilizzare semplici rappresentazioni per esprimere relazioni	naturali

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche	**Contenuti**
• Individuare, descrivere e costruire, in contesti vari, relazioni significative • Rappresentare relazioni tra oggetti, figure, dati numerici • Classificare oggetti, figure, numeri in base a due o più proprietà e realizzare adeguate rappresentazioni delle stesse classificazioni • Sapere passare da una rappresentazione all'altra • Ordinare elementi di un insieme numerico in base ad un criterio	• Relazioni e loro rappresentazioni (tabelle, frecce, piano cartesiano) • Rappresentazioni di insiemi e relazioni con diagrammi di vario tipo • Equivalenza, ordinamenti

I dati e le previsioni

1° - 2° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• Raccogliere dati su se stessi e sul mondo circostante e organizzarli in base alle loro caratteristiche • Classificare dati e oggetti • Rappresentare i dati raccolti • Fare osservazioni su un insieme di dati • Identificare la modalità più frequente	• Il collettivo statistico e suoi elementi • Semplici tabelle di frequenze • Semplici rappresentazioni grafiche • Confronti di frequenze

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche	Contenuti
• Raccogliere dati mediante osservazioni e questionari • Classificare i dati • Rappresentare i dati con tabelle e grafici • Osservare e descrivere un grafico, usando: moda, mediana e media aritmetica • Confrontare fra loro modi diversi di rappresentare gli stessi dati • In situazioni concrete, riconoscere eventi certi, possibili, impossibili • In situazioni concrete, riconoscere eventi equiprobabili, più probabili, meno probabili	• Caratteri qualitativi e caratteri quantitativi • Diagrammi di vario tipo • Moda, mediana, media aritmetica • Evento certo, possibile, impossibile • Valutazione di probabilità in casi elementari

Aspetti storici connessi:
Questioni statistiche nel passato (ad es: Le prime tavole statistiche sulla natalità e mortalità, battesimi ed epidemie, nell'Inghilterra del 1600)
Questioni probabilistiche nel passato (ad es. Gli eventi incerti e le predizioni al tempo dei Greci e di popoli antichi)

Argomentare e congetturare

Competenze specifiche

1° - 2° anno

Competenze specifiche
• Individuare e descrivere regolarità in semplici contesti concreti • Produrre semplici congetture • Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche
• Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l'osservazione • Produrre semplici congetture • Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari • Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi • Descrivere oggetti matematici anche in modo carente o sovrabbondante, con riferimento alle caratteristiche ed alle proprietà osservate • Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni

Misurare

Competenze specifiche

1° - 2° anno

Competenze specifiche
• Osservare oggetti e fenomeni individuando in essi alcune grandezze misurabili; compiere confronti diretti e indiretti in relazione alle grandezze individuate; ordinare grandezze • Effettuare misure per conteggio di grandezze discrete (ad es: conteggio di elementi di classificazioni prodotte, valori monetari, …) • Effettuare misure di grandezze continue con oggetti e strumenti (ad es: una tazza, un bastoncino, il metro, la bilancia, l'orologio, …) • Esprimere le misure effettuate utilizzando le unità di misura scelte e rappresentarle adeguatamente

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche
• Analizzare oggetti e fenomeni individuando in essi grandezze misurabili • Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misura convenzionali • Passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere e usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es, 250 g = _ di kg)

- Stimare misure in semplici casi, anche attraverso strategie di calcolo mentale e di calcolo approssimato
- Rappresentare graficamente misure di grandezze
- Risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative)
- Mettere in relazione misure di due grandezze (ad es. statura e lunghezza dei piedi)

Nota
Si eviterà di fare apprendere le relazioni tra le unità campione nei sistemi di misura utilizzati in modo meccanico e ripetitivo, sganciato da processi operativi concreti in contesti significativi

Risolvere e porsi problemi

1° - 2° anno

Competenze specifiche

- Individuare l'obiettivo da raggiungere sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere
- Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, infine anche simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema
- Individuare e collegare le informazioni utili alla soluzione, ricavandole dal testo o dal contesto della situazione problematica
- Concatenare le azioni necessarie alla soluzione (azioni concrete, disegni, calcoli) in un processo risolutivo
- Esporre in modo chiaro con parole, disegni, schemi, grafici, ecc. il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti.

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche

- Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere
- Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la

risoluzione del problema

- Individuare le risorse necessarie per raggiungere l’obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema
- Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori
- Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, …) , concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema
- Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all’obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate
- Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti.

Nota

A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza. Affinché il porre e risolvere problemi sia effettivamente utile a mobilitare risorse intellettuali anche al di fuori delle competenze strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla formazione generale degli allievi, è necessario che quelli proposti siano autentici problemi per gli allievi e non semplici esercizi a carattere ripetitivo.

Le competenze degli alunni, soprattutto per quanto riguarda i problemi, difficilmente possono essere conseguite in tempi medio-brevi. Per tale motivo, tutti gli obiettivi elencati per la prima e la seconda classe devono essere considerati caratterizzanti anche per il ciclo successivo.

SCUOLA MEDIA

1° - 2° - 3° anno

Le competenze individuate nei diversi nuclei tematici e di processo, spesso sono competenze che si possono ripetere, pur indicando nelle diverse fasce di età, diversi livelli di operatività. D'altro lato, alcune competenze acquisite nella scuola elementare sono da considerarsi punto di partenza per acquisizioni successive.
Come detto nella premessa, il curriculum di matematica proposto è da intendersi, in un'ottica di verticalità, come un percorso continuo e progressivo. Pertanto sarà cura dell'insegnante della scuola media accertare l'acquisizione delle competenze elencate per gli anni della scuola elementare e continuare a lavorare per il loro consolidamento.

Il numero

Competenze specifiche	Contenuti
• Eseguire le quattro operazioni con i numeri interi • Elevare a potenza numeri naturali e interi; Comprendere il significato di elevamento a potenza e le proprietà di tale operazione • Scomporre in fattori primi un numero intero, anche con l'ausilio della calcolatrice • Determinare multipli e divisori di un numero intero e multipli e divisori comuni a più numeri • Leggere e scrivere numeri naturali e decimali finiti in base dieci usando la notazione polinomiale e quella scientifica • Comprendere i significati delle frazioni come rapporto e come quoziente di numeri interi • Riconoscere frazioni equivalenti; comprendere il significato dei numeri razionali • Riconoscere e usare scritture diverse per lo stesso numero razionale (decimale, frazionaria, percentuale ove possibile) • Confrontare numeri razionali rappresentandoli sulla retta • Eseguire semplici calcoli con numeri razionali usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita, calcolatrici) • Effettuare semplici sequenze di calcoli approssimati • Comprendere il significato di radice quadrata, come operazione inversa dell'elevamento al quadrato • Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi	• Operazioni con i numeri interi • Potenze di numeri naturali e interi • Numeri primi • Massimo comune divisore e minimo comune multiplo • Rapporti, percentuali e proporzioni • Numeri razionali • Operazioni tra numeri razionali • Calcolo approssimato ed errore

Aspetti storici connessi:·
Un sistema di scrittura semiposizionale: la notazione sessagesimale babilonese

Nota
Nel corso dei tre anni, gli insegnanti decideranno il momento più opportuno per introdurre le varie operazioni fra numeri interi e quelle fra numeri razionali.
Si consiglia inoltre di evitare il calcolo di lunghe e complesse espressioni numeriche, facendo presente in ogni caso che non è previsto il calcolo con lettere.

Lo spazio e le figure

Competenze specifiche	Contenuti
• Conoscere le proprietà delle figure piane e solide • Usare il metodo delle coordinate in situazioni problematiche concrete • Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare su un piano una figura solida • Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure anche ricorrendo a modelli materiali e a opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria dinamica, …) • Riconoscere figure uguali e descrivere le isometrie necessarie per portarle a coincidere • Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti • Riprodurre in scala • Calcolare perimetri, aree e volumi delle principali figure • Calcolare lunghezze di circonferenze e aree di cerchi	• Figure piane e solide • Rappresentazione piana di figure solide • Rapporto tra grandezze • Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono • Teorema di Pitagora • Traslazioni, rotazioni, simmetrie • Omotetie, similitudini • Lunghezza della circonferenza e area del cerchio • Descrizione di alcuni numeri irrazionali

Aspetti storici connessi:
La misura del raggio della Terra col metodo di Eratostene
Diversi valori di π nella geometria antica.

Nota
Si limiterà la memorizzazione di formule abituando i ragazzi a ricavare formule inverse

Le relazioni

Competenze specifiche	Contenuti
• In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze	• Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere

• Eseguire combinazioni diverse tra gli elementi di un insieme • Utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (numeriche, geometriche, fisiche, …) • Costruire, leggere, interpretare e trasformare formule • Riconoscere in fatti e fenomeni relazioni tra grandezze • Usare coordinate cartesiane, diagrammi, tabelle per rappresentare relazioni e funzioni • Risolvere problemi utilizzando equazioni e disequazioni numeriche di primo grado • Usare modelli dati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni	multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a, …) • Semplici questioni di tipo combinatorio • Grandezze direttamente e inversamente proporzionali • Funzioni: tabulazioni e grafici • Funzioni del tipo y=ax, y=a/x, $y=ax^2$ e loro rappresentazione grafica • Equazioni e disequazioni numeriche di primo grado • Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche.

I dati e le previsioni

Competenze specifiche	**Contenuti**
• Classificare dati ottenuti da misurazioni • Rappresentare e interpretare dati, anche utilizzando un foglio elettronico • Usare ed interpretare misure di centralità e dispersione • Confrontare due distribuzioni rispetto allo stesso carattere • Scegliere, in modo casuale, un elemento da un collettivo • Interpretare in termini probabilistici i risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali e virtuali (giochi, software, …) • Riconoscere eventi complementari, eventi incompatibili, eventi indipendenti • Prevedere, in semplici contesti, i possibili risultati di un esperimento e le loro probabilità	• Caratteri derivanti da misurazioni • Classificazione di dati con intervalli di ampiezza uguale o diversa • L'istogramma di frequenze • Calcolo di frequenze relative e percentuali, e loro confronti • Campione estratto da una popolazione: esempi di campioni rappresentativi e non rappresentativi • Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di semplici eventi • Media aritmetica e valore atteso

Aspetti storici connessi:
Questioni probabilistiche nel passato (ad es. I primi giochi con i dadi nella Francia del 1600)

Argomentare e congetturare

Competenze specifiche
• Descrivere proprietà di figure con termini appropriati • Individuare regolarità in fenomeni osservati • Produrre congetture • Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari • Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi • Comprendere il ruolo della definizione in matematica • Dare definizioni di semplici oggetti matematici (esempio rettangolo, numero pari, …) • Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati

Misurare

Competenze specifiche
• Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici • Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative • Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto • Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre, agli errori • Rappresentare graficamente misure di grandezze per individuare regolarità, andamenti, relazioni • Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli

Risolvere e porsi problemi

A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza. Affinché il porre e risolvere problemi sia effettivamente utile a mobilitare risorse intellettuali anche al di fuori delle competenze strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla formazione generale degli allievi, è necessario che quelli proposti siano autentici problemi per gli allievi e non semplici esercizi a carattere ripetitivo.
Le competenze degli allievi, soprattutto per quanto riguarda i problemi, difficilmente possono essere conseguiti in tempi medio-brevi. Per tale motivo, tutti gli obiettivi elencati per la scuola elementare sono presenti anche nella scuola media. Ovviamente, cambiano la natura e la complessità dei problemi.

Competenze specifiche
• Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l’obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere • Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema • Individuare le risorse necessarie per raggiungere l’obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema • Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori; • Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,…), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema • Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all’obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate • Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti • Valutare i procedimenti esaminati con riferimento alla economia di pensiero, alla semplicità di calcolo, e alla possibilità di applicarli in altre situazioni • Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad es. passando dal problema considerato ad una classe di problemi

Indicazioni didattiche

Sin dal primo anno della scuola elementare è opportuno sviluppare i concetti matematici in attività didattiche significative, in cui l'alunno possa essere attivamente coinvolto e motivato ad affrontare e risolvere problemi. Un'attività didattica può essere considerata significativa se consente l'introduzione motivata di strumenti culturali della matematica per studiare fatti e fenomeni attraverso un approccio quantitativo, se contribuisce alla costruzione dei loro significati e se dà senso al lavoro riflessivo su di essi. Lo sviluppo in classe di attività didattiche con tali caratteristiche dovrà avere come fine la costruzione delle capacità di esercitare un controllo sulla realtà secondo i modelli della razionalità scientifica.

Lo sviluppo del concetto di numero naturale va stimolato valorizzando le precedenti esperienze degli alunni nel contare e nel riconoscere e usare simboli numerici, fatte in contesti di gioco e di vita familiare e sociale. Nella costruzione del numero naturale concorrono diversi punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura, ecc.); l'attività didattica dovrà consentire agli alunni di appropriarsi di tali punti di vista, offrendo loro una varietà di modi rappresentativi per operare con i numeri naturali in contesti diversi.

Come esempio di attività didattica possiamo considerare l'uso del calendario (lineare) che consente di annotare le esperienze degli alunni, di ordinarle (usando inizialmente i numeri dei giorni del mese) e di visualizzarne la distanza nel tempo. Sul calendario si possono porre e risolvere problemi inerenti la misura di intervalli temporali, favorendo la costruzione di strategie risolutive via via più articolate e complesse (come nel caso di durate con estremi in mesi diversi). Altri esempi di attività possono riguardare la costruzione/lettura di istogrammi a crocette per analizzare quantitativamente situazioni famigliari ai bambini e l'uso di monete del sistema monetario dell'Euro (o di loro rappresentazioni iconiche) in attività di compravendita reali o simulate. In particolare tale uso può facilitare la comprensione del funzionamento del sistema di scrittura decimale-posizionale dei numeri.

Un modello rappresentativo che assume grande importanza nella costruzione delle competenze numeriche dei bambini è la linea dei numeri. Essa permette di evidenziare la struttura di base dei numeri naturali e costituisce un valido strumento per l'esecuzione di calcoli e per la percezione di alcune relazioni numeriche (8 è più vicino a 10 che a 5, 7 dista 3 da 10…). La linea dei numeri è uno dei primi contesti significativi per lo studio di regolarità numeriche e per lo sviluppo della riflessione sui numeri; in altre parole, per porre e risolvere i primi problemi interni alla matematica.

Tra gli obiettivi che si collocano verso il termine della scuola media possiamo considerare la costruzione a lungo termine del modello matematico della proporzionalità diretta. Tale costruzione dovrà essere realizzata attraverso una successione di situazioni problematiche relative ad ambiti esperienziali diversi (ad esempio: relazione tra perimetro e lato di un poligono regolare; relazione tra altezza di un oggetto e lunghezza dell'ombra di tale oggetto proiettata dal sole sul terreno; allungamento di una molla, in funzione del peso; ecc.), che consentano via via di evidenziare una struttura matematica comune adatta a descriverle e a trattarle quantitativamente.

A questo stesso livello scolare il passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali crea, in generale, molti problemi sul piano dell'apprendimento. Le situazioni didattiche progettate e gestite dagli insegnanti dovranno essere in grado di favorire il passaggio da un uso operativo delle frazioni in contesti significativi, alla esplorazione e riflessione sulle proprietà che caratterizzano le frazioni in quanto oggetto di studio, con il fine di costruire gradualmente un'idea appropriata dell'insieme numerico dei numeri razionali che esse rappresentano.

Durante la scuola elementare e la scuola media gli alunni devono operare con la misura per affrontare problemi in contesti diversi, quantificando aspetti della realtà fisica (lunghezze, masse, ecc.) o aspetti della realtà economico e sociale. Un itinerario di lavoro per la misura dovrà comprendere il confronto diretto, il confronto indiretto con campioni arbitrari e il confronto indiretto con le unità del sistema convenzionale. Le attività di misura contribuiscono a costruire il significato dei numeri decimali. Ad esempio una notazione come "2,15 m" può essere il punto di arrivo di un itinerario didattico a partire da espressioni come "2 m e 15 cm" e "215 cm", introdotte sulla base del loro significato concreto. Le attività di misura consentono inoltre di introdurre in un contesto controllabile dall'alunno altri tipi di notazione, la notazione esponenziale e quella frazionaria, per esprimere relazioni all'interno dello stesso sistema di misura (2 km =2*10^3 m; 100 g =1/10 kg; 250 g=1/4kg).

Sia nella scuola elementare che nella scuola media particolare cura e attenzione dovrà essere posta allo sviluppo di competenze coinvolte nella raccolta sistematica di informazioni quantitative, nella loro rappresentazione, sintesi e interpretazione; tutto ciò con il fine di descrivere fenomeni collettivi, o per cogliere nessi che li legano o per studiare e modellizzare la distribuzione dei dati, fino al confronto tra previsioni a priori (probabilità) e frequenze registrate.

Nella soluzione dei problemi aritmetici particolare attenzione dovrà essere posta alla costruzione della capacità di verbalizzare la strategia risolutiva e al passaggio alla sua formalizzazione mediante l'uso dei simboli "+, -, x, :", avendo cura di superare positivamente le eventuali contraddizioni che possono emergere tra la formalizzazione e la strategia risolutiva spontanea del bambino. Ad esempio nella soluzione di problemi di struttura additiva il passaggio da una strategia spontanea di completamento ad una formalizzazione tramite una espressione del tipo "27-12=15" non è immediato e richiede opportune mediazioni da parte dell'insegnante.

Le attività didattiche dovranno sviluppare la capacità di produrre ipotesi in modo argomentato (con l'uso di strumenti matematici appropriati) facendo riferimento all'esperienza e alle informazioni quantitative disponibili. La verifica delle ipotesi prodotte utilizzerà adeguati mezzi linguistici e matematici e verrà condotta con metodi diversi (fino alla costruzione di collegamenti di tipo deduttivo tra "premesse" certe e "conseguenze" ricavabili da esse e al confronto tra "modelli" e "realtà"). Come accennato nell'introduzione, la costruzione di tali competenze prepara il terreno allo sviluppo del pensiero teorico in matematica, che sarà pienamente raggiunto nella scuola secondaria superiore (dimostrazione matematica, calcolo algebrico, modelli matematici).

Conformemente con lo spirito di questi orientamenti, l'insegnamento della geometria avrà un ruolo cruciale nel costruire progressivamente una visione della matematica come sistema di strumenti e di metodi conoscitivi rivolti sia verso l'esterno (problemi e fenomeni della realtà fisica, tecnologica, ecc.) sia verso l'interno della matematica stessa (individuazione di regolarità e formulazione e verifica di congetture, fino alle soglie della dimostrazione; riflessione su problemi di rappresentazione, ecc.). In particolare, il disegno, il riconoscimento e la localizzazione di oggetti e forme e lo studio delle principali figure geometriche piane e solide e delle loro trasformazioni elementari dovranno essere collegate a situazioni problematiche in cui realizzare attività via via più impegnative di modellizzazione geometrica nel piano o nello spazio (a titolo esemplificativo si possono considerare la rappresentazione piana di situazioni spaziali o lo studio del fenomeno delle ombre del sole, o situazioni di interesse tecnologico: meccanismi articolati, ecc.). Tali situazioni dovranno consentire agli alunni di compiere esplorazioni e di osservare e scoprire regolarità, con il fine di giungere a produrre e verificare ipotesi (scritte sotto forma di enunciati) per l'interpretazione e la soluzione con strumenti geometrici del problema affrontato.

In generale, le attività didattiche dovranno essere caratterizzate metodologicamente dalla pratica della verbalizzazione, dalla produzione e dalla verifica di ipotesi argomentate (vedi indicazioni precedenti) e dal ruolo di mediazione dell'insegnante in tutte le fasi dell'attività. L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante le discussione in classe e il lavoro di gruppo.

E' consigliabile sviluppare attività nell'ambito di progetti didattici di medio-lungo periodo. I tempi medio-lunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti i bambini di compiere il consolidamento tecnico, l'approfondimento operativo e la riflessione necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze matematiche coinvolte nell’attività. L’insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, tenendo conto delle necessità della classe in cui opera.

Contesti di apprendimento

La progettazione dell'insegnante va condotta secondo una logica di una didattica lunga, attenta a garantire agli allievi possibilità di costruzioni di significato per gli oggetti di insegnamento-apprendimento. Una cura particolare va quindi posta alla scelta dei contesti in cui situare l'attività di esplorazione, di costruzione e di soluzione di problemi, di produzione di congetture ecc. La ricerca didattica in Italia e all'estero ha identificato e analizzato potenzialità e limiti di alcuni contesti (o campi di esperienza) presi da settori extramatematici in cui esercitare l'attività di matematizzazione e di modellizzazione (relativi, ad esempio, a fenomeni naturali o sociali o a prodotti della tecnologia) o da settori intramatematici (relativi, ad esempio, ai numeri o alle figure). E' opportuno che il curricolo contenga casi dei vari tipi con rimandi espliciti, per sottolineare in modo dialettico la doppia natura dei concetti e dei processi tipici della matematica, come strumenti di modellizzazione e come oggetti di riflessione. Vi sono campi di esperienza che fanno riferimento ad esperienze extrascolastiche già fortemente matematizzate nella vita di tutti i giorni. Tra questi possiamo citare:

a) il campo di esperienza degli scambi economici: attività imitative legate al banco della compravendita e attività reali di esplorazione di un supermercato finalizzate alla realizzazione di un certo progetto (ad esempio la festa della scuola), con competenze relative all'uso del sistema monetario, al confronto di prezzi, pesi e ingredienti di prodotti e all'interpretazione di testi di uso comune (le campagne pubblicitarie, gli scontrini);
b) Il campo di esperienza della temporalità esterna: riconoscimento dei periodi della giornata, dei giorni della settimana, dei mesi, delle stagioni e uso consapevole di strumenti di misura del tempo quali orologi e calendari;
c) Il campo di esperienza della rappresentazione dello spazio: mappe, disegni illusionistici, schemi di collegamento;
d) Il campo di esperienza delle ricette di cucina: esecuzione guidata e quantificazione degli ingredienti necessari alla realizzazione, con competenze legate alla misura (pesi, volumi) e alla risoluzione di problemi di proporzionalità;
e) Il campo di esperienza dei giochi tradizionali (gioco dell'oca, settimana, girotondi,…) con competenze relative ai numeri e allo spazio.
f) Il campo di esperienza delle 'macchine': ingranaggi, meccanismi, arnesi del bricolage, e oggetti dinamici della vita di tutti i giorni, che includono anche un controllo digitale, con competenze relative all'ordine in cui si verificano certi eventi (es. il distributore di bevande; il lettore dei biglietti dell'autobus), alla forma, collegata alla funzione (es. la bilancia a due piatti, le pinze, il cavatappi, il frullatore a mano, la centrifuga scola-insalata, la bicicletta), a relazioni tra numeri (i numeri di giri nel cambio della bicicletta, le composizioni di pesi nella bilancia a due piatti).

In questi casi la modellizzazione matematica svolta a scuola si pone in continuità con l'esperienza extrascolastica. L'insegnante guida la transizione da pratiche quotidiane che si svolgono prevalentemente per imitazione e con il ricorso (al più) ad una verbalizzazione orale (come, ad esempio, nel caso degli scambi economici) a pratiche di rappresentazione scritta che consentano la soluzione di problemi anche solo evocati e lo sviluppo di modi di soluzione (es. calcolo algebrico).
In altri casi, invece, le attività in campi di esperienza extramatematici conducono a modellizzazioni che si oppongono a concezioni diffuse. Possiamo citare ad esempio:

a) Il campo di esperienza delle ombre solari, fino alla modellizzazione dell'ombra come sezione di un 'cilindro' d'ombra costituito da raggi paralleli: le ombre dei corpi umani non conservano le proporzioni;
b) Il campo di esperienza della genetica fino allo studio dei caratteri ereditari;
c) Il campo di esperienza delle estrazioni (lotto e lotterie varie).

Ad esempio, per l'ombra, il modello produce ombre dei corpi umani che non conservano le proporzioni o i comportamenti a cui siamo abituati; per i caratteri ereditari, si ottengono risultati che vanno contro certe visioni fatalistiche delle malattie genetiche; per le lotterie si sfidano i preconcetti relativi ai ritardi nelle estrazioni. In questi casi, il ruolo dell'insegnante è molto più delicato in quanto l'insegnante deve essere portatore di un atteggiamento positivo nei confronti della scienza e della razionalità.

Vi sono infine campi di esperienza intramatematici, che, per la scuola elementare e media, comprendono i numeri e le operazioni, le figure e le loro trasformazioni, il piano cartesiano, i micromondi dei software di geometria dinamica. Anche se l'approccio è inizialmente sviluppato a partire da una molteplicità di esperienze e problemi extramatematici, molto presto, già dalla prima classe, gli oggetti introdotti (numeri, operazioni, figure, trasformazioni, ecc.) divengono essi stessi oggetto di riflessione e di studio. Ad esempio, si può riflettere sulla scrittura dei numeri adottata nella vita quotidiana, ricostruendo le regole della notazione posizionale; si possono cercare numeri o costruire di figure che soddisfano a condizioni date. Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza assumono gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili, l'abaco, il compasso, il righello, fino agli strumenti tecnologici più complessi (il computer o le calcolatrici numeriche). Varie ricerche suggeriscono l'importanza di software che, nella loro interfaccia, rendono disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico. Si terrà comunque presente che, nessuno strumento, per quanto raffinato, è trasparente per i concetti matematici in esso incorporati: in altre parole, la costruzione dei significati matematici dipende dalle pratiche sociali nelle quali avviene l'uso, pianificate e messe in opera nella classe dall'insegnante.

Sarà utile, nei vari contesti (e soprattutto in quelli intramatematici, dove è particolarmente importante recuperare il significato sociale della disciplina) introdurre gradualmente la dimensione storica, come indicato nell'introduzione.

La discussione matematica in classe

"Una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento" (Bartolini Bussi, 1995).
La metafora usata per descrivere la discussione matematica ha lo scopo di sottolineare alcuni aspetti importanti di questa attività:

- Esiste un tema che ne definisce l'obiettivo
- Esiste l'interazione tra voci (polifonia)
- Esiste un riferimento esplicito all'attività di insegnamento/apprendimento (processo di lungo termine)
- Si richiede la presenza di voci diverse tra cui, essenziale, quella dell'insegnante
- Si valorizza la presenza di voci imitanti (diversi tipi di imitazione nel contrappunto)
- Si prescinde dall'esistenza fisica di una comunità di parlanti (discussione con un interlocutore non fisicamente presente, ma rappresentato da un testo scritto).

La discussione matematica dell'intera classe orchestrata dall'insegnante garantisce, con la presenza di quest'ultima, la possibilità dell'articolazione di voci diverse da quelle degli allievi. L'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che:

- Inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe
- Influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo.

Si possono individuare per la scuola elementare e media tre grandi tipologie di discussione (con sottotipi):
A. Discussione di un problema, vista come parte dell'attività complessiva di problem solving, nei due aspetti di:
A1. Discussione di soluzione, intesa come quel processo di tutta la classe che risolve un problema dato a parole con l'eventuale supporto di immagini o oggetti.
A2. Discussione di bilancio, intesa come il processo di informazione, analisi e valutazione delle soluzioni individuali proposte ad un problema dato a parole, con l'eventuale supporto di oggetti o immagini, o nel corso di una discussione orchestrata dall'insegnante.
B. Discussione di concettualizzazione, intesa come il processo di costruzione attraverso il linguaggio e collegamenti tra esperienze già vissute e termini particolari della matematica. Essa può essere introdotta da domande dirette (che cosa è un numero, che cos'è un grafico) o indirette (perché molti di voi hanno descritto questo problema come un problema di disegno geometrico?).
C. Meta-discussione, intesa come momento della definizione dei valori e degli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico. Essa può essere introdotta da domande del tipo: "come nascono le figure?", "perché è importante generalizzare in matematica?".

In una prima approssimazione, possiamo riconoscere la discussione matematica nella parte verbale dell'attività di insegnamento/apprendimento nelle lezioni di matematica, così come questa può essere riprodotta da un registratore. E' ovvio che questa parte verbale non esaurisce l'attività in quanto non tiene conto degli aspetti gestuali, grafici, ecc., tuttavia ci offre una prospettiva rilevante sui processi che si svolgono nella classe, per la tradizionale importanza che il linguaggio riveste nell'ambiente scolastico. Dopo aver svolto in classe la discussione, con il registratore e l'annotazione diretta di particolari significativi non ricostruibili dalla sola voce, si affronta il lavoro della sbobinatura. Solo sul protocollo trascritto sarà possibile compiere gli andirivieni che consentono l'analisi accurata della discussione. L'insegnante ricostruisce il legame tra la particolare discussione e i motivi dell'attività; ricostruisce la costellazione di intenzioni che ritiene aver guidato i suoi interventi; suddivide la discussione in episodi; analizza la rete di connessioni tra gli episodi; analizza la corrispondenza tra le intenzioni, le strategie messe in opera e il processo di interazione con riferimento al ruolo dell'insegnante; analizza poi il percorso di ogni singolo allievo nella discussione, cercando gli indicatori dell'appropriazione dei motivi individuati. La lettura critica con interpretazione, di voci esterne alla classe, come ad esempio le fonti storiche, non deve avere caratteristiche monologiche, che potrebbero generare al più adesioni passive, ma è necessario che il testo sia interpretabile e interpretato, con riferimento all'esperienza già svolta dagli allievi.

Volutamente, in questo scritto, non sono citate particolari e possibili tipi di discussione, ad esempio non si parla di dimostrazioni. I motivi possono essere vari: la nostra scelta si è orientata sulla scuola elementare e media; la trattazione della dimostrazione in discussione è molto delicata, per le differenze tra argomentare e dimostrare, tra efficacia e rigore. Per tali motivi, il problema rimane quindi aperto.

La valutazione in matematica

La varietà degli apprendimenti e delle prestazioni in campo matematico (dall'esecuzione di procedure standard, alla risoluzione di problemi aperti, alla riflessione sui concetti e sulle procedure apprese) e le diverse finalità della valutazione richiedono strumenti valutativi e metodologie molto differenziate.

In particolare, occorrerà considerare:

- strumenti e metodi che servono ad accertare conoscenze ed abilità possedute dagli allievi al termine di un dato percorso formativo o di un ciclo di studi (anche ai fini della certificazione);

- strumenti e metodi che servono ad individuare le difficoltà e le potenzialità degli allievi al fine di suggerire loro cambiamenti nel modo di studiare, orientare meglio il loro lavoro, offrire loro nuove opportunità di apprendimento anche attraverso modifiche nella programmazione didattica prevista.

Nel primo caso a scadenze fissate potranno essere utilizzate (in relazione all'oggetto dell'accertamento):

- esercizi di tipo esecutivo ("calcola...") e test a risposta multipla, particolarmente adatti per controllare la padronanza di procedure e la memorizzazione di nozioni importanti (formule, definizioni, ecc.);

- problemi aperti, necessari per accertare la capacità di risolvere problemi e la padronanza operativa delle conoscenze e delle abilità necessarie;

- relazioni scritte e orali, utili per accertare se gli allievi sono in grado di esplicitare quanto hanno appreso a livello operativo e di riflettere sulle procedure che utilizzano.

Nel secondo caso è opportuno utilizzare strumenti e metodologie che permettono di individuare difficoltà, progressi e risorse degli allievi e anche loro attese ed opinioni riguardanti le prestazioni richieste; quindi è bene raccogliere elementi significativi del loro percorso individuale (elaborati in forma "grezza", registrazioni di interazioni con l'insegnante e con i compagni prima, durante e dopo la risoluzione di problemi impegnativi, ecc.). Affinché tale documentazione consenta all'insegnante una adeguata ricostruzione del processo individuale e la eventuale messa a punto di strategie di rinforzo e di recupero, gli allievi devono essere sollecitati, fino dall'inizio, ad esplicitare i loro tentativi e i processi di soluzione dei problemi. Ciò richiede che in classe si stabilisca un clima favorevole alla ricerca delle cause degli errori e al confronto dei ragionamenti seguiti, evitando di penalizzare i tentativi di risoluzione non andati a buon fine quando sono ben esplicitati.

"Incrociando" i risultati delle prove periodiche di accertamento degli apprendimenti realizzati con le informazioni raccolte nel corso delle attività svolte sarà possibile individuare interventi utili per superare talune cause di insuccesso e per utilizzare al meglio le risorse degli allievi ai fini dello sviluppo delle loro capacità di far fronte con successo ai compiti proposti.

Nell'impostare un programma di accertamento delle competenze raggiunte dagli allievi e di conoscenza delle loro difficoltà e delle loro risorse occorre vigilare su alcuni rischi insiti nei processi valutativi:

- distorsioni del percorso formativo che possono derivare dalle scelte su "cosa valutare" effettuate nella predisposizione delle prove valutative. Spesso le competenze più facili da accertare in campo matematico non sono le più importanti, d'altra parte spesso succede che le competenze che sono oggetto di accertamento diventino le più importanti per insegnanti e allievi.

- sopravvalutazione del valore predittivo delle prove valutative, soprattutto quando non accompagnate da una analisi attenta del percorso formativo degli allievi. Sia nel caso di successo che (e ancora di più) nel caso di insuccesso la qualità della prestazione degli allievi in matematica può dipendere da fattori difficilmente controllabili (attese deviate rispetto all'obiettivo che l'insegnante si prefigge, evocazione di situazioni solo superficialmente simili, condizioni di ansia, ecc.).

Le nuove tecnologie nelle attività di insegnamento-apprendimento della matematica

1. Quale uso delle nuove tecnologie?

Vi sono due aspetti legati all'uso delle nuove tecnologie che sono importanti per la prospettiva didattica: il primo riguarda l'alfabetizzazione informatica, ossia la possibilità di offrire agli studenti le conoscenze e le competenze che l'attuale società esige nell'uso delle nuove tecnologie; il secondo riguarda il ruolo che esse possono assumere nel favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento disciplinari.
Si tratta, in entrambi i casi, di aspetti delicati e importanti, dei quali la scuola, in quanto istituzione atta a garantire la formazione del futuro cittadino, deve farsi carico. L'alfabetizzazione informatica, comunque, non può gravare unicamente su una materia di studio, ma dovrà essere un obiettivo cui concorrano in misura adeguata tutti gli insegnamenti. Proprio per il fatto che l'alfabetizzazione informatica è trasversale a tutti gli insegnamenti, focalizzeremo qui l'attenzione sul ruolo che le tecnologie possono assumere per favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento di importanza strategica in campo matematico.
Gli esempi d'uso delle nuove tecnologie, che nel seguito presenteremo, sono ispirati a quadri di riferimento pedagogici che prestano particolare attenzione all'interazione sociale in classe e al ruolo di mediazione offerta dagli strumenti nei processi di insegnamento-apprendimento; tali esempi orientano verso un uso delle nuove tecnologie in cui gli studenti possano essere protagonisti nel processo di costruzione della conoscenza e i docenti siano in grado di assumere, a seconda delle esigenze, ruoli diversi (progettare l'azione didattica, garantire la condivisione del sapere in classe, suggerire linee di ricerca o strategie risolutive, coordinare le discussioni in classe, osservare il lavoro nei piccoli gruppi, aiutare lo studente nella ricerca delle informazioni, valutare il lavoro degli studenti, ….). Le indicazioni e i suggerimenti qui presenti sono necessariamente generali e non devono essere considerati prescrittivi, in quanto il dibattito sulla materia in oggetto è ancora molto aperto e i risultati delle sperimentazioni fino ad ora compiute potrebbero dipendere fortemente dal contesto in cui si è operato, in particolare dalle competenze e dalla storia personale degli insegnanti che le hanno realizzate.
L'uso delle nuove tecnologie per scopi didattici si inserisce in una tradizione consolidata come quella legata all'uso di strumenti mediatori dell'attività di insegnamento-apprendimento per meglio comprendere gli oggetti di studio (per esempio, è ampiamente riconosciuto che l'uso del compasso aiuta nell'evidenziare il ruolo strategico del centro e del raggio nella definizione della circonferenza come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro). D'altra parte il loro uso richiede competenze sia di carattere tecnico-operativo sia di carattere pedagogico, che non sempre fanno parte della formazione degli insegnanti o della loro formazione in servizio. La scuola dell'autonomia dovrà pertanto favorire negli insegnanti una crescita di professionalità nell'uso consapevole delle tecnologie attraverso percorsi di formazione specifici.
Molti insegnanti manifestano perplessità relativamente all'uso delle nuove tecnologie nella didattica: alcuni, per esempio, dichiarano la preoccupazione che tale uso possa comportare una graduale e inevitabile disattenzione alla relazione sociale e una spersonalizzazione dell'insegnamento. Le varie sperimentazioni che hanno fatto uso delle nuove tecnologie per conseguire specifici obiettivi di apprendimento-insegnamento hanno però rilevato proprio l'opposto: usando le nuove tecnologie, gli studenti sono maggiormente inclini a condividere osservazioni, esplorazioni, strategie risolutive di un problema, produzione di congetture e successiva discussione della loro validità. Naturalmente, affinché vengano minimizzati gli innegabili rischi, sempre possibili, di un uso scorretto, inadeguato o improprio delle nuove tecnologie, è necessario l'intervento costante e mirato dell'insegnante. Lungi pertanto dal prefigurarne la marginalità del

ruolo, l'uso delle nuove tecnologie richiederà per l'insegnante un impegno ancor maggiore che in passato e un ruolo ancora più strategico di quello tradizionale.
A tale riguardo è importante precisare che l'uso di un determinato sistema non comporta necessariamente un'innovazione o un miglioramento dell'azione didattica: perché ciò avvenga, è necessaria un'attenta progettazione dell'ambiente di apprendimento che coinvolge anche competenze di carattere disciplinare, storico-epistemologico e cognitivo. I cambiamenti che si possono realizzare nell'apprendimento individuale attraverso l'uso di una tecnologia sono in realtà il risultato di un mutamento più generale che l'intero ambiente di apprendimento subisce come conseguenza di tale uso dentro un'attività. Ciò enfatizza la natura sociale dello sviluppo cognitivo e della costruzione del significato e, al tempo stesso, sottolinea la necessità di considerare le relazioni che si stabiliscono nell'attività didattica tra studenti, strumenti mediatori e insegnanti. In questo quadro l'uso della tecnologia deve essere considerato in relazione all'attività di insegnamento-apprendimento nel suo complesso e non solo per lo sviluppo di specifiche abilità o per lo svolgimento di specifici compiti. Più in particolare deve essere privilegiato un uso a supporto di processi di insegnamento-apprendimento che si realizzano sul lungo periodo quali quelli necessari per lo sviluppo di conoscenze complesse e articolate come quelle coinvolte nella risoluzione di problemi, nello sviluppo di congetture e dimostrazioni, nelle attività di modellizzazione.
Osserviamo inoltre che i sistemi informatici oggi disponibili per l'attività didattica in campo matematico potranno evolversi in tempi brevi anche profondamente e nuovi sistemi, caratterizzati da funzionalità e livelli di interattività oggi non immaginabili, potranno essere progettati e resi disponibili sul mercato. Ciò impone agli insegnanti un compito costante di studio e aggiornamento sulle tecnologie di volta in volta disponibili, volto all'esame critico delle sue caratteristiche funzionali e alla identificazione e valutazione di possibili gestioni nel contesto d'uso della classe, in grado di sfruttare efficacemente tali caratteristiche ai fini didattici. I risultati delle ricerche e delle sperimentazioni realizzate in questo campo, pubblicate sulle riviste specializzate, potranno costituire un utile riferimento per lo sviluppo di tale compito.
È importante infine osservare che le nuove tecnologie possono essere di grande aiuto nella progettazione di percorsi didattici destinati ad alunni che presentano difficoltà di apprendimento. Per questi casi si ritiene opportuno il superamento di un approccio che vede l'alunno con difficoltà o con un ritardo di apprendimento come un alunno a cui "manca" qualcosa. Tale visione ha portato, negli anni passati, a concepire un uso della tecnologia principalmente orientato a cercare di porre rimedio a tale mancanza attraverso un approccio di tipo trasmissivo di abilità e competenze e una esercitazione assistita meccanica e ripetitiva. La ricerca moderna suggerisce che, anche in questi casi, la tecnologia può essere utilizzata in modo più proficuo secondo il quadro generale delineato, prestando particolare attenzione all'assistenza che l'insegnante può fornire all'alunno in difficoltà avvalendosi degli strumenti resi disponibili dalla tecnologia in uso.

2. Esempi di utilizzazione delle nuove tecnologie

Sulla base dei risultati più recenti della ricerca didattica e di molte sperimentazioni condotte nelle scuole ai diversi livelli scolastici, possiamo individuare tre tipiche modalità d'uso delle nuove tecnologie, che appaiono particolarmente appropriate per l'attività di insegnamento-apprendimento in campo matematico:

a) Uso di strumenti di calcolo e di software specifici come strumenti mediatori nella progettazione e realizzazione di ambienti di apprendimento efficaci per lo sviluppo di conoscenze articolate in campo matematico.
b) Uso delle risorse informative disponibili sulla rete Internet o su software ipermediali per lo sviluppo di ricerche specifiche su contenuti oggetto di studio o per eventuali complementi e approfondimenti degli stessi. Costruzione di prodotti ipermediali su particolari argomenti oggetto di studio.

c) Uso di risorse comunicative di rete per favorire l'interazione con compagni ed insegnanti per scopi di confronto, riflessione e condivisione di conoscenze matematiche e per lo sviluppo di una pratica didattica basata su attività di tipo collaborativo o cooperativo.

Prima di prendere in considerazione le singole modalità sopra individuate, notiamo che una stessa attività didattica può anche essere caratterizzata da un uso integrato delle tre modalità.

a). *Uso di strumenti di calcolo automatico e di software didattici specifici*
La ricerca suggerisce che l'uso di strumenti di calcolo automatico e di software didattici specifici nell'attività di insegnamento-apprendimento può:

- rendere possibili nuovi modi di dare significato ai concetti matematici oggetto di apprendimento
- strutturare nuove possibilità di interazione tra il sapere istituzionalizzato e l'esperienza e le conoscenze che spesso gli alunni possiedono su un determinato argomento oggetto di studio
- modificare le interazioni che si realizzano in classe fra insegnante e allievi e fra gli stessi allievi, in relazione al sapere in gioco nell'attività di insegnamento-apprendimento.

È bene ricordare che l'uso di tali software nell'attività di insegnamento-apprendimento, sebbene possa produrre indubbi vantaggi, comporta anche nuovi compiti e responsabilità sul piano culturale e didattico per gli insegnanti.
In particolare, sul piano didattico, è stata dimostrata l'importanza di sistemi che nella loro interfaccia rendono disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico. L'uso di questi sistemi può contribuire alla costruzione di ambienti di apprendimento in grado di offrire nuove possibilità per dare significato ai concetti matematici oggetto di studio e per sviluppare capacità nella esplorazione e risoluzione di problemi relativi al dominio di conoscenza in esame. Attualmente sono disponibili e sono stati sperimentati nella scuola di base sistemi volti allo sviluppo di competenze in diversi ambiti matematici (aritmetico, geometrico, statistico….). Gli esempi che seguono vogliono solo offrire qualche spunto per evidenziare alcune possibilità offerte da questi sistemi e non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.
Un primo esempio è costituito dall'uso delle calcolatrici numeriche. Già a partire dai primi anni della elementare tali strumenti possono essere utilizzati per esplorare regolarità numeriche, per controllare calcoli o stime di calcoli effettuati a mente. Non è vero, come molti pensano, che l'uso delle calcolatrici porti necessariamente all'impoverimento delle capacità di calcolo: esso può consentire di aumentare l'esperienza numerica e soprattutto abituare alle approssimazioni e alle stime. Attraverso un uso appropriato e intelligente in classe di tali strumenti può essere potenziato il calcolo mentale, come mezzo di controllo dell'attendibilità dei risultati, particolarmente utile nella costruzione di strategie risolutive di problemi; al tempo stesso può essere posta meno attenzione ad attività di tipo meccanico ripetitivo, oggi di scarso valore formativo, come le "operazioni in colonna" e il calcolo di espressioni complicate.
Un secondo esempio è costituito dall'uso dei fogli elettronici, sistemi di rappresentazione ed elaborazione dati che possono essere utilizzati nella scuola media anche per potenziare le possibilità di esplorazione, di osservazione e di individuazione di regolarità numeriche. Grazie ai vari ambienti che mettono a disposizione (piano dei numeri, delle formule, ambienti grafici), i fogli elettronici si rivelano anche utili per affrontare (e risolvere) problemi sotto diversi punti di vista: aritmetico, algebrico, grafico. Inoltre i fogli elettronici, rendendo disponibili funzioni per la rappresentazione e l'elaborazione automatica di vari tipi di dati, possono essere proficuamente utilizzati per esplorare le relazioni quantitative che caratterizzano situazioni relative a campi di conoscenza diversi (fisico,

biologico, economico, statistico, matematico, della vita quotidiana…) ai fini di una loro modellizzazione.
Un altro esempio è costituito dai sistemi di geometria dinamica, che consentono di utilizzare, con estrema facilità, il movimento nell'insegnamento-apprendimento della geometria euclidea; ciò consente di portare sotto il controllo della percezione l’insieme delle relazioni che definiscono una figura, potendo osservare, per esempio, le proprietà che si conservano quando gli oggetti base della figura vengono trascinati con il mouse. Tali sistemi si sono rivelati particolarmente adatti a progettare attività che favoriscono esplorazioni, osservazioni e produzione di congetture: essi possono essere utilizzati già a partire dagli ultimi anni della scuola dell’obbligo. Particolare cautela occorre invece nel loro impiego con alunni dei primi anni di scuola. Per essi, infatti, sembrano più adatte attività di manipolazione e costruzione diretta (ritagli, piegamenti, manipolazione di modelli concreti, …) di figure geometriche del piano e dello spazio.
Infine notiamo che la tecnologia, unitamente ad altre attività che portino il bambino ad affrontare con logica e sequenzialità i problemi proposti, a seguire e a comunicare istruzioni, può essere utilizzata anche per potenziare l'aspetto algoritmico, essenziale in matematica. A tale fine può risultare utile l'uso di linguaggi di programmazione specifici, con una sintassi semplice e naturale, che consenta ai bambini di comunicare con l'elaboratore impartendogli istruzioni per eseguire azioni, realizzare disegni e costruire semplici ambienti.

b). *Costruzione e uso di documenti ipermediali*
Le risorse informative disponibili sulla rete internet e attraverso prodotti multimediali specifici offrono la possibilità di accedere a conoscenze strutturate che possono essere utilizzate dagli insegnanti sia per gestire in classe, con gli alunni, attività di riflessione, approfondimento e consolidamento, sia per attività finalizzate alla propria formazione e all’auto-formazione.
È possibile individuare almeno tre modalità per gestire la costruzione e l’uso in classe di documenti ipermediali per scopi didattici.
La prima prevede di far costruire documenti ipermediali agli studenti senza dar loro alcun materiale. Questo tipo di attività è finalizzata ad acquisire informazioni su come gli studenti sono in grado di organizzare le conoscenze oggetto di studio e la rete di relazioni che caratterizza i concetti appresi.
La seconda modalità richiede agli studenti la costruzione di documenti ipermediali fornendo loro molto materiale o il riferimento a dove reperirlo o fornendo loro assistenza mentre usano motori di ricerca per accedere alle risorse informative della rete. Con questo tipo di attività è possibile studiare la capacità degli studenti di muoversi in un sistema complesso di informazioni e conoscenze e di organizzarle in strutture adeguate, in riferimento allo scopo definito dall’insegnante o negoziato durante l’attività.
La terza modalità è relativa all’utilizzo diretto in classe da parte dell’insegnante delle risorse informative disponibili sia sulla rete sia su prodotti ipermediali specifici. In questo caso si tratta di usare tali risorse per favorire e potenziare la comunicazione didattica.
L'uso di documenti ipermediali, nelle diverse modalità, può essere avviato già a partire dalla scuola di base. Le risorse informative disponibili sulla rete internet possono essere anche utilizzate dagli insegnanti per attività di formazione e auto-formazione, che possono essere costruite e realizzate sulla base di modelli profondamente diversi da quello trasmissivo, attualmente ancora dominante nella scuola italiana.
Le tecnologie telematiche possono infatti essere utilizzate a supporto di processi di formazione basati sulla documentazione e rielaborazione della propria esperienza o di esperienze realizzate da altri insegnanti e comunque accessibili tramite la rete. Le esperienze più recenti condotte dal Ministero dell’Istruzione nel campo della formazione a distanza degli insegnanti costituiscono un riferimento importante per coloro che sono interessati a utilizzare la rete come strumento di accrescimento della propria professionalità.

c) *Uso di risorse comunicative di rete*

L’uso di risorse comunicative di rete consente di inserire l’attività di risoluzione di problemi all’interno di una pratica sociale che può modificare profondamente l’atteggiamento complessivo degli alunni verso il problema, le strategie risolutive che essi impiegano e il modo in cui validano il processo risolutivo attuato.
L’attività didattica mediata dalla comunicazione di rete contribuisce infatti a uno spostamento dell’attenzione dal “fare” al “fare per comunicare”, favorendo l’assunzione di nuovi criteri quali la chiarezza e la leggibilità nella realizzazione del proprio prodotto risolutivo. In questo quadro lo studente costruisce una risoluzione che deve essere negoziata e condivisa dai propri compagni e non solo valutata dall’insegnante. La verifica sociale, a cui processo e prodotto risolutivi vengono sottoposti tramite la comunicazione di rete, offre la possibilità di mettere in discussione le strategie adottate e di modificarle in relazione ai feedback ricevuti dai propri interlocutori.
Le risorse comunicative di rete possono essere utilizzate a supporto dello sviluppo di differenti pratiche collaborative durante lo svolgimento di compiti.Tali pratiche possono essere, per esempio, lo scambio e il confronto delle risoluzioni realizzate, il commento, la critica, le osservazioni sulle soluzioni realizzate da un compagno, la collaborazione nella risoluzione di compiti complessi.
Osserviamo infine che le risorse comunicative di rete possono essere proficuamente impiegate negli scambi comunicativi tra insegnante e alunni (per esprimere dubbi, sollevare problemi, richiedere chiarimenti da parte dell’alunno e per offrire spiegazioni, indicazioni e suggerimenti da parte dell’insegnante), in attività collaborative tra classi di scuole diverse, nello stabilire relazioni con esperti e, più in generale, nella partecipazione a liste di discussione; si tratta di attività che con gradualità e attenzione, possono essere avviate già a partire dalla scuola dell’obbligo.

Commissione UMI
“Curricoli di Matematica”

Coordinatore:

Ferdinando Arzarello, Università di Torino

Elenco dei partecipanti:

Anichini Giuseppe, Università di Firenze
Arpinati Annamaria, IRRE Emilia Romagna
Bernardi Claudio, Università di Roma
Brigaglia Aldo, Università di Palermo
Brunelli Fabio, Scuola Media “Masaccio”, Firenze
Chiappini Giampaolo, IMA-CNR, Genova
Ciarrapico Lucia, Ministero Istruzione, Roma
Cotoneschi Stefania. Scuola-Città “Pestalozzi”, Firenze
D’Aprile Margherita, Università di Cosenza
Eugeni Franco, Università di Teramo
Ferri Franca, Scuola Elementare “P. da Palestrina”, Modena
Mammana Carmelo, Università di Catania
Marchi Mario, Università Cattolica di Milano
Meloni Gianna, Scuola Elementare
Ottaviani Gabriella, Università di Roma
Paola Domingo, Liceo Scientifico “Issel”, Finale Ligure (Sv)
Robutti Ornella, Università di Torino
Sbordone Carlo, Università di Napoli
Tortora Roberto, Università di Napoli
Villani Vinicio, Università di Pisa

Seminario “Viareggio 2001”

Responsabili del Progetto:
Prof. Ferdinando Arzarello (UMI)
Isp. Lucia Ciarrapico (MPI)

Direttore organizzativo:
Preside Giuseppe Ciri, Liceo Scientifico “Vallisneri”, Lucca

Elenco dei partecipanti:

Anichini Giuseppe	Università di Firenze
Archetti Adria	Istituto Comprensivo di via Puglie, Roma
Arzarello Ferdinando	Università di Torino
Barbero Riccardo	IRRE Piemonte
Betti Bianca	Scuola Elementare “Martiri per la libertà”, 4° Circolo, Carpi (Mo)
Borrelli Annalisa	ITGS “F. Galieni”, Napoli
Brunelli Fabio	Scuola Media “Masaccio”, Firenze
Bulgarelli Ernilia	Istituto Comprensivo “Turoldo”, Torino
Casella Piccinini Patrizia	Scuola Elementare “Radice”, 4° Circolo, Lucca
Chiappini Giampaolo	IMA-CNR, Genova
Ciarrapico Lucia	Ministero Istruzione, Roma
Colombi Elena	Scuola Elementare “Carducci”, 1° Circolo, Pavia
Cometto Attila	Scuola Elementare “Pirandello”, 1° Circolo, Giaveno (To)
Costa Angela	Nucleo di Ricerca Didattica, Università Cattolica di Brescia
Cotoneschi Stefania	Scuola – Città “Pestalozzi”, Firenze
D'Arnbrosio Lucia Anna	Scuola Media “G. Ferraris”, Bisceglie (Ba)
D'Angelo Giovanna	Istituto Comprensivo “M. Buonarroti”, Palermo
Di Bilio Biagio	Ministero Istruzione, Roma
Ferrante Loretta	Scuola Media di Vìa Poseidone, Roma
Ferri Franca	Scuola Elementare “P. da Palestrina”, 10° Circolo, Modena
Forrnica Domenica	Istituto Comprensivo “Capuana-Pirandello”, Catania
Garuti Rossella	IRRE Emilia Romagna
Gazzolo Teresa	Scuola Elementare di Camogli, Circolo di Recco (Ge)
Gilardi Marina	Scuola Elementare “R. D’Azeglio”, Torino
Giua Franco	IRRE Sardegna
Gíugno Carla	Scuola Elementare “L. Einaudi”, Circolo di Roncade (Tv)
Manzo Vita	IIS “U. Mursia”, Carini (Pa)
Merlo Donatella	Scuola Elementare “N. Costa”, 1° Circolo, Pinerolo (To)
Militerno Alessandro	Sovrintendenza Scolastica – Piemonte
Milone Carmela	Scuola Media “Dante Alighieri”, Catania
Ottaviani M. Gabriella	Università “La Sapienza”, Roma
Pandolfi Carmelína	Scuola Elementare “San Giovanni Bosco”, 3° Circolo, Potenza
Perelli D’Argenzio M. Pia	CIRDIS, Università di Padova
Perrini Rita	Scuola Media “L.da Vinci-D. Alighieri”, Brindisi
Robutti Ornella	Università di Torino
Scali Ezio	Scuola Elementare “G. Ungaretti” Circolo di Piossasco (To)
Sciolis Marino Maria	Istituto Comprensivo “L. Gereschi”, Pontassescghio (Pi)
Trevisani Marco	Scuola Elementare “P. Massacra”, 3° Circolo, Pavia
Ventavoli Licia	Istituto Comprensivo “G. Galilei”, Montopoli (Pi)

NUCLEO: Il numero

Introduzione

Nei programmi del lontano passato si parlava di aritmetica indicando con questa parola l'insieme di concetti, di tecniche, di problemi legati ai numeri e alle operazioni. Si è sempre dato a questa parte della matematica una forte importanza nella formazione dei bambini, tanto che la scuola primaria si è spesso identificata con la scuola del leggere, dello scrivere e del "*far di conto*".

Dai programmi del 1860 a quelli del 1955 c'era sempre stata una forte predominanza dell'aritmetica, con lo scopo di far apprendere le tecniche delle quattro operazioni e di addestrare alla soluzione di "problemi" attraverso l'acquisizione di regole e metodi. Con i programmi della scuola media del 1979 e quelli della scuola elementare del 1985 ci siamo trovati di fronte ad una svolta decisiva nella storia della scuola e della visione della matematica come disciplina scolastica.

Finalmente l'alunno è stato pensato come soggetto centrale di apprendimento, e i programmi fanno riferimento ai contenuti finalizzandoli alla educazione e allo sviluppo cognitivo dell'alunno. Lo scolaro attraverso la comprensione e l'interiorizzazione dei concetti fondamentali delle discipline, pone le basi per gli apprendimenti futuri.

È importante adesso porre l'accento sulla formazione di competenze, intese come capacità di padroneggiare, utilizzare e trasferire conoscenze. Lo scopo del lavoro scolastico è quello di contribuire alla formazione di strutture mentali che permettano il trasferimento delle competenze in campi diversi.

Si tratta adesso di individuare le conoscenze in funzione delle competenze, cioè in riferimento al loro valore formativo. Nel campo in continua evoluzione dei saperi, è quindi opportuno selezionare i nuclei fondanti, nodi essenziali delle discipline.

In questa ottica si è ravvisato nel complesso concetto di numero uno dei nuclei fondanti della matematica.

Le competenze che si costruiscono all'interno di questo nucleo sono legate ai molti approcci e significati di numero che si incontrano nell'esperienze scolastiche ed extrascolastiche, alle numerose conoscenze ed abilità relative alle operazioni aritmetiche, ma soprattutto al riconoscimento delle diverse situazioni problematiche che sono caratterizzate da considerazioni quantitative e alla conseguente scelta di strategie risolutive.

Il calcolo scritto diventa uno strumento, importante ma non prevalente. Ne segue che anche le operazioni vanno viste come una tappa necessaria per la concettualizzazione. E' pertanto fondamentale capirne il significato e la loro valenza per la soluzione di problemi. Proprio per questo, nei primi due anni di scuola elementare si fa riferimento soprattutto a competenze relative ad addizione e sottrazione, non escludendo tuttavia tutta una serie di attività preparatorie alla costruzione del significato di moltiplicazione e divisione. Negli anni successivi si fanno attività relative al calcolo soprattutto in stretta relazione con la soluzione di problemi

Non esistono documenti che ci possano testimoniare dove e quando sia nata l'idea di numero naturale e come si sia sviluppato il modo di nominare e rappresentare i numeri; è tuttavia ragionevole supporre che la creazione del concetto di numero sia stata una delle prime manifestazioni dell'intelligenza dell'uomo, provocata, ovunque ci fosse un insediamento sociale per quanto primitivo, dall'esigenza di memorizzare ed esprimere l'intuizione della quantità.

Ai nostri giorni ogni popolo dispone di un qualche, se pur rudimentale, strumento di numerazione. I numeri sono presenti nelle diverse culture, legati ai problemi della vita quotidiana. In molti casi i numeri sono strettamente legati agli oggetti che vengono contati, fino al punto di avere nomi diversi in relazione alla situazione che si vuol quantificare.

Talvolta tuttavia il vocabolario relativo è assai ridotto con conseguente limitatezza nell'esprimere relazioni; ciò rende particolarmente interessante lo studio riguardo alla genesi dei fatti numerici e oltremodo stimolante l'inserimento di attività legate alla ricostruzione storica nella scuola di base.

Alcuni testi classici (es. Ifrah, Storia universale dei numeri, Mondatori; Dantzig, Il numero linguaggio della scienza, La Nuova Italia) consentono di ripercorrere la storia dei numeri , dei modi di rappresentarli, delle operazioni e degli algoritmi offrendo materiale iconografico che può essere utilizzato nelle classi anche a partire dagli 8-9 anni.

Ad esempio osservare e commentare in classe un'antica tavola sul sistema di calcolo con l'uso delle dita può ridare dignità a pratiche empiriche di calcolo che spesso vengono evitate a scuola. Un altro esempio riguarda l'introduzione dei numeri triangolari, quadrati ecc. studiati fin dal tempo di Pitagora che favoriscono la costruzione del campo di esperienza numerico staccato da contesti emotivi della vita quotidiana.
Altri esempi riguardano la storia dell'abaco e dei primi strumenti di calcolo, nonché di antichi algoritmi per l'esecuzione di operazioni.
Questo parallelo storico sottolinea inoltre l'aspetto evolutivo del pensiero matematico contro un'opinione diffusa che vede la matematica come una disciplina essenzialmente statica.
Una notevole importanza va riconosciuta all'uso del concetto di numero nei suoi molteplici aspetti, dai conteggi, agli ordinamenti, alla misura, alla ricorsività, ecc., per lo sviluppo di conoscenze, per la crescita del sapere sociale, per l'evoluzione della cultura nelle diverse civiltà..
Nella nostra civiltà i numeri sono una componente essenziale della vita contemporanea: i numeri che appaiono sui giornali e nei telegiornali sono ancora strettamente collegati al contesto di riferimento (ad esempio nei titoli si citano numeri che evocano emozioni – la tristezza per sconfitta della propria squadra sportiva, la fluttuazione dell'euro, gli incidenti del sabato sera…). Tuttavia i numeri esistono di per sé, al di fuori del contesto in cui vengono usati, e gradualmente essi stessi diventeranno un contesto significativo per l'apprendimento.
Se la logica è quella dei tempi lunghi e della costruzione graduale e progressiva dei significati, è importante che le attività didattiche siano inserite in contesti significativi, tali da favorire la costruzione di concetti, il riconoscimento di modelli.
Tali contesti potranno essere presi da settori esterni alla matematica, come campi di esperienza relativi ad esempio a fenomeni naturali, sociali, tecnologici, ma potranno essere anche interni alla matematica e quello dei numeri e delle operazioni rappresenta un contesto cruciale perché favorisce la modellizzazione e la riflessione. Le situazioni problematiche progettate dall'insegnante, sia che abbiano come "sfondo" campi di esperienza esterni alla matematica, sia che facciano riferimento a campi di esperienza interni, devono essere scelte e costruite in modo da rappresentare per i bambini modelli significativi a cui loro possano sempre fare riferimento per riconoscere e interpretare situazioni simili in contesti diversi.
Anche se l'approccio è inizialmente quello di fare esperienze reali, legate ai problemi quotidiani dei bambini, ben presto gli oggetti introdotti (numeri e operazioni) potranno diventare essi stessi oggetto di riflessione e di studio; ad esempio si possono ricercare regolarità, si possono ricercare numeri che soddisfino a condizioni date, si può riflettere su metodi di scrittura e di rappresentazione, anche ricercando le diverse tappe di sviluppo nella storia dell'umanità.
"Tuttavia - con modalità diverse e dosaggi adeguati - contestualità e astrazione rimangono esigenze da rispettare durante tutto il percorso di istruzione".
Il suggerimento di individuare campi di esperienza significativi consente di avvicinarsi alle discipline con l'ottica di utilizzarne il linguaggio e gli strumenti che sono propri di ognuna di esse, allo scopo di interpretare la realtà. Dalla realtà stessa in tutta la sua complessità viene l'indicazione dell'approccio ai diversi concetti. Ad esempio per quanto riguarda il concetto di numero risulta superata la discussione se nei bambini compare prima l'aspetto ordinale o cardinale; infatti nelle diverse esperienze saranno presenti i differenti aspetti legati al loro significato contestualizzato (vedi ad esempio il campo di esperienza del calendario).
Sarà cura dell'insegnante che progetta il percorso didattico insieme ai colleghi, scegliere i campi di esperienza più adatti per sviluppare l'acquisizione dei concetti che di volta in volta sono indicati nel curricolo. I campi di esperienza, perciò, fanno parte della *programmazione* condivisa dei docenti e coinvolgono più discipline. È importante che le scuole possano individuare alcuni campi di esperienza significativi sui quali impiantare il proprio curricolo in matematica, ma non solo. Questo permetterà gradualmente di avvicinarsi alle discipline in modo tale da utilizzare i diversi linguaggi di esse come strumenti per interpretare la realtà.
Rispettando la complessità è possibile superare anche le mode che per anni hanno influenzato la didattica: insiemistica, calcolo multibase, …La ricerca e la scelta di strumenti didattici adeguati sarà lasciata alla progettazione dell'insegnante.

È infine opportuno notare come il numero individuato come nucleo fondante sia importante anche per lo sviluppo graduale di concetti interni alla disciplina; basti pensare alla valenza generativa del concetto di numero. Nella risoluzione di problemi ci troviamo ad un certo punto di fronte a situazioni che non possono essere risolte con i numeri naturali e con le operazioni in essi definite; sorge quindi la necessità di inventare i numeri razionali (decimali o frazioni) e così via. È opportuno che si rifletta su questi aspetti e che, ripercorrendo alcune fasi della storia della matematica, si riesca a percepire il significato di esse nella storia della cultura.

Per facilitare la lettura degli esempi di attività proposti è bene fare qualche precisazione.
Al contesto intendiamo dare la seguente accezione: un campo di esperienza che non dipende dalle convenzioni interne alla classe e che contiene significatività insita nell'esperienza stessa, che ha valenza nel processo di apprendimento / insegnamento, ma anche sociale e culturale.
Nell'indicare il curricolo non è opportuno dettagliare l'itinerario, in modo preciso, ma è bene indicare nodi concettuali e problematici.
È necessario che i campi di esperienza scelti siano coerenti con il progetto formativo della scuola, con gli obiettivi didattici degli insegnanti e con l'insieme di condizioni sociali e culturali nella quale la scuola opera.
E' auspicabile avvalersi, a tal fine, di campi di esperienza che siano riconoscibili da parte dei bambini come settori della propria esperienza, rintracciabili anche nella vita extrascolastica. All'interno dei contesti scelti si dovranno individuare attività e situazioni problematiche che, con gradualità, consentiranno al bambino di esplorare i punti di vista del numero e risolvere problemi che richiedano i significati delle operazioni aritmetiche.
Alcuni campi di esperienza, per la loro natura, si prestano ad essere efficaci contesti per l'articolazione di questo tipo di lavoro didattico.

Indice

Il calendario

Livello scolare: 1^a elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Contare sia in senso progressivo che regressivo. Contare oggetti e confrontare raggruppamenti di oggetti; Confrontare e ordinare numeri,sviluppando il senso della grandezza;collocare i numeri sulla retta. Leggere e scrivere numeri in base dieci. Esplorare e risolvere situazioni problematiche che richiedono addizioni e sottrazioni, individuando le operazioni adatte a risolvere il problema eseguire semplici calcoli mentali con addizioni e sottrazioni. Partendo da situazioni concrete note dall'allievo o proposte dall'insegnante individuare gli elementi essenziali di un problema. Selezionare le informazioni utili e prospettare una soluzione del problema. Individuare l'obiettivo da raggiungere sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere.	Numeri naturali Rappresentazione dei numeri naturali in base dieci Addizione e sottrazione tra numeri naturali	<u>Numero</u> *Il significato dello zero.* *La retta dei numeri.* Lo spazio e le figure *Spazio e sua organizzazione e rappresentazione.* Le relazioni. *Classificazione.* I dati e le previsioni *Rappresentazione dei dati.* Problemi Argomentare	Scienze: sperimentare e scoprire dimensioni temporali come la simultaneità, la successione e la durata. Utilizzo di semplici apparecchiature. Storia, geografia, studi sociali: orientarsi nel tempo a partire dalla storia e dall'esperienza personale (e del gruppo classe) Raccontare fatti ed esperienze. Intercultura.

<u>Attività proposte</u>
Attività 1 - Conteggio relativo alle presenze e/o alle assenze
Attività 2 - Conteggio e confronto dei giorni di scuola
Attività 3 – Durate temporali
Attività 4 - Il tempo meteorologico

Contesto

Il campo di esperienza del calendario della classe costituisce un esempio in tal senso, perché si configura come un ambito ricco e semanticamente rilevante di esperienze sul terreno matematico, che coinvolgono più nuclei tematici (numero, dati e previsioni, relazioni).

Le attività sul calendario hanno evidenti riferimenti anche ad altri ambiti disciplinari, per i possibili collegamenti con la storia della classe, in tal senso potrà essere considerato un approccio al documento. Si potranno registrare osservazioni dei cambiamenti stagionali in natura (stretto legame con lo sviluppo di competenze linguistiche).

In modo particolare nel rapporto con il contesto esterno del campo di esperienza (cioè l'insieme delle pratiche d'uso, delle regole, dei vincoli che esistono indipendentemente dalla conoscenza e dall'esperienza soggettiva) sono in gioco il concetto di padronanza del tempo e la modellizzazione del suo scorrere con la successione dei numeri dei giorni, delle settimane, dei mesi, delle stagioni, l'approccio alla ciclicità, l'uso di simbologie e convenzioni strettamente legate alla cultura in cui siamo inseriti.

Il calendario è dunque uno strumento fortemente matematizzato, ma affinché possa diventare un campo si esperienza significativo per i bambini, dovrà divenire la sede di raccolta e di rappresentazione delle esperienze collettive ed individuali più importanti: ad esempio potrà essere utilizzato per registrare le presenze quotidiane, gli eventi rilevanti e, gradualmente, nell'arco del primo anno, supportare le annotazioni relative all'osservazione del tempo atmosferico e alla registrazione delle temperature rilevate con il termometro.

A tal fine è consigliabile organizzarlo come cartellone murale avente in orizzontale la successione dei numeri dei giorni (inizialmente da costruire quotidianamente con i bambini) e in verticale i nomi dei bambini, con opportuni spazi per registrare gli eventi e le altre informazioni.

La successione dei numeri dei giorni costituisce una prima modellizzazione della retta dei numeri e la griglia affiancata costituisce un approccio alle tabelle a doppia entrata: entrambe rappresentano contesti di riferimento semanticamente ricchi che consentono la proposizione di attività adatte a favorire il pensiero riflessivo.

E' bene ricordare che il concetto di numero si costruisce gradualmente con una ricchezza e molteplicità di esperienze, che ha bisogno di tempi lunghi e pertanto i campi di esperienza ai quali far riferimento è necessario che siano più di uno.

Descrizione delle attività

Attività 1 - 2

L'insegnante guida il bambino nella registrazione, nel conteggio e nella rappresentazione delle presenze, è un'attività ricorsiva attuabile con modalità differenti. Alcune registrazioni e riflessioni hanno significato nell'arco di una giornata, quello delle assenze di un bambino in un arco temporale più ampio (settimana, mese) ed è importante perché permette di valorizzare aspetti individuali.

Una particolare attenzione da parte degli insegnanti deve essere posta nel creare la condizione adatta a riconoscere le situazioni problematiche nelle diverse situazioni didattiche, ad esempio attraverso la discussione in classe sarà bene che si riconosca il problema di discriminare, evidenziare e contare correttamente le caselle vuote distinguendo le vacanze di tutti dalle assenze dei singoli.

Specialmente nei primi mesi di scuola è opportuno che l'insegnante si faccia mediatore anche rispetto alla verbalizzazione e trascrizione sia della situazione problematica sia delle strategie e dell'operatività svolta dal bambino.

Il "calendario" si colloca nel primo anno della scuola di base ma è necessario tener conto che certamente non sarà la prima esperienza che il bambino ha sul numero, sarà pertanto opportuno fare una ricognizione dei saperi informali e delle esperienze pregresse del vissuto scolastico ed extra scolastico.

Sarà opportuno che ogni insegnante in riferimento alla propria situazione e al suo gruppo classe faccia le sue scelte per quanto riguarda le strategie di sviluppo delle attività proposte, ad esempio

nel preparare il primo cartellone del calendario potrà inserire l'elenco degli alunni utilizzando fotografie, simboli o nomi scritti dipendentemente dalle capacità dei bambini e dagli obiettivi didattici che si propone.
Una forte valenza delle attività proposte è da attribuire alla ricorsività e distensione nel tempo, ciò favorisce il rispetto dei ritmi di ciascuno e offre la possibilità di coniugare progressione e ricorsività nella costruzione dei concetti.
<u>Sono nodi cruciali dell'apprendimento:</u>
Uso del calendario come alfabetiere dei numeri.
Passaggio dal numero codice o etichetta (oggi è il giorno "tre" del mese di …) all'ordinale (oggi è il "terzo" giorno del mese di …") al cardinale (Luigi ha fatto 3 assenze nel mese di …).
Raggruppamento (in settimane e mesi).
Scoperta che il mese non comincia sempre di lunedì (recupero dell'unità "settimana" come raggruppamento).
Scoperta che i mesi non formano gruppi di giorni tutti uguali.
Registrazione con grafico a colonne delle assenze, e il conseguente ordinamento in base all'altezza delle colonne.
Il passaggio al numero come cardinalità e il successivo ordinamento di numeri.
Lo 0 con il significato di insieme vuoto, ad esempio quando abbiamo il caso di bambini che in un certo periodo non hanno fatto assenze.
Il confronto maggiore-minore, uguale sempre in riferimento ai giorni di assenza o presenza dei bambini, oppure al numero di bambini presenti in giorni diversi …
La relazione precede – segue, relativamente alla sequenza dei giorni della settimana, del mese…
Il passaggio alle prime operazioni aritmetiche.
L'uso di registrazioni e rappresentazioni opportune.
La ricerca di dati utilizzando lo strumento che è stato scelto per la rappresentazione.
Uso del calendario costruito, come documento storico per l'anno successivo.
<u>Strumenti:</u>
calendario convenzionale,
cartellone-calendario,
retta dei numeri,
tabella a doppia entrata
(queste ultime due sono inseriti qui appunto come strumenti e non come costruzione consapevole delle stesse, questa sarà una conquista successiva legata anche ad altre attività).

<u>Attività 3</u>
Sarà cura dell'insegnante sollecitare forme di rappresentazione delle strategie di calcolo. Le diverse forme scelte devono corrispondere al pensiero del bambino (esempio: accettare che un ragionamento per completamento additivo sia rappresentato attraverso una addizione, senza forzare la formalizzazione della sottrazione).
È opportuno che l'insegnante, almeno per il primo anno, proponga situazioni problematiche che si riferiscano a periodi interni al mese.
In questa attività i problemi proposti saranno del tipo:
Quanti giorni mancano a …
Quanti giorni sono passati da …
Sono al venerdì: che giorno era 2 giorni fa … ?
Sono al venerdì: che giorno sarà fra quattro giorni …?
<u>Nodi concettuali</u>
Nel conteggio di una durata lo scorrere *continuo* del tempo diventa una successione *discreta* di intervalli temporali (i giorni).b

Il giorno che considero come inizio della durata deve essere contato o no? Porre la questione : *quando possiamo dire che è trascorso un giorno?* Questo conduce all'approfondimento della relazione fra il continuo del tempo che scorre e il discreto dei giorni del calendario.
Verbalizzazione della strategia di conteggio.
Invenzione di forme di rappresentazione (osservare anche la gestualità).
Condivisione di opportune forme di rappresentazione.
<u>Strumenti:</u>
calendario convenzionale
cartellone-calendario
retta dei numeri
tabella a doppia entrata
(*questi ultimi due sono inseriti qui appunto come strumenti e non come costruzione consapevole delle stesse, questa sarà una conquista successiva legata anche ad altre attività).*

<u>Attività 4</u>
Tra le attività che è possibile svolgere, si indicano le seguenti:
rilevazioni meteorologiche; conteggi riferiti alle osservazioni sul tempo; di quanti gradi è salita o scesa la temperatura rilevata in due tempi successivi con il termometro.
Un aspetto interessante di questa attività è l'emergere della situazione problematica relativa al momento in cui si fanno le rilevazioni (alle ore 8,00 c'è il sole, a mezzogiorno piove: che simbolo usiamo?), il problema si risolve assumendo all'interno del gruppo una convenzione: per esempio il tempo è quello di mezzogiorno. È opportuno riferirsi alla temperatura esterna sollecitando anche l'osservazione delle temperature sotto lo zero. Ciò sarà di supporto alla costruzione della retta numerica che faccia pensare precocemente a ciò che precede lo zero (lo zero non coincide esattamente con l'inizio della retta).
<u>Sono nodi cruciali dell'apprendimento:</u>
uso di una scala numerica nella quale non sono scritti tutti i numeri
lo zero come inizio di una misura
grado della temperatura registrato come un intervallo di lunghezza
<u>Strumenti:</u>
calendario convenzionale
cartellone-calendario
termometro
retta dei numeri
tabella a doppia entrata

Caoticus

Livello scolare: 1ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Contare sia in senso progressivo che regressivo. Contare oggetti e confrontare raggruppamenti di oggetti.	Numeri naturali	Numero Relazioni. Problemi Misurare Argomentare e congetturare	Lingua italiana Storia, geografia, studi sociali

<u>Attività proposte</u>
Ricostruzione del magazzino di Caoticus
Mettiamo ordine tra gli oggetti del magazzino di Caoticus
I simboli di Caoticus
Le dita delle mani
Cosa scoprì Caoticus?

Contesto
Il filo conduttore di tutte le attività è la fiaba[1]. Il personaggio guida è Alice tratto dalla fiaba "Alice del Paese delle Meraviglie" i cui personaggi e lo sfondo diventano il pretesto per l'insegnamento di argomenti matematici.
Il lavoro si articola in una serie di proposte (di Alice), ciascuna delle quali contiene una situazione problematica che il bambino affronta in modo concreto:
ascoltando e partecipando alle discussioni collettive;
individuando gli elementi essenziali e comprendendo la situazione problematica;
colorando;
ritagliando;
realizzando concretamente la situazione letta;
ipotizzando e/o verificando le soluzioni possibili;
confrontando ed esplicitando di volta in volta su schede operative ciò che sta facendo.
Una delle attività è "Caoticus": la lunga storia dei numeri" attraverso la quale il bambino rivive un possibile percorso relativo alla esigenza di utilizzare e rappresentare i numeri, utilizzando inizialmente dei simboli e poi le cifre del sistema posizionale decimale, l'alfabeto dei numeri convenzionale.
L'insegnante potrebbe dedicare del tempo al racconto di storie e una serie di queste potrebbe essere dedicata ad aspetti matematici.
<u>Nodi concettuali</u>
Durante questa proposta potrebbero essere evidenziati alcuni nodi dell'insegnamento-apprendimento ai quali l'insegnante dovrà fare particolare attenzione:
Comprensione della funzione del simbolo e suo utilizzo consapevole
Differenza tra numero e sua rappresentazione
Differenza tra numero e cifra
Confronto maggiore-minore-uguale in riferimento alle quantità
Lo zero come cifra che rappresenta l'insieme che non contiene oggetti
Il valore posizionale delle cifre

[1] [1] Da un'idea elaborata e sperimentate nelle scuole dalla Prof. Virginia Vaccaro, del Dipartimento di Matematica di Napoli del nucleo di ricerca in didattica della matematica

Strumenti
Fiaba, schede
Materiale di vario tipo: contenitori, cubetti, fagioli, ecc.

Descrizione delle attività
Attività 1. Ricostruzione del magazzino di Caoticus
Dopo la lettura della prima parte della storia, si chiede ai bambini di rappresentare col disegno la situazione descritta e si passa quindi, alla costruzione in classe del confusionario magazzino di Caoticus con oggetti di facile reperimento.
Attività 2. Mettiamo ordine tra gli oggetti del magazzino di Caoticus
Sul pavimento si trovano contenitori, bicchieri di plastica,… con dentro cioccolatini, caramelle, oggetti in quantità diverse (in numero inferiore a 10), per rappresentare il magazzino di Caoticus e la confusione che c'era in esso. In classe sono stati preparati 10 banchi. I bambini devono confrontare le quantità contenute nei bicchieri e porre i bicchieri contenenti la stessa quantità sullo stesso banco. In seguito si ordinano i banchi in ordine crescente rispetto alla quantità dei gruppi di oggetti che ci sono sopra e si osserva che c'è un banco su cui non viene messo nulla.
Attività 3. Dopo la lettura della seconda parte della storia, i bambini disegnano i simboli di Caoticus, e poi sono invitati ad inventarne altri.
Attività 4. I bambini giocano, usando il simbolo delle dita delle mani per indicare le diverse quantità di oggetti.
Attività 5. Cosa scoprì Caoticus?
I bambini sono invitati a ricordare e discutere la parte della storia in cui Caoticus scopre la ricorsività del numero.
(1 più 1=2 ; 2 più 1=3 ; 3 più 1=4 ; 4 più 1=5 ; 5 più 1=6 ; 6 più 1=7 ; 7 più 1=8 , 8 più 1=9 ; 1 più 1 più 1 più 1= 4 ; 2 più 3=5 ecc.).
Testo della fiaba: "Caoticus: la lunga storia dei numeri "
Prima parte
Sono Alice e vi voglio raccontare di quella volta in cui mi sono sentita un genio in matematica. Ero in giro per il Paese delle Meraviglie, quando vidi una grotta e una luce in fondo ad essa. Ovviamente la mia curiosità mi spinse ad entrare.
Camminando, camminando arrivai ad una uscita. Non ero entrata in una caverna ma in un tunnel! E la luce proveniva dal fondo. Pensai di avere scoperto una parte a me ancora sconosciuta del Paese delle Meraviglie, ma c'era qualcosa che non mi convinceva. Vedevo pastori con strani abiti, quasi primitivi, contadini con rozzi utensili, strane assi trainate da buoi, bambini che giocavano a gettare sassi in uno stagno... Non era il Paese delle Meraviglie! a allora che posto era mai quello? La paura di rimanere intrappolata in un luogo da cui forse non sarei potuta più tornare indietro, fermò i miei passi. Cercai lo Stregatto, avrei chiesto a lui informazioni su quello strano tunnel.
Lo Stregatto mi spiegò che quel tunnel era il tunnel del tempo e girava costantemente come le lancette dell'orologio, passando da un secolo ad un altro. Attraversando il tunnel ci si poteva trovare tra gli antichi egizi, oppure tra gli antichi romani, oppure sulla nave di Cristoforo Colombo o tra gli indiani d'America. Ma non c'era alcun pericolo, bastava riattraversare il tunnel per tornare nel Paese delle Meraviglie. C'era però un problema, il tunnel si spostava lentamente, senza mai fermarsi, rimaneva in un periodo del passato una settimana, dal lunedì alla domenica, il lunedì seguente era già in un periodo e in un luogo diversi. Quindi bisognava stare attenti a ritrovarsi davanti all'ingresso del tunnel dal lato del passato entro la mezzanotte della domenica, per poter tornare al nostro tempo. Tranquillizzata dalle parole dello Stregatto, decisi di andare in esplorazione. Chissà quando il tunnel si sarebbe reso di nuovo visibile!
Chiesi che giorno fosse e mi feci prestare l'orologio dal Bianconiglio che aveva anche la data e il giorno per essere sicura di non distrarmi. Andai.
Che emozione! Andavo a conoscere la storia del passato di persona, non mi sarei certamente addormentata come mi era accaduto altre volte!!

Mi trovai in un antico villaggio fatto di semplici capanne tra cui ne spiccavano solo alcune più importanti. Una di queste era certamente un luogo di preghiera, un'altra era abitata dal capo del villaggio e un'altra ancora era una bassa costruzione molto grande nella quale entravano persone cariche di cose, e ne uscivano persone a mani vuote. Entrai in questa costruzione e vidi una confusione che mai prima di allora avevo visto, neanche nella mia camera.
C'erano cose di ogni tipo: frutta, grano, ortaggi, formaggio, uova, otri pieni di olio e di vino, pietre, legname, pelli, lana, utensili, cesti, ecc. ecc
Quelle cose rappresentavano le tasse che gli abitanti del villaggio pagavano al loro capo secondo il proprio mestiere e secondo la propria ricchezza. L'impiegato doveva segnare chi aveva pagato le tasse, controllare chi non le avesse ancora pagate, mandare poi tutte le cose che dovevano essere subito utilizzate al palazzo del capo e mettere ordine tra tutte le altre.
Lavorava dalla mattina alla sera senza mai fermarsi, era stanco e disperato. Mi misi in un angolo a osservare come lavorava.
Dopo un po' entrò un contadino con un cesto di mele, l'impiegato controllò su una tavoletta quanto quest'uomo doveva pagare e vidi che erano disegnate 6 cose che sembravano frutti o pietre.
L'impiegato prese da un sacchetto che portava sempre con sé tanti sassolini quante erano le pietre segnate sulla pergamena, li mise poi per terra uno accanto all'altro, poi davanti a ciascun sassolino mise una mela che aveva portato il contadino, alla fine concluse che le mele erano in numero giusto, le mise di nuovo nel cesto e lo pose in un angolo del magazzino. Fatto questo, mise un segno sulla pergamena e il contadino potè andare via.
Mamma mia quanto lavoro per controllare che quel contadino aveva portato 6 mele, ma non poteva contare? Ogni volta che entrava una persona l'impiegato ripeteva gli stessi gesti:
controllava quante tasse doveva pagare prendeva i sassolini dal suo sacco e li disponeva per terra davanti ad ognuno metteva quello che l'uomo aveva portato.
Se l'uomo aveva portato di meno, doveva aggiungere quello che mancava, se aveva portato di più poteva riportare a casa quello che era in più. Purtroppo, ogni tanto, il capo chiedeva un controllo.
Avevano pagato tutti? E avevano pagato quanto dovuto? Bisognava controllare sulle tavolette
quali persone avevano pagato e controllare poi se avevano pagato giusto. Queste erano le occasioni in cui l'impiegato impazziva. Chiedeva l'aiuto di qualcuno, ma anche in questo modo le cose erano complicatissime. L'impiegato, che si chiamava Caoticus, urlava ad un povero ragazzo: " Dobbiamo controllare se Paolinus ha pagato, trova un cesto con tante mele." E gli dava OOOOOO sassolini. Il povero ragazzo incominciava a cercare, ma senza sapere da dove doveva cominciare, girava per il magazzino in cerca di cesti di frutta, precisamente mele, e ogni volta che ne trovava uno ne doveva controllare il numero. Non sempre era così fortunato da trovarlo al primo colpo. Questo lavoro non finiva mai!
Mi decisi ad uscire allo scoperto per aiutarli, io che ordinata non sono mai stata, (sapevo come farlo anche senza parlare di numeri). Dissi loro: "Ma perché non mettiamo prima un po' di ordine? Sei d'accordo con me che chi paga con tante mele quanto un sassolino O, paga meno di quello che invece ne deve dare quanto OO, che paga meno di quello che ne deve dare tante quanto OOO, e che la quantità non ha niente a che vedere cl tipo di fruttai?
Ebbene se sei d'accordo con me, prendiamo tutte le tasse che tu hai confrontato con O e mettiamole tutte in un posto vicino alla parete, davanti a questo mucchio di cose ci mettiamo un bel sasso, così ci ricordiamo cosa ci sta dietro.
Proseguiamo prendendo tutte le tasse fatte da tante cose come OO, le mettiamo di seguito a quelle che abbiamo già sistemato e davanti ci mettiamo altrettante tante grosse pietre, cioè OO.
Hai capito come dobbiamo poi continuare?
Se vuoi ti aiuto, tanto non ho niente da fare.

Seconda parte

Dopo tutto il lungo ed estenuante lavoro il magazzino risultò molto più ordinato, c'erano tanti mucchi uno accanto all'altro e, quando non ci fu più spazio in questa prima fila, si andava dietro a *cominciare una nuova fila da una parete all'altra. Bene! Ora è possibile fare il controllo richiesto dal capo del villaggio. Si comincia da quelli più poveri che pagano tasse pari a O e si controllano i sacchi e i cesti del primo mucchio, poi si passa a quelli che devono pagare tasse pari a OO e si controlla il secondo mucchio, ecc. ecc. Quando Caoticus urlava di controllare se Paolinus aveva portato le mele dovute, il ragazzo trovava subito il mucchio da controllare. Così si può lavorare presto e bene. Caoticus era proprio contento, non aveva mai visto il suo magazzino così ordinato, si sentiva un impiegato proprio perfetto. Ma ciò che gli avevo spiegato aveva fatto scattare in lui una molla!!!*

Voleva ad ogni costo riuscire a rendere il suo compito più semplice e più sicuro, si era reso conto che bastava ragionare, cosa che non aveva mai fatto. Aveva continuato il lavoro del padre esattamente come faceva il padre. Ma gli avevo aperto la mente, voleva sapere di più. Infatti mi ero lasciata sfuggire che forse poteva fare a meno delle grosse pietre davanti ai mucchi, dei sassolini nel sacchetto, delle pietre disegnate sulle tavolette, doveva solo...... scegliere un segno, un simbolo, per ogni mucchietto di pietre. Non volevo cambiare troppo le cose, sapevo che la storia deve seguire il suo corso. Ma in fondo stavo dando solo dei suggerimenti, era stato intelligente Caoticus a capire che tutte le tasse che aveva confrontato con O stavano nello stesso mucchio, così come quelle con OO e così via e a capire come continuare e come metterle in ordine.

Io avevo dato solo una spinta. Infatti dopo quest'ulteriore suggerimento, Caoticus mi propose di scegliere il simbolo del sole per un O, il simbolo degli occhi per OO, il simbolo Y per OOO, una tavolo come simbolo per OOOO, la mano per OOOOO, la mano con il sole era OOOOO O, la mano con gli occhi era OOOOO OO, la mano con Y era OOOOO OOO, la mano con il tavolo era OOOOO OOOO, mentre entrambe le mani erano OOOOO OOOOO.

Non volevo spegnere il suo entusiasmo. Ma dovetti mostrargli che c'erano tanti mucchi di oggetti che avevano bisogno di più di due mani e che quindi sarebbe stato complicato proseguire in questo modo, disegnando tante mani o anche con i soli, o gli occhi ecc. ecc., dopo un po' non avrebbe capito più nulla. Caoticus era un po' sconcertato, ma mi assicurò che avrebbe pensato a questo problema. In qualche modo era già contento così.

Purtroppo tutto questo lavoro aveva preso molto tempo ed era giunta la domenica, dovevo tornare nei pressi del tunnel e rientrarvi se non volevo rimanere intrappolata in quel tempo. Mi dispiaceva lasciare Caoticus con ancora tanti problemi. Quel giorno si sarebbe sposatoPaolinus con Cornelia, una brava sarta e avrebbero dovuto mettere insieme le loro tase. Il povero Caoticus trovò che Paolinus doveva pagare OOOOOO mele mentre Cornelia pagava OOOOO mele, quanto doveva far pagare alla coppia? Sapeva che OOOOO O più OOOOO era OOOOOOOOOOO, sapeva in quale fila doveva andare la nuova tassa, ma era complicato disegnare una mano, un dito e ancora una mano, oppure una mano, un sole e ancora una mano. E se poi lui segnava prima le tasse di Cornelia e poi quelle di Paolinus veniva fuori un'altra cosa: una mano, una mano e poi un dito oppure una mano, una mano e poi un sole. Sapeva che i due risultati coincidevano con OOOOOOOOOOO.

Caoticus mi venne a cercare e mi implorò di dargli ancora qualche indicazione prima di partire. Gli svelai tutto:

O……………………………………………1 e lo chiamiamo "uno
"OO 2 e lo chiamiamo "due"
OOO 3 e lo chiamiamo "tre"
OOOO 4 e lo chiamiamo "quattro"
OOOOO 5 e lo chiamiamo "cinque"
OOOOOO 6 e lo chiamiamo "sei"
OOOOOOO 7 e lo chiamiamo "sette"
OOOOOOOO 8 e lo chiamiamo "otto"
OOOOOOOOO 9 e lo chiamiamo "nove"

e qui mi fermai, come spiegargli che poi veniva 10?

Gli chiesi allora se c'era qualcuno che non pagava tasse. Egli mi rispose che i servi non pagavano le tasse. Come segnava questo fatto sulla su pergamena? Caoticus mi disse che non c'era alcun segno vicino al nome dei servi e spesso pensavano ad una dimenticanza o ad un errore e andavano a verificare continuamente anche cose inutili. Gli dissi a questo punto che noi per indicare niente usiamo un simbolo che somigliava al suo sasso, 0, e che chiamiamo "zero". Questo, che sembra un simbolo che non serve a nulla, ci consente di continuare a scrivere i numeri. Per indicare il numero delle dita delle due mani usiamo un simbolo che nasce prendendo 1 e 0 cioè 10, "dieci". Cosa ci dice il numero scritto in questo modo? Ci dice che siamo arrivati a contare 1 sola volta tutte le dita delle nostre mani, e non ci sono altre cose da contare, dopo ci sono 0 cose. A questo punto tutto diventa semplice, le due mani e il dito (o le due mani e il sole) diventano 10 poi, per ricordarci che abbiamo superato dieci cose scriviamo 11, il numero a sinistra indica che abbiamo una decina di alcune cose mentre il numero a destra ci dice che a questa decina bisogna aggiungere ancora 1 per quella cosa in più. Così le due mani più gli occhi diventa 10 più 2 che scriviamo 12. Come prima 1 mi ricorda che ho una decina di alcune cose, mentre il numero 2 mi ricorda che oltre questa ne ho altre due,....
Così avremo 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Dopo 19 avrò contato 2 volte tutte le dita delle due mani, ciò si indicherà con 20, "venti", ecco l'importanza dello zero, in 20 il 2 mi dice che ho due volte dieci oggetti, lo 0 mi dice che non ho oggetti al di fuori delle decine. A questo punto Caoticus continuò da solo e scrisse 21, 22, 23,...

Pagamenti diversi

Livello scolare: 1^a e 2^a elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Contare sia in senso progressivo che regressivo. Confrontare e ordinare numeri, sviluppando il senso della loro grandezza relativa; collocare numeri sulla retta. Leggere e scrivere numeri in base dieci. Esplorare e risolvere situazioni problematiche che richiedono addizioni e sottrazioni, individuando le operazioni adatte a risolvere il problema; comprendere il significato delle operazioni. Verbalizzare le strategie risolutive e usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle. Calcolare il risultato di semplici addizioni e sottrazioni, usando metodi e strumenti diversi in situazioni concrete. Eseguire semplici calcoli mentali con addizioni e sottrazioni. In situazioni concrete, ordinare elementi in base ad un criterio assegnato e riconoscere ordinamenti dati. Osservare oggetti e fenomeni individuando in essi alcune grandezze misurabili; compiere confronti diretti e indiretti in relazione alle grandezze individuate; ordinare grandezze. Effettuare misure per conteggio di grandezze discrete (ad es: conteggio di elementi di classificazioni prodotte, valori monetari, …).	Numeri naturali Rappresentazione dei numeri naturali in base dieci Addizione e sottrazione tra numeri naturali	<u>Numero</u> Problemi Argomentare Relazioni Misura	Osservazione ed uso di macchine (registratori di cassa e macchine cambia monete) Uso di software dedicato Storia, geografia, studi sociali relativamente alla dimensione economica Educazione linguistica

<u>Attività proposte</u>
Attività 1- Pagamento di un prezzo con più monete
Attività 2 - Pagamento che richiede un cambio di monete
Attività 3 - Pagamento di due oggetti uguali o diversi
Attività 4 - Pagamento che prevede un resto

Contesto

Il contesto compravendita ha un forte aggancio con situazioni facenti parte dell'esperienza comune dei bambini, per questo contiene pratiche e routine che essi possono, almeno in parte, padroneggiare fin dall'inizio, e nello stesso tempo li obbliga ad affrontare problemi nuovi per i quali occorre costruire nuovi strumenti e nuove conoscenze matematiche. Questo richiede grande attenzione da parte dell'insegnante che, al momento opportuno, deve prima rendere esplicite e le conoscenze implicite nell'attività del bambino e poi facilitare il decentramento dalle situazioni concrete attraverso la formalizzazione matematica.

Il contesto compravendita contribuisce a strutturare il concetto di valore convenzionale e quello di composizione e scomposizione additiva, permettendo la riflessione sui significati e sulle successive rappresentazioni dell'addizione e della sottrazione.

La scelta del contesto compravendita e del "gioco del mercatino" realizzato in classe consente di costruire attività che mettono in campo tutti i concetti aritmetici di base e contribuiscono a formare competenze spendibili nel mondo reale. Nelle situazioni economiche di acquisto e pagamento il bambino ha modo di rendersi conto che esistono convenzioni riguardanti il valore e l'uso delle monete.

Inizialmente i bambini familiarizzeranno con le monete, osservando ciò che le contraddistingue esteriormente (la grandezza, la forma, il colore), pian piano arriveranno ad evidenziare la caratteristica essenziale: il numero che indica il valore. E' importante osservare le strategie, la gestualità, il linguaggio (metafore), le rappresentazioni che il bambino mette in campo di fronte alle situazioni problematiche che prevedono l'uso di monete.

Il contesto compravendita consente anche di costruire le basi per una prima comprensione di fenomeni economici complessi quali la nozione di prezzo e di valore di una merce, collegata alla catena produttiva (produzione, distribuzione, vendita) e al lavoro.

Le attività del contesto compravendita si possono prestare all'avvio di pratiche di metacognizione ed autovalutazione all'interno di un gioco di ruolo nel quale i bambini, attraverso la discussione e il confronto, cercano di individuare le abilità necessarie per la realizzazione dell'attività. All'inizio come previsione e poi, durante le successive fasi dell'attività, nei momenti di ricapitolazione e riflessione, i bambini hanno modo di elaborare ulteriormente le conoscenze matematiche acquisite e di controllare il proprio percorso di apprendimento, ponendosi domande del tipo: "Cosa bisogna sapere per poter fare un acquisto? Che cosa si deve imparare (ovvero, che cosa abbiamo imparato) per giocare al mercatino, nel ruolo di cliente e nel ruolo di venditore?"

Esiste una pratica ormai consolidata di lavoro didattico nel contesto della compravendita, utilizzando le monete in vigore nel sistema monetario italiano. Nel momento in cui vengono scritte queste note l'euro non è ancora stato introdotto e quindi non esistono ancora esperienze in tal senso, legate all'uso di monete vere in contesti di compravendita reali. Si può tuttavia legittimamente suggerire che le indicazioni date in queste pagine hanno valore anche con le nuove monete (prendendo ad esempio come moneta base i 10 centesimi di euro); ovviamente avendo cura di evitare nel primo biennio la formalizzazione con i numeri decimali (ad esempio si dirà e si scriverà 3 euro e 20 eurocent e non 3,20 euro).

Questo tipo di attività può essere realizzato anche con ausilio di strumenti informatici ad esempio, nell'ambiente micromondo AriLab.

<u>Nodi cruciali dell'apprendimento:</u>

Superamento degli aspetti percettivi nel riconoscimento di monete a favore della distinzione del loro valore

Acquisto di oggetti reali

Conteggi con numeri grandi

Salto concettuale all'additività del prezzo

Acquisto di due o più oggetti di uguale valore: avvio alla moltiplicazione

Significati e scrittura dell'operazione sottrazione in relazione a situazioni di resto monetario.

Descrizione delle attività

Attività 1: pagamento di un prezzo con più monete (primo o secondo anno)

E' opportuno che le prime esperienze di compravendita siano reali: è consigliabile quindi progettare una uscita collettiva per raccogliere dati e informazioni e per fare qualche piccolo acquisto….Durante l'uscita si può registrare il dialogo venditore-cliente e osservarne la gestualità, favorendo anche collegamenti con l'educazione linguistica ed espressiva. Si possono fotografare gli strumenti che usa il negoziante, la disposizione delle merci sulla bancarella o sugli scaffali, i cartellini con i prezzi. Nel caso in cui l'attività si svolga nel secondo anno è possibile anche preparare una breve intervista da rivolgere al negoziante (quali azioni fa durante la giornata, da dove arrivano le merci, come si stabiliscono i prezzi, ecc.). Successivamente tutte le informazioni raccolte verranno discusse e organizzate in classe: ciò permetterà ai bambini di entrare "in situazione", di esplicitare le conoscenze che già possiedono e di trovare motivazioni per acquisirne di nuove.

All'inizio ogni bambino deve disporre di un borsellino con monete vere, perché è importante il rapporto con la situazione di acquisto reale. Il periodo di lavoro con le monete vere deve essere sufficientemente prolungato per consentire a tutti gli allievi di maturare i significati in gioco e le abilità di conteggio necessarie. In un secondo tempo le situazioni di compravendita possono essere svolte in classe (ad esempio l'insegnante svolge la funzione di venditore e i bambini acquistano realmente) oppure simulate (allestendo una bancarella e costruendo eventualmente una cassa con monete fotocopiate).

Nelle prime attività di conteggio il bambino utilizza la moneta da 100 non pensandola come "100 monete da una lira", ma assumendola come unita' di conteggio (300 lire vengono intese come 3 cento lire). E' pertanto opportuno rimandare ad un secondo tempo l'introduzione e l'uso della moneta da 50 lire.

Nello stesso modo, con l'introduzione dell'euro, nelle prime attività di conteggio il bambino utilizza la moneta da 10 eurocent non pensandola come "10 monete da 1 eurocent" ma assumendola come unità di conteggio (10 è come 1, 20 è come 2, ecc.).

La registrazione degli acquisti, in un primo tempo, viene fatta dal maestro alla lavagna affiancando all'oggetto l'etichetta col prezzo e le monete usate per pagarlo, curando di evidenziare le diverse soluzioni trovate.

Si possono fare esercizi di composizione in più modi di un prezzo, non necessariamente legandoli con gli acquisti. Il complesso di questa attività può avviare, quando il significato di valore è sufficientemente interiorizzato, il processo di comprensione della scrittura posizionale.

Attività 2: pagamento che richiede un cambio di monete (primo o secondo anno)

Il bambino durante l'attività si può trovare nella situazione di possedere una moneta di valore superiore al prezzo dell'oggetto che vuole acquistare. In tal caso, poiché non è ancora prevista la possibilità di ricevere un resto, può interagire con i compagni e chiedere di cambiare la sua moneta con due o più monete equivalenti a quella in suo possesso.

Facendo esperienze di scambio si costruisce la consapevolezza di poter pagare in modi diversi un determinato prezzo e contemporaneamente anche il significato dell'operazione addizione. L'operazione di scambio di monete può esser affrontata con la progettazione di una macchina "cambia-monete". La macchina in questo caso è utilizzata come metafora. La sua progettazione, al fine di svolgere un particolare "lavoro", consente di costruire le conoscenze matematiche in modo procedurale: ad ogni semplice azione ne segue un'altra, poi ancora un'altra, e così via. Ai bambini viene chiesto di esplicitare la procedura inventata per la macchina utilizzando il linguaggio e le rappresentazioni della matematica.

È bene soffermarsi con particolare attenzione sulle uguaglianze del tipo:

10 eurocent = 5 eurocent + 5 eurocent

100 eurocent = 50 eurocent + 50 eurocent

100 eurocent = 1 euro

Le attività proposte conducono principalmente al consolidamento del concetto di valore delle monete, alla scrittura di numeri grandi e al loro ordinamento. La costruzione progressiva di una retta delle monete, che diventa sempre più densa man mano che vengono scoperti i numeri intermedi, anche attraverso la considerazione dei prezzi, consente di avviare l'uscita dal contesto. Il passaggio dal numero della moneta o del prezzo (ancora, per tutta una fase, associato dai bambini alle monete che servono a comporlo), al "numero in quanto tale" è un processo che deve vedere coinvolto il ruolo della rappresentazione. In particolare è necessario che i numeri delle monete divengano il supporto per la comprensione del valore posizionale delle cifre: con le lire, 10 monete da 100 formano 1.000 e questa consapevolezza può trovare una corrispondenza nella rappresentazione sull'abaco. La relazione fra ciò che si è imparato a fare "in situazione" e ciò che è possibile rappresentare in una situazione decontestualizzata (come l'abaco o la retta dei numeri) diviene un modello di funzionamento del sistema dei numeri in base dieci. E' possibile utilizzare la stessa corrispondenza con l'euro e gli eurocent.

<u>Attività 3:</u> pagamento di due oggetti uguali o diversi (primo o secondo anno)
Si possono acquistare più oggetti e quindi affrontare il problema del "quanto spendo in tutto".
All'inizio i bambini tendono a pagare gli oggetti separatamente e sarà una conquista capire che i due prezzi si possono sommare.

BANCARELLA DELLE PULCI - MERCATINOUNO Piazza I maggio data .... n°							
ARTICOLO	PREZZO UNITARIO	N° PEZZI	TOTALE PARZIALE				
TOTALE							

L'algoritmo dell'addizione può essere "scoperto" e costruito attraverso la lettura degli scontrini veri rilasciati dai registratori di cassa, che confermano le acquisizioni maturate dai bambini, attraverso il lavoro con le monete, sugli ordini di grandezza dei numeri. E' bene che il pagamento di due oggetti avvenga inizialmente in situazioni di acquisto reale. Poi potrà divenire anche un'esperienza simulata, in cui, ad esempio, può essere richiesto al venditore di compilare lo "scontrino" (simile a quello riprodotto accanto) per calcolare la spesa complessiva.
Gli acquisti reali potrebbero essere realizzati in un negozio. Il successivo confronto delle modalità di ragionamento, organizzato dall'insegnante, può veicolare l'avvio alla considerazione che i prezzi si possono addizionare.
L'attività del "gioco del mercatino" può essere proposta con diverse modalità:
acquisto di più oggetti diversi con o senza vincolo di spesa;
acquisto di più oggetti dello stesso tipo con o senza vincolo di spesa;
acquisto di più oggetti diversi e dello stesso tipo;
preparazione di confezioni contenenti più pezzi dello stesso articolo.
Per facilitare il conteggio della spesa totale nel caso di acquisto di più oggetti uguali, si può costruire un tabellone dei prezzi con il costo, per ogni oggetto, di 1 pezzo, 2 pezzi, 3 pezzi … 10 pezzi. Questa attività è utile per avviare la costruzione del significato della moltiplicazione come addizione ripetuta.

Si ricorda che, anche se nel primo biennio gli obiettivi di apprendimento relativi alle competenze sono più centrati sul significato di addizione e sottrazione è opportuno sviluppare esperienze che permettano anche l'avvio alla costruzione della moltiplicazione e della divisione, tenendo conto che questi apprendimenti necessariamente e si distendono su tempi lunghi e che comunque la formalizzazione deve seguire l'interiorizzazione del significato.

<u>Attività 4:</u> pagamento che prevede un resto (secondo anno)
Per padroneggiare una situazione problematica in cui si prevede un resto è necessario:
valutare la relazione denaro posseduto/ spesa
effettuare il pagamento con il denaro selezionato
attendere la consegna di denaro e merce acquistata.
Occorre cioè coordinare una relazione di andata e ritorno che si svolge in un tempo, che coinvolge un altro soggetto e che comporta una scomposizione dell'importo versato.
La strategia più comune seguita dai bambini per determinare il resto è il completamento additivo, (la stessa che viene ancora comunemente utilizzata nei piccoli negozi), ed è bene che venga rappresentata con strumenti adeguati alla struttura del ragionamento. Altre volte, se la differenza è fra due valori "lontani", tipo 10 e 100, la strategia più efficace più essere 100 -10 (quella utilizzata dai cassieri dei supermercati dove è il registratore di cassa a calcolare il resto).
Per far evolvere verso l'uso e la scrittura dell'operazione sottrazione in tutti i casi di calcolo del resto è importante far assumere ai bambini ruoli diversi: essere compratore o venditore significa vedere il problema del resto da punti di vista differenti e fare delle operazioni mentali diverse all'interno di una stessa situazione. È bene, inoltre, far riflettere anche sugli altri significati della parola resto, ad esempio richiedendo ai bambini quanti soldi rimangono nel loro portamonete dopo aver speso una certa somma di denaro.
Va sottolineato che l'evoluzione verso la sottrazione non è un passaggio naturale, perché richiede ai bambini di considerare la situazione di resto come una situazione di differenza fra due valori: il prezzo da pagare e il denaro consegnato. In particolare solo l'avvenuta padronanza del concetto di valore permette al bambino di concepire il prezzo dell'oggetto come parte del denaro consegnato.
Le situazioni di resto dunque comportano la compresenza di atteggiamenti "in situazione" (dove è più economico il conteggio per completamento corrispondente alla domanda: quanto ho dato in più?) e di atteggiamenti di distanziamento riflessivo (dove si considera il resto come "differenza" da restituire). Proprio per questa ragione tali situazioni possono essere un momento efficace di discussione, di chiarimento e di comprensione del significato dell'operazione di sottrazione e degli algoritmi di calcolo ad essa connessi.
È bene far riflettere anche sugli altri significati della parola resto, ad esempio richiedendo ai bambini quanti soldi rimangono nel loro portamonete dopo aver speso una certa somma di denaro.

Elementi di prova di verifica

Per quanto riguarda la verifica delle competenze coinvolte negli esempi di attività proposti, nel gruppo abbiamo concordato di offrire spunti solo per le prove sommative, privilegiando quelle scritte, strutturate o semi strutturate. Pur riconoscendo che alcune competenze (es. quella del contare progressivamente e regressivamente) potrebbero essere testate anche con modalità orali di intervista individuale, pensiamo che quelle scritte rispondano a criteri di economia, quando si ha a che fare con classi numerose.

Pensiamo anche, che sia necessario far passare il messaggio che è opportuno ricercare nelle prove di verifica sommative criteri di oggettività. Per questo proponiamo, oltre ad alcune prove che si collocano all'interno dei campi di esperienza delle attività proposte, anche prove che siano svincolate da questi e che si possano prestare anche ad essere applicate a numeri alti di alunni che vivono realtà scolastiche diverse.

Siamo consapevoli che la diffusione di questa pratica può indurre a rifugiarsi in una didattica molto simile all'addestramento, pertanto raccomandiamo di prendere ogni suggerimento con buon senso e utilizzare lo strumento delle prove sommative oggettive con ragionevoli intervalli di tempo (es. fine quadrimestre, fine anno), utilizzando invece con maggior frequenza anche prove formative che per loro natura possono essere più aperte e offrire l'occasione per osservazioni molteplici sugli alunni, osservazioni che possano fornire informazioni in vari ambiti, da quello affettivo, a quello relazionale, a quello degli stili cognitivi, a quello dell'apprendimento.

Desideriamo in questa sede richiamare l'importanza di queste ultime prove che devono essere invece frequenti, non casuali e anch'esse preparate con cura al fine di individuare bene le possibili informazioni sul singolo e sul gruppo.

Le prove formative, infatti, danno indicazioni non solo su ciò che il bambino è in grado di fare autonomamente, ma anche sul processo di pensiero sviluppato con l'aiuto dell'insegnante, mettendo in luce sia le difficoltà ancora esistenti, sia le potenzialità a cui l'allievo può far ricorso.

Ritornando ai suggerimenti sulle prove sommative, è auspicabile inoltre che per ogni competenza si propongano in una classe più prove di verifica sommativa, infatti ci possono essere delle interferenze legate al linguaggio o al momento in cui si somministra la prova stessa.

E' bene distinguere le prove che non ripercorrono le attività da quelle che ripropongono situazioni che già sono state esperite nell'attività stessa. Queste ultime ovviamente sono proponibili esclusivamente in situazioni in cui l'attività è stata svolta, ma hanno il vantaggio di dare informazioni sui bambini che a questo livello scolare (primi due anni) non sono ancora in grado di trasferire le competenze in altri ambiti.

Nelle prove scritte, dove l'abilità della lettura e della scrittura interferiscono con i risultati della prova stessa, l'insegnante può assumere il ruolo del "lettore" o "scrittore" neutro, permettendo così di effettuare la prova anche agli alunni in difficoltà rispetto alle abilità di letto-scrittura.

Ancora è bene ricordare che nel preparare le prove, utilizzando suggerimenti tratti da vari materiali, ogni insegnante deve sempre fare gli aggiustamenti necessari in relazione alla classe. Gli aggiustamenti possono riguardare le attività precedenti, per colmare eventuali lacune di linguaggio e strumenti nel caso in cui le prove vengano dall'esterno (classi parallele, istituto, circolo, consorzio di scuole…) o le prove stesse, nel caso sia il singolo insegnante a preparare i test soltanto per i suoi alunni.

Nel preparare prove di tipo sommativo, un problema del quale tener conto è quello del livello di apprendimento sul quale tararle, se il livello è troppo alto non si avranno informazioni dettagliate su un ampio numero di alunni, dei quali si saprà solo: "non riesce". Se il livello è troppo basso si avrà un'informazione altrettanto generica del tipo: "quasi tutti riescono". L'attenzione dell'insegnante deve essere mirata a graduare bene le richieste in modo da ottenere informazioni più possibile estese e circostanziate.

Alle prove di verifica bisognerebbe far precedere una breve analisi delle possibili risposte che ci si attende dai bambini, individuando difficoltà progressive e magari legate a più nodi concettuali.

Nei suggerimenti per le prove di verifica ci si riferisce soprattutto alle attività elencate nella tabella del contesto calendario, ma la maggior parte di esse si riferisce a competenze comuni a molte delle attività indicate anche nel contesto compravendita.

Alcuni esempi di elementi di prove di verifica per la 1ª e la 2ª elementare

Una domenica in montagna

Competenze:
Contare oggetti e confrontare raggruppamenti di oggetti.
Leggere e scrivere numeri in base dieci.
Contare sia in senso progressivo che regressivo.

Le figurine

CONTA E COMPLETA

Y	Û	≤	§	Y	Û
Y	Û	≤	§	Y	Û
Y	Û	≤	§	Y	Û
Y	Û	≤	§	Y	Û

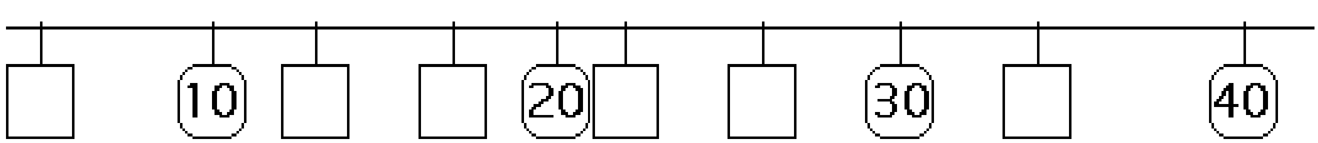
LE FIGURINE SONO …..

<u>Competenze</u>:
Contare oggetti e confrontare raggruppamenti di oggetti.
Leggere e scrivere numeri in base dieci.
Contare sia in senso progressivo che regressivo.

Numeri sulla retta

SCRIVI QUESTI NUMERI SULLA RETTA

22 13 34 5 26 17

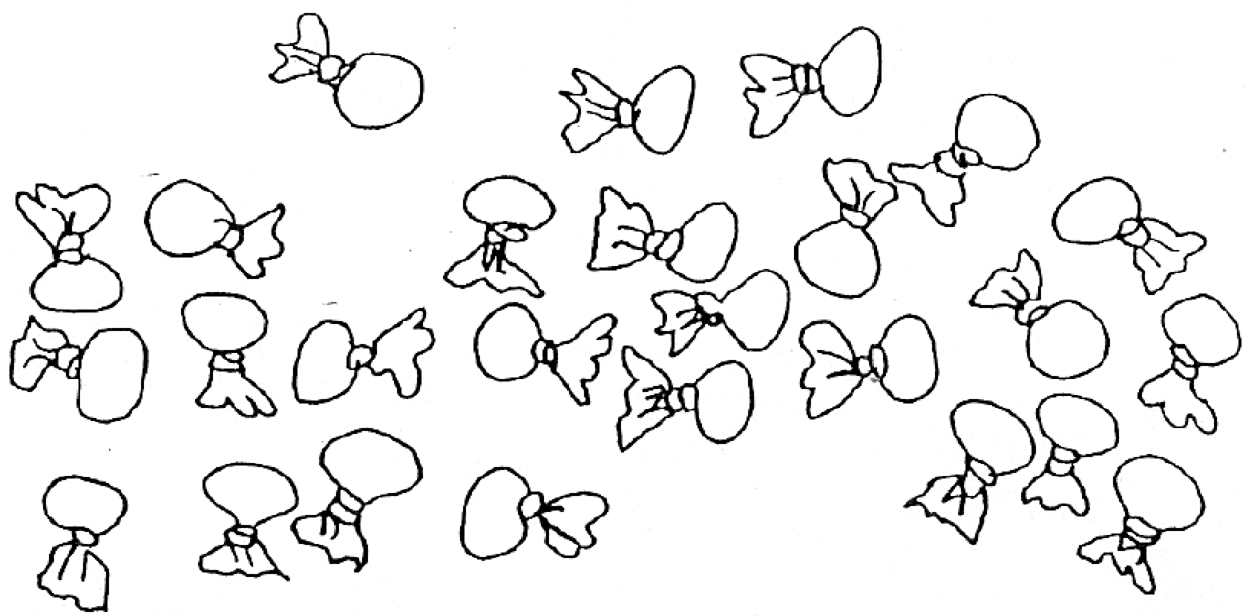


Competenze:
Confrontare e ordinare numeri, sviluppando il senso della loro grandezza relativa; collocare numeri sulla retta.
Leggere e scrivere numeri in base dieci.
Contare sia in senso progressivo che regressivo.

Caramelle per tutti!

LEGGI E OSSERVA CON ATTENZIONE
POI INDICA CON UNA CROCETTA CON LA RISPOSTA CORRETTA.

IN CLASSE CI SONO 21 BAMBINI .
POSSO DARE UNA CARAMELLA A TUTTI ?



SÌ, PERCHÉ AVANZANO
NO, PERCHÉ AVANZANO
NO, PERCHÉ MANCANO

Competenze:
Contare sia in senso progressivo che regressivo.
Leggere e scrivere numeri in base dieci.
Contare oggetti e confrontare raggruppamenti.

Calendario

LEGGI CON ATTENZIONE
POI RISPONDI ALLE DOMANDE

OGGI È IL 7 MAGGIO.
QUANTI GIORNI MANCANO AL 23 MAGGIO ?
SPIEGA COME HAI CONTATO.

___

___

___

OGGI È IL 19 APRILE.
FRA 9 GIORNI SARÀ IL……….. ?
SPIEGA COME HAI CONTATO.

IL 7 AGOSTO È LUNEDÌ.
CHE GIORNO SARÀ IL LUNEDÌ SEGUENTE ?
COME HAI FATTO A SCOPRIRLO ?

Le prime due domande poste richiamano la struttura dei problemi svolti nelle attività del contesto Calendario. Consentono di accertare se i bambini hanno maturato la competenza di operare nel contesto. E' possibile modificare, in ragione della classe, sia i valori numerici (allungando o abbreviando il conteggio da eseguire) sia la presenza o l'assenza del calendario. La terza domanda richiama le competenze costruite e la loro applicazione in una situazione non ancora esperita (i bambini non dovrebbero poter disporre del calendario di agosto).
Nelle tre domande poste sono in gioco i significati di sottrazione.
Ad un'analisi a priori, i nodi da sottoporre a verifica sono:
la competenza rispetto al problema dell'origine del conteggio;
i processi di pensiero che consentono ai bambini di rispondere alle domande e le connesse strategie risolutive;
eventuali diversità di prestazione fra le prime due verifiche e la terza.

Monete

LEGGI CON ATTENZIONE

NEL TUO PORTAMONETE HAI QUESTE MONETE
200 200 100 500 100 100 50 50 200:
VOGLIO COMPRARE UNA MATITA CHE COSTA 600 LIRE.
DISEGNA TRE MODI DIVERSI DI PAGARE.

MARIA VUOLE COMPRARE UN CIOCCOLATINO CHE COSTA 700 LIRE
DISEGNA TRE MODI DIVERSI PER PAGARE.

ANDREA VUOLE COMPRARE UN PENNARELLO CHE COSTA 800 LIRE
HA QUESTE MONETE: 200 100 100
QUANTO MANCA AD ANDREA PER COMPRARE IL PENNARELLO ?

COMPRO UN ………… CHE COSTA 300 LIRE E
UN ………… CHE COSTA 400 LIRE.
DISEGNA ALMENO 2 MODI DIVERSI DI PAGARE.
QUANTO SPENDO IN TUTTO ?

La differenza fra le domande 1) e 2) (presenza/assenza delle monete rappresentate) permette di osservare chi ha interiorizzato il materiale e chi ha ancora necessità della sua rappresentazione iconica.
La richiesta di produrre più modi di pagamento permette di accertare se è stato interiorizzato il significato di valore incorporato nelle monete. Nella domanda 1) ciò avviene attraverso un conteggio che è favorito dalla presenza dell'immagine del materiale, che favorisce l'utilizzo delle dita come strumento di conteggio e di controllo (ad esempio, il bambino tocca 2 volte in successione la moneta da 200 lire dicendo: 100, 200 oppure alza subito due dita toccando la moneta, denotando così la presa di coscienza del suo "valore"). E' da precisare ai bambini che le monete possono essere riutilizzate per modi diversi di pagamento.
Se nella domanda 1) il bambino deve *riconoscere* il significato di valore, nella domanda 2), per costruire le modalità di pagamento, deve *attivarlo*, superando la conta con l'unità di misura (la moneta da 100 lire).
Nella domanda 3) si accerta la capacità del bambino di completare il prezzo, discriminando il valore da aggiungere (300 lire) dalle monete che servono a comporlo (non esiste la moneta da 300 lire !).
Nella domanda 4) si può osservare come il bambino si distanzia dal prezzo di ogni singolo oggetto e come si rapporta con la padronanza del significato di addizione. Il bambino può infatti operare il pagamento separato dei due oggetti e poi indicare il totale, oppure può comporre mentalmente il totale e poi indicare come pagarlo (utilizzando, ad esempio, monete che non corrispondono ai prezzi: 700 = 500 + 200).

I numeri decimali

Livello scolare: 3^a elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Comprendere i significati delle frazioni (parti di un tutto unità, parti di una collezione, operatori tra grandezze). Riconoscere scritture diverse (frazione decimale, numero decimale) dello stesso numero, dando particolare rilievo alla notazione con la virgola. Comprendere il significato e l'uso dello zero e della virgola. Comprendere il significato del valore posizionale delle cifre nel numero naturale e nel numero decimale. Confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi. Rappresentare i numeri naturali, i decimali e gli interi sulla retta. Produrre semplici congetture. Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari. Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi. Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni. Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti.	Numeri decimali, frazioni Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali Operazioni tra numeri decimali	Il numero Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi Misurare	Lingua italiana

<u>Attività proposte:</u>
Attività 1 - Quanti litri di bevande abbiamo bevuto durante la festa di compleanno?
Attività 2 - Qual è e come si scrive il numero che occupa il posto segnato dalla tacca rossa?

Contesto

Come introdurre al terzo anno della scuola elementare i numeri decimali?

Due possono essere i metodi per affrontare il problema dell'apprendimento - insegnamento del linguaggio simbolico della matematica.

L'insegnante può proporre una situazione problema per portare l'allievo a costruire e ad usare un oggetto di sapere; l'allievo attraverso la fase di istituzionalizzazione viene a sapere che quanto ha prodotto si chiama ad esempio numero decimale.

Diversamente, l'insegnante può proporre all'allievo una scrittura non scolastica, socialmente condivisa, un artefatto culturale scelto per la semantica implicita naturale che porta con sé; l'allievo, che ha già incontrato questa notazione, congetturando ne costruisce il significato.

Si può utilizzare ora un metodo, ora l'altro, sono diversi e servono entrambi.

Il secondo metodo, probabilmente, offre dei vantaggi quando, come nel caso dei numeri decimali, appare molto forte la questione scrittura.

Il contesto scelto per questo esempio, è reale e significativo: gli alunni incontrano a scuola scritture non scolastiche a loro familiari, quali "1 litro", "1,5 litri" e "2 litri".

Altro sarebbe introdurre i numeri decimali con dei pretesti, ad esempio utilizzando materiale strutturato (abaco, blocchi aritmetici multibase, ….), perché in quanto tale, i decimali verrebbero ad assumere un significato artificioso e limitato al mondo della scuola.

Significato e scrittura nei numeri decimali sono sempre legati, quindi, nelle attività che prevedono l'approccio ai decimali gli aspetti relativi alla rappresentazione non possono essere ignorati.

Se si cala il problema della scrittura dei numeri decimali nel contesto geometrico-spaziale già conosciuto della retta dei numeri naturali, si facilita l'uso dei nuovi segni (i numeri con la virgola) e la comprensione del loro significato. Se lo strumento "retta dei numeri naturali" è famigliare e ben padroneggiato dai bambini, consentirà loro di utilizzare parole, segni, gesti, procedure già noti per esplicitare il loro pensiero e le loro conoscenze, in modo da non perdere il senso di quel che stanno facendo pur operando nel nuovo contesto dei numeri decimali.

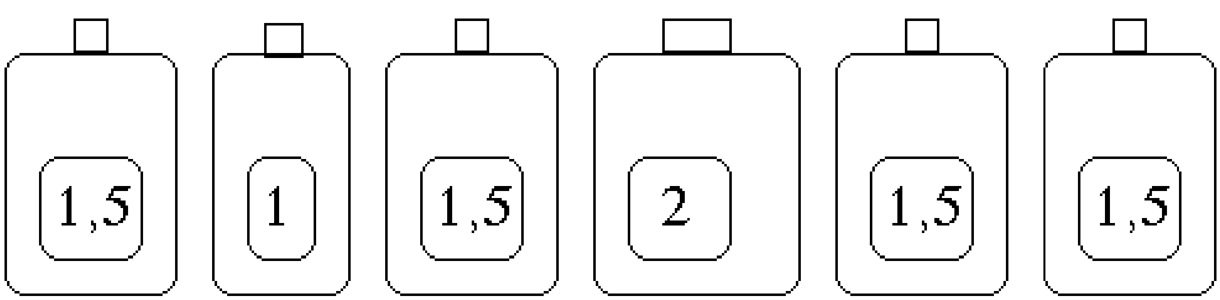
Occorre però tenere presente che se lo strumento già conosciuto facilita, in quanto contesto noto, la costruzione delle nuove conoscenze, nello stesso tempo, poiché si stanno usando "segni vecchi per nuovi significati", le conoscenze precedenti relative ai numeri naturali creano un ostacolo alla comprensione del nuovo (densità della retta). Solo il riconoscimento e il superamento di questo ostacolo può far evolvere verso nuove conoscenze: gli alunni devono capire che cominciano ad operare in un nuovo mondo di numeri, dove coesistono le regole e i significati dei numeri naturali insieme a regole e significati nuovi.

Descrizione delle attività.

<u>Attività 1.</u>

L'insegnante invita gli alunni ad operare all'interno di una situazione problema centrata su una festa di compleanno:

"Pochi giorni fa, in classe, abbiamo festeggiato un compleanno. Abbiamo portato dei dolci e delle bevande. Poi abbiamo riordinato la classe e raccolto le bottiglie vuote, che sono state riposte in questa borsa. Ho pensato di non buttarle, ma di proporvi un problema, utilizzando proprio queste bottiglie."

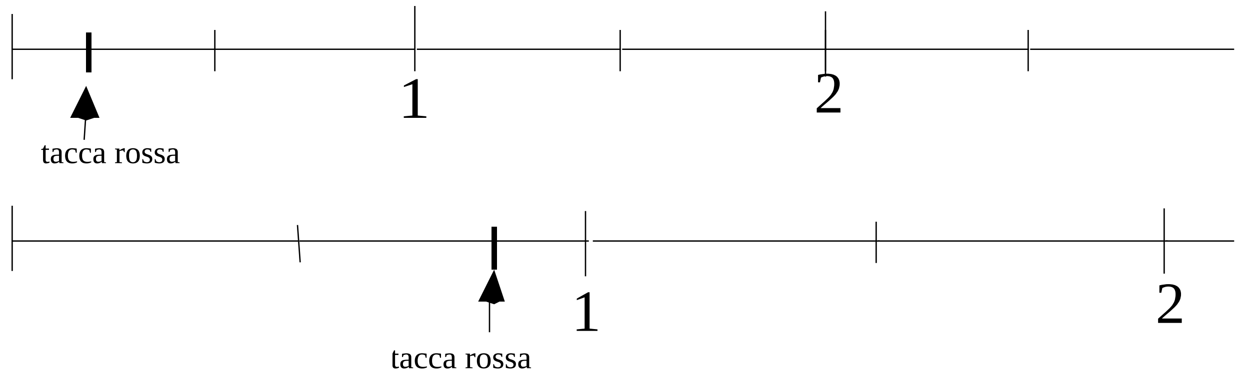


L’insegnante pone su un tavolo le bottiglie: una da un litro, quattro da un litro e mezzo e una da due litri.
“Quanti litri di bevande abbiamo bevuto durante la festa di compleanno?”
Un alunno o, se necessario lo stesso insegnante, può porre immediatamente questo problema, avviando così il primo episodio di discussione:
“In ogni bottiglia quanti litri ci sono?”
Gli allievi ipotizzeranno capacità diverse per le bottiglie raccolte, esprimendo ora accordo ora opposizione rispetto agli interventi precedenti, fino al momento in cui l’attenzione di tutti sarà rivolta alla lettura delle etichette e l’insegnante avrà modo di chiudere questo primo momento di lavoro, chiedendo di risolvere individualmente o a piccoli gruppi il problema posto.
In questa fase l’insegnante si limita ad osservare gli allievi, non fornisce informazioni o spiegazioni ulteriori, anche se richieste, e non corregge gli errori che rileva; interviene solo per incoraggiare ad esplicitare per scritto le procedure o i tentativi di calcolo messi in atto.
Solo successivamente, raccolti i protocolli e a distanza di qualche giorno, darà spazio alla comunicazione delle ipotesi elaborate ed interverrà per sollecitare la riflessione collettiva in particolare su quei protocolli che presentano alcuni errori previsti ed attesi.
Alcuni alunni, probabilmente, non produrranno alcun tentativo di soluzione circa i numeri decimali “con virgola”, limitandosi ad operare con i due numeri naturali che riconoscono: 2 + 1 = 3 litri, ed esplicitando così la difficoltà incontrata: “*Quei numeri, io non li conosco”*.
Altri alunni tenteranno di risolvere, operando sui numeri decimali.
Alcuni di questi potrebbero attribuire alla scrittura 1,5 il significato di “un mezzo” e non di “uno e mezzo”, quindi diranno che 1,5 + 1,5 = 1; altri opereranno con i numeri decimali così come sanno fare con gli interi: 1,5 + 1,5 = 30; altri ancora potranno procedere in modo rigidamente sequenziale: 2 + 1 = 3 e 3 + 1,5 = 4,5 e 4,5 + 1,5 = 5,5 commettendo un errore tipico di chi sembra governare il solo “registro” dei numeri interi.
Alcuni, infine, risolveranno correttamente il problema, interrompendo questa sequenzialità e dimostrando di possedere, anche se non sempre in modo completo, sia il “registro” degli interi sia quello dei mezzi:*“Io so che mezzo più mezzo fa un litro, ho fatto mezzo più mezzo che faceva due litri, poi ho fatto uno più uno più uno più uno, quattro, quattro più due sei, e gli altri tre, nove”*, oppure: *“Io ho fatto un litro e mezzo per quattro uguale sei, perché ho fatto un litro per quattro, quattro litri, mezzo litro per quattro, fa due litri, due litri più quattro, fa sei”*.
Alcuni incontri successivi possono essere dedicati alla discussione di soluzione di problemi simili ai seguenti:
Su questo bicchiere è indicato il livello che l’acqua può raggiungere.
Accanto compare un numero: 0,2 l.
Quante volte occorre versare l’acqua contenuta in questo bicchiere, in modo da riempire una bottiglia da un litro? E da mezzo litro?
Su questo bicchiere è indicato il livello che l’acqua può raggiungere.
Accanto compare un numero: 0,1 l.
Quante volte occorre versare l’acqua contenuta in questo bicchiere, in modo da riempire una bottiglia da un litro? E da mezzo litro?
A titolo di esempio riportiamo la soluzione ad un problema proposta da un alunno:
“Per riempire la bottiglia da mezzo litro devi riempire tre volte il bicchiere da due decilitri. La prima e la seconda volta l’acqua ci sta tutta ... la terza volta no ... allora versa tutta l’acqua che ci sta ancora nella bottiglia … l’acqua che rimane nel bicchiere è la metà, è un decilitro.”
Questa attività di introduzione sui numeri decimali può terminare con la costruzione di una “linea dei litri” segnando su una striscia adesiva posta verticalmente su un contenitore trasparente da due o più litri, il livello raggiunto dall’acqua contenuta in recipienti di capacità diversa. Ad esempio, si può per prima cosa versare più volte l’acqua contenuta in una bottiglia da un litro e segnare via via le tacche 1 – 2 - …; poi si può procedere versando l’acqua contenuta in una bottiglia da mezzo litro e segnare così le tacche 0,5 - 1,5 – 2,5 - …; e così via, versando l’acqua contenuta in bicchieri da

0,2 l o 0,1 l. In questo modo si otterrà un primo modello di retta dei numeri con la suddivisione in decimi.

Attività 2.

Questa attività serve ad operare una prima decontestualizzazione delle nuove conoscenze relative ai numeri decimali. E' prevista per gruppi di 3/4 bambini. Ogni gruppo riceve una striscia di carta con una retta dei numeri sulla quale sono indicati solo alcuni numeri interi e una "tacca" rossa. Le strisce sono di due tipi: una striscia riporta la "tacca" rossa in corrispondenza del numero 0,2 e l'altra del numero 0,8, anche la lunghezza delle strisce e la distanza delle "tacche" sono diverse.



L'assenza di alcune "tacche" corrispondenti ai numeri decimali, le dimensioni diverse delle strisce, l'assenza del numero zero "costringono" gli alunni a ricercare la strategia risolutiva corretta: misurare l'intervallo tra un intero e l'altro e dividerlo in dieci parti uguali.

"Qual è e come si scrive il numero che occupa il posto segnato dalla tacca rossa? Spiegate come avete fatto a scoprirlo."

Trovata la soluzione, il compito del gruppo non è però concluso, devono produrre un testo scritto per comunicare agli altri gruppi dove si trova il numero appena scoperto, tenendo presente che le strisce hanno lunghezza diversa: il testo è il frutto della negoziazione che deve avvenire nel gruppo durante tutta la conduzione dell'esperienza.

"Comunicate ai compagni degli altri gruppi come devono fare per segnare il numero che avete scoperto sulla loro striscia, la loro striscia non è lunga come la vostra."

Questa fase dell'attività prevede lo scambio dei messaggi e la verifica della loro comprensibilità: solo una comunicazione chiara e corretta che indichi esattamente come deve essere suddivisa la retta per trovare i decimi, può consentire ai gruppi che ricevono il messaggio di indovinare il numero "misterioso" e di collocarlo correttamente sulla loro striscia. La contrattazione dei bambini avviene all'interno del gioco in una situazione reale: il gruppo che riceve il messaggio ha funzione di controllo, di validazione della strategia risolutiva. Anche in questo caso è importante che tutti i gruppi esplicitino procedure e difficoltà attraverso la discussione. Al termine dovrà essere negoziata una strategia unica che consenta di indicare i decimi sulla retta.

Successivamente possono essere proposti problemi analoghi dagli stessi gruppi di alunni, oppure l'insegnante può richiedere la collocazione di altri numeri decimali anche attraverso la suddivisione della retta in centesimi.

Elementi di prove di verifica

1 - Indica con una crocetta la risposta che ritieni corretta, poi spiega come hai calcolato.

1,5 + 1,5 + 1,5 =

❑ 3,15
❑ 3,5
❑ 4
❑ 4,5

Perché? ____
____

0,6 + 0,4 =

❑ 0,10
❑ 1
❑ 1,0
❑ 10

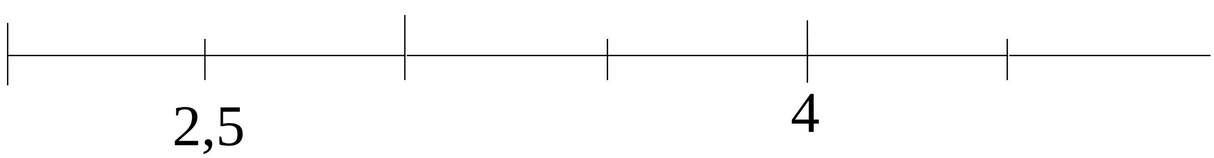
Perché? ____
____

0,3 + 0,2 + 0,8 =

❑ 13
❑ 0,13
❑ 13,0
❑ 1,3

Perché? ____
____

2 - Scrivi questi numeri sulla retta : 3 – 2,1 – 4,6



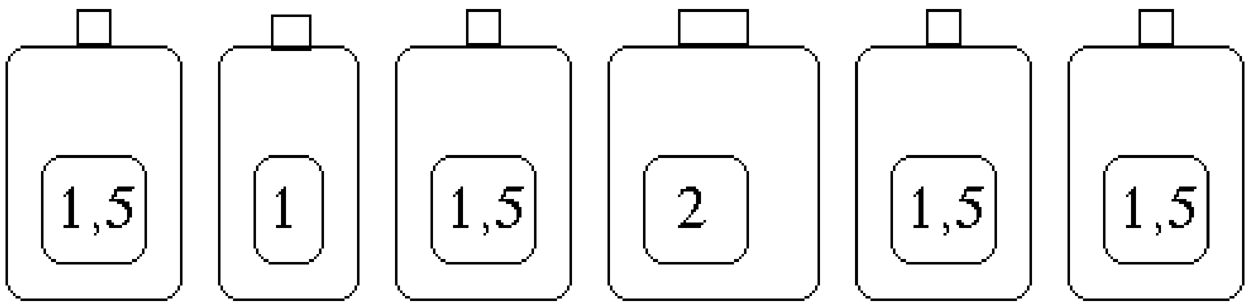
Allegato - I numeri decimali: un esempio di discussione matematica

Utilizziamo, al fine di dare alcune semplici suggestioni su come effettivamente si possa attuare in un gruppo classe una discussione matematica, la documentazione raccolta in una classe terza elementare sulla prima attività qui presentata di introduzione dei numeri decimali.[2]

Analisi dei protocolli dei singoli allievi

L'insegnante invita gli alunni ad operare all'interno di una situazione problema (vedi attività 1) centrata su una festa di compleanno:

"Pochi giorni fa, in classe, abbiamo festeggiato un compleanno. Abbiamo portato dei dolci e delle bevande. Poi abbiamo riordinato la classe e raccolto le bottiglie vuote, che sono state riposte in questa borsa. Ho pensato di non buttarle, ma di proporvi un problema, utilizzando proprio queste bottiglie. Quanti litri di bevande abbiamo bevuto durante la festa di compleanno?"



L'insegnante analizza i protocolli dei singoli alunni, individua le strategie messe in atto e le conoscenze utilizzate, gli errori commessi o i misconcetti presenti, i modelli impliciti o espliciti ai quali gli alunni hanno fatto riferimento, le forme di rappresentazione impiegate, ..., per poter preparare in modo mirato la successiva fase di lavoro con gli alunni.

2 + 1 = 3 Gisella, Greta, Noemi, Thomas e Valentina (1)	2 + 1 = 3 1,5 + 1,5 = 1 Micol (2)
2 + 1 = 3 1,5 + 1,5 = 2,5 Stefano (2)	2 + 1 = 3 1,5 + 1,5 = 30 Rocco e Rosaria (2)
2 + 1 = 3 1,5 + 1,5 = 3 1,5 + 1,5 = 3 3 + 3 + 3 = 9 Gian Marco e Roberta (3)	2 + 1 = 3 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 = 6 oppure 1,5 x 4 = 6 3 + 6 = 9 Andrea, Angelo, Domenico, Francesca, Marco, Marco B. e Tatiana (3)

[2] Le tabelle qui presentate, riguardanti l'analisi degli interventi sia degli alunni sia dell'insegnante, sono state costruite ed utilizzate dagli insegnanti che partecipano alle attività di formazione e aggiornamento promosse dal Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica coordinato dal prof. Ferdinando Arzarello. Gli strumenti di studio più significativi e preziosi impiegati a tal fine, sono stati le ricerche e i materiali elaborati dal Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università degli Studi di Modena, coordinato dalla prof.ssa Maria G. Bartolini Bussi:

Bartolini Bussi M.G. La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Centro Ricerche Didattiche Morin, Paderno del Grappa, 1989, 12 (1), 6 - 49; 1989, 12 (5), 615 - 654; 1991, 14 (3), 244 - 258; 1991, 14 (5), 408 - 436.

Bartolini Bussi M. G., Boni M., Ferri F. Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica. CDE Comune di Modena.

Osservazioni dell’insegnante:

(1) Cinque alunni non producono alcun tentativo di soluzione, limitandosi ad operare con i due numeri naturali che riconoscono: 2 + 1 = 3 litri. Noemi in particolare esplicita la difficoltà di questi alunni ad operare con i numeri decimali: “Quei numeri, io non li conosco.”.

(2) Quattro alunni tentano di risolvere. Micol sembrerebbe attribuire alla scrittura 1,5 il significato di “un mezzo”, mentre Rocco e Rosaria evidentemente operano con i numeri decimali così come sanno fare con gli interi. L’errore riscontrato nel protocollo di Stefano, invece, è stato più volte incontrato in altre classi, commesso solitamente da alunni che governano il solo “registro” degli interi e che procedono in modo rigidamente sequenziale. 2 + 1 = 3 e 3 + 1,5 = 4,5 il problema per loro è aggiungere il successivo litro e mezzo: 4,5 + 1,5 = 5,5.

(3) I nove alunni che risolvono correttamente il problema sembrano aver interrotto la sequenzialità vista in Stefano e possedere, anche se non sempre in modo completo, sia il “registro” degli interi sia quello dei mezzi.

L’insegnante coordina quindi, a distanza di qualche giorno, una discussione di bilancio, invitando gli alunni a comunicare, analizzare e valutare le diverse soluzioni. La discussione è audioregistrata e trascritta dall’insegnante. Grazie alla trascrizione di tutti gli interventi effettuati sia dagli alunni sia dall’insegnante, si ha l’opportunità di effettuare un’analisi accurata e di raccogliere così dati quantitativi e qualitativi relativamente ai processi di insegnamento – apprendimento.

Analisi degli interventi degli alunni

Disponibilità.	È disponibile ad ascoltare.
	Presta attenzione.
Interazione.	Interviene spontaneamente.
	Fa interventi pertinenti.
	Ripete e/o conferma interventi precedenti.
	Esprime opposizione.
Esplicitazione.	Dichiara le procedure e/o le informazioni utilizzate, anche rievocando esperienze precedenti e/o occasioni estrascolastiche.
	Controlla e/o valuta la consistenza di un ragionamento, avanzando domande, delimitazioni, obiezioni.
	Formula ipotesi interpretative e/o risolutive.
	Argomenta le ipotesi.
	Pone o riformula problemi.
	Manifesta le difficoltà e/o gli errori.
	Riconosce gli apprendimenti.
Generalizzazione.	Generalizza.

L’insegnante registra la disponibilità di ciascun alunno ad ascoltare e a prestare attenzione; rileva, inoltre, se l’alunno interviene spontaneamente e se effettua interventi pertinenti.

Illustriamo ciascuna tipologia di intervento attraverso alcuni esempi, registrati durante questa discussione di bilancio.

- <u>Interazione.</u>

<u>Thomas</u>, ad esempio, quasi sempre si limita a ripetere o a confermare l’intervento precedente:

<u>38.</u> Anch’io uguale a Noemi.

<u>54.</u> Io sono d’accordo con Gian Marco, perché zero sono zero litri e cinque sono un litro e mezzo.

<u>79.</u> Sono d’accordo con Gian Marco.

in alcuni casi invece esprime semplicemente opposizione:

<u>88.</u> No, mezzo litro.

- <u>Esplicitazione.</u>

<u>Gian Marco</u> ricostruisce il proprio processo risolutivo e non solo dichiara la procedura utilizzata, ma manifesta in modo evidente le difficoltà incontrate ed esplicita l’errore commesso:

<u>118.</u> Io ho fatto quello perché pensavo ... ho contato un litro e mezzo più un litro e mezzo, allora ho detto se è un litro e mezzo più un litro e mezzo allora sarà due litri e mezzo.

119. Ins. Perché?

120. Perché io non contavo mezzo litro, facevo solo quello, non mi sono accorto che un litro e un litro facevano due litri e mezzo litro più mezzo litro faceva un litro; io ho contato così perché pensavo che era come gli altri numeri, allora ho fatto la stessa cosa.

121. Ins. Cosa vuoi dire con era uguale agli altri numeri?

122. Un litro e mezzo era come mettere in colonna quindici più quindici. È come mettere in colonna un numero da due cifre.

123. Ins. Sul tuo foglio non ci sono addizioni in colonna.

124. No, però l’ho fatto mentalmente. Un litro e mezzo più un litro e mezzo faccio due litri e mezzo, perché un litro più litro facevano due litri, poi ho preso quel mezzo e l’ho messo a fianco di due litri e mi è venuto due litri e mezzo.

128. Prima di far quello, quando li avevo messi in colonna mentalmente, l’avevo contato il cinque, solo che ho detto che era sbagliato, provo a fare così. Quel cinque, quel mezzo l’ho ripetuto due volte, mi è venuto dieci, poi non ho più fatto questo e ho fatto quello là, un litro e mezzo più un litro e mezzo, due litri e mezzo.

<u>Gian Marco</u> è inoltre capace di controllare la consistenza di un ragionamento e di formulare un’ipotesi interpretativa dell’errore commesso da altri. Micol, una sua compagna, ha presentato il suo lavoro:

75.Micol ... mezzo litro più mezzo litro fa un litro … (e scrive) …1,5 + 1,5 = 1 litro

84. Secondo me è sbagliato, perché è vero che mezzo litro più mezzo litro fa un litro, però lei ha preso un litro e mezzo più un litro e mezzo, non ha preso mezzo litro più mezzo litro, lei ha preso tutto insieme. Un litro e mezzo più un litro e mezzo e sopra ha scritto un litro, invece sono tre litri.

<u>Marco</u> e <u>Tatiana</u> argomentano l’ipotesi di Micol “mezzo litro più mezzo litro fa un litro”:

78. Marco Sì, per esempio per il dieci, cinque è la metà di dieci, quindici è come se fosse un litro e mezzo, c’è il dieci e il cinque ... un litro si può fare la metà, si può dividere ... se lo dividi in due parti uguali è mezzo litro ...

79. Tatiana Mezzo litro più mezzo litro fa un litro, perché mezzo è la metà di uno, allora se mezzo è la metà di uno, mezzo più mezzo fa uno. Fa un litro.

<u>Angelo</u> e <u>Marco</u>, ascoltata Sara che ha presentato la propria soluzione, poi corretta da altri alunni, pongono due problemi di scrittura:

16. Sara Cinque più cinque, dieci, uno più uno fa due, più uno, tre, mi è venuto trenta.

17. Domenico Ma c’è la virgola, si vede che c’è un intermezzo.

18. Greta Non si può leggere uno virgola cinque ... quindici.

19. Marco Eh, sì ...
20. Ins. Che cosa occorrerebbe fare?
21. Domenico Mettere una virgola tra il tre e lo zero.
22. Roberta Sì, la virgola è in colonna con la virgola.
23. Ins. In questo modo il risultato sarebbe ...
24. Voci Tre litri.
25. Angelo Ma se il risultato è venuto tre virgola zero che si dice tre litri, perché sui risultati che ci sono sugli altri fogli non c'è lo zero, c'è solo scritto tre e non virgola zero?
26. Ins. Angelo si sta chiedendo se scrivere tre o tre virgola zero è la stessa cosa.
27. Angelo Non so se è giusto scrivere solo tre.
33. Marco Se lei non metteva cinque più cinque e metteva mezzo più mezzo che faceva un litro, sotto metteva uno, uno più uno due, faceva ventuno. Ha contato cinque più cinque, poteva contare anche mezzo più mezzo. E mezzo più mezzo fa un litro, se metti sotto un litro e poi fai uno più uno, fa ventuno.

La discussione si conclude con numerosi interventi di alunni che riconoscono gli apprendimenti:

156. Ins. Che cosa abbiamo imparato risolvendo questo problema?
157. Voci I litri ... la metà ...
158. Roberta Abbiamo imparato ... come si scrivono i litri ...
160. Roberta ... in numero.
162. Roberta Un litro e mezzo.
164. Roberta Uno virgola cinque.
165. Domenico Poi ... la metà di un numero.
166. Francesca Diviso due.
169. Marco Poi abbiamo imparato la metà di uno ... uno diviso due ... uguale zero virgola cinque.
173. Greta Mezzo litro più mezzo litro fa un litro.
176. Thomas Zero virgola cinque più zero virgola cinque uguale un litro.
177. Tatiana Un litro e mezzo più un litro e mezzo.
181. Tatiana Un litro e mezzo più un litro e mezzo è uguale a tre litri.

- Generalizzazione.

  Non si sono registrati interventi di generalizzazione.

Analisi degli interventi dell'insegnante.

Dà forma al processo di interazione e di comunicazione.
Formula o riformula problemi.
Invita ad esplicitare le procedure messe in atto e le informazioni utilizzate e a controllare la consistenza di un'ipotesi interpretativa e/o risolutiva, ad argomentarla e/o a riflettere su difficoltà ed errori.
Invita a costruire una memoria individuale e collettiva che consenta di collegare ciò che è nuovo a ciò che è stato appreso.
Dà uno statuto ufficiale agli elementi di conoscenza appresi nel corso dell'attività.

- L'insegnante dà forma al processo di interazione e di comunicazione.

Sono gli interventi più frequenti e caratterizzano la metodologia di lavoro attuata in classe.

- L'insegnante formula o riformula problemi.

L'insegnante formula il problema iniziale:

1. ins. Pochi giorni fa, in classe, abbiamo festeggiato un compleanno. Abbiamo portato dei dolci e delle bevande. Poi abbiamo riordinato la classe e raccolto le bottiglie vuote, che sono state riposte in questa borsa. Ho pensato di non buttarle, ma di proporvi un

problema, utilizzando proprio queste bottiglie. Quanti litri di bevande abbiamo bevuto durante la festa di compleanno? ... Osservate le bottiglie ... Avete domande da porre? ... Poi ognuno lavorerà da solo: scriverà quanti litri sono stati bevuti e spiegherà come ha proceduto per contarli.

L'insegnante riformula il problema posto da Marco, in quanto ritiene che in quel momento tale problema non sia riconosciuto dalla maggioranza degli alunni della classe:

34.36. ins. "Abbiamo ascoltato tutti Sara mentre eseguiva questa addizione: cinque più cinque, dieci, scrivo zero, riporto uno, uno più uno più uno, tre. Su suggerimento di Domenico ha aggiunto la virgola: un litro e mezzo più un litro e mezzo è uguale a tre litri. Marco dice: se Sara contava mezzo più mezzo, e ormai tutti sappiamo che mezzo più mezzo fa ... E scriveva uno, poi continuava a contare: uno più uno, due; il risultato era ventuno."

42. ins. "Torneremo più tardi a discutere su queste ultime osservazioni e sulla domanda di Angelo. Ora vorrei porvi solo questa domanda: come si scrive mezzo litro?"

- <u>L'insegnante invita ad esplicitare le procedure messe in atto e le informazioni utilizzate.</u>

L'insegnante presenta il protocollo di Stefano e gli chiede di esplicitare la procedura seguita:

95. Ins. Un litro e mezzo più un litro e mezzo, Stefano ha scritto due e mezzo. Ha disegnato come Micol le bottiglie, la bottiglia da un litro, la bottiglia da due litri, ha scritto un più tra le due bottiglie e sopra ha scritto tre, poi ha disegnato una bottiglia da un litro e mezzo, la seconda bottiglia da un litro e mezzo e sopra ha scritto due virgola cinque. Perché, Stefano?

96. Stefano Allora ... uno virgola cinque ... prendo l'uno e lo metto in tasca ... poi faccio uno virgola cinque, prendo l'uno ... uno più uno due ... e il cinque valgono mezzo ... due più un mezzo, due e mezzo.

- <u>L'insegnante invita a controllare la consistenza di un'ipotesi interpretativa e/o risolutiva, ad argomentarla e/o a riflettere su difficoltà ed errori.</u>

L'insegnante effettua interventi di questo tipo:

Cosa vuoi dire? … Perché? … Qual è l'errore? … Tu cosa hai pensato? …

Cosa occorre fare? …Allora il risultato sarebbe? ....

- <u>L'insegnante invita a costruire una memoria individuale e collettiva che consenta di collegare ciò che è nuovo a ciò che è stato appreso.</u>

L'insegnante ricorda strategie individuali o di gruppo, invita a ricordarle e a confrontarle, in modo tale che strategie individuali non corrette o incomplete possano convergere verso strategie corrette e condivise dal gruppo classe:

134. Marco Un litro e mezzo più un litro e mezzo uguale tre. Dopo che ho saputo che un litro e mezzo più un litro e mezzo è uguale a tre, ho voluto scrivere un litro e mezzo più un litro e mezzo più un litro e mezzo più un litro e mezzo ... sapendo che fa tre ... tre più tre, fa sei.

139. Ins. Quando avete incominciato a calcolare, avete ogni volta aggiunto uno e mezzo insieme?

140. Voci No, perché era troppo difficile.

141. Ins. E allora che cosa avete pensato di fare?

142. Voci Di dividere.

143. Marco Abbiamo contato prima tutti i litri e poi tutti i mezzi.

144. Angelo Così era più facile.

145. Ins. Quanto dice Marco si può fare, perché un litro e mezzo è uguale a ...

146. Valentina Un litro più mezzo litro.

147. Micol Un litro più mezzo.

148. Ins. Vi ricordate che Stefano la volta scorsa a questo proposito ha detto una cosa molto interessante, molto facile da ricordare: ho una bottiglia da un litro e mezzo, immagino di togliere il mezzo, lo metto in tasca, mi rimane un litro? È quanto avete

fatto ora con tutte le quattro bottiglie da un litro e mezzo, quindi si possono contare separatamente prima tutti i litri, poi tutti i mezzi.

• <u>L’insegnante dà uno statuto ufficiale agli elementi di conoscenza appresi nel corso dell’attività.</u>

L’insegnante, ritenendo conclusa almeno in parte l’attività, istituzionalizza le conoscenze scaturite, invitando gli alunni a scrivere sul “quaderno della memoria” le conoscenze costruite e dichiarate durante la discussione:

Che cosa abbiamo imparato?

si scrive	si legge
1,5 l	un litro e mezzo
1,5	uno e mezzo
0,5 l	mezzo litro
0,5	mezzo
1/2	mezzo

1 : 2 = 0,5
0,5 + 0,5 = 1
1,5 = 1 + 0,5
1,5 + 1,5 = 1 + 0,5 + 1 + 0,5 =
= (1 + 1) + (0,5 + 0,5) =
= 2 + 1 = 3

1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 = 1 + 0,5 + 1 + 0,5 + 1 + 0,5 + 1 + 0,5 =
= (1 + 1 + 1 + 1) + (0,5 + 0,5) + (0,5 + 0,5) =
= 4 + 1 + 1 = 6

Divisione: dal significato alle procedure

Livello scolare: 4ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali. Verbalizzare le strategie risolutive scelte per la soluzione dei problemi e usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle. Calcolare il risultato di semplici moltiplicazioni e divisioni. Eseguire semplici calcoli mentali con moltiplicazioni e divisioni, utilizzando le tabelline e la proprietà distributiva. Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema. Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti.	Moltiplicazione e divisione tra numeri naturali. Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali. Numeri interi. Addizione e sottrazione tra numeri interi. Proprietà delle operazioni.	<u>Numero</u> Problemi	Lingua italiana

<u>Attività proposte</u>
Attività 1 – Situazione di divisione di contenenza
Attività 2 – Situazione di divisione di ripartizione
Attività 3 - Situazione di confronto di strategie di calcolo

Contesto
Fra il secondo e il terzo anno è bene che vengano proposti ai bambini vari problemi di divisione, avendo come obiettivi l'acquisizione dei significati fondamentali della divisione e la costruzione della procedura di calcolo scritto dell'operazione. Se è opportuno tenere distinti i due obiettivi, tuttavia è necessario considerare il contributo che il lavoro sulle strategie di calcolo attivate prima dell'introduzione della tecnica di calcolo scritto dà alla costruzione dei significati della divisione.
Presentiamo un possibile percorso, che richiede lo svolgimento di diverse attività. L'insegnante deve considerare che il tempo impiegato a svolgere il percorso così come è indicato è tempo che si guadagna nel minor tempo da dedicare alla memorizzazione della procedura, che risulta padroneggiata con più consapevolezza.
Naturalmente, come già segnalato nei primi due anni per la costruzione dei significati dell'addizione, della sottrazione e della moltiplicazione, è importante che la costruzione dei significati dell'operazione preceda l'introduzione della tecnica di calcolo scritto.

Nella successiva descrizione delle attività proposte, gli esempi riguarderanno spesso calcoli con le lire. Poiché gli esempi sono indicativi della metodologia e non costituiscono proposte di attività da svolgere in classe, non si è ritenuto sempre necessario tradurre le situazioni in euro.

Descrizione delle attività

Inizialmente, l'operazione di divisione non suggerirà al bambino modalità operative numeriche efficienti. Dovendo affrontare all'interno di una situazione semanticamente padroneggiata una operazione di divisione, il bambino frequentemente mette in atto una strategia di calcolo che procede per tentativi. Ad esempio, dovendo calcolare 1000 : 4, il bambino dice: *"Provo per 300, lo ripeto 4 volte fa 1200, è troppo, provo per 200,…, provo per 250, va bene..."* . L'operazione di divisione, per la corrispondenza tra la semantica abitualmente attribuita e l'operazione materiale che suggerisce e che il bambino compie (praticamente o con il pensiero) per risolvere le situazioni problematiche ad esse inerenti, viene ad assumere il significato di "ripartire-frazionare".

Affrontando (anche nei primi due anni) situazioni problematiche di divisione come "contenenza" generalmente il bambino non le riconosce come situazioni di divisione. Consideriamo la seguente situazione problematica: *"Quanti biscotti da 300 lire posso comprare con una banconota da 1000 lire ?"* Se il bambino non dispone ancora dell'algoritmo della divisione, capisce che con il solo biglietto da 1000 lire non può risolvere il problema: deve convertire le 1000 lire in monete da 100 lire e quindi contarle separatamente. La maggioranza dei bambini procede così:

"Spendo 300 lire ed è già un biscotto; poi ancora 300 per un altro biscotto ed ho già speso 600 lire;…"

Altri procedono così:

"Da 1000 lire tolgo 300 lire ed ho già comprato un biscotto e mi restano 700 lire; tolgo altre 300 lire…"

La specificità della situazione problematica considerata induce nel bambino particolari strategie di ragionamento che non possono venir riconosciute come ragionamenti di divisione e quindi tanto meno venir rappresentati con il segno ":". L'operazione di divisione (come d'altra parte già l'operazione di sottrazione, con le semantiche del "togliere" e del "completare") presenta una difficoltà che non può essere evitata: essa richiama due significati importanti, uno dei quali (il "contenere") è estraneo alla semantica del "dividere" secondo il senso comune. Tuttavia il bambino dovrà pervenire a riconoscere nell'operazione di divisione il modello matematico adeguato anche alla situazione problematica di contenenza sopra illustrata, anche perché l'algoritmo utilizzato usualmente per il calcolo scritto della divisione fa riferimento alla semantica della "contenenza".

L'insegnante deve abituare i bambini a verbalizzare in modo preciso il ragionamento seguito, aiutandoli, se è il caso, nella rappresentazione numerica della strategia di calcolo adottata; in tal modo potrà far pervenire gli alunni al riconoscimento di affinità tra l'operazione di ripetere (attraverso l'addizione o la sottrazione) un numero inizialmente sconosciuto di volte un valore conosciuto fino a raggiungere il valore desiderato e il procedere per tentativi, impiegato nei problemi di ripartizione, in cui è sconosciuto il valore da ripetere un numero di volte conosciuto:

("contenenza": biscotti)

$$300 \xrightarrow{+\,300} 600 \xrightarrow{+\,300} 900$$

$$300 \times \overset{3}{\ldots\ldots} = 900$$

AFFINE A :

("ripartizione": 1000 : 4 =)

… provo per 250

$$\overset{250}{\ldots\ldots\ldots} \times 4 = 1000$$

L'insegnante deve aver cura di osservare attentamente le strategie di calcolo che i bambini mettono in atto nella risoluzioni di problemi riguardanti la divisione, senza cedere alla tentazione di avviare gli alunni precocemente ad una tecnica di calcolo scritto. Noterà che inizialmente tenderanno ad emergere due strategie di ragionamento operativo generali: la pratica di ripartire un "mucchio" di oggetti distribuendoli equamente, attraverso la manipolazione o il ricorso al disegno (si tratta di una strategia che comporta il rischio, soprattutto se insegnata, di essere assunta dai bambini più deboli come l'unica strategia presa in considerazione, bloccandoli appena i valori numerici la rendono ingestibile); la pratica del procedere per tentativi, che appare dapprima nei problemi di "ripartizione" e che poi si estende anche ai problemi di contenenza.

Compito dell'insegnante, attraverso momenti di confronto fra le strategie utilizzate nella classe, è di far emergere il valore più generale del secondo tipo di strategie.

Agendo all'interno di situazioni problematiche sempre più impegnative, i bambini tenderanno a diversificare le strategie di calcolo messe in atto con i tentativi. E. Ferrero (L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 1990) distingue almeno tre tipi di strategie di calcolo generate dal "provo per…":

prove distinte successive senza un criterio prestabilito, ma con lo scopo di avvicinarsi il più possibile al risultato

(Spesa di 32.000 da dividere fra 18 bambini: *"Se pagano 1000 lire a testa, fa 18000 lire, troppo poco. Se pagano 2000 lire fa 36000, che è troppo. Provo con 1500, fa 27000, è ancora poco. Provo con 1700, fa 27000 poi aggiungo ancora 3600 e fa 30600. E' ancora poco. Provo con 1800,…ecc.")*

avvicinamento progressivo al dividendo mediante approssimazioni successive del quoziente che ogni volta viene moltiplicato per il divisore in modo da orientare le approssimazioni successive (prova iniziale, ripetizione della prova con lo stesso ordine di grandezza fino al risultato migliore, poi nuove prove con ordini di grandezza minori)

(Stesso problema: "*Provo con 1000, fa 18000, allora provo con 1100, fa 19800, allora provo con 1200, fa 21600… (ecc.) provo per 1800 e vedo che fa 32400, allora torno indietro a 1700 a testa che faceva 30600 e poi provo con 1710…ecc.")*

svuotamento progressivo del dividendo attraverso il calcolo di quanto resta dopo aver tolto dal dividendo il risultato delle prove iniziali, nuove prove sul resto e così via fino allo svuotamento del dividendo.

(Stesso problema: *"18 per 1000 a testa fa 18000; resta da dividere 14000; 18 per 100 fa 1800, troppo poco; provo con 18 per 500 a testa, fa 9000; resta da dividere ancora 5000 lire; 18 per 100 fa 1800, 18 per 200 fa 3600, resta da dividere ancora 1400,… ecc.")*

Di fronte alla possibile varietà di strategie di calcolo, emerge il problema del ruolo dell'insegnante. Nel corso del terzo anno e all'inizio del quarto l'insegnante dovrebbe indirizzare progressivamente l'intera classe all'utilizzo della strategia di calcolo di progressivo svuotamento del dividendo. A questo proposito i problemi che si pongono all'insegnante sono di due ordini e riguardano il "come" e il "perché".

Convogliare i bambini della classe verso una determinata strategia ha senso farlo attraverso i momenti di confronto e di discussione, successivi al lavoro individuale, in cui è possibile far riflettere i bambini sul significato e sull'economicità delle strategie elaborate.

Per quanto riguarda le ragioni della scelta rispetto alla strategia di svuotamento del dividendo, esse sono sostanzialmente due:

è l'unica strategia "universale" (nel senso che è applicabile sensatamente a ogni situazione di divisione) fra quelle prodotte spontaneamente

è la strategia semanticamente corrispondente alla usuale tecnica di calcolo scritto (che risulta, in verità, una contrazione di questa strategia).

La padronanza consapevole della tecnica di calcolo scritto della divisione è raggiungibile solo se viene curata la delicata transizione dalle strategie spontanee, le quali, per poter essere riconosciute dai bambini come "procedure", devono essere state oggetto di riflessione. Per consentire a tutti i bambini di comprendere l’algoritmo della divisione potrebbe essere opportuno il passaggio ad una tecnica di calcolo meno contratta di quella abitualmente insegnata. Una possibilità (che ha radici storiche antiche) è quella data dall’organizzazione dei “tentativi” che mirano a svuotare progressivamente il dividendo :

ad esempio: 5725 : 42 =
(tratto da Ferrero, E. , 1990)

SVUOTAMENTO PROGRESSIVO DEL DIVIDENDO

5725 -	42
<u>4200</u>	
1525 -	42 x 100
<u>840</u>	
685 -	42 x 20
<u>420</u>	
265 -	42 x 10
<u>252</u>	
13	42 x <u>6</u>
	136 (quoziente)

(Si noti che la stima errata non produce conseguenze irreparabili sul procedimento)

PROCEDURA TRADIZIONALE

5725	42
<u>42</u>	
152	136
<u>126</u>	
265	
<u>252</u>	
13	

Come si può notare, la divisione così impostata permette al bambino di effettuare alcuni passaggi in modo naturale. Innanzitutto ha un maggior controllo della procedura: gli è chiaro che i risultati delle sottrazioni rappresentano la parte del dividendo che è ancora da dividere, può comprendere agevolmente il significato del resto, gli è indifferente l’entità del divisore (se a una o più cifre). Inoltre ha la possibilità di effettuare tentativi infruttuosi (cioè che possono risultare esorbitanti o non sufficienti) senza inficiare il procedimento: l’*errore*, cioè, viene recuperato all’interno della procedura. Infine, la procedura dello svuotamento progressivo del dividendo presenta diversi vantaggi rispetto al passaggio ai numeri decimali, sia perché il calcolo può essere proseguito oltre le unità, sia perché il divisore e il dividendo possono essere rappresentati anche da numeri decimali, senza cambiamenti nella procedura.
L’introduzione della tecnica di calcolo tradizionale “a freddo”, cioè senza un intreccio con le strategie spontanee portatrici del senso del “dividere”, risulta un fattore di difficoltà, soprattutto per gli allievi più deboli, ma in generale per tutti i bambini. Infatti, è di difficile comprensione il significato delle divisioni parziali: nell’esempio, quanti bambini hanno la consapevolezza che “15” (il primo resto parziale) sia in realtà “1500” e che l’”uno” del risultato, nel momento in cui viene scritto, sia in realtà “100” ? Il rischio è dunque un apprendimento formale e meccanico.
La transizione fra le due tecniche mostrate in tabella consente anche la comprensione di quella tradizionale, attraverso la possibilità di interpretare l’implicito presente nella procedura contratta alla luce della procedura di svuotamento progressivo del dividendo.
Un’ultima annotazione è necessaria: la procedura di svuotamento progressivo del dividendo richiede che i bambini abbiano sviluppato una sensibilità all’ordine di grandezza delle cifre e una padronanza sufficientemente sicura nel calcolo mentale, soprattutto nelle moltiplicazioni per 10, 100, 1000.

Vince il più piccolo

Livello scolare: 3ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Comprendere il significato e l'uso dello zero e della virgola. Comprendere il significato del valore posizionale delle cifre nel numero naturale e nel numero decimale. Confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi. Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni con padronanza degli algoritmi, usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita, abaco, calcolatrici, …); controllare la correttezza del calcolo, stimando l'ordine di grandezza. Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni. Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, …) , concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all'obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate. Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti.	Operazioni tra numeri decimali. Proprietà delle operazioni.	<u>Il numero</u> Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana

<u>Attività proposte</u>

Attività 1 - Budini, torte e biscotti
Attività 2 - La colazione
Attività 3 - Dal macellaio
Attività 4 - Vince il più piccolo

Commenti
Le attività proposte consentono di affrontare un ostacolo epistemologico molto forte. Occorre costruire una nuova conoscenza, relativa alla moltiplicazione tra un numero intero e un numero < 1, che va contro, è in opposizione, all'immagine di moltiplicazione tra due numeri interi indotta dalle esperienze affrontate negli anni precedenti: infatti questo tipo di moltiplicazione fa diminuire e non aumentare il numero moltiplicato *n* volte.

Descrizione delle attività.
L'attività propone tre situazioni problematiche finalizzate alla comprensione dei significati che sottendono all'operazione di moltiplicazione tra un numero intero e un numero decimale, e, più in particolare, con un numero decimale minore di 1.
<u>Budini, torte e biscotti</u>
"Nonna Papera prepara ogni giorno i dolci che vende la domenica ai turisti e durante la settimana al fornaio. Per le torte alla frutta usa 2 litri di latte, per i budini usa 3 litri di latte, per i biscotti usa 2,5 litri di latte. Quanti litri di latte consuma la nonna in una settimana per le torte, per i budini e per i biscotti?E in un mese? E in un anno? Fate le vostre previsioni e spiegate perché."
Stabilito che il consumo settimanale di latte per i biscotti si trova tra 14 litri e 21 litri (perché la nonna per i biscotti usa ogni giorno un po' più di 2 e un po' meno di 3 litri di latte) occorre individuare l'operazione utile a calcolare esattamente la quantità di latte necessario.
L'analogia con i calcoli precedenti "suggerisce" l'operazione 2,5 x 7 (x 30 … x 365), ma poiché l'algoritmo non è ancora conosciuto, gli alunni devono utilizzare strategie di calcolo note (somma dei numeri interi aggiunta alla somma dei "mezzi", riferimento alla retta dei numeri, ecc.) per stabilire il risultato. La calcolatrice può poi essere utilizzata per verificare che le strategie proposte dagli alunni portino effettivamente allo stesso risultato del calcolo 2,5 x 7.
I risultati di tutti i calcoli possono essere riportati in una tabella per essere confrontati:

giorni	*litri (torte)*
1	2
7	14
30	60
365	730

giorni	*litri (biscotti)*
1	2,5
7	17,5
30	75
365	912,5

giorni	*litri (budini)*
1	3
7	21
30	90
365	1095

La riflessione sui risultati dovrebbe condurre gli alunni, che usano come modello di riferimento la retta dei numeri, a fare osservazioni del tipo:
- i litri di latte necessari per i biscotti sono sempre "a metà" tra i litri per le torte e i litri per i budini perché 2,5 si trova a "metà" tra 2 e 3
- solo nella colonna dei biscotti ci sono numeri con la virgola, la differenza tra il latte per le torte e quello per i biscotti è un numero dispari
- nella colonna dei biscotti c'è un numero intero perché in quel caso la differenza tra il latte per le torte e quello per i biscotti è un numero pari.

<u>La colazione</u>
"Qui, Quo e Qua sono in vacanza dalla nonna. Ciascuno di loro beve tutte le mattine un bicchiere di latte. Il bicchiere di Qui contiene 0,2 litri di latte, il bicchiere di Quo ne contiene 0,3 litri, il bicchiere di Qua ne contiene 0,4 litri. Quanti litri di latte beve ogni nipotino durante tutta la settimana?"
Anche questa volta si richiede ai bambini di completare una tabella e di esplicitare le strategie di calcolo utilizzate:

giorni	*litri (Qui)*	*litri (Quo)*	*litri (Qua)*
1	0,2	0,3	0,4
7	?	?	?

Osservando la tabella i bambini dovrebbero ritrovare la tabellina del 7, con qualche "differenza": al posto di 14 c'è 1,4; al posto di 21 c'è 2,1; al posto di 28 c'è 2,8; ...
Per meglio valutare le differenze si possono mettere a confronto le due "tabelline":

	1	0,1	2	0,2	3	0,3	4	0,4	5	0,5	6	0,6	7	0,7	8	0,8	9	0,9	
Â x 7 Ê	7	0,7	14	1,4	21	2,1	28	2,8	35	3,5	42	4,2	49	4,9	56	5,6	63	6,3	Ê x 7 Â

Evidenziando che:
- 14 e 1,4 indicano due diversi ordini di grandezza
- l'operatore che trasforma, ad esempio, il 14 in 1,4 è: : 10
- al contrario, l'operatore che trasforma 1,4 in 14 è: x 10

A questo punto possono essere esplicitate le regole che riguardano la posizione della virgola nel risultato delle moltiplicazioni tra un numero intero e un numero decimale facendo riferimento ai modelli usati in precedenza quali il contatore, la retta dei numeri, ecc … e, se ancora non era stato fatto, le regole riguardanti le moltiplicazioni e le divisioni per le potenze di 10 e i relativi meccanismi di calcolo.

<u>Dal macellaio</u>

Luca e Francesca si trovano in macelleria.

"Ciao!", dice Luca, e intanto paga alla cassa con una banconota da 20 euro i 3 etti di prosciutto crudo che ha comprato.

Francesca dice: "Anch'io sono venuta a comprare il prosciutto, la mamma mi ha detto di comprarne una fetta da 0,6 etti e mi ha dato questi soldi" e mostra a Luca le monete che ha in mano: 1,5 euro. "Non ti basteranno!", dice Luca, "guarda in vetrina: il prosciutto costa 2 euro all'etto"

Pensate che Luca abbia ragione? Date le vostre risposte e spiegate perché.

Il problema può essere risolto dagli alunni all'interno di piccoli gruppi o di coppie. Le risoluzioni proposte dai bambini, e raggruppate per tipologia, devono essere oggetto di una discussione collettiva. Ogni procedura e ogni strategia di calcolo adottata potrà così essere esplicitata e argomentata in modo da giungere ad una soluzione condivisa.
Durante la discussione può essere utile utilizzare una tabella che consente di giungere al risultato attraverso i calcoli successivi del costo di 3 etti, 1 etto e 0,1 etti di prosciutto:

etti	*euro*	
3	6	
1	2	
0,1	0,2	Ê : 10 Â
0,6	1,2	

E' importante giungere ad osservare che:

se per calcolare 3 etti di prosciutto l'operazione è	2 x 3
per calcolare 0,6 etti di prosciutto l'operazione è	2 x 0,6
se 0,6 etti corrisponde ad una quantità	< 1 etto
il risultato dell'operazione 2 x 0,6 è	< di 2 euro

Vince il più piccolo

"Voglio fare una moltiplicazione con voi: io vi dico il primo fattore[3], è 60, voi dovete trovare il secondo fattore: puo' essere qualsiasi numero escluso lo zero. Ma attenzione! Il prodotto dovrà essere minore del numero che dico io. Vince chi riesce ad ottenere il prodotto più piccolo."

Gli obiettivi di questo gioco sono:

consolidare in contesti diversi i significati della moltiplicazione per un numero < 1

introdurre in modo intuitivo il concetto di densità della retta numerica.

Gli alunni rispondono individualmente per scritto. Le risposte vanno quindi raccolte, annotate alla lavagna e discusse, per valutare prima di tutto quali di esse rispondono alle consegne (prodotto minore del fattore dato) e infine quale risposta può essere considerata vincente.

Ecco la traccia di una possibile discussione (tutti i risultati delle moltiplicazioni possono esser velocemente verificati con la calcolatrice):

Sc*riviamo tutte le risposte (fattori) alla lavagna:*

0,5 - 1 - 1,5 - 60 - 12 - 0,2 - 0,1 - 0,001 - 0,05 - 1,1

si possono fare dei gruppi?

Numeri interi 1 - 60 – 12

Numeri decimali: 0,5 - 1,5 - 0,2 - 0,1 - 0,001 - 0,05 - 1,1

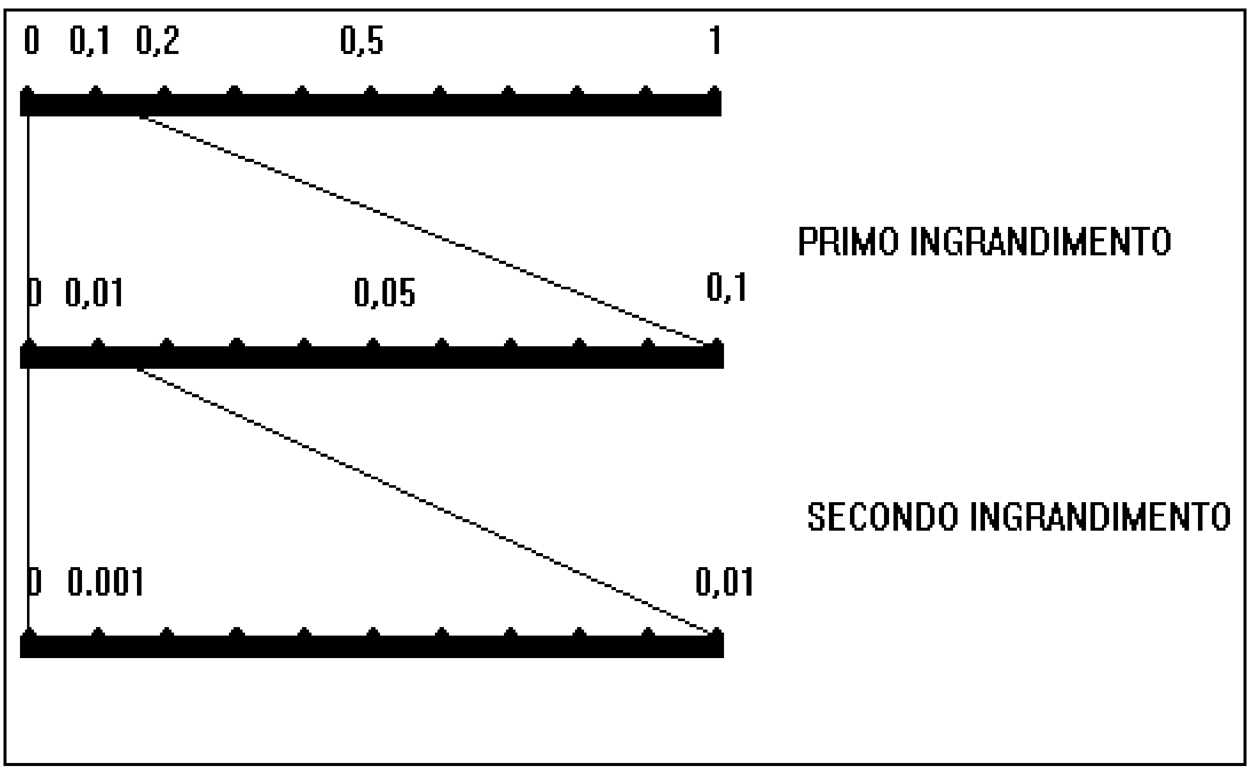
I numeri interi non vanno bene perché: 60 x 1 = 60, e allora anche tutti gli altri, che sono maggiori di 1, non vanno bene.

Ci sono anche dei decimali che non vanno bene: 1,5 e 1,1 perché sono maggiori di 1.

Allora restano i numeri decimali minori di 1: quelli che hanno 0 unità.

A questo punto le risposte vanno ordinate sulla retta dei numeri per decidere chi è il vincitore.

Per trovare a tutti numeri il proprio posto preciso bisognerà fare progressivi ingrandimenti della retta, per ingrandire la retta, si "immagina" di usare una lente di ingrandimento:



Ogni volta che si usa la lente si ingrandisce di 10 volte, quindi:

il primo ingrandimento mostra numeri 10 volte più piccoli rispetto alla prima retta

il secondo ingrandimento mostra numeri 100 volte più piccoli rispetto alla seconda retta

Il numero vincitore è 0,001, se lo moltiplichiamo per 60 troviamo il prodotto più piccolo.

---

[3]. Conviene indicare un numero che termini con uno 0 perché risulti intero anche il prodotto

Se ci fosse un numero con un decimale in più?
Bisognerebbe fare un altro ingrandimento, perché è un numero ancora più piccolo: ogni volta che aggiungo un decimale uso la lente di ingrandimento e trovo un numero più piccolo ...
La finalità è dunque quella di far intuire che questo è un gioco senza fine, o meglio senza un vincitore in assoluto, in quanto è sempre possibile trovare un fattore più piccolo: basta aggiungere cifre decimali.
Questo gioco può avere una variante:
“Voglio fare una moltiplicazione con voi: io vi dico il primo fattore , è 60, voi dovete trovare il secondo: può essere qualsiasi numero escluso lo zero. Attenzione! Il prodotto deve aumentare il numero che dico io, ma vince chi riesce ad ottenere il più piccolo aumento.
In questo caso i bambini dovranno trovare il più piccolo numero maggiore di 1. Per questo dovranno ingrandire l'intervallo tra 1 e 1,1; poi l'intervallo tra 1 e 1,01; poi l'intervallo tra 1 e 1,001; ecc.
Un'altra possibile variante del gioco è quella di dividere i bambini in due gruppi, uno dei quali dovrà far uso della calcolatrice, mentre l’altro dovrà calcolare con carta e penna.
In questo caso, forse un po' a sorpresa, risulterà vincitore il gruppo che non utilizza la calcolatrice perché quest'ultima può indicare un numero limitato di cifre.

Elementi di prove di verifica

Indica con una crocetta la risposta che ritieni corretta, poi spiega come hai calcolato.

32 x 0,5 =

❑ 32
❑ 16
❑ 64
❑ 3,2

Perché? ____
____

50 x 0,2 =

❑ 100
❑ 50,2
❑ 50
❑ 25

Perché? ____
____

Cioccolato

Livello scolare : 5ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali. Verbalizzare le strategie scelte per la risoluzione dei problemi e usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle. Riconoscere e costruire relazioni tra numeri naturali (multipli, divisori). Comprendere i significati delle frazioni (parti di un tutto unità, parti di una collezione, operatori tra grandezze). Rappresentare i numeri naturali, i decimali e gli interi sulla retta. Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema. Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l'osservazione.	Moltiplicazione e divisione tra numeri naturali. Numeri decimali, frazioni.	<u>Numero</u> Argomentare e congetturare Misurare Problemi	Lingua italiana Educazione scientifica Storia, geografia, studi sociali

ingredienti usati, il cioccolato. I bambini possono analizzare confezioni di cioccolato che essi stessi portano in classe: l'analisi può essere sviluppata mediante la lettura delle confezioni, il loro confronto, la loro classificazione. Volendo, si può progettare la visita ad un'impresa artigianale o industriale di produzione di cioccolato, confrontando successivamente le loro caratteristiche.

Descrizione dell'attività

Dal punto di vista del percorso didattico, l'attività 1 ha la funzione di avviare il lavoro sul cioccolato. A partire da una ricetta (ad esempio, di una torta al cioccolato) i bambini possono affrontare problemi inerenti la progettazione della realizzazione del dolce in classe. Normalmente, nell'utilizzo delle ricette si è di fronte a più aspetti riguardanti il numero: esso ha la funzione di esprimere le misure delle dosi (indicate con le misure di peso e di capacità), le misure del tempo (di cottura, ad esempio) e del calore (del forno, ad esempio). Facendo lavorare i bambini su una ricetta grezza, si possono porre numerosi problemi : adattare le dosi della ricetta alle esigenze della classe; "trasferire" le dosi necessarie in confezioni esistenti di ogni ingrediente; per determinati ingredienti, capire quale confezione è più vantaggioso acquistare dal punto di vista economico; determinazione dell'entità della spesa sostenuta; determinazione del costo reale del dolce prodotto (del costo, cioè, delle quantità di ingredienti utilizzate secondo la ricetta).

Dal punto di vista dell'attività matematica, l'attività 1 può sollecitare aspetti importanti riguardanti i significati delle operazioni (ad esempio*: se le dosi vengono triplicate succede che….; se esistono confezioni da 125 g e ho bisogno di 300 g ne devo prendere…; calcolo della spesa…; se la torta costa… quanto costa ognuna delle 24 porzioni in cui l'abbiamo divisa ?;* ecc.) e le loro proprietà. Costituisce una palestra ricca e significativa di collegamento fra variabili diverse, sia appartenenti allo stesso ambito di grandezze, come ad esempio il rapporto fra grammi, ettogrammi e chili *(la ricetta dice che servono 200 grammi, ma qui ci sono confezioni da un chilo oppure da 5 etti…)*, sia appartenenti a ambiti di grandezze diversi, come ad esempio il rapporto peso (o capacità)/prezzo *(125 g costano … euro; 2,5 hg costano … euro. Quale ci conviene comprare, se abbiamo bisogno di 200 g ?).*

Nel corso dell'attività 1 può emergere il problema di dover ricavare il prezzo della parte utilizzata di un determinato ingrediente. Schematicamente, possono presentarsi tre possibilità:

- la parte utilizzata è uguale alla parte acquistata (nella ricetta c'è scritto 50 g di mandorle, la confezione che abbiamo comprato conteneva proprio 50 g) : *il prezzo della quantità utilizzata <u>è il prezzo della confezione acquistata</u>*;
- la parte utilizzata è una frazione unitaria della parte acquistata (la ricetta diceva di usare 500 g di farina, la confezione che abbiamo comprato pesava 1 kg) : *il prezzo della quantità utilizzata <u>è il prezzo di una parte della confezione acquistata</u> (la metà, un terzo, un decimo…;*
- la parte utilizzata è una frazione non unitaria della parte acquistata (noi abbiamo usato 6 etti di zucchero, la confezione che abbiamo comprato pesava 1 kg; ci servono 120 g di cacao, ma la confezione in vendita è da 250 g) : *per ricavare il prezzo della quantità utilizzata <u>è necessario avviare un ragionamento di proporzionalità, ricercando il costo unitario</u> (di un etto o di un grammo, negli esempi).*

La prima possibilità non presenta, ovviamente, difficoltà.

La seconda può essere oggetto di lavoro in classe, soprattutto quando la frazione unitaria non è immediatamente percepibile (ad esempio, quantità usata 2 hg, quantità acquistata 10 hg: la quantità usata è 1/5 di quella acquistata). E' importante che l'insegnante si accerti se per tutti i bambini è chiaro che il prezzo di 5 hg è la metà del prezzo di 10 hg: il rapporto fra variabili diverse implica una difficoltà che a volte per l'adulto non è visibile. La possibilità di operare concretamente con il materiale fornisce all'insegnante delle preziose opportunità per sviluppare la comprensione del rapporto quantità/prezzo.

La terza possibilità è più complessa e richiede una trattazione più approfondita (situazione 2). Riprendendo gli esempi proposti, è importante che i bambini esplorino individualmente il problema

di ricavare il costo di 6 etti di zucchero conoscendo il costo di 1 kg (oppure, ricavare il costo di 120 g di cacao conoscendo il prezzo della confezione da 250 g).
Una parte di alunni generalmente opera un cortocircuitamento, cercando si passare direttamente dal costo di 1 kg (visto anche come 10 hg) al costo di 6 hg. Questo passaggio può avvenire in vari modi, il più frequente dei quali è la divisione del prezzo di 1 kg in 6 parti.
La risoluzione del problema è possibile se il bambino riesce a dislocare temporalmente l’urgenza di giungere alla soluzione, considerando la necessità di un passaggio intermedio. Il ragionamento deve utilizzare elementi di proporzionalità, ricercando un elemento comune alla quantità acquistata e alla quantità utilizzata. Questa operazione presenta difficoltà per molti alunni, ma rappresenta una importante occasione per ragionare sul rapporto fra variabili diverse.
La riflessione in classe sul costo unitario può essere condotta su due piani :

all’interno di un problema, per ragionare sulla diverse strategie impiegate
(Riprendendo l’esempio precedente, se il costo di un chilo di zucchero è 90 eurocent, può essere opportuna una riflessione sulle strategie elaborate dai bambini, quali ad esempio:

A] 90 : 6 = 15 Che cosa si ottiene ?
B] 90 : 10 = 9 Che cosa si ottiene ?
9 x 6 = 54 Che cosa si ottiene ?

che tenda a far emergere il significato delle operazioni effettuate);

confrontando le soluzioni di più problemi per giungere ad una “regola”
(Riprendendo gli esempi precedenti, è possibile mettere a confronto strategie prodotte in situazioni diverse, ricercando che cosa c’è in comune nei ragionamenti, con l’obiettivo finale di evidenziare una “regola” generale che valga per le situazioni di quel tipo. Ad esempio:
A] *“Per sapere quanto costa un etto di zucchero divido in 10 parti 90 eurocent, cioè il prezzo di un chilo. Poi il risultato (cioè quanto costa un etto) lo ripeto per 6 perché abbiamo utilizzato 6 etti e così so quanto costa tutto lo zucchero che abbiamo messo nel dolce”*
B] *“Io divido il prezzo della confezione di cacao per quanti grammi pesa, così so quanto costa un grammo. Poi moltiplico il risultato che ottengo per 120 e così so quanto costa il cacao messo nella torta”)*

Il confronto porta la discussione e la riflessione su di un piano metacognitivo, il solo che permette di sviluppare la consapevolezza rispetto alle relazioni in gioco. Un punto di arrivo soddisfacente potrebbe essere l’assunzione ragionata dello schema:

Un’attività importante, per le implicazioni matematiche che contiene, è l’analisi e il confronto fra diversi tipi di tavolette di cioccolato (situazione 3). Confrontando le confezioni di cioccolato dal punto di vista del prezzo, viene rimesso in gioco il problema della ricerca del costo unitario (ad esempio, una tavoletta che pesa 400 g costa 4 euro e una tavoletta che pesa 150 g costa 1 euro: quale cioccolato è più caro ?).
Il confronto fra le tavolette può essere utilizzate per sviluppare e consolidare la padronanza delle frazioni (situazione 4).
Si può portate in classe, se è possibile, una tavoletta di cioccolato costituita da un numero di quadretti uguale o multiplo di quello degli alunni della classe. Sulla tavoletta possono essere impostate attività (di verbalizzazione, di disegno, ecc.) che mirino a evidenziare il ruolo di operatore della frazione:

“la tavoletta è formata da 18 quadretti; dato che siamo in 18 ognuno di noi ne mangia 1/18, in questo caso un quadretto. Se fossimo solo 2 bambini, ne mangeremmo… se fossimo 3 bambini, ne mangeremmo… se fossimo 4 bambini… se fossimo 6 bambini…”
Nell’attività riportata si evidenzia bene il significato di “operatore” della frazione; ma tale significato è connesso con la divisione di partizione, in quanto si dividono grandezze non omogenee tra loro: “numero di quadretti della tavoletta” diviso per “numero di bambini” per ottenere “quanti quadretti per bambino”. Si noti come spontaneamente si pone il problema della diversa rappresentazione dello stesso numero quando si devono dividere, ad esempio, 18 quadretti fra 4 bambini; si potrebbe scrivere correttamente:
18 : 4 = 4,5 = 18/4 = _ di 18
Se si utilizza una tavoletta di cioccolato costituita da un numero di quadretti superiore a quello degli alunni della classe, questo permette di ricostruire una situazione vedendola come numero frazionario (1/30 il quadretto mangiato da ogni bambino; 19/30 i quadretti di cioccolato mangiati dalla classe).
A questo proposito possono essere proposte delle attività di confronto: *“Mangia più cioccolata chi mangia i 2/6 di una tavoletta da 24 quadretti oppure chi ne mangia i 3/4 ?”*
Da attività di questo tipo, utilizzando anche le rappresentazioni grafiche, possono emergere aspetti importanti delle frazioni: le frazioni equivalenti; la proporzionalità inversa tra il valore della frazione e il denominatore (quando il numeratore è costante); la relazione fra il numero di partenza e il numero ottenuto “applicando una frazione” al numero di partenza *(“1/5 di 120 fa 24, infatti 24 x 5 fa 120”)*.
Può anche essere proposta l’attività seguente: *“Quattro bambini si dividono tre confezioni di cioccolato. Quanto tocca ad ogni bambino ?”*, che sollecita l’attenzione degli allievi a staccarsi dall’aspetto percettivo rappresentato dai quadretti di cioccolato considerando la tavoletta intera.
Successivamente, attraverso l’analisi delle confezioni di cioccolato si può affrontare il passaggio alla rappresentazione percentuale dei numeri razionali, collegata al significato di operatore della frazione (situazione 5). Dal confronto fra tavolette di cioccolato di tipo diverso (al latte e fondente) ma aventi lo stesso peso, può emergere la constatazione che il cacao è un ingrediente comune, ma la quantità di cacao è diversa nelle due tavolette. Ciò che esprime il dato quantitativo di cacao contenuto nel cioccolato è la percentuale. Sono possibili alcune tappe di lavoro:

- passaggio dalla frazione alla percentuale

Rappresentando su una quadrato di 100 quadretti la tavoletta di cioccolato fondente, del peso di 100 g,, si può giungere all’osservazione che se il cacao è il 50% si colorano 50 quadretti su 100 e quindi è possibile pensare che
50/100 = 5/10 = 1/2 ⟶ 50% (cioè: su una tavoletta di 100 g, 50 sono di cacao)

- passaggio dalla percentuale alla frazione

In seguito si può ipotizzare quale sarebbe la percentuale di cacao se la fabbrica che produce tavolette da 100 g di cioccolato al latte che contengono il 30% di cacao, producesse tavolette da 200 g dello stesso tipo di cioccolato. La situazione problematica è interessante, perché coinvolge il rapporto fra il peso (grandezza commensurabile) e la percentuale (grandezza relazionale). Una buona parte di bambini generalmente risponderà che *“nella tavoletta da 200 g la percentuale di cacao deve essere del 60%, perché 30 + 30 = 60”*.
A questo punto è utile il confronto fra i ragionamenti del tipo:
nelle tavoletta da 200 g ci sono 60 g di cacao
il peso del cacao è i 60/200 del peso della tavoletta
poiché ci sono 60 g di cacao, la percentuale del cacao è del 60%
per riflettere sulla differenza del terzo enunciato rispetto ai primi due: la percentuale è sempre il 30% perché con essa non ci si riferisce al peso, ma a quanti grammi ci sono ogni cento grammi. Una conclusione potrebbe legittimamente essere che la percentuale è simile alla frazione con denominatore 100.

- il calcolo della percentuale

Confrontando più tipi di tavolette, si può cogliere lo stimolo a calcolare quanto cioccolato è contenuto, ad esempio, in una confezione che pesa 125 g e che ha una percentuale del 30% di cacao.
Il precedente passaggio dalla percentuale alla frazione è cruciale per il successivo calcolo della percentuale. Infatti:
30% $\longrightarrow$ 30/100
Quindi il calcolo può diventare: 30/100 di 125 g
Cioè: 125 : 100 = 1,25
1,25 x 30 = 37,50 Il 30% di 125 g è 37,50 g.

<u>- approfondimento del significato di percentuale</u>

Un aspetto che permette ulteriori approfondimenti è la presenza in commercio di confezioni di cioccolato con la percentuale di cacao superiore al peso della confezione (ad esempio: confezioni da 20 g con il 45% di cacao).
La stranezza della situazione consente di mettere ancora una volta in gioco il rapporto fra grandezza commensurabile e grandezza relazionale, mostrando l'utilità della percentuale. Infatti, confrontando confezioni di peso diverso, il dato relativo del peso del cacao potrebbe fornire indicazioni errate. Infatti, nella tavoletta da 20 g (45% di cacao) ci sono 9 g di cacao, mentre in quella da 100 g (30% di cacao) ce ne sono 30: sarebbe errato ritenere che nella seconda confezione c'è più cacao. E' il significato di percentuale come "relazione fra la quantità di cacao e la quantità totale di cioccolato" che consente di argomentare le ragioni dell'errore: infatti consente di pareggiare la quantità totale (confrontando cioè tutto su 100) e di comprendere che la confezione più piccola avrebbe 45 g di cacao su 100 di cioccolato.

Calcolatrice

Livello scolare: 5ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Eseguire semplici calcoli mentali con moltiplicazioni e divisioni, utilizzando le tabelline e le proprietà delle operazioni. Riconoscere e costruire relazioni tra numeri naturali (multipli, divisori). Riconoscere scritture diverse (frazione decimale, numero decimale) dello stesso numero, dando particolare rilievo alla notazione con la virgola. Comprendere il significato e l'uso dello zero e della virgola. Comprendere il significato del valore posizionale delle cifre nel numero naturale e nel numero decimale. Confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi. Costruire e rappresentare semplici sequenze di operazioni note tra naturali.	Proprietà dei numeri. Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali Operazioni tra numeri decimali Proprietà delle operazioni Composizione di operazioni e significato delle parentesi	<u>Numero</u>	

Attività proposte
Attività 1 – Scrittura di un numero sulla calcolatrice
Attività 2 – Scrittura del numero decimale
Attività 3 – Scrittura di un'operazione
Attività 4 – Scrittura di numeri grandi
Attività 5 – La priorità delle operazioni

Contesto
Come indicato nella premessa, il contesto delle calcolatrici è un ambiente di apprendimento interessante, perché mette in gioco contenuti disciplinari riguardanti la riflessione sui formalismi e le proprietà del calcolo aritmetico, l'approccio all'informatica, i concetti di "memoria" e di "programma", il lavoro logico sulla elaborazione e sulla gestione di ipotesi necessarie a penetrare le situazioni problematiche inerenti ciò che fa o potrebbe fare la calcolatrice.

Commento
In classe è opportuno che ogni alunno abbia una calcolatrice tascabile su cui lavorare individualmente. Sarebbe opportuno che sul totale dei bambini si potesse disporre sia di calcolatrici con gerarchia di priorità delle operazioni, sia calcolatrici senza gerarchia di priorità. Questo consentirebbe lo sviluppo di una riflessione sul senso della priorità delle operazioni nelle espressioni.
Di seguito verrà nominato lo schema "batto/vedo" come supporto per la comprensione di ciò che fa la persona e di ciò che fa la macchina. Esso può essere rappresentato nel seguente modo (esempio) :

BATTO	VEDO
	0.
2	2.
5	25.
+	25.
8	8.
=	33.

Descrizione delle attività
L'attività 1 deve essere svolta dopo essersi accertati che tutti i bambini abbiano una sufficiente padronanza nell'uso della calcolatrice tascabile (C.T.). Essa mette in gioco la consapevolezza della modalità di scrittura del numero da parte della C.T. e le differenze con la scrittura del numero con carta e penna. La consegna potrebbe essere la seguente: *Spiega con precisione che cosa succederà sul display dopo la battitura di ogni tasto se scrivi il numero 365, facendo uno schema "batto/vedo" in base alla tua previsione. Usa la tua C.T. e fai la cronaca di che cosa succede dopo ogni battitura quando digiti il numero 365, facendo nuovamente lo schema "batto/vedo". Infine, confronta i due testi e individua i passaggi mancanti, sbagliati o superflui.*
Nel prevedere il comportamento della C.T. entra in gioco l'attenzione che è stata posta dal bambino nell'interazione con lo strumento nel corso di esperienze precedenti e il confronto fra la propria previsione e la "verifica" fattuale forza la consapevolezza del bambino circa il comportamento della C.T. in modo più incisivo rispetto al semplice rendiconto di ciò che fa la macchina.
L'attività 2 conduce direttamente all'esplorazione della funzione dello zero. Lo zero compare appena la calcolatrice viene accesa, ma esso viene attivato solo quando viene digitato il tasto **.** , cioè il tasto che rende attiva la scrittura del numero decimale. Infatti se si digita il tasto "zero" e successivamente un'altra cifra, lo zero scompare dal display. Però il tasto "zero" attiva la cifra "zero" se questi non è il primo tasto digitato.
Ciò può condurre a riflessioni proficue sul ruolo e sul significato dello zero, scoprendo che nella macchina esiste un programma interno che gestisce le "regole" di funzionamento.

L’attività 3 può essere variata opportunamente per renderla più stimolante.
Dopo alcune attività volte a rappresentare e verbalizzare (utile è l’uso dello schema “batto/vedo”) ciò che succede scrivendo sulla C.T. un’operazione, è utile richiedere ai bambini di ricostruire l’operazione a partire dalla sequenza di ciò che si vede sul display, come nell’esempio:

VEDO
0.
2.
23.
239.
239.
4.
49.
492.
731.

“Questo è ciò che si vede sul display di una C.T. ogni volta che viene battuto un tasto. Spiega che operazione è stata scritta e anche come hai fatto a capirlo”.
Risulta importante anche la riflessione su operazioni semplici, attraverso, ad esempio, il confronto fra verbalizzazione scritte dai bambini della classe, che mettano in evidenza l’impossibilità di determinare quale operazione all’interno di ogni coppia sia stata digitata e la possibilità di scartare le operazioni dell’altra coppia di operazioni:

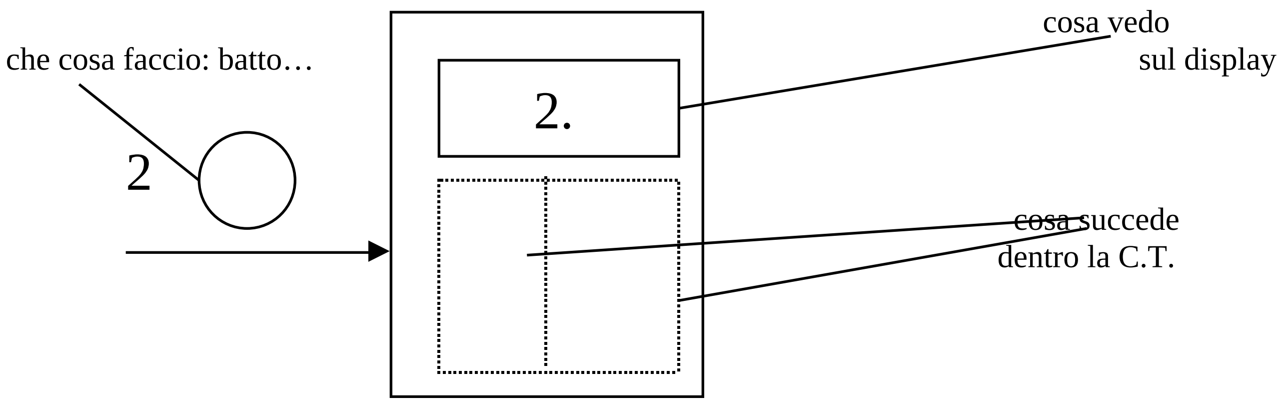
VEDO		VEDO
0.		0.
2.		4.
2.		4.
2.		2.
4.		2.
2 + 2 = 4		4 – 2 = 2
2 x 2 = 4		4 : 2 = 2

Infine, si può giungere ad operazioni più complesse, che mettano in gioco il significato dei segni e il senso del risultato :

es.: 45,7 O 6,2 = 52,9

Si può osservare che la scrittura di divisioni sulla C.T. consente di riflettere sul significato del resto. Infatti, la macchina non fornisce il resto ma, eventualmente, dà un risultato decimale che deve essere interpretato.
L’attività 4 può essere un’attività importante per favorire la consapevolezza del controllo del numero. L’attività può avere gestioni di tipo diverso, ma tutte possono partire dalla consegna di scrivere sulla C.T. un’operazione del tipo:
3,7 x 75.000.000 =
e registrare i risultati forniti dalle diverse macchine a disposizione dei bambini.
Questo può consentire:
attività di “interpretazione” di ciò che si legge su certi display (es.: E 2.775)
attività di progettazione di strategie che consentano di scrivere sul display della C.T. numeri che superino il miliardo, con successivo confronto fra le strategie individuate
prime riflessioni sul numero espresso come potenza di 10.

Attraverso queste attività si può anche giungere con i bambini ad esplorare la proprietà invariantiva della divisione come modalità per l'esecuzione sulla calcolatrice di divisioni con numeri grandi (es.: 9.454.000.000 : 25.000 ≠ 9.454.000 : 25)
L'attività può prevedere due fasi.
Nella prima, si esplora il problema della "memoria" della C.T. Partendo da un'operazione del tipo: 254 x 24 = si può riflettere con i bambini (chiedendo anche ipotesi previsionali scritte) su che cosa la C.T. deve memorizzare per poter eseguire il calcolo. Si può visualizzare il funzionamento della memoria operativa della calcolatrice su una sequenza *cosa faccio/cosa vedo/cosa succede dentro* . La sequenza può essere rappresentata con l'ausilio di schemi grafici:



Questo dovrebbe far emergere il fatto che la C.T., per effettuare il calcolo richiesto, tiene in memoria almeno due "oggetti": il primo numero digitato e il segno di operazione. Può essere opportuno suddividere, nello schema grafico, lo spazio relativo a "che cosa succede dentro alla C.T." per inserire da una parte i segni di operazione e dall'altra i valori numerici. Si può controllare quali numeri sono rimasti in memoria dopo aver battuto l'operazione 254 x 24 = 6.096 digitando solamente altri segni, come + e =. I comportamenti delle C.T. variano: alcune dimostrano che non è rimasto in memoria nulla poiché il risultato 6.096 rimane, altre danno come risultato 6.350 denotando che in memoria era rimasto "254". In una seconda fase, riconosciuta l'esistenza di un programma e di differenti capacità delle C.T., si può passare a scoprire come si comportano le calcolatrici di fronte a una catena di calcoli. Se si dà una sequenza di operazioni molto semplice (ad es.: 2 + 3 x 4 =), gestibile facilmente anche a mente, si può osservare come reagiscono le C.T., cioè qual è il programma interno circa la gerarchia delle operazioni (alcune macchine daranno come risultato 20, altre 14). Può essere un'occasione per riflettere sul senso della priorità di alcune operazioni rispetto ad altre e per introdurre la parentesi.
Infine potrebbe essere un'attività interessante quella di proporre un problema in cui sia necessario l'uso della parentesi per formalizzare correttamente la procedura di calcolo (es.: *Ho una banconota da 10 euro, compro 3 quaderni che costano 1,15 euro l'uno. Quanto ricevo di resto ?*). Dopo aver risolto "carta e penna" il problema, si può richiedere agli allievi di scrivere l'espressione numerica che rappresenti la soluzione del problema in un'unica formula. Quindi, si può dare come consegna individuale di ipotizzare un modo per "costringere" la C.T. che non ha gerarchia di operazioni a dare il risultato esatto, confrontando le soluzioni individuate.
A conclusione potrebbe essere proposta la seguente consegna, utile a sviluppare la consapevolezza nei bambini rispetto al funzionamento dello strumento: *"Scrivi le istruzioni per l'uso della tua calcolatrice"*.

Elementi di prove di verifica

Livello scolare: 3ª elementare

La spesa per lo yogurt

La maestra ha comperato tre litri di latte a 0,95 euro il litro, due etti di zucchero a 0,15 euro l'etto e tre bustine di fermenti lattici a 0,35 euro l'una per preparare lo yogurt in classe. Quanto ha speso la maestra ?
La maestra ha pagato con una banconota da 10 euro: quanto ha ricevuto di resto ?

<u>Competenze interessate:</u>
esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali;
comprendere il significato e l'uso dello zero e della virgola;
comprendere il significato del valore posizionale delle cifre nel numero naturale e nel numero decimale;
eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni con padronanza degli algoritmi, usando metodi e strumenti diversi.

La linea del tempo

Una classe vuole rappresentare gli ultimi 100 anni in una linea del tempo da appendere su una parete dell'aula, che è lunga 530 centimetri. Per fare questo vengono presi dei fogli lunghi 21 centimetri: quanti fogli possono stare sulla parete, uno di fianco all'altro ?
Per fare in modo che i 100 anni occupino quasi tutta la parete, è necessario :
segnare su ogni foglio 2 anni ?
segnare su ogni foglio 4 anni ?
segnare su ogni foglio 10 anni ?

<u>Competenza interessata:</u>
esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali.

La gita scolastica a …

Una classe ha noleggiato un pulmino per una visita in città. Il noleggio costa alla classe 180 euro in tutto.
Se tutti i 20 bambini della classe partecipassero alla gita, quanto dovrebbe pagare ognuno di loro ?
E se i bambini partecipanti fossero 15, quanto dovrebbe pagare (approssimativamente) ognuno di loro ?

<u>Competenza interessata:</u>
esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali.

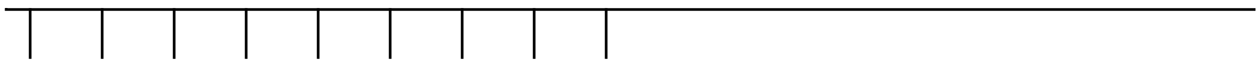
Livello scolare: 4ª elementare

Una spesa

La mamma ha comprato tre chili di arance, un chilo e mezzo di mandaranci, mezzo chilo di insalata.
Come ha fatto il verduriere a calcolare ciò che doveva pagare la mamma, sapendo il prezzo di un chilo di arance, il prezzo di un chilo di mandaranci e il prezzo di un etto di insalata ?
Spiegalo a parole.

<u>Competenze richieste:</u>
esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali e decimali;
confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi.

Il righello muto

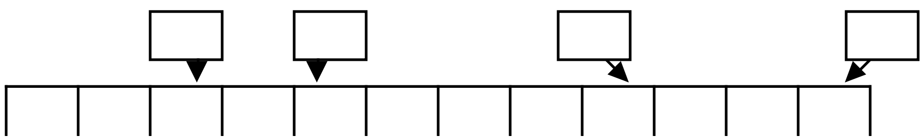


0

Segna sul righello i punti che hanno distanza da 0 di :
3,5 cm   7,2 cm   9,3 cm   11 cm

Altra versione, più complessa:
Riporta sul righello i punti che hanno distanza da 0 di :
3,8 cm   12,4 cm   1,15 dm   1 dm e 4 mm

Altra versione :
Scrivi nei riquadri la distanza da 0 dei punti indicati con le frecce :



0

<u>Competenze interessate:</u>
confrontare e ordinare numeri decimali e operare con essi;
rappresentare numeri decimali sulla retta.

Frazioni in movimento

Livello scolare: 1^a media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Determinare multipli e divisori di un numero intero e multipli e divisori comuni a più numeri Comprendere i significati delle frazioni come rapporto e come quoziente di numeri interi Riconoscere frazioni equivalenti; comprendere il significato dei numeri razionali Riconoscere e usare scritture diverse per lo stesso numero razionale (decimale, frazionaria, percentuale) Confrontare numeri razionali rappresentandoli sulla retta Eseguire semplici calcoli con numeri razionali usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita, calcolatrici) Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze Rappresentare e interpretare dati, anche utilizzando un foglio elettronico Produrre congetture Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti	Massimo comune divisore e minimo comune multiplo Rapporti percentuali e proporzioni Numeri razionali Operazioni tra numeri razionali Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a, …) Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche.	Numero Argomentare e congetturare Misura Risolvere e porsi problemi	Educazione Tecnica

Contesto

Il concetto di numero razionale costituisce uno dei nodi cruciali dell'apprendimento anche per le diverse accezioni insite nel concetto stesso.

Queste attività non sono da considerarsi come un approccio al concetto di frazione, ma si collegano ad esperienze fatte dall'alunno in momenti precedenti e sono un tentativo di armonizzare aspetti, significati e scritture diversi del numero razionale, affinché si formi un concetto complesso, ma unitario.

Descrizione dell'attività

Per consolidare i concetti di frazione come operatore e di frazioni equivalenti si può utilizzare un modello dinamico.

In una prima fase gli allievi progettano e realizzano lo strumento, sotto la guida dell'insegnante. Stabiliscono la figura che deve rappresentare l'unità, il modo più opportuno per suddividerla in parti uguali, il materiale da usare.

Quello qui descritto è un esempio di modello che si può realizzare.

Si ritagliano in acetato trasparente dei cerchi di uguale raggio, che si dividono in settori circolari congruenti su cui è indicato il valore delle frazioni, utilizzando fogli di acetato di colori diversi secondo l'unità frazionaria usata; deve, quindi, essere inciso in ognuno di essi un raggio (Fig. 1). Si ritaglia un cartoncino rettangolare di dimensioni 30×20 su cui va inciso un segmento AB. Si fissa con un bottone automatico uno dei cerchi nel punto A, e lo s'infila nell'incisione (Fig. 2). La rotazione di ognuno dei dischi mostrerà solo la parte desiderata; la frazione dell'ultimo settore accanto all'incisione indicherà il valore della parte visibile.

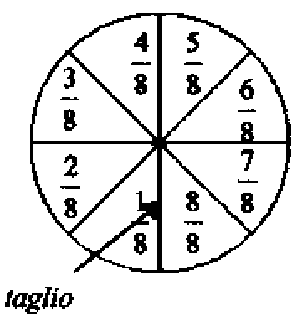


Fig. 1

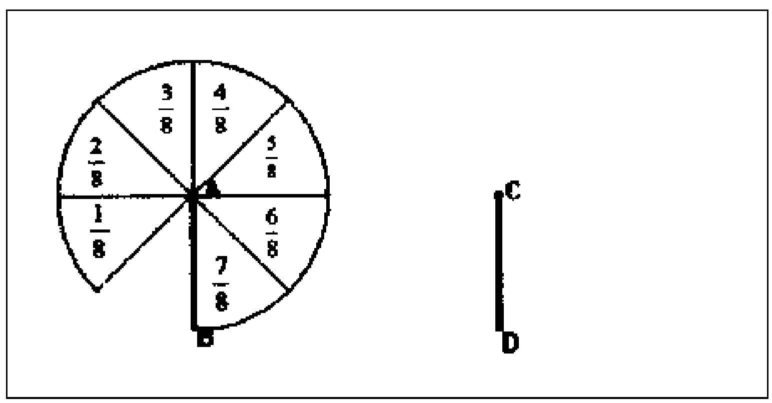


Fig. 2

Sovrapponendo più modelli, realizzati a partire da diverse unità frazionarie, si potranno effettuare confronti di frazioni ed arrivare al concetto di frazioni equivalenti.

Si può proporre una scheda con le seguenti richieste:

"Considera il modello diviso a metà, sovrapponi ad esso il modello diviso in quarti in modo che coincidano i centri e le incisioni lungo i raggi. Fissa nel cartoncino con il bottone automatico i due modelli e disponili in modo che nel primo si visualizzi la frazione $\frac{1}{2}$*, facendo ruotare il modello diviso in quarti in modo che si sovrapponga l'incisione, quale frazione sarà rappresenta in questo?"*

Puoi, allora concludere che:

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$$

Procedi in modo analogo utilizzando i modelli divisi in ottavi e in dodicesimi e completa le seguenti uguaglianze:

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{12}$$

Predisponendo nel cartoncino della fig.2 due o più automatici per inserire più modellini, e quindi più unità, si possono confrontare anche frazioni maggiori di 1.

Questo modello è utile, inoltre, per permettere agli alunni di rappresentare la somma di due o più frazioni.

Per eseguire la somma di frazioni con uguale denominatore, poiché si considerano unità frazionarie dello stesso tipo si utilizza lo stesso modello e la regola da scoprire non presenta particolari difficoltà..

Per sommare frazioni che hanno denominatori diversi si devono sistemare sul quadro di riferimento unità frazionarie di diversi tipi; per poter dire qual è la frazione risultato, però, sarà necessario operare con un unico modello diviso in unità frazionarie dello stesso tipo, per cui è necessario trovare frazioni equivalenti alle date, con lo stesso denominatore.

Un modello analogo si può effettuare utilizzando delle strisce congruenti al posto dei cerchi. Ogni striscia è suddivisa in unità frazionarie rappresentate da una serie di rettangoli adiacenti, come in figura.

1/4	2/4	3/4	4/4

Inserendo ogni striscia in un cartoncino dove è stata effettuata un'incisione si può mostrare solo la parte desiderata e sovrapponendo più strisce congruenti si possono effettuare confronti tra frazioni ed individuare le frazioni equivalenti. Le frazioni maggiori di 1 si possono confrontare incollando di seguito più strisce.

In una seconda fase dell'attività gli alunni, che sanno già rappresentare i numeri naturali sulla retta numerica, dovranno individuare su di essa i punti corrispondenti alle frazioni e "scoprire" le frazioni equivalenti.

Gli alunni disegnano su un foglio di carta millimetrata un tratto di retta numerica, per esempio quella che rappresenti l'intervallo (0,3).

Ricalcano, quindi, su diversi fogli di acetato trasparente tale disegno e su ciascuno di essi rappresentano rispettivamente le frazioni aventi come denominatori 2,3,4,5 e così via fino ad un certo numero fissato dall'insegnante.

Si ottengono così altri punti anche distinti da quelli che rappresentano gli interi.

Sovrapponendo i fogli in modo che coincidano le rette ed i punti corrispondenti allo zero, essi noteranno che a medesimi punti della retta corrispondono frazioni diverse e di tali punti se ne ottengono in numero sempre più grande se si prosegue nel procedimento indicato.

Esistono, pertanto, frazioni che nonostante appaiano con numeratore e denominatore diversi, hanno come corrispondente sulla retta lo stesso punto.

Se si chiede agli alunni di calcolare il quoziente fra il numeratore e il denominatore di tali frazioni osserveranno che si ottiene sempre lo stesso numero decimale.

Il risultato sarà più evidente se essi usano la calcolatrice o un foglio di calcolo, in quanto potranno riscontrare ciò, in un numero più elevato di casi e in minor tempo.

Si può proporre una scheda del tipo:

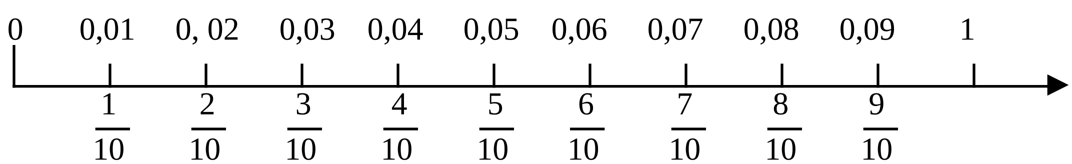
Osserva la retta numerica nel modello ottenuto sovrapponendo i diversi fogli di acetato in cui hai individuato le frazioni con diversi denominatori, e rispondi:

"Come sono il numeratore e il denominatore delle frazioni in corrispondenza del numero 1? In corrispondenza dello 0?

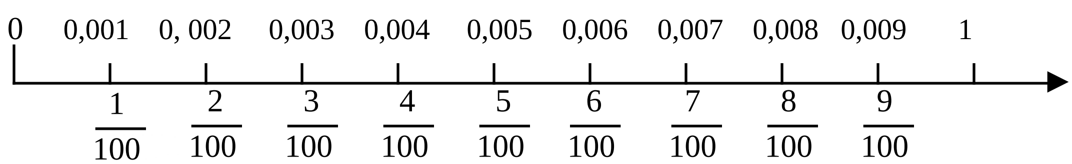
E in corrispondenza dei numeri interi?

Che relazione c'è tra il numeratore ed il denominatore delle frazioni dell'intervallo (0,1)? e in quelle rappresentate nell'intervallo (1,3)?"

Un’altra attività che si presta bene ad armonizzare due aspetti insiti nel concetto di frazione è quella in cui si utilizzano due metodi di rappresentazione delle frazioni numeriche a cui corrispondono due diversi significati.
Per individuare i punti sulla retta numerica corrispondenti alle varie frazioni, si utilizza un sistema di rappresentazione grafico basato sul teorema di Talete: il primo metodo interpreta la frazione $\frac{m}{n}$ come $\frac{1}{n}$ riportato *m* volte e l’altro interpreta la stessa frazione come partizione di *m* parti di *n*.
Per maggiori approfondimenti si rimanda all’attività “Congetturare, argomentare e dimostrare proprietà dei numeri razionali” descritta dal Nucleo “Argomentare e dimostrare” nello stesso testo.
Un momento importante della fase progettuale è quello della discussione in classe per la scelta consapevole della figura che rappresenta l’unità, nel caso degli esempi riportati i cerchi ed i rettangoli.
Gli alunni, pur convenendo che si può utilizzare una qualunque figura, si rendono conto dell’opportunità di scegliere forme che si possono facilmente suddividere in un numero qualsiasi di parti uguali. È anche argomento di discussione il tipo di suddivisione, in modo da non pensare che quello che si sceglie per il modello sia l’unico possibile per dividere l’unità considerata in parti uguali, ma solo uno tra quelli che permettono di visualizzare meglio quanto si vuole rappresentare.
Le esperienze sulle frazioni equivalenti che si possono effettuare attraverso l’utilizzo del modello descritto nella prima fase dell’attività, permettono all’alunno di acquisire il concetto di addizione e sottrazioni tra frazioni, acquisendo consapevolezza della necessità di sostituire alle frazioni date altre ad esse equivalenti e con eguale denominatore.
Nell’attività 2, particolare significato assume la suddivisione dell’intervallo unitario in dieci parti perché permette di effettuare un collegamento con la scrittura posizionale decimale e la rappresentazione dei numeri decimali sulla retta, armonizzando vari aspetti sia concettuali che di scrittura.
Si potrà rivolgere l’attenzione ad un particolare intervallo, per esempio (0,1) ed osservare la corrispondenza tra le frazioni aventi come denominatore 10, base di numerazione usata, ed i numeri decimali aventi una sola cifra dopo la virgola, verificando, eventualmente, l’equivalenza effettuando la divisione tra il numeratore e il denominatore di tali frazioni.



Ingrandendo il primo decimo e suddividendo questo intervallo in successive dieci parti, si otterranno altri dieci punti a cui sapranno attribuire due scritture diverse:



Iterando il discorso si potranno effettuare considerazioni sul concetto di densità della retta numerica e l’insegnante, sfruttando il suo ruolo di mediatore didattico, potrà avviare gli alunni all’intuizione dell’infinito attuale e potenziale.
È importante fare delle osservazioni sulle frazioni confrontandole nelle varie rappresentazioni, (il modello, sulla retta, la divisione con la calcolatrice o con il foglio di calcolo). Si evidenziano, così, diversi modi per definire le frazioni equivalenti: frazioni che indicano le stesse quantità, individuano lo stesso punto sulla retta numerica, sono tali che il quoziente tra in numeratore ed il denominatore sia lo stesso numero decimale. Ciò permette di fare delle considerazioni sul ruolo della definizione nell’ambito aritmetico, ed un confronto fra le definizioni di *frazioni equivalenti* utilizzate da vari libri di testo.

Elementi di prove di verifica

Addizioni e sottrazioni con frazioni con lo stesso denominatore

Esegui le operazioni utilizzando il modello dinamico e descrivi quanto fai concretamente:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=$$

per la prima operazione vale la proprietà commutativa?…………………………………..
e per la seconda?…………………………………………………………………………

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=$$

Addizioni e sottrazioni con frazioni con denominatore diverso

Esegui, utilizzando il modello dinamico, le seguenti operazioni:
Quali frazioni devi sostituire alle date per ricondurre le operazioni al caso precedente?

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=$$

…………………………………………………………………………………………….

è necessario sostituire il modello diviso in ottavi?
In modo analogo risolvi le seguenti operazioni:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=$$

Hai dovuto sostituire entrambi i modelli rappresentanti le frazioni date?………………..
Perché?………………………………………………………………………………………..

Bibliografia

A.M. Damiani, A.M. Facenda, P. Fulgenzi, F. Masi, J. Nardi, F. Paternoster *Piegando un quadrato* Sezione Mathesis di Pesaro.
C. Bernardi, L. Cannizzaro, M. Ferrari, M. Reggiani *Facciamo i conti con l’Euro* a cura dell’UMI, MPI 2001

Il senso del numero

Livello scolare: 1^a e 2^a media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Leggere e scrivere numeri naturali e decimali finiti in base dieci usando la notazione polinomiale e quella scientifica Comprendere i significati delle frazioni come rapporto e come quoziente di numeri interi Eseguire semplici calcoli con numeri razionali usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita, calcolatrici) Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti Riprodurre in scala Calcolare lunghezze di circonferenze e aree di cerchi Individuare regolarità in fenomeni osservati Produrre congetture Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre, agli errori Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli	Potenze di numeri naturali e interi Rapporti, percentuali e proporzioni Numeri razionali Calcolo approssimato ed errore	<u>Numero</u> Spazio e figure Argomentare e congetturare Misurare I problemi	Geografia Storia

Un'eclisse di sole [1]

Contesto

Nella realtà vi sono numeri, che rappresentano misure, che fanno parte del quotidiano e quindi nel considerarli e operare con essi, per capirne la grandezza, l'alunno _ ma anche noi adulti _ possiamo fare ricorso a precise immagini mentali che l'esperienza ha contribuito a strutturare. Quando però andiamo ad interessarci di numeri molto grandi o molto piccoli usciamo dall'esperienza sensibile diretta e quindi, per coglierne a pieno il significato, occorre ricostruire apposite immagini mentali che si basano, per confronto proporzionale, su qualcosa di tangibile. Questo accade ad esempio quando leggiamo sul giornale che la produzione di rifiuti in Italia è di 10^{8} tonnellate all'anno, che il PIL (prodotto interno lordo) in Italia è stato per l'anno 2000 di 9,21_10^{14} €, che la formazione della terra si fa risalire a circa 4 miliardi di anni fa, che il diametro di un globulo rosso del sangue è di 7_10^{-3} mm.

L'insegnante potrà liberamente scegliere, sfruttando gli specifici interessi della classe che ha di fronte, o le specifiche caratteristiche del luogo in cui si trova, un qualsiasi campo esperienziale nel quale la grandezza o piccolezza del numero rende difficoltosa una sua corretta immagine mentale e strutturare apposite attività per renderla tangibile.

L'indicazione dell'anno di scuola media in cui svolgere l'attività proposta è solo indicativa e strettamente legato al contesto di indagine scelto.

Descrizione dell'attività

Quella che viene qui proposta riguarda l'astronomia, campo che offre l'opportunità di confrontarsi con numeri molto grandi, al punto che l'unità di misura di lunghezza più grande utilizzata sulla terra, il chilometro, risulta così difficoltosa da utilizzare in tale contesto da indurre gli astronomi a definirne una più adatta a rappresentare distanze tra gli astri: l'anno-luce. L'anno-luce è la distanza percorsa nel vuoto dalla luce in un anno ed è pari a circa 9463 miliardi di chilometri (la velocità della luce è di circa $3,00 \cdot 10^{8}$ m/s).

Tuttavia, la definizione di anno-luce è sicuramente molto lontana dall'esperienza dei ragazzi, ma anche da quella di noi adulti, e quindi è difficile andare al di là della comprensione e memorizzazione della definizione: 9463 miliardi di chilometri non sono riconducibili a nessuna delle nostre esperienze concrete. Una prima attività può quindi riguardare una possibile rappresentazione dell'anno-luce paragonando tale distanza con ciò che di più lungo abbiamo a disposizione sulla terra: la lunghezza dell'equatore.

Quando ci interessiamo invece delle eclissi, il discorso si fa più complesso in quanto entrano in gioco non solo le distanze tra terra, luna e sole ma anche la loro grandezza: gli ordini di grandezza delle distanze e delle dimensione dei tre astri sono così differenti da obbligarci a lavorare in chilometri. L'obiettivo è quindi quello di riprodurre un modello in scala per capire cosa veramente succede durante una eclissi di sole e soprattutto per rendersi conto di come la luna, di dimensioni tanto più piccole del sole, possa riuscire in determinate situazioni, ad oscurare completamente il sole agli occhi di chi guarda dalla terra.

L'attività, eventualmente condotta in compresenza o in collegamento interdisciplinare con l'insegnante di lettere, può avere inizio con un breve brain-storming sollecitato dalle domande: "È più grande il sole o la luna?", "Sapete cosa avviene durante un'eclissi di sole?", "Come fa la luna ad oscurare completamente il sole durante un'eclissi?". Queste domande ci permettono sia di capire ciò che gli alunni sanno già sull'argomento, sia di sollecitarli a dare spazio ai loro dubbi, alle loro domande, alle loro idee, sia di cogliere eventuali misconcetti. Dalla discussione dovrebbero emergere anche quali siano i dati di partenza da reperire per la realizzazione di un modello rappresentativo dell'eclissi di sole.

Astri	Diametri	Distanze medie dalla terra
Terra	12756 km	-
Sole	1392000 km	149598000 km
Luna	3476 km	384390 km

La tabella può offrire già molti spunti di discussione che possono dar luogo ad attività parallele di approfondimento o a lavori in piccoli gruppi:
Storici: come l'uomo ha calcolato questi dati,[1] a quali distanze gli antichi pensavano si trovassero i pianeti, il Sole e la Luna, e quanto li pensavano grandi?
Matematici: esprimiamo i numeri in notazione scientifica in maniera da coglierne meglio l'ordine di grandezza e fare dei confronti significativi tra i diametri dei tre astri: "quante lune per fare una Terra?", "Quante terre per fare una luna?", "Quante terre in un sole?" ecc… In occasione della discussione che può emergere da queste domande il docente può cominciare a far notare che raddoppiare i diametri non vuol dire raddoppiarne le aree (se pensiamo ad una sezione dell'astro), e neanche raddoppiare i loro volumi.
Sperimentali: dall'osservazione diretta del Sole e della Luna, di grandezza apparentemente quasi uguali, al percepire la grande differenza delle loro dimensioni reali, misurando l'angolo, con vertice l'occhio dell'osservatore, sotteso dagli estremi di ognuno dei diametri, come se gli astri fossero alla stessa distanza dalla Terra.
Astronomiche: quali sono le condizioni nelle quali si produce l'eclissi di Sole? Quali sono i suoi effetti?
La realizzazione del modello dell'eclissi si svolgerà in tre fasi.
Una prima fase nella quale gli alunni, magari divisi in piccoli gruppi, cercheranno per tentativi ed errori una scala opportuna perché possa essere riprodotta sia la distanza più grande che quella più piccola, eseguendo i calcoli necessari con l'uso di una calcolatrice.
Una seconda fase per la scelta del luogo idoneo alla realizzazione del modello, intorno alla scuola o in altro luogo appositamente scelto.
Una terza fase di realizzazione vera e propria con la costruzione del Sole e della Luna in scala (disegno sul lenzuolo e pallina di pongo con supporto) e della terra rappresentata dall'occhio dell'osservatore. Per mantenere costante la distanza Terra/Luna durante l'osservazione si può realizzare una specie di monocolo, con un tubo di cartone, alla fine del quale reggere con un bastoncino la pallina di pongo che rappresenta la luna posizionando così i tre astri secondo le distanze calcolate in scala. La Luna può essere rappresentata con una pallina di pongo o, per mantenere uniformità con la rappresentazione del sole, con una rondella metallica di opportuna grandezza.
Per una realizzazione del modello all'aperto con una scala 1: 750.000.000 si ottengono i seguenti dati:

Astri	Diametri reali	Notazione scientifica	Diametri in scala	Distanze medie dalla terra	Notazione scientifica	Distanze in scala
Terra	12756 km	$1,3\_10^{4}$ km	1,7 cm	-	-	
Sole	1392000 km	$1,4\_10^{6}$ km	186 cm	149000000 km	$1,5\_10^{8}$ km	198 m
Luna	3476 km	$3,5\_10^{3}$ km	0,46 cm	384390 km	$3,8\_10^{5}$ km	50,6 cm

Alcuni punti da tener presenti.
La scelta della scala: osservazioni che derivano da scelte di scale diverse. Con una scala diversa bisogna fare attenzione che la Luna non diventi troppo piccola
La scala come campione di misura evita di utilizzare in maniera meccanica l'impostazione e la risoluzione di una proporzione, rinforzo del concetto di rapporto
L'utilità di procedere per tentativi ed errori e la necessità di verbalizzare i propri ragionamenti per spiegare ad altri le scelte operate
La scelta del luogo: valutazione di misure ad occhio
La realizzazione del modello: misure sul campo, la difficoltà di costruire cerchi molto grandi

[1] L'agenda del cielo, Orioli editore (ogni anno viene pubblicata un'agenda con i dati dei pianeti e delle stelle visibili mese per mese) – Testi di storia dell'astronomia, ad esempio J.L.E. Dreyder: Storia dell'astronomia da Talete a Keplero, Feltrinelli, o J.P.Verdet, Storia dell'astronomia , Longanesi, 1995

Nella fase di realizzazione del modello si può scegliere, con valenze didattiche differenti, di utilizzare strumenti di misura già in commercio (ad esempio odometro, ruota metrica,……) o di costruirli

Lettura del modello costruito, confronti tangibili tra distanze e diametri degli astri. Soprattutto si mette in risalto quanto spazio vuoto vi sia nel Sistema Solare e nello spazio cosmico tra un astro e l'altro, quello spazio che nel modello è tra la Luna e il Sole, se viene realmente percorso, aiuta a cogliere queste distanze così grandi. L'infinitamente grande è simile all'infinitamente piccolo se pensiamo all'atomo e al vuoto che separa nucleo ed elettrone.

L'utilità della notazione scientifica per confrontare numeri grandi e per eseguire calcoli

L'utilità di eseguire delle approssimazioni per semplificare i calcoli: qual è l'ordine di grandezza dell'errore che si commette? È influente o no al fine della realizzazione del modello?

La Terra può non essere rappresentata, assimilandola quindi al bulbo oculare, ma è necessario fissare bene la posizione dell'osservatore. Volendo, può essere praticato un foro del diametro di cm 1,7 in un compensato o in un cartone, attraverso cui guardare la Luna e il Sole

Strumenti

Internet o enciclopedie per la ricerca dei dati, libri di testo

Calcolatrici

Lenzuolo, colori, spago, pongo, pennelli, tubo di cartone

Metro, fettuccia, ruota metrica, podometro

E' possibile che…

Contesto

Spesso gli insegnanti si lamentano che i loro alunni applicano meccanicamente calcoli e formule senza capirne il significato e senza porsi il problema della coerenza tra i dati di partenza e i risultati ottenuti. Ciò può dipendere da svariati fattori, tra i quali sicuramente vi è anche quello degli ambiti di riflessione che vengono offerti agli alunni. L'attività proposta vuole essere solo un esempio di come può essere sollecitata un'attitudine al ragionamento che si potrà sviluppare in maniera differente a seconda del grado scolare e dei conseguenti strumenti di conoscenza in possesso degli alunni.

Descrizione dell'attività

Lettura individuale del seguente brano[2]:

Gargantua e la 'coerenza' dei dati.

Uno dei più famosi giganti della letteratura è Gargantua, creatura dell'autore satirico francese Rabelais (1494/1553).

"Da bambino, Gargantua aveva bisogno di 17913 mucche per rifornirsi di latte. Quando, da giovane, andò a Parigi per completare la sua educazione, cavalcò su una giumenta che era grande come 6 elefanti. Egli attaccò le campane di Notre Dame al collo della sua giumenta a guisa di sonaglio. Sulla via di casa, fu bombardato dai cannoni di un castello e si pettinò via le palle di cannone dai capelli con un rastrello lungo 300 metri.

Supposto che da bambino e da uomo Gargantua fosse un certo numero di volte più grande dei normali esseri umani, si vuole stabilire se la quantità delle mucche e la lunghezza del rastrello, appena citati, costituiscono dati coerenti con il contesto".

Prime immediate reazioni degli alunni e scambio di opinioni

Verifica della comprensione del testo e spiegazione di eventuali difficoltà interpretative

Individuazione dei dati significativi ai fini di una valutazione della coerenza tra di essi

Individuazione dei dati dei *normali esseri umani* ai fini di un confronto con i dati del gigante

Discussione e scelte di uno o più progetti adatti a rispondere alla domanda di coerenza

Esecuzione del progetto (in modo individuale o in piccoli gruppi)

---

[2] P.J.Davis Il mondo dei grandi numeri Zanichelli Bologna 1984

Confronto dei risultati ottenuti

Elaborazione di una scheda individuale: i dati riportati nel brano sono coerenti perché………… oppure non sono coerenti perché…………………………

Per un'attività di questo tipo è bene che l'insegnante abbia una sua possibile risposta, ma poi sia in grado di gestire la discussione che emerge in classe seguendo l'argomentare degli alunni, sollecitando riflessioni, confronti e valutazioni, riassumendo le varie proposte e valorizzando anche strade alternative a quella ipotizzata prima dell'attività. Sarebbe opportuno che la classe, divisa in piccoli gruppi, mettesse in atto progetti differenti per poi confrontare le proprie conclusioni. Ciò che emergerà in maniera significativa non sarà quindi la singola strada scelta ma la sostanziale identità del metodo: considerare come veri alcuni dati e ricavare proporzionalmente gli altri al fine di valutare la coerenza matematica del brano letto.

Per valutare la coerenza dei dati possono essere svolti più di un ragionamento: quello che segue è uno di questi riportato a solo titolo di esempio.

Qualsiasi ragionamento dovrà partire dal considerare vere le ipotesi che il testo propone cioè:

"Supposto che da bambino e da uomo Gargantua fosse un certo numero di volte più grande dei normali esseri umani, si vuole stabilire se la quantità delle mucche e la lunghezza del rastrello, appena citati, costituiscono dati coerenti con il contesto."

Assumiamo inoltre come ipotesi di partenza che:

Il rastrello sia lungo 300 m

La produzione giornaliera di latte di una mucca sia pari a 5 litri.

Il rapporto tra la lunghezza del pettine e l'altezza di un uomo normale sia di 1:8

Il corpo dei giganti si sviluppa nello stesso modo del corpo degli uomini normali

Il bambino Gargantua di cui parla il testo è un neonato

Il rapporto altezza/peso è uguale nel bambino normale e in Gargantua bambino.

Una possibile tabella di lavoro, nella quale la prima riga relativa alla realtà è riempita con dati medi tratti dall'esperienza comune e la seconda riga riporta l'unico dato del mondo dei giganti assunto come vero (la lunghezza del pettine) è:

	Peso bambino	Peso adulto	Consumo giornaliero di latte	Altezza bambino	Altezza adulto	Lunghezza pettine
Uomo normale	4 kg	80 kg	1 litro	0,5 m	1,8 m	0,23 m
Gargantua						$3 \cdot 10^2$ m

Il rapporto di proporzionalità tra la misura reale del pettine e quella del rastrello usato da Gargantua è $1{,}3 \cdot 10^3$. Con semplici proporzioni la tabella può essere così riempita:

	Peso bambino	Peso adulto	Consumo giornaliero di latte	Altezza bambino	Altezza adulto	Lunghezza pettine
Uomo normale	4 kg	80 kg	1 litro	0,5 m	1,8 m	0,23 m
Gargantua	$x_3 = 5{,}2 \cdot 10^3$	$x_5 = 1{,}0 \cdot 10^5$	x_4=1304 litri	$x_2 = 6{,}5 \cdot 10^2$	$X_1 = 2{,}3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^2$ m

Con le ipotesi assunte in partenza, per produrre 1304 litri di latte al giorno sarebbero necessarie circa 261 mucche per allevare Gargantua.

Allora il numero di mucche riportato nel testo, cioè 17.913, non risulta coerente con il dato relativo alla lunghezza del rastrello.

Analogamente è possibile partire da assunzioni diverse e lavorare coerentemente, per esempio:

Il numero di mucche necessarie sia 17913

La produzione giornaliera di latte sia, in media, di 5 litri per mucca, etc

Si potrà concludere, in ognuno dei due casi, che la lunghezza del pettine ed il numero di mucche non sono dati tra loro coerenti.
Alcuni punti da tener presenti.
Non trascurare prima di avviare qualsiasi ragionamento l'attenta lettura e comprensione del testo e la raccolta dei dati espliciti e impliciti Cercare la coerenza tra cosa? Cosa vuol dire coerente? La ricerca di un metodo di ragionamento. Una prima valutazione ad "occhio": approssimazioni e confronti. Una valutazione più sistematica: esplicitare i dati dei "*normali" esseri umani* mancanti nel testo, trovarli e valutarne i rapporti. Ricercare i dati delle cose nominate: la produzione giornaliera di latte per mucca, la lunghezza di un pettine, l'altezza delle campane di Notre Dame
Esplicitare la fase progettuale e l'organizzazione del lavoro: da dove parto, come procedo, dove arrivo? L'utilità di usare la notazione scientifica di un numero per fare calcoli, per valutare rapporti, per eseguire equivalenze. Osservare come successive approssimazioni nei calcoli possano portare ad errori sempre più grandi Riflettere sull'ordine diverso con cui i gruppi o i singoli hanno ricavato i parametri relativi al gigante. Valutare e giustificare l'ordine scelto. Far notare che tutto la coerenza del ragionamento è legata all' ipotesi di partenza imposta dal testo, se la cambiamo la conclusione può non essere più valida. Riflettere sul fatto che è frequente, in alcune situazioni non matematiche, che si argomentino tesi dando per vere delle ipotesi che non vengono neanche esplicitate o sulla cui verità non tutti concordano.

Giochiamo a fare i conti

Livello scolare: 1ª e 2ª media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Riconoscere e usare scritture diverse per lo stesso numero razionale (decimale, frazionaria, percentuale) Eseguire semplici calcoli con numeri razionali usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita, calcolatrici) Effettuare semplici sequenze di calcoli approssimati Produrre congetture Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,…), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema	Numeri razionali Operazioni tra numeri razionali Calcolo approssimato ed errore	Numero I problemi Argomentare e congetturare	

Contesto

La dimensione del gioco, individuale o di squadra, ha numerose valenze didattiche: fornisce un immediato obiettivo da raggiungere, permette di apprendere in modo divertente, sollecita ragionamenti alla ricerca di strategie risolutive personali, rende consapevoli che chi è fornito di maggiori informazioni è avvantaggiato, ecc.

Spesso, soprattutto in campo numerico, gli alunni sono sollecitati a studiare proprietà e fare calcoli non finalizzati, solo per acquisire abilità di calcolo, e non è raro sentirsi rivolgere dall'alunno la domanda: "A cosa mi serve questa proprietà?"

In effetti, se per calcolo intendiamo solo quello scritto, eseguito con il solito algoritmo generalmente memorizzato ma non compreso, andiamo incontro ad una serie infinita di errori tipici, che tutti noi insegnanti ben conosciamo. Così il numero, la sua differente rappresentazione nei diversi campi numerici, le proprietà intrinseche e quelle relative alle operazioni che stiamo eseguendo, rimangono per molto tempo prive di significato.

Proviamo qualche volta ad invertire il processo: proponiamo non di trovare un risultato ma, da quali elementi devo partire se voglio arrivare a quel risultato, o il più vicino possibile ad esso.

Tali attività risultano particolarmente adeguate a sviluppare attitudine al calcolo, mentale o scritto a seconda dei dati di partenza, e a scoprire o applicare in modo significativo alcune proprietà.

Descrizione dell'attività

Riportiamo 3 tipologie di giochi nei quali, cambiando tabelle, numeri a disposizione e operazioni, si può complicare o semplificare ciascuna situazione.

Indipendentemente dai numeri iniziali, tutti i giochi presentati sollecitano delle strategie per tentativi ed errori; dopo poche partite sarà evidente che non conviene procedere a caso e che i tentativi, anche quelli sbagliati, possono fornire utili informazioni, e che un risultato sbagliato può permettere di migliorare la precisione ad un successivo tentativo.

È importante che si mantenga memoria scritta dei tentativi fatti, sia per seguire una propria via di ragionamento _ sfruttando il risultato precedente per scegliere il tentativo successivo _ sia per una seconda fase di osservazione e confronto di strategie, che il docente può avviare al termine del gioco invitando gli alunni a verbalizzare ragionamenti, osservazioni, proprietà trovate, ecc..

Sarà opportuno che alcuni giochi prevedano la moltiplicazione per un numero <1 e divisioni con divisore <1 per sfatare il misconcetto che moltiplicare vuol dire sempre aumentare il numero di partenza e dividere diminuirlo.

A secondo della situazione e della difficoltà proposta si può prevedere l'uso della calcolatrice.

1° gioco : QUATRIX[3]

Si gioca in due, singoli o squadre.

Ogni giocatore o squadra è in possesso di varie pedine dello stesso colore.

Ogni volta che si trovano 2 numeri, tra quelli a disposizione, il cui quoziente è un numero presente in tabella si può occupare la posizione mettendo la pedina del proprio colore.

Vince chi per primo riesce ad avere 4 pedine del proprio colore in fila: orizzontale, verticale o diagonale.

[3] B.Joldfield Games for reinfocement of skilles Mathematics in school Gennaio 1992 pag 13-17

TABELLA

4,0	0,1	3,0	4,5	0,5
2,125	0,4	5,0	0,3	0,625
1,5	0,7	0,2	2,5	0,675
0,6	7,0	0,8	0,75	2,0
3,5	0,25	1,25	0,9	1,125

NUMERI A DISPOSIZIONE

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;
6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

Si può graduare la difficoltà del gioco cambiando: l'operazione richiesta, i numeri in tabella, i numeri a disposizione (naturali, frazioni, decimali), la grandezza della tabella ecc..
In una seconda fase del gioco si può dividere la classe in piccoli gruppi e richiedere che ogni gruppo progetti un gioco simile rispettando una determinata operazione e la scelta di un campo numerico. In seguito ogni gruppo giocherà con la tabella preparata da un altro gruppo.
Alcuni punti da tener presenti
L'osservazione che alcuni numeri in tabella sono interi e altri decimali può aiutare nella scelta dei numeri a disposizione. Quali sono le caratteristiche che devono avere i numeri scelti per ottenere quel tipo di risultato?
Rafforzare la conoscenza che, nel nostro sistema posizionale decimale, dividere per 10 è particolarmente facile
Ottenere lo stesso quoziente con differenti divisioni
I numeri a disposizione sono tutti numeri naturali, si può utilizzare il prodotto per trovare il dividendo (numero naturale x numero decimale = numero naturale); quali deduzioni fare sui fattori guardando solo l'ultima cifra del prodotto?
Quali numeri scegliere per ottenere un quoziente <1? E per ottenerne uno >1?

2° Gioco: CENTRA IL BERSAGLIO[4]
Gioco individuale o a squadre di 2 giocatori
Obiettivo del gioco: trovare per primi (o con il minor numero di tentativi) un numero che, inserito in tabella in entrata, faccia ottenere in uscita un risultato compreso tra i due numeri assegnati in parentesi quadra.
Ecco un possibile itinerario

entrata	•17	uscita
?		[560; 585]
20		340
50		850
40		680
30		510
35		595
34		578

[4] H. Meissner: "Selfdeveloping strategies with a calculator game", in Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, p. 53-58

Alla fine di ogni partita sollecitare sempre una riflessione sul percorso seguito, sul perché dei tentativi fatti e sulle proprietà scoperte.
Si può graduare la difficoltà del gioco cambiando: l'operazione, la tipologia dell'operatore, l'intervallo numerico d'arrivo, la tipologia degli estremi dell'intervallo (naturali, frazioni, decimali).
Particolarmente indicativa può essere una tabella in cui si richiede di moltiplicare per un numero <1 con un qualsiasi intervallo d'arrivo, o di dividere per un numero <1: discutere poi quali proprietà devono avere i numeri in entrata.
In una seconda fase si può chiedere ad ogni alunno di proporre un operatore ed un intervallo d'uscita da scambiare con il compagno, facendo così una partita a due non cimentandosi con la stessa tabella ma su quella proposta dal compagno: come costruire situazioni difficili?
Alcuni punti da tener presenti
L'utilità di cercare una strategia: provare a caso o fare dei tentativi ragionati?
Alcuni numeri sono più facili da moltiplicare: quali, perché?
Come ridurre il numero di tentativi? Se ho segnato il risultato per 20 posso capire quale sarà quello per 40?
Ridurre progressivamente l'intervallo di variabilità di una possibile soluzione
Sfruttare un primo risultato per ottenere una migliore precisione al successivo tentativo
Ricavare un'informazione utile da un tentativo sbagliato
Organizzare o far organizzare agli alunni stessi schede per tenere memoria dei tentativi fatti

3° Gioco: PASSO PASSO[5]

Partendo dal primo numero ottenere con il minor numero di moltiplicazioni successive un risultato compreso tra i numeri in parentesi quadra:

84 →? [ ] →? [ ] →? [ ] →? [ ] →? [ ] →? **[500;502]**

Ecco un possibile percorso:

84 →_6 504 →_1,1 554,… →_1,01 559,… →_0,9 503,… →_0,9 453,… →_0,99 449,… →_1,1 493 →_1,01 498 →_1,01 503 →_0,99 **501,…**

È importante far seguire ogni partita dal confronto delle diverse strade percorse e dall'osservazione puntuale dei tentativi fatti e dei ragionamenti svolti.
Rispetto al gioco precedente ora c'è una difficoltà in più: non si può tornare indietro e fare dei salti, si deve sempre continuare la catena utilizzando l'ultimo risultato ottenuto.
Dalle catene proposte dall'insegnante si può poi passare a quelle costruite dagli alunni e organizzare tornei singoli o a squadre.
Alcuni punti da tener presenti
 Per quanto moltiplicare se ho superato di poco l'intervallo richiesto? E se invece sono poco al di sotto di esso?
Che differenza c'è tra moltiplicare per 1,1 e 1,01 e per 0,9 e 0,99?

[5] H. Meissner: "Selfdeveloping strategies with a calculator game", in Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, p. 53-58

Quali tentativi mi hanno portato fuori strada?
Alcuni tentativi possono essere svolti mentalmente per ridurre il percorso?
Organizzare o far organizzare agli alunni stessi schede per tenere memoria dei tentativi fatti

L'euro[6]

Contesto

Fino ad oggi i numeri decimali limitati sono introdotti nella scuola elementare. Nella scuola media si lavora maggiormente con la notazione frazionaria, che è decisamente prevalente anche nella scuola superiore.
Nella pratica quotidiana, invece, il numero decimale limitato prende il sopravvento con l'uso della calcolatrice in tutti i contesti di misura e per tutti coloro che applicano la matematica in discipline scientifiche.
L'ormai vicinissima introduzione dell'Euro obbligherà tutti a riprendere confidenza con i numeri decimali limitati e a fare rapidi calcoli con essi.
È opportuno tener presente i caratteri di continuità ma anche quelli di discontinuità tra naturali e decimali limitati.
Gli algoritmi di calcolo e la notazione posizionale decimale rappresentano dei forti elementi di continuità.
Una forte discontinuità è rappresentata da:
strategie di confronto (nei naturali ad una maggior numero di cifre corrisponde sempre un numero maggiore, nei decimali limitati no, ad esempio 9,3>6,09)
nei naturali moltiplicare un fattore per un altro vuol dire sempre aumentare, o al massimo lasciare inalterato, il primo fattore; nei decimali, invece, se moltiplico un fattore per un numero <1 il prodotto è minore del fattore di partenza.
Da un punto di vista teorico i numeri decimali limitati corrispondono alle frazioni decimali e quindi fanno parte dei numeri razionali: è opportuno quindi che il discorso tra decimali limitati e frazioni decimali vada portato avanti di pari passo, soprattutto nelle attività di misurazione o legate all'euro.
Particolare attenzione occorre poi porre al fatto che, nel linguaggio parlato, la dizione di decimali che rappresentano denaro non segue precise norme codificate e che può in alcuni casi dar luogo ad ambiguità.
L'attività proposta è stata pensata per il difficile passaggio dal mondo delle lire a quello dell'Euro e come tale si può proporre a tutti gli alunni delle medie. Successivamente la stessa attività, adatta ad alunni di prima/seconda media, può essere strutturata per confrontare il mondo dell'Euro con quello di una qualsiasi altra valuta. E' da sottolineare però che il cambio lira/euro è fisso mentre quello euro /valuta straniera cambia nel tempo.

Descrizione dell'attività

1ª fase - Costruzione dei modelli in carta o in cartoncino di monete e banconote in euro e familiarità con esse da un punto di vista visivo: monete e banconote, grandezza, colore ecc…
Tabella riassuntiva delle monete e delle banconote:

monete	1 centesimo	2 centesimi	5 centesimi
	10 centesimi	20 centesimi	50 centesimi
	1 euro	2 euro	5 euro
banconote	10 euro	20 euro	50 euro
	100 euro	200 euro	500 euro

Dalla tabella delle monete e banconote a quella dei valori numerici:

[6] da C. Bernardi, L. Cannizzaro, M. Ferrari, M. Reggiani: "Facciamo i conti con l'Euro", a cura dell'UMI, MPI, 2001.

monete	0,01	0,02	0,05
	0,10	0,20	0,50
	1	2	5
banconote	10	20	50
	100	200	500

Scoprire le operazioni necessarie per percorrere la tabella per colonne (moltiplicare per 10, 100, ecc… e viceversa)
Scoprire le operazioni necessarie per percorrere la tabella per righe (moltiplicare per 2 e per 2,5 e viceversa)
Costruzione di un grafo per avviare le attività di cambio in euro. Il grafo delle monete può iniziare con la moneta più grande, 2 euro; quello delle banconote con la banconota più grande, 500 euro.
Graduare i cambi utilizzando tutti i modi possibili per esprimere una moneta in monete, una banconota in moneta, una banconota in banconota di taglio inferiore, una banconota in banconote e monete. Esecuzione dei cambi appoggiandosi all’immagine del grafo, affiancando le corrispondenti operazioni con i numeri decimali e le frazioni decimali senza usare l’algoritmo in colonna.
Esempio:

forma una banconota da 20 euro con monete da 20 centesimi
una banconota da 20 euro: la cambio con 2 banconote da 10 euro
10 euro con 2 da 5 euro
5 euro con 5 monete da 1 euro
1 euro con 5 monete da 20 centesimi
quindi 5·5·2·2=100

Questa procedura corrisponde all’operazione 20:0,20 = 100.
Oppure si potrà ragionare così:

$$20 \text{ centesimi è } \frac{1}{5} \text{ di euro}$$

$$1 \text{ euro è } \frac{1}{20} \text{ della banconota da 20 euro}$$

$$20 \text{ centesimi sono } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} \text{ di 20 euro cioè } \frac{1}{100} \text{ di 20 euro}$$

Alcuni punti da tener presenti
L’uso della frazione guardando i grafi costruiti
Dall’espressione verbale alla scrittura in centesimi, con frazione decimale e con numero decimale
Dal cambio tra monete e con banconote diverse all’applicazione del concetto di divisione senza usare l’algoritmo

Non esiste la moneta da un decimo di euro ma quella da 10 centesimi di euro (che equivale ad $\frac{1}{10}$ di euro cioè 0,1 = 0,10)
Porre particolare attenzione alle espressioni in cui compaiono cifre uguali a 0, come scrivo 2 euro e 7 centesimi?
Riflettere anche su come verranno letti i numeri decimali. Ad esempio 2,15 verrà letto due euro e quindici centesimi o anche due euro e quindici; 9,05 verrà letto nove euro e cinque centesimi oppure nove e zero cinque mentre la dizione nove e cinque è scorretta perché potrebbe indicare sia 9,05 che 9,50

2ª fase - Costruiamo una tabella di passaggio dagli euro alle lire secondo il cambio ufficiale: 1 € = 1936,27 L. e una dalle lire agli euro con il cambio inverso: 50 L. = 0.02 €.
Costruiamo quindi una terza tabella di confronto tra lire e euro:

lire	euro
968 150	500
500 000	258,23
387 254	200
100 000	51,65
193 627	100
96 800	50

lire	euro
5 000	2,58
38 725	20
1 000	0,52
19 370	10
500	0,26
…	…

Difficilmente può essere tenuta a mente questa tabella di conversione quando, soprattutto nei primi tempi di uso della nuova moneta, continueremo a confrontare i nuovi prezzi in euro con le ben conosciute lire. Quindi sarà opportuno trovare delle strategie di calcolo mentale.
Sarà utile analizzare con gli alunni esempi di questo tipo:
Se voglio mentalmente calcolare a quanto corrispondono 9 euro quale dei seguenti calcoli approssimati è il migliore? Perché?

$9 \cdot 2000$ $\qquad$ $9 \cdot 2000 - 9 \cdot 50$ $\qquad$ $9 \cdot 1900$ $\qquad$ $10 \cdot 1936{,}27$

Se voglio mentalmente calcolare a quanto corrispondono 7 euro quale dei seguenti calcoli approssimati è il migliore?

$7 \cdot 1900$ $\qquad$ $7 \cdot 1900 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 6$ $\qquad$ $7 \cdot 2000 - 7 \cdot 50$ $\qquad$ $7 \cdot 2000 - 7 \cdot 60$

Se passo da euro a lire mentalmente dividendo per 2000 ottengo un prezzo in lire maggiore o minore di quello che si troverebbe applicando il cambio ufficiale (1 euro = 1936,27 lire)?
Tra pochi mesi il costo d'ogni genere di consumo sarà espresso in Euro ma, ancora per parecchio tempo, valuteremo il costo di un oggetto pensando mentalmente il suo corrispettivo espresso in lire (facciamo, così, quando ci rechiamo per breve tempo all'estero).
Sono riportate, qui di seguito, due tabelle con l'indicazione di alcuni beni di consumo: nella prima il prezzo è indicato a volte in lire, a volte in Euro; nella seconda alcune delle conversioni di Lire in Euro sono errate. Provate a riempire la prima tabella e a trovare gli errori nella seconda (il cambio ufficiale è 1 Euro = L. 1936,27 ma per entrambe le tabelle potete utilizzare l'approssimazione che ritenete più conveniente).

Oggetto	Prezzo in Lire	Prezzo in Euro
Giornale quotidiano	L. 1 500	
Biglietto del cinema	L. 13 000	
Libro		€ 15
Compact disc		€ 20
1 litro di latte	L. 1 800	
1 automobile	L. 25 000 000	
1 appartamento		€ 225000
Abbonamento autobus	L. 50 000	
1 vestito		€ 140

Oggetto	Prezzo in Lire	Prezzo in Euro
Giornale quotidiano	L. 1 500	€ 7,5
Biglietto del cinema	L. 13 000	€ 6,5
Libro	L. 15 000	€ 15
Compact disc	L. 25 000	€ 12,5
1 litro di latte	L. 1 800	€ 9
1 automobile	L. 25 000 000	€ 50000
1 appartamento	L. 450 000 000	€ 225000
Abbonamento autobus	L. 50000	€ 25
1 vestito	L. 270000	€ 140

Alcuni punti da tener presenti.
Nel convertire i centesimi in lire occorre moltiplicare un numero <1 per il cambio ufficiale.
Nella colonna di conversione euro/lire i valori vanno approssimati a numeri interi e multipli di 50 se vogliamo essere aderenti alla realtà.
Per costruire la tabella di conversione lire/euro si utilizzano gli operatori inversi approssimando i risultati ai centesimi
Nel riempire la tabella di conversione precisa sarà utile l'uso della calcolatrice ma, prevedendo che sia quasi inevitabile l'errore di battitura, si può prima calcolare l'ordine di grandezza con un calcolo approssimato.
La differenza tra calcolo mentale e calcolo approssimato: nel primo si ricercano algoritmi diversi da quelli utilizzati per scritto basati sulle proprietà delle operazioni, nel secondo si sostituiscono i numeri con altri vicini scelti per rendere più semplici calcoli.
Le conversioni tra le monete può essere svolta in maniera precisa o approssimata? Quando conviene quella approssimata? Quando quella precisa? Verbalizzare i ragionamenti svolti.
Come confrontare due diversi procedimenti per la conversione? Entra in gioco di più la tecnica o il significato delle operazioni?
Come incide l'approssimazione scelta? Quanto incide sul prezzo del giornale e quanto su quello di un appartamento?
Gli aspetti psicologici legati al calcolo con il denaro: se approssimo per eccesso il cambio mi aspetto una conversione per eccesso.
Ragionamenti a confronto per scoprire gli errori nei cambi.

Elementi di prove di verifica

In questa fase possiamo impegnare gli alunni in tre attività strettamente legate all'uso della nuova moneta: i resti, le percentuali e i problemi di passaggio. Sarà opportuno proporre situazioni che hanno più di una strategia risolutiva e sollecitare l'argomentazione chiedendo non tanto risultati precisi ma scelta tra situazioni differenti. Ogni tipo di situazione andrà così discussa e analizzata mettendo a confronto approcci diversi alla possibile risposta.

I resti

Devo pagare 3 euro e 5 centesimi, se do 5 euro che resto mi spetta? In quanti modi differenti mi potrà essere dato?
Possiedo solo monete da 1 euro e da 20 centesimi di euro. Quale prezzo immediatamente superiore a 3 euro e mezzo posso pagare senza ricevere resto?
Claudio spende 2 euro e 7 centesimi per i quaderni e 1,55 euro per l'album. Paga con una banconota da 5 euro. Quanto riceve di resto? Da quante monete al minimo è formato il suo resto?

Le percentuali

È più grande il 10% di 1 euro o il 10% di 2000 lire?
È più grande il 10% di 1 euro o il 15% di 1500 lire?
Se il 10% del prezzo di un oggetto è 1,20 euro quanto costa quell'oggetto?
Una tazza costa 2 euro e 10 centesimi. Il negoziante ha diminuito tutti i prezzi del 10%. Quanto costa ora la tazza?
Immagina che un negozio abbia tutti gli articoli con il 10% di sconto ma tutti i prezzi siano in euro e si possa pagare solo in euro, il negozio accanto abbia gli stessi articoli con il 12% di sconto ma tutti i prezzi siano in lire e si possa pagare solo in lire. Dove mi conviene andare?

I problemi

Immagina che un negozio si accettino ancora sia lire che euro. Una camicia costa 50000 lire oppure 25,30 euro. Mi conviene pagare in lire o in euro? Se la scelta fosse tra 50000 lire e 25 euro ho bisogno di fare calcoli scritti per rispondere?

- Un imprenditore costruisce un magazzino a forma di parallelepipedo rettangolo lungo 30 m, largo 14 m e alto 6,5 m. Se il costo del magazzino è di 4100 euro, il costo a metro cubo è circa: 1 euro, 1,50 euro, 2 euro oppure 2,50 euro?

- Le pareti di una stanza hanno un'area di 50 m^2. Se con un barattolo dal costo di 2,75 euro imbianco 20 m^2 quanti barattoli mi servono? Qual è il mio preventivo di spesa?

Alcuni punti da tener presenti.
I valori dell'euro formano un insieme discreto, come del resto le lire, ma occorre lavorare anche con i centesimi. La sottrazione come completamento, la combinazione di monete diverse per ottenere lo stesso valore. Riconoscimento dei centesimi espressi in forma differente. Il confronto di percentuali: ragionamenti senza calcoli o con calcoli approssimati. I confronti che possono essere fatti a mente e quelli che vanno fatti per scritto. I rapporti che rimangono fissi nel tempo e quelli che variano (euro, lire, dollaro)

Giochiamo con i segni

Livello scolare: 3ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Eseguire le quattro operazioni con i numeri interi Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi Eseguire combinazioni diverse tra gli elementi di un insieme Utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (numeriche, geometriche, fisiche, …) Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Giustificare affermazioni durante una discussione	Operazioni con i numeri interi. Semplici questioni di tipo combinatorio	<u>Numero</u> Relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	

matematica anche con semplici ragionamenti concatenati Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema Valutare i procedimenti esaminati con riferimento alla economia di pensiero, alla semplicità di calcolo, e alla possibilità di applicarli in altre situazioni Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad es. passando dal problema considerato ad una classe di problemi			

Contesto

L'introduzione dei numeri relativi e l'operazione di addizione su di essi con le relative proprietà, non presenta particolari difficoltà per gli alunni, perché si possono creare delle situazioni problematiche tratte da situazioni concrete (debiti, crediti, altitudini, profondità, temperature,…) che li avviano all'intuizione dei concetti matematici.

Un nodo cruciale nasce quando si deve stabilire la definizione di prodotto di due numeri relativi. In questo caso, infatti, non si possono trovare giustificazioni intuitive "corrette" per la regola dei segni, perché la ragione della regola stessa va ricercata nel fatto che si vogliono conservare le cosiddette proprietà formali valevoli per il prodotto fra numeri positivi.

Infatti, accettare per definizione che il prodotto di due numeri relativi debba avere per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti non costituisce un particolare ostacolo per gli allievi, perché ricalca lo "schema logico" acquisito nello studio dei numeri positivi, mentre stabilire quale sia il segno del prodotto crea loro delle difficoltà.

Descrizione dell'attività

In una prima fase dell'attività si pone agli alunni il problema della ricerca del numero dei modi possibili in cui si può fissare la "regola" che determina il segno di un prodotto di due numeri relativi, intendendo "per regola" ognuna delle possibili combinazioni dei segni del prodotto tra due numeri relativi nei soli quattro casi possibili:

$$(+) \cdot (+) = ?$$
$$(+) \cdot (-) = ?$$
$$(-) \cdot (+) = ?$$
$$(-) \cdot (-) = ?$$

si tratta di individuare tutte le quaterne che si possono formare utilizzando due segni, quaterne che, in seguito, conosceranno come disposizioni con ripetizioni.

Un metodo può essere quello di costruire un diagramma ad albero utile alla compilazione della seguente tabella

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(+) · (+) =?	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
(+) · (-) = ?	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
(-) · (+) = ?	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
(-) · (-) = ?	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-

Si perviene al risultato che le possibili regole dei segni, tutte diverse, sono 16.
Si passa, quindi, alla verifica di quali di queste regole conservano le proprietà: commutativa, associativa, distributiva destra e distributiva sinistra.
Gli alunni si dividono in gruppi e testano alcuni casi, scegliendo a piacere sia la coppia di numeri relativi che la regola e verificano le quattro proprietà.
Si riscontrerà che per il numero elevato di prove da effettuare è più opportuno utilizzare il mezzo informatico, in quanto il procedimento non è finalizzato ad imparare a fare i calcoli, lunghi e ripetitivi, ma ad eseguire una verifica di proprietà.
Si può, pertanto, utilizzare un software[7] opportunamente predisposto, che permette di
- verificare se una data regola soddisfa una data proprietà;
- verificare proprietà che sono soddisfatte da una data regola;
- trovare tutte le regole che soddisfano una data proprietà;
- trovare tutte le regole che soddisfano tutte le proprietà;
- visualizzare i risultati con un diagramma di Eulero Venn.

Per i primi quattro punti, gli alunni possono scegliere sia di visualizzare i calcoli che permettono di affermare la validità di una proprietà per una data regola, sia di non visualizzarli ottenendo direttamente la risposta. Inoltre l'allievo può provare ad ipotizzare un risultato verificando successivamente la correttezza della sua ipotesi.
L'ultimo punto permette di collocare gli elementi costituiti dalle sedici possibili regole in quattro diagrammi di Eulero Venn che rappresentano gli insiemi delle regole che soddisfano ad una delle quattro proprietà. La collocazione della regola può avvenire sia in maniera automatica sia ipotizzata dall'alunno con successiva validazione da parte del software.
Infine, si inviteranno gli allievi a porre particolare attenzione alla seguente tabella, dalla quale si vede che solo due regole (la 7 e la 10) soddisfano a tutte le proprietà.
Seguirà una discussione che permetterà di effettuare una scelta ragionata fra le due.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
commutativa	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V
associativa	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	F	V
distributiva dx	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	F
distributiva sx	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F

La proposta è finalizzata non a far acquisire una regola in maniera meccanica, ma a far ripercorrere, ricorrendo anche alle nuove tecnologie, il percorso storico effettuato per la definizione della "regola dei segni".
La parte della verifica potrebbe essere svolta anche senza l'utilizzo del mezzo informatico, ma così potrebbe diventare lunga e ripetitiva con il rischio di far perdere di vista il senso del lavoro generale.
Inoltre, l'attività al computer permette all'alunno sia di formulare ipotesi e di verificarle, sia di familiarizzare con il calcolo letterale.
Nella fase iniziale e finale gioca un ruolo fondamentale la discussione, all'inizio per concordare le modalità operative, alla fine per operare e motivare scelte condivise.
Quando gli alunni trovano che tra le possibili regole soltanto due conservano tutte le proprietà, la 7 e la 10, è di fondamentale importanza l'attività di argomentazione per poter scegliere tra queste

[7] Il software è disponibile nel sito http:// www.dmi.unict.it/matematica/ o si può richiedere a pluchino@dipmat.unict.it

quale sia quella più conveniente. Si osserverà che quella che permette di identificare la struttura moltiplicativa dei numeri relativi con quella, già conosciuta, dei numeri positivi è la regola 7, che verrà assunta consapevolmente dagli alunni come la “regola dei segni”.

Bibliografia

F. Milazzo, V. Vacirca *La struttura moltiplicativa dei numeri relativi: osservazioni storico-didattiche*, Archimede,XXXV,nn.1-2,1983.

Il software *La regola dei segni* è stato realizzato da S. Pluchino del Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica dell’Università di Catania.

Scopri la regola

Livello scolare: 3ª media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze Utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (numeriche, geometriche, fisiche, …) Costruire, leggere, interpretare e trasformare formule Usare modelli dati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad es. passando dal problema considerato ad una classe di problemi	Operazioni con i numeri interi Potenze di numeri naturali e interi Numeri primi Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche.	<u>Numero</u> Le relazioni Argomentare e congetturare Misura Risolvere e porsi problemi	Educazione Tecnica

Contesto

I matematici e gli scienziati moderni si sono spesso impegnati a scoprire schemi e regolarità nei risultati numerici di esperimenti e di problemi, perché tali scoperte conducono spesso a nuove importanti idee.

Si è perfino detto che la matematica consiste nello studio delle regolarità.

Lo studio di relazioni numeriche, che presentano ricorrenze insolite, permette agli alunni di imparare molto nel campo della matematica e anche di divertirsi; infatti, scoprire regolarità in alcune situazioni problematiche, individuare leggi generali in procedimenti di calcolo, fare previsioni e congetture, sono attività certamente stimolanti

Descrizione dell'attività

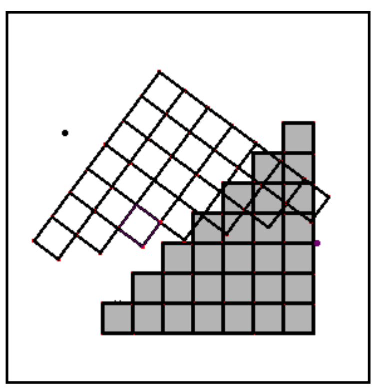
Una prima attività che si può proporre è quella di scoprire la formula relativa alla somma dei primi n numeri naturali, che corrisponde all'ennesimo numero triangolare.

A tal fine si può utilizzare un modello dinamico realizzato con Cabri che permette di arrivare alla generalizzazione di leggi aritmetiche, senza dover necessariamente passare per rigorose dimostrazioni matematiche.

In precedenti attività gli alunni hanno già scoperto che i numeri naturali possono essere rappresentati con punti o quadretti unità sistemati in modo da ottenere configurazioni geometriche lineari, rettangolari, triangolari ecc.

L'analisi dei primi numeri che hanno configurazione triangolare, porterà gli alunni alla scoperta della prima regolarità: la corrispondenza tra il numero d'ordine del numero triangolare e il numero degli addendi della somma corrispondente, per esempio il 4° numero triangolare è la somma dei primi 4 numeri naturali, il 5° la somma dei primi 5 e così via

Nella figura realizzata con Cabri, le unità sono rappresentate da quadretti, pertanto ogni numero è costituito da una colonna di quadretti in quantità uguale al valore del numero stesso. Accostando le colonne rappresentanti i primi n numeri naturali, si ottiene una configurazione triangolare, come quella in figura, che rappresenta, in particolare, la somma dei primi sette numeri naturali e quindi il settimo numero triangolare



Per conoscere il valore di questa somma si dovrà trovare l'area del triangolo ottenuto.

Il modello, nel suo dinamismo, permette di ruotare di 180° tale figura ottenendo un rettangolo che ha per base (7+1) e per altezza 7 quadratini, quindi calcolando l'area di tale rettangolo e dividendola per due si otterrà la somma richiesta.

La costruzione eseguita per realizzare la figura con Cabri permette di testare le congetture prodotte in casi particolari, per n=1, 2,3… e di iterare il procedimento quante volte si vuole avviando l'alunno alla comprensione del procedimento induttivo.

Pertanto, generalizzando, si può ragionevolmente ipotizzare che la somma dei primi n numeri naturali, che corrisponde all'ennesimo numero triangolare, è data dalla seguente legge:

$$n \cdot (n+1)/2$$

Un'altra attività interessante si può effettuare considerando la serie dei numeri dispari.

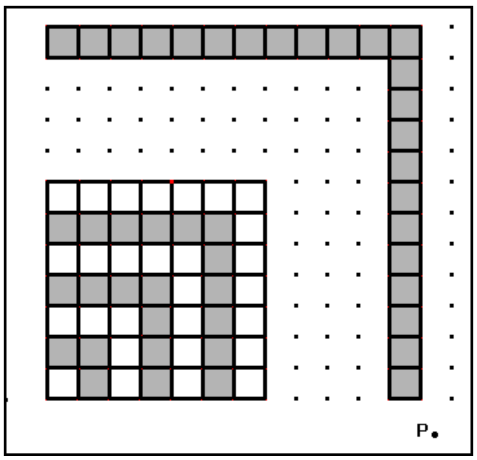
Gli alunni possono sommare i numeri dispari considerando i vari casi in cui gli addendi siano uno, due, tre, e così via scrivendo di seguito le somme ottenute:

n = 1	1=1
n = 2	1+3=4
n = 3	1+3+5=9
n = 4	1+3+5+7=16
n = 5	1+3+5+7+9=25

………………………………………………….

Si invitano, quindi, gli alunni a trovare se c'è una relazione tra il numero degli addendi e la somma ottenuta.

Si può ricorrere ad una rappresentazione geometrica realizzata con Cabri, che può essere considerata una "dimostrazione senza parole", di importanza rilevante dal punto di vista didattico,



in quanto la percezione può condurre ad un ragionamento formale.

Nella figura spostando il punto P opportunamente costruito si visualizzerà sullo schermo, in successione, la rappresentazione geometrica dei primi *n* numeri dispari nei casi *n*= 1,2,3,...

Nella figura di Cabri non si sono volutamente disegnare tutti quadratini al posto dei quali si sono tracciati dei punti, per "suggerire" all'alunno l'intuizione che il disegno si può iterare quante volte si voglia

Si noterà che in ogni caso si ottiene un quadrato avente per lato un numero di quadratini uguale al numero dei termini da sommare. Dall'osservazione di casi particolari si può arrivare alla regola generale

$$\underbrace{1+3+5+\ldots..+(\ )}_{n \text{ termini}} = n^2$$

Vi sono altri modi per esaminare questa somma, considerando casi particolari.

Per esempio nel sommare i primi dieci numeri dispari

1+3+5+7+9+11+13+15+17+19

si può osservare che questi numeri si possono associare in modo da ottenere cinque somme uguali a 20; la somma totale dei 10 numeri è $(5\times 20) = 100$; questo risultato è uguale a quello ottenuto elevando al quadrato il numero dei termini: $10^2 = 100$.

Si poteva procedere anche nel seguente modo:

si scrivono le due somme incolonnate e nella seconda riga si inverte l'ordine degli addendi

$$\begin{array}{l} 1+\ 3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ 19+17+15+13+11+\ 9+\ 7+\ 5+\ 3+1 \\ \hline 20+20+20+20+20+20+20+20+20+20 \end{array}$$

il totale è (10×20) cioè 200, ma è il doppio della somma cercata, la quale è quindi uguale a 100.

È interessante far generalizzare questi ultimi procedimenti per dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari può essere scritta come

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Un aspetto molto importane delle attività presentate è quello di far acquisire agli alunni la consapevolezza della necessità della dimostrazione.

A tal fine, è utile ricorrere a dei controesempi, per verificare che una regolarità riscontrata su un certo numero di elementi, non è sufficiente per validare la regola.

Essendo l'insieme dei numeri naturali infinito, se si vuole dimostrare la verità di una qualunque proposizione che si riferisce ad un numero naturale qualsiasi non si può certo ricorrere ad una analisi di tutti i casi possibili, come sarebbe lecito fare se operassimo su un insieme finito.

Non è neppure corretto analizzare soltanto un numero finito (anche se molto grande) di casi particolari, pretendendo di generalizzare il risultato ad ogni caso possibile.

Consideriamo alcuni significativi controesempi.

Dall'osservare che

1 è un divisore di 60

2 è un divisore di 60

3 è un divisore di 60

4 è un divisore di 60

5 è un divisore di 60

6 è un divisore di 60

non si può concludere che "ogni numero naturale è un divisore di 60"; infatti 7 non è un divisore di 60!

L'analisi dei seguenti prodotti

$1 \times 1 = 1$

$11 \times 11 = 121$

$111 \times 111 = 12321$

$1111 \times 1111 = 1234321$

$11111 \times 11111 = 123454321$

può fare intuire una certa regolarità, ma se calcoliamo, anche con l'aiuto di un foglio elettronico il seguente prodotto

$11\,111\,111\,111 \times 11\,111\,111\,111$

si può verificare che la regolarità intuita non è valida.

Si evidenzia, così, che in aritmetica non possiamo utilizzare un processo di induzione del tipo di quello usato nelle scienze sperimentali che consente di generalizzare, almeno fino a che un nuovo esperimento non lo contraddica, un risultato ottenuto in un certo numero di osservazioni.

Nasce il problema di costruirsi uno strumento dimostrativo valido all'interno dell'aritmetica.

Elementi di prove di verifica

Giochi con i numeri

1 - Considera tre numeri naturali consecutivi, ed aiutandoti anche con modelli realizzati con Cabri, esegui la loro somma e indica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

- La somma ottenuta è sempre un numero pari.
- La somma ottenuta sì può sempre dividere per 2.
- La somma ottenuta si può dividere per 3.
- La somma ottenuta non si può dividere per 4.
- La somma ottenuta è uguale ad doppio del primo numero.
- La somma ottenuta è uguale ai triplo del secondo numero.
- La somma ottenuta è sempre un numero dispari.
- La somma ottenuta è un multiplo di 3.
- La somma ottenuta non è uguale al triplo del numero più grande.

2 - Costruendoti un modello che ritieni più opportuno, esegui la somma di altre terne di numeri naturali consecutivi, prendendo come primo numero a volte un pari e a volte un dispari. Per ogni terna di numeri, quali delle affermazioni precedenti sono sempre vere? Come potresti esprimere la caratteristica comune a queste terne? Quali osservazioni puoi fare se il primo numero della terna è un pari o un dispari?

Bibliografia

C. Bernardi *Come e che cosa dimostrare nell'insegnamento della matematica* l'insegnamennto della Matematica e delle scienze integrate vol.20a-B N°5 1997

M. Boffa *Il discorso matematico nella scuola media: linguaggio dell'algebra e dimostrazioni* La matematica e la sua didattica . gennaio / aprile 1983

Castanelli, Gallini, Ferri, Manzini, Lancellotti *Divisibilità, regolarità numeriche: contenuti teorici e strategie didattiche.* Nucleo di ricerca Didattica Dipartimento di Matematica Università di Modena 1984

A.M. Damiani – A.M. Facenda – P. Fulgenzi – F. Masi – J. Nardi – F. Paternoster *Induzione e modelli matematici* – Sezione Mathesis di Pesaro.

H. M. Enzensberg *Il mago dei numeri* Ed. Enaudi

W H. Glenn, D. A. Jonson *Regolarità nei numeri* ed. Zanichelli 1973

Riferimenti bibliografici (vedi tabella di indice):

[Rif.1] Tratto da documenti interni del Nucleo di ricerca didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, coordinato dal Prof. F.Arzarello

[Rif.2] Tratto da "Bambini, maestri,realtà:un progetto per la scuola elementare", Rapporto Tecnico centro stampa del Dip.Mat.Univ. Genova

[Rif. 3] Tratto da: Sezione Mathesis di Pesaro, rielaborato nel Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica di Catania.

[Rif. 4] Tratto da un'esperienza descritta in "A scuola di luna" di M.A. Filippine, L. Fucili, N. Lanciano, F. Lorenzoni, A. Praticò, M. Tutino, Macro edizioni, 1998

[Rif. 5] Da un racconto tratto da P.J.Davis Il mondo dei grandi numeri Zanichelli Bologna 1984

[Rif. 6] H. Meissner: "Selfdeveloping strategies with a calculator game" in Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of mathematics Education, p.53-58

[Rif.7] C.Bernardi, L.Cannizzaro, M.Ferrari, M.Reggiani: "Facciamo i conti con l'euro" a cura dell'UMI,MPI,2001

[Rif. 8] Tratto da documenti interni del Nucleo di ricerca didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Catania

NUCLEO: Lo spazio e le figure

Introduzione

Gli esempi che seguono riguardano attività effettivamente svolte da alcuni colleghi nelle loro classi e che forse è meno frequente trovare nei libri di testo con questo tipo di presentazione. Sono stati scritti in modo da essere inseriti in un contesto più ampio. Sono stati anche indicati il livello scolare, i riferimenti ad altri argomenti interni o esterni alla disciplina, gli strumenti o le particolari tecnologie utilizzate, alcune prove di verifica e gli eventuali riferimenti storici.

Si è discusso a lungo nel gruppo di lavoro sul significato della geometria e su come andrebbe insegnata. Sono ancora attuali e validi gli orientamenti che emergono dai programmi dei diversi ordini di scuola.
Per quanto riguarda la geometria i programmi della scuola media (1979) propongono "una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi; sarà anche opportuno utilizzare materiale…La geometria…dovrà altresì educare alla visione spaziale. E' in questa concezione dinamica che va inteso anche il tema delle trasformazioni geometriche. Va sconsigliata l'insistenza su aspetti puramente meccanici e mnemonici, e quindi di scarso valore formativo. Si eviterà l'imposizione di regole…"

I programmi della scuola elementare (1985) per la geometria propongono: "…graduale acquisizione delle capacità di orientamento…progressiva organizzazione dello spazio…studio e realizzazione di modelli …contesti esperienziali e problematici e in continuo collegamento con l'insegnamento delle scienze…costruire, con tecniche e materiali diversi, alcune semplici figure geometriche solide…pluralità di sollecitazioni che provengono dalla percezione della realtà fisica…attività geometrica ricca e variata…manipolazione concreta di oggetti…osservazione e descrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche…perimetro, area e volume anche per figure irregolari…"

Gli orientamenti per la scuola dell'infanzia (1991) continuano sulla stessa linea: "localizzare… esplorare il proprio ambiente, viverlo, percorrerlo, occuparlo, osservarlo, rappresentarlo,…parole, costruzioni, modelli, schemi, disegni,…guardare la realtà da diversi punti di vista,…creazione di progetti e forme, …attività basate essenzialmente sul gioco, sulla manipolazione, l'esplorazione, l'osservazione diretta,…l'ambientazione nello spazio (mappe, tracce, movimenti)…l'esplorazione della natura, la progettazione di costruzioni,…simmetrie e combinazioni di forme (ritagli, piegature, mosaici, incastri, ecc.)". Particolarmente valorizzati in questo testo sono l'apprendimento attraverso il gioco, la collaborazione con gli altri, lo scambio fra pari che non prescinde peraltro dalle sollecitazioni dell'insegnante.

Per la geometria è utile abituare gli alunni ad una visione dinamica e non statica degli oggetti geometrici: pertanto sarà essenziale l'esplorazione in contesti vari, supportata eventualmente da opportuni software di geometria dinamica.

Dal punto di vista metodologico sembrano particolarmente adatte le attività di laboratorio, che permetteranno agli allievi non solo di eseguire ma anche di progettare, costruire e manipolare con materiali diversi, discutere, argomentare, fare ipotesi, sperimentare e controllare la validità delle ipotesi fatte.

Si ritiene importante che in geometria le definizioni, ma anche le idee e i concetti geometrici vengano "dopo l'uso". La tendenza che vorremmo auspicare è quella di una geometria sempre più per problemi e sempre meno per definizioni. E' determinante un equilibrio tra fasi operative e graduali sistemazioni teoriche, favorendo nei ragazzi il passaggio da evidenze visive ad argomentazioni via via più rigorose.

E' fondamentale arricchire i rapporti tra geometria e ambiente, interpretando la prima come momento di comprensione - rappresentazione del secondo. Nell'ambiente gli elementi si muovono e si relazionano tra loro. Non si tratta quindi solo di osservare l'ambiente e i suoi elementi, ma anche le loro relazioni ed i loro movimenti

La geometria è uno dei settori della matematica dove la storia si affaccia anche in modo esplicito. Ad esempio, nella parte riguardante la scuola media, a proposito delle similitudini e del cerchio si segnalano gli aspetti storici connessi: il metodo di Eratostene per la misura del raggio della terra, la determinazione approssimata di π.

In definitiva si propone una geometria fatta di situazioni ricche e motivanti, in cui l'alunno si possa formare basi intuitive attraverso le quali gli sia facile giungere in seguito a qualsiasi sistemazione assiomatica. Si ritengono importanti attività che favoriscano un arricchimento del patrimonio di immagini mentali e la visualizzazione delle figure, poiché la comprensione delle proprietà geometriche si fonda sulla capacità di astrarle, metterle in relazione, correlarle. Si vuole costruire una geometria che sia efficace strumento di modellizzazione della realtà, che offra frequenti occasioni di richiesta di argomentazioni, che dia ampio spazio all'intuizione senza peraltro lasciarsi guidare da essa a troppo facili conclusioni.

Indice delle attività

Nucleo lo spazio e le figure

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti esterni
1ª elementare	La casetta	Percorsi su un modello	Lingua Italiana Educazione all'immagine Educazione Motoria Geografia
1ª e 2ª elementare	Il coordinamento dei punti di vista	Rappresentazione dello spazio visibile	Lingua italiana Educazione all'immagine
2ª elementare	Percorsi nella realtà	Rappresentazione dello spazio visibile	Lingua italiana Geografia Educazione all'immagine
2ª elementare	Il villaggio delle fiabe	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Geografia Educazione all'immagine
1ª e 2ª elementare	Sequenze ritmiche nel gesto, nel suono, nel disegno… nell'arte	Ritmi e moduli nello spazio	Lingua italiana Scienze Educazione motoria Educazione all'immagine Educazione al suono e alla musica
3ª, 4ª e 5ª elementare	Dalle ruote al cerchio	Ruote e ingranaggi	Lingua italiana Storia Scienze Educazione all'immagine
4ª e 5ª elementare	Solidi noti e solidi misteriosi	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Educazione all'immagine
4ª e 5ª elementare	La rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva	Rappresentazione dello spazio visibile	Lingua italiana Storia Scienze Educazione all'immagine

1ª e 2ª media	Leggiamo in 2D un mondo a 3D	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Scienze Educazione artistica
2ª media	Definire quadrilateri con le simmetrie	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Educazione tecnica
1ª, 2ª e 3ª media	Regolarità e modularità nella natura e nell'opera dell'uomo	Ritmi e moduli nello spazio	Lingua italiana Scienze Educazione tecnica Educazione artistica
2ª media	I pentamini	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana
2ª e 3ª media	Definizioni e costruzioni geometriche "in discussione"	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Educazione tecnica
2ª e 3ª media	Dal dialogo del "Menone" al teorema di Pitagora	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Storia
2ª e 3ª media	Alla ricerca della città perduta	Carte geografiche	Geografia

SCUOLA ELEMENTARE

La casetta

Livello scolare: 1ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori, …) Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa Progettare e costruire oggetti con forme semplici	Collocazione di oggetti in un ambiente Mappe, piantine e orientamento Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo…)	<u>Lo spazio e le figure</u>	Lingua Italiana Educazione all'immagine Educazione motoria Geografia
Comprendere e usare consapevolmente i numeri nelle situazioni quotidiane in cui sono coinvolte grandezze e misure		Il numero	
Individuare e descrivere regolarità in semplici contesti concreti Produrre semplici congetture		Argomentare e congetturare	
Osservare oggetti e fenomeni individuando in essi alcune grandezze misurabili…..		Misurare	
Individuare l'obiettivo da raggiungere sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante …		Porsi e risolvere problemi	

Contesto
Percorsi su un modello

Descrizione dell'attività

Questa attività può essere avviata fin dalla prima classe. Prima di cominciare il lavoro vero e proprio, è bene svolgere alcune attività a scopo diagnostico per verificare la padronanza, da parte dei bambini, dello schema corporeo. L'insegnante deve essere attento a cogliere nella complessità della situazione tutti gli aspetti significativi per i loro possibili sviluppi.

1. Giocare con una casetta di cartone a dimensione di bambino, osservarla e rappresentarla da diversi punti di vista.

In una prima fase è importante dare spazio al gioco, in modo che il bambino possa appropriarsi dello spazio interno ed esterno della casetta e impari a proiettare sull'oggetto il proprio schema corporeo. In questo modo sarà possibile individuare il davanti, il dietro, la sinistra, la destra, il sopra e il sotto della casetta stessa e successivamente rappresentarla da diversi punti di vista disponendo i banchi in quadrato intorno alla casetta e salendo su un tavolo per vederla dall'alto. I bambini dovranno confrontare e discutere le diverse rappresentazioni. Una strategia utile per far cogliere la peculiarità di ogni vista è quella di fotografare la casetta da diverse angolature e farle poi riconoscere dai bambini stessi (Che parte della casetta vedi in questa fotografia? Oppure: Prova a metterti nello stesso posto del fotografo che ha scattato questa fotografia).

2. Progettare e costruire un villaggio a dimensione di bambino con più casette.

La costruzione di oggetti tridimensionali mette in contatto i bambini fin dalla prima classe con i primi elementi di geometria solida. Rimanendo in un contesto operativo, l'insegnante "presta la mano" al bambino quando il compito rischia di diventare troppo complesso. Ad esempio per far comprendere il collegamento tra le forme in 3D e quelle in 2D, l'insegnante può preparare alcuni pezzi di una casetta e chiedere ai bambini di progettare quelli che mancano: questo è il davanti della casetta, questo è il fianco destro. Quali pezzi mancano? Che forma hanno?

3. Costruire la mappa del villaggio precedente su carta quadrettata.

Per realizzare la mappa i bambini devono affrontare diversi problemi:
- il problema dell'orientamento, per il quale è necessario costruirsi punti di riferimento appropriati ad es. segnare sul pavimento i confini del villaggio (un rettangolo), marcare i lati con colori diversi e riportarli sulla mappa;
- il problema della vista dall'alto come punto di vista privilegiato che permette di cogliere immediatamente le relazioni tra tutti gli elementi facenti parte di un ambiente; le casette viste dall'alto perdono la tridimensionalità perché si trasformano in rettangoli, la rappresentazione diventa quindi simbolica liberandosi gradualmente dagli elementi affettivi e/o percettivi;
- il problema della localizzazione degli oggetti: per facilitare il compito la mappa si deve realizzare su carta quadrettata, i quadretti corrispondono alle piastrelle e contando i quadretti per determinare le distanze i bambini sperimentano in modo spontaneo l'uso di un riferimento cartesiano.

4. Realizzare percorsi nel villaggio.

La casetta originale e le altre casette costruite si collocano in uno spazio delimitato dell'aula e simulano un villaggio nel quale i bambini possono realizzare dei percorsi con diverse modalità:
Agendo nel villaggio, e poi rappresentando sulla mappa, i bambini imparano a porsi e a risolvere problemi di percorsi presentati sotto forma di gioco.
- Il cerca-tesoro. Dove abbiamo nascosto il tesoro? Seguendo le indicazioni dei compagni (vai avanti di 3 passi, gira a destra, vai avanti di 5 passi….) il bambino riesce a trovare il tesoro nascosto.
- Altri problemi: Qual è il percorso più lungo? Chi arriva prima? Dove arrivi se…. Come fai ad arrivare a …. C'è un solo modo per arrivare a …. Puoi arrivare a … passando da ….

Ogni problema deve essere formulato con un "perché" finale in modo che il bambino sia stimolato ad esplicitare oralmente e/o per scritto, la propria strategia e la possa confrontare e condividere con gli altri.
Gli stessi problemi si possono proporre in altri spazi ad esempio in palestra o nel corridoio della scuola.

Strumenti

Scatoloni, cartone, cordini, colori a tempera, forbici, colla, taglierine, fogli di carta quadrettata, matite, pennarelli, nastro adesivo, pinzatrice, macchina fotografica, fotocopie della mappa del villaggio.

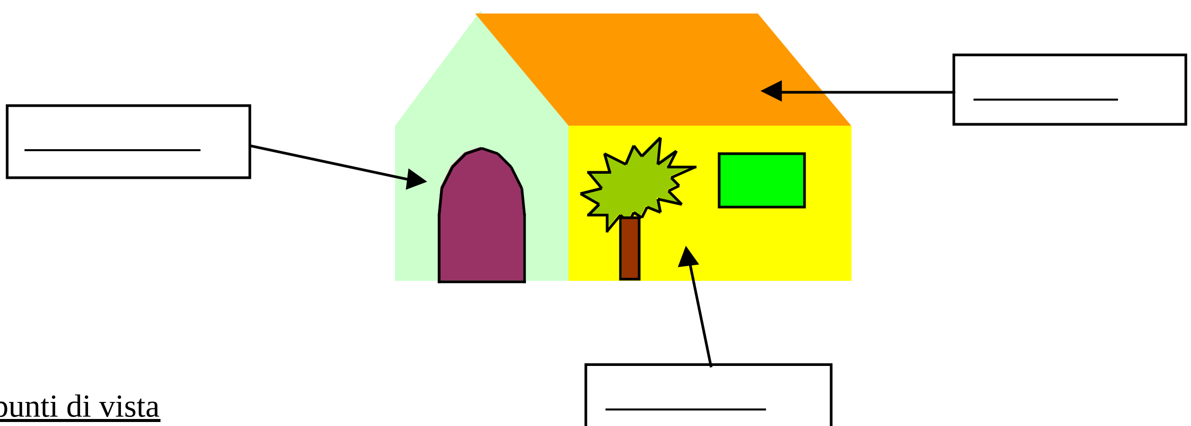
Elementi di prove di verifica

Competenze: riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori, …); eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa; progettare e costruire oggetti con forme semplici

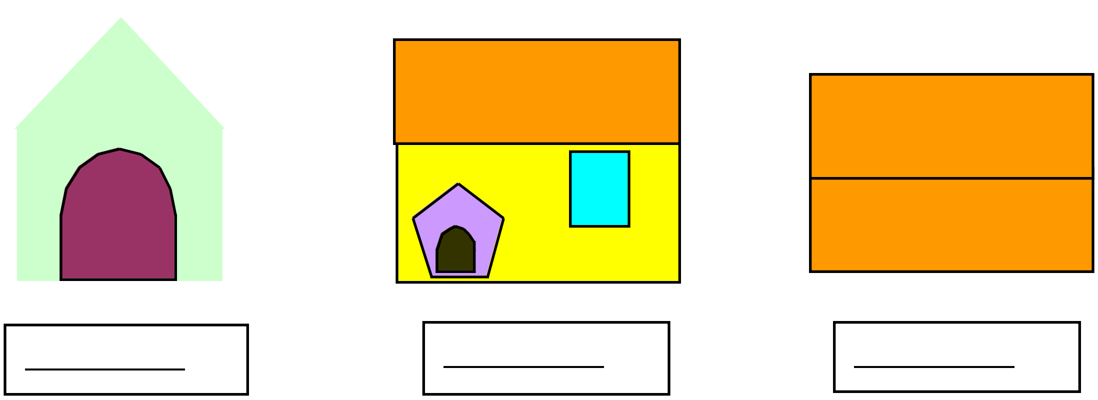
<u>La casetta</u>

<u>NOTA BENE</u>: i disegni della casetta presentati hanno puro scopo indicativo, l'insegnante dovrà preparare le prove riferendosi alla casetta che conoscono i bambini.

Un bambino ha tolto i cartellini che la maestra aveva attaccato sulle varie parti della casetta. Sei capace di riconoscerle ugualmente?
Scrivi sui cartellini il nome della parte della casetta indicata.

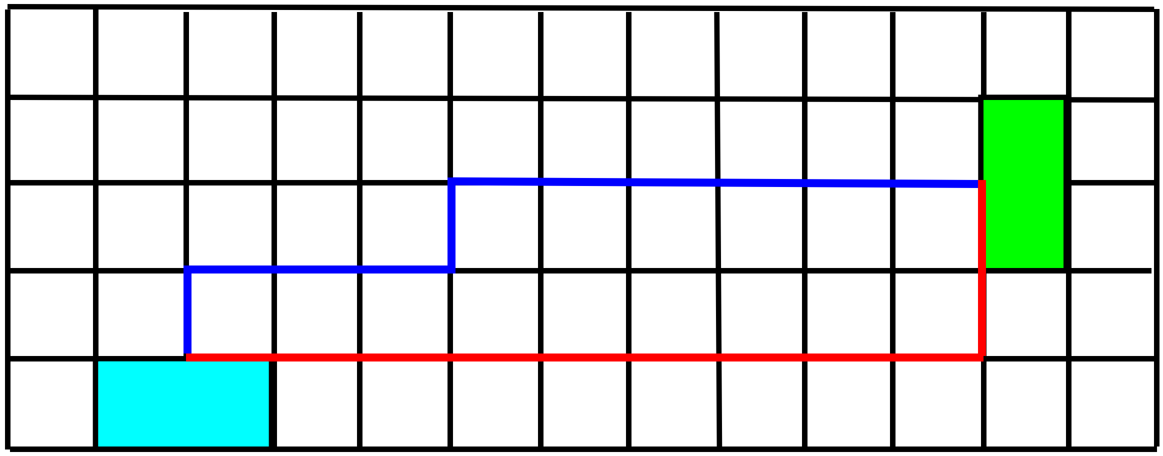


<u>I punti di vista</u>
Giovanna ha disegnato la casetta da tre punti di vista diversi: sai riconoscerli?
Scrivi nei cartellini da che punto di vista è stata disegnata la casetta:



I percorsi

Per andare dalla casa azzurra alla casa verde Carlo fa il percorso blu, invece Aldo fa quello rosso. Chi fa più strada? Perché? ____



Enrico esce dalla casa azzurra va avanti di 2 quadretti[1], gira a destra e va avanti di 9 quadretti. Secondo te è arrivato alla casa verde? Disegna il suo percorso e rispondi.

____

Ha fatto più o meno strada di Carlo e Aldo? Perché?

____

____

____

[1] I bambini camminano sulle linee e quindi in realtà le distanze si misurano in "lati di quadretti", verificare la comprensione di questo fatto da parte dei bambini.

Il coordinamento dei punti di vista *

Livello scolare: 1ª e 2ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra / sotto, davanti / dietro, dentro / fuori, …). Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa. Progettare e costruire oggetti con forme semplici	Collocazione di oggetti in un ambiente. Mappe, piantine e orientamento.	<u>Lo spazio e le figure</u> Porsi e risolvere problemi. Argomentare e congetturare	Lingua italiana Educazione all'immagine

Contesto
Rappresentazione dello spazio visibile

Commento
Il nucleo fondamentale del percorso è costituito da problemi di rappresentazione dello spazio visibile limitati al caso del microspazio, cioè quello spazio nel quale il bambino può avere una visione ampia ed approfondita degli oggetti che ha davanti.
Il problema del coordinamento dei punti di vista ha come scopo la rappresentazione dell'immagine globale di un oggetto o di un insieme di oggetti attraverso l'organizzazione di immagini (visuali) ottenute da punti di vista diversi.[1].
Quindi si può affermare che la rappresentazione di problemi di coordinamento del punto di vista è importante per lo sviluppo globale del bambino per la sua valenza culturale e per l'introduzione di concetti fondamentali.
I nodi cruciali del percorso si possono individuare in :

- *Costruire la visuale a partire dalla posizione dell'osservatore*
- *Costruire la posizione dell'osservatore a partire dalla visuale*
- *Comprendere che se cambia la posizione dell'osservatore cambia la visuale*
- *Comprendere che se cambia la visuale è cambiata la posizione dell'osservatore*
- *Esprimere correttamente relazioni spaziali tra oggetti nel microspazio*
- *Finalizzare la verbalizzazione alla costruzione efficace della visuale*
- *Riflettere sulle strategie usate per costruire la visuale* [1]

In diverse fasi dell'attività si fa riferimento all'utilizzo della discussione matematica .[1]
Una particolare attenzione nella discussione matematica deve essere posta nella parte verbale-linguistica dell'attività di insegnamento-apprendimento, l'utilizzo di un registratore ed in un secondo tempo la riflessione dell'insegnante su ciò che è emerso può offrire informazioni rilevanti sui processi che si svolgono all'interno della classe. E' importante tenere conto, oltre che della parte verbale, anche degli aspetti grafici, gestuali, iconici che integrano e completano l'attività stessa.

Descrizione dell'attività

1 - Costruzione di un paesaggio da parte di due bambini: un bambino/a costruisce il paesaggio. Un compagno/a senza vedere deve costruire lo stesso paesaggio secondo le indicazioni del primo.

Nella prima attività due bambini vengono messi al centro della classe posti di spalle, in modo che l'uno non possa vedere ciò che fa l'altro. Hanno a disposizione lo stesso numero di elementi (una casina, una scatola, un'albero, un omino…) con cui il primo bambino costruisce liberamente un paesaggio dando, mentre lo fa, istruzioni verbali al compagno affinché egli possa posizionare nello stesso modo i suoi elementi.

2 - Discussione su i due paesaggi realizzati

Nel corso di una discussione i bambini confrontano i paesaggi costruiti per focalizzare l'attenzione sulla localizzazione degli oggetti nello spazio e fra di loro e per costruire un linguaggio condiviso.

3 - Rappresentazione col disegno del paesaggio costruito dal primo bambino.

I bambini, in cerchio, disegnano il paesaggio costruito dal primo bambino. Tutti i disegni vengono esposti e si discute su analogie e differenze.

4- Confronto in discussione orale tra tutti i disegni per mettere in evidenza le differenze tra il paesaggio costruito e i disegni: allineamento degli oggetti del paesaggio, presenza di elementi affettivi, diversità dei punti di vista

Si costruisce un secondo paesaggio e lo si disegna. Si passa poi al confronto di tre o quattro disegni, scelti dall'insegnante, che rappresentano le diverse tipologie di rappresentazione. Ciascun bambino deve riconoscere il proprio modo di rappresentazione.

5 - Costruzione e successiva rappresentazione con il disegno di un nuovo paesaggio con le stesse modalità

Si utilizzano le stesse modalità operative, di confronto e di discussione dei punti precedenti.

6 - Copia dal vero di oggetti tridimensionali che si trovano in aula, presentati uno per volta a tutta la classe (i bambini sono posizionati intorno all'oggetto).

Per l'attività di "copia dal vero" l'insegnante sceglie 3 o 4 oggetti, ad esempio, un vaso, una scatola, una macchinina…, e chiede ai bambini di disegnare l'insieme degli oggetti e di descrivere come sono disposti fra loro.

7 - Confronto e discussione dei disegni realizzat, evidenziando le differenze dovute al diverso punto di vista.

La discussione " *cosa vuol dire punto di vista*", che dovrebbe emergere dall'attività precedente ha lo scopo di avviare la costruzione scientifica del concetto di punto di vista <u>(il punto di vista è la posizione, fissa, da cui un occhio guarda parte del mondo visibile, senza cambiare direzione dello sguardo).</u>

8 - Confronto e discussione sul significato del termine " punto di vista" .

9 - Richiesta scritta con più domande su cosa vuol dire punto di vista

Le due attività hanno lo scopo di consolidare l'interiorizzazione dei significati legati al termine "punto di vista".

10 - Partendo da disegni dati individuare la posizione di chi li osserva

L'attività serve per partire dalla visuale rappresentata sui diversi disegni per risalire all'osservatore – autore. L'insegnante prepara su un tavolo una composizione di oggetti di altezze diverse, parzialmente coperti, ne realizza 4 schizzi presi da visuali diverse, dispone i bambini intorno al tavolo e chiede loro di individuare i quattro osservatori "privilegiati".

11 – La visuale dell'insegnante: disegno di un oggetto, immaginandolo dal punto di vista dell'insegnante (in posizione diversa rispetto alla classe)

Per l'attività "visuale dell'insegnante" si dispongono alcuni oggetti sulla cattedra e si chiede ai bambini, disposti in posizione frontale rispetto alla cattedra, di rappresentare e descrivere ciò che l'insegnante vede dal suo punto di vista. In altre parole i bambini sono chiamati a stabilire relazioni spaziali tra il soggetto (l'insegnante) e i singoli oggetti e compiere su tali relazioni le trasformazioni necessarie (ad esempio ciò che è a destra per me, per l'insegnante sarà a sinistra).

12 - Copia dal vero di un cubo

Ogni bambino ha sul banco un cubo posto di spigolo e si chiede di disegnarlo.
13 - Confronto e discussione sulle diverse rappresentazioni del cubo
La discussione di confronto sui diversi disegni dei bambini fa emergere i primi problemi di rappresentazione geometrica e i primi tentativi, spontanei, di rappresentazione in prospettiva centrale. Si richiede ai bambini la copia dal vero di oggetti “meno regolari ” del cubo, come ad esempio tavoli e sedie, per poi discutere su problemi di verosimiglianza.
13 - Copia dal vero del banco
Copia dal vero di un banco: si stabilisce un punto di vista privilegiato e unico per tutti i bambini (i bambini devono disegnare il banco dalla stessa posizione).
14 - Confronto e discussione sulla rappresentazione del banco
Confronto e discussione delle principali tipologie di disegni prodotti dai bambini. L’insegnante deve focalizzare l’attenzione degli allievi sulle differenze di rappresentazione che possono essere collegate da un modello geometrico; deve inoltre guidare i bambini al riconoscimento della rappresentazione più “verosimile”.

Elementi di prova di verifica

Tale verifica è stata tratta da un’idea di Hughes, Donaldson & Pontecorvo
- Il problema proposto, di lettura di immagini, presenta tre situazioni e si intitola “IL NASCONDINO”. La consegna è la stessa per ogni immagine.
Consegna: CI SONO TRE POLIZIOTTI FERMI IN QUESTE POSIZIONI. DOVE PUO’ ESSERSI NASCOSTO PIERINO SE NON VUOLE ESSERE VISTO? SPIEGA OGNI VOLTA IL RAGIONAMENTO CHE HAI FATTO.

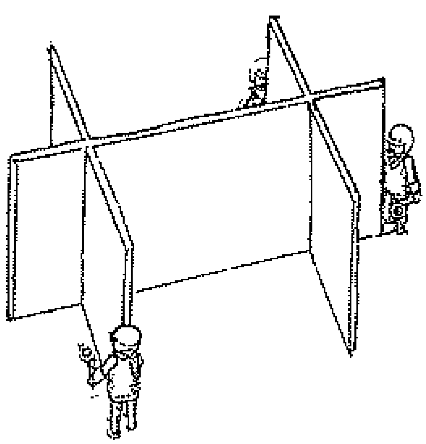


FIG.1

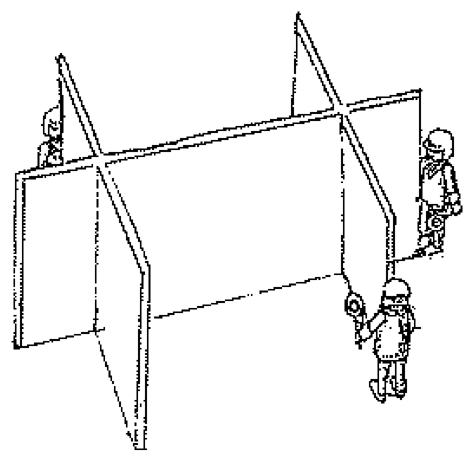
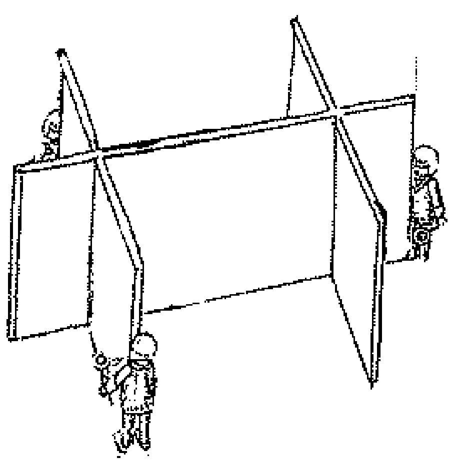


FIG. 2



* Da un’idea elaborata dal N.D.R. dell’Università di Modena Sezione Scuola Elementare

FIG. 3

Percorsi nella realtà *

Livello scolare: 2^a elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori…) Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma e uso.	Collocazione di oggetti in un ambiente Mappe, piantine e orientamento Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo…)	<u>Lo spazio e le figure</u> Risolvere e porsi problemi. Misurare. Argomentare e congetturare.	Lingua italiana Geografia Educazione all'immagine ducazione motoria

Contesto
Rappresentazione dello spazio visibile

Commento
Il contesto "Percorsi nella realtà " presenta un itinerario didattico capace di sviluppare determinate competenze di tipo geometrico, di tipo logico-linguistico e di tipo geografico, connesse con l'osservazione, la descrizione e la rappresentazione grafica.
Per poter lavorare in modo sistematico e profondo in questo contesto, è necessario che il percorso sia unico e condiviso dalla classe e che offra opportunità di osservazione (quali, ad esempio, la visione dall'alto e la visione da angolazioni differenti) ed opportunità di attività geometriche ricche, connesse con l'obiettivo di costruire una mappa.
Nello scegliere un percorso accessibile per la propria classe, quindi, l'insegnante deve avere chiari gli obiettivi che si prefigge, per valutare le opportunità offerte dai vari percorsi possibili (ad esempio, un percorso ad anello permette percorso lineare andata/ritorno presenta al ritorno l'ordine inverso delle cose viste, invertendo la collocazione destra/sinistra).

Descrizione dell'attività
E' opportuno che le fasi del lavoro in classe alternino uscite, descrizioni verbali, disegni, per permettere una ricostruzione del percorso attraverso successive esperienze ed approssimazioni.
La modalità di lavoro più efficace è quella di alternare
- momenti di riflessione individuale, per produrre un testo, un disegno, o per mettere a confronto il testo o il disegno di un compagno con il proprio o quelli di due compagni fra loro
- a momenti di discussione collettiva per costruire conoscenze comuni alla classe.

• Fin dalla prima esplorazione deve essere chiaro ai bambini l'obiettivo della "passeggiata", affinché la loro attenzione sia diretta a cogliere quei particolari che li aiuteranno a ricostruire in classe una mappa mentale del percorso effettuato.
• La prima ricostruzione è una verbalizzazione, individuale per iscritto o collettiva in discussione (la prima modalità offre il vantaggio che ogni bambino deve impegnarsi ad esplicitare quali modalità di ragionamento hanno guidato la sua osservazione e l'insegnante ha modo di individuarne limiti e potenzialità iniziali, per lavorare su di essi).

- Se la prima tappa è stata individuale, è opportuno farla seguire da una discussione di confronto fra le descrizioni prodotte, per consentire a ciascun bambino di arricchire la propria, sia modificando eventuali errori di localizzazione, sia da un punto di vista lessicale e sintattico
- Il disegno, conseguente alla verbalizzazione, presenta la difficoltà di rappresentare sul piano bidimensionale del foglio ciò che i bambini hanno visto nello spazio tridimensionale.
  E' opportuno, però, che l'insegnante non intervenga sui disegni per correggerli, perché un modello calato dall'alto, senza un'adeguata maturità di pensiero alle spalle, rischia di costituire un ostacolo alla maturazione del bambino. Bisogna lasciare a ciascuno il tempo per costruire da sé, attraverso le varie attività del contesto, quell'articolazione del pensiero che consente di rappresentare la realtà con la sicurezza che deriva dalla comprensione delle relazioni spaziali.
  Anche fra i disegni, che vengono esposti su una parete, si fa un confronto per riflettere sulla corrispondenza alla realtà, sulle parti mancanti, sulla maggiore o minore possibilità di riconoscimento (la strada in curva; la necessità di utilizzare punti di riferimento per dividere in sequenze successive il percorso, con una prima riflessione sulla opportunità di scegliere punti fissi, "perché l'automobile rossa poi va via"; il modo di rappresentare le case, il ponte…), per arrivare infine ad avvertire la necessità di lavorare su una parte di percorso per volta per poter osservare e rappresentare con maggior precisione.

Collegati a quest'attività, possono essere opportuni esercizi tecnici, come "cacce al tesoro" con consegne scritte (a coppie, un bambino descrive come il compagno può localizzare il tesoro); rappresentazione grafica di spazi della scuola o circostanti (visti dall'alto, di fronte,…) con successivo confronto tra disegni.

- Dopo aver deciso insieme in quante e quali tappe suddividere il percorso, si lavora su ogni tappa, ritornando a percorrerla e a descriverla per iscritto.
- Si riflette, quindi, sul testo di un compagno (scelto dall'insegnante tra quelli più completi e ben strutturati), confrontandolo con il proprio in base agli argomenti trattati.
- Se fra i testi prodotti dalla classe non ci fosse un testo con le caratteristiche necessarie (può succedere in una normale classe II!), può strutturarne uno l'insegnante, adatto a stimolare la completezza dei testi individuali e l'uso di termini via via più precisi.
- Si disegna la parte di percorso descritta, poi si confrontano individualmente i disegni fotocopiati di due compagni, scelti dall'insegnante in base alle riflessioni che ne possono scaturire (esempio, inversione destra/sinistra in uno dei due, mancanza di un ponte o rappresentazione di case da prospettive diverse – frontali e/o dall'alto-…)
- Si mettono in discussione le osservazioni fatte nel confronto per arricchirle e rendere patrimonio comune le competenze che man mano si acquisiscono

A lato di quest'attività sono significativi esercizi di copia dal vero di oggetti (scatole, barattoli, bottiglie) da diversi punti di vista, seguiti da discussioni di confronto fra i disegni; esercizi di lettura di immagini piane di oggetti spaziali (che cos'è? da che punto di vista è stato disegnato?)

Attraverso queste attività, ripetute per le varie tappe in cui è stato suddiviso il percorso, i bambini arrivano a:
- capire come e cosa guardare per cogliere gli aspetti essenziali di un percorso
- percepire lo spazio in relazione al movimento, cioè arrivare alla costruzione di una mappa mentale che il bambino si crea visualizzando il movimento del proprio corpo nello spazio
- intuire alcune relazioni e concetti geometrici legati al contesto: incrocio/intersezione, allineamento, angolo/angolazioni differenti, spigolo, rotazione a dx/sn, direzione e verso…
- cogliere la necessità di rappresentare il percorso, con case, alberi…, in una visione dall'alto, rispettando una certa proporzionalità (ma la riduzione in scala del percorso non costituisce un

obiettivo prioritario per questo ciclo!) sia tra le tappe in cui è stato suddiviso il percorso, sia tra gli oggetti in esso contenuti.
- sentire il bisogno di misurare in qualche modo (passi, uso di cordini riportati più volte, controllo di tempi necessari per arrivare da.. a…, fino allo strumento convenzionale, il metro a nastro)

- Si tratta ora di ricostruire in sintesi tutto il percorso, sia verbalmente, utilizzando il lessico specifico di questo contesto, che graficamente, utilizzando simboli condivisi per una prima mappa.
- Si confronta infine la propria rappresentazione grafica con una cartina topografica della zona per riconoscere il nostro percorso e avviare le prime riflessioni sul linguaggio cartografico (es.: alcuni dei punti di riferimento –il semaforo, il giardino di…- molto importanti per noi non si trovano sulla cartina).

Elementi di prove di verifica

1 - Competenza da verificare: capacità di disegnare una mappa a partire dalla descrizione.

Cappuccetto Rosso incontra il lupo nel folto del bosco, mentre sta andando a trovare la nonna.
La casa della nonna si trova in mezzo al grande prato che il fiume separa dal bosco.
Il lupo propone a Cappuccetto Rosso una gara per vedere chi arriva primo alla casa della nonna, percorrendo due sentieri diversi. Il sentiero di Cappuccetto Rosso fa molte curve prima di arrivare al ponte, mentre quello del lupo, molto scosceso, scende direttamente al fiume.
Disegna la mappa dei percorsi di Cappuccetto e del lupo.
(Se lo ritiene opportuno l'insegnante può preparare una scheda con punto di partenza e punto d'arrivo già rappresentati).
Parole chiave che il bambino deve individuare per costruire la mappa: Folto del bosco (punto di partenza) – Casa in mezzo al prato (punto d'arrivo) - Fiume che separa il prato dal bosco (necessità di un ponte per attraversarlo) – Due percorsi diversi, uno diretto, l'altro con molte curve (entrambi nel bosco, si ricongiungono al ponte).

2- Competenza da verificare: capacità di leggere cartine topografiche.

Descrivi il percorso che fai ogni giorno da casa tua alla scuola, poi mettilo in evidenza con un colore nella cartina topografica (del paese o del quartiere, se ci si trova in città).
Metti in evidenza, se c'è, un percorso alternativo e spiega perché abitualmente scegli il primo.

* Da un'idea elaborata nel NDR sezione elementare dell' Università di Genova

Il villaggio delle fiabe

Livello scolare: 2ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori, …) Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, ….. Progettare e costruire oggetti con forme semplici	Collocazione di oggetti in un ambiente Mappe, piantine e orientamento Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo…)	Lo spazio e le figure	Lingua italiana Geografia Educazione all’immagine
Eseguire semplici calcoli mentali con addizioni e sottrazioni		Il numero	
Individuare e descrivere regolarità in ambiti vari; Produrre semplici ipotesi e verificarle;		Argomentare e congetturare	
Osservare oggetti e fenomeni, individuare grandezze misurabili; Compiere confronti diretti e indiretti di grandezze, effettuare misure per conteggio e con oggetti o strumenti elementari;		Misurare	
Selezionare le informazioni utili e prospettare una soluzione del problema; Riflettere sul procedimento risolutivo seguito e confrontarli con altre possibili soluzioni.		Porsi e risolvere problemi	

Contesto
Figure geometriche come oggetti matematici

Descrizione dell'attività

Il villaggio di cui si parla in questa attività è un paese realizzato con cubi di varie dimensioni che rappresentano le case dei personaggi delle fiabe. Le attività proposte hanno come argomento centrale lo studio delle proprietà geometriche del cubo e del quadrato.

Il cubo e il quadrato sono figure facilmente riconoscibili dai bambini, perché hanno molte regolarità: le facce del cubo sono tutte congruenti e inoltre sono tutte quadrate. La loro scelta per sviluppare, con i bambini di seconda elementare, attività che tengano legate le figure a 3D con quelle a 2D, è quindi dettata dalla loro semplicità.

Il bisogno di denominare facce, spigoli e vertici emerge quasi subito, sta all'insegnante cogliere il momento più adeguato per introdurre e poi utilizzare tale terminologia curando che ne venga gradualmente interiorizzato il significato. Per raggiungere questo scopo ogni attività deve essere accompagnata o seguita da momenti di discussione sui prodotti, sulle strategie seguite, sulle caratteristiche scoperte….

Altri aspetti importanti presenti nelle attività proposte sono:

- la verbalizzazione scritta di procedure, di ipotesi progettuali ecc.;
- la strutturazione di testi collettivi che sintetizzino fasi significative del percorso e contribuiscano quindi alla costruzione di un linguaggio condiviso dalla classe;
- la rappresentazione: ad esempio nel disegno del cubo bisogna stimolare i bambini a trovare strategie che permettano di riconoscere tutte le sue caratteristiche, in primo luogo la tridimensionalità; far vedere ai bambini fotografie del cubo da diverse angolature può far cogliere la trasformazione delle facce quando si cerca di rappresentarle con una visione di tipo prospettico, anche se questo non è un obiettivo prioritario in classe seconda (saper leggere una figura tridimensionale è però una competenza indispensabile per capire un'immagine, vedi le attività di Educazione all'immagine)

L'attività di costruzione di casette con i cubi, suggerita verso la fine del percorso, stimola i bambini a ricercare e a percepire congruenze e simmetrie nello spazio (sono uguali o diverse queste due casette fatte con 3 cubi?), fa ragionare in modo intuitivo sui volumi (conteggio dei cubi piccoli contenuti in un cubo più grande o in una costruzione modulare) e apre, insieme ad altre situazioni, verso la ricerca di soluzioni a semplici questioni di tipo combinatorio che diventeranno uno degli obiettivi del ciclo successivo.

1. Progettazione e costruzione di un cubo in cartoncino usando come modello un cubo già costruito.

I bambini sono organizzati a gruppi, ogni gruppo pensa una strategia per costruire un cubo simile al modello (realizzato in polistirolo o legno e avente lo spigolo di 10 cm) in modo che il risultato sia il più perfetto possibile. Le strategie che di solito vengono messe in atto sono tre: "impacchettamento" del cubo modello per ricavare le impronte delle facce, costruzione di 6 quadrati staccati ottenuti segnando il contorno di una faccia, rotolamento del cubo sulle 6 facce con ricalco del loro contorno. Quest'ultima strategia quasi sempre porta alla costruzione di uno sviluppo piano ma l'obiettivo di questa attività non è tanto far costruire lo sviluppo correttamente quanto far individuare bene le 6 facce quadrate congruenti. Il momento centrale è costituito dal confronto tra le strategie trovate, mediante la discussione collettiva, per giungere alla formulazione di una procedura di costruzione condivisa. Quando i bambini individuano le facce del cubo come quadrati, il cubo modello viene ricoperto con quadrati di cartoncino di colore diverso secondo la loro posizione (sopra/sotto giallo, destra/sinistra blu, davanti/dietro rosso).

2. Progettazione e costruzione di un cubo con cannucce usando lo stesso modello del cubo precedente.

Anche in questo caso conviene far lavorare i bambini a gruppi, non solo perché la costruzione è difficoltosa, ma anche perché nella discussione i bambini mettono in gioco tutte le loro conoscenze sulla struttura del cubo. Il cubo di polistirolo funge sempre da modello, si devono dare le cannucce intere da tagliare della misura esatta. L'obiettivo è far emergere la struttura del cubo costituita da 12 spigoli congruenti e da 8 vertici che sono punti di incontro (e quindi di saldatura) di 3 spigoli. Il confronto fra i due cubi costruiti, quello in cartoncino e quello con le cannucce serve a mettere in risalto il pieno e il vuoto e quindi far cogliere la differenza tra facce, spigoli e vertici nelle due situazioni. Un problema interessante da far risolvere è il seguente: "Una coccinella parte da un vertice del cubo e deve raggiungere il vertice opposto; se può camminare solo sugli spigoli e una volta sola su ogni spigolo, dì e poi indica sul cubo qual è la strada più breve da percorrere. Ne hai trovata una sola?" E successivamente: "Che cosa cambia se invece cammina sulle facce?". La risoluzione è sempre accompagnata da qualche forma di rappresentazione, molto utile all'insegnante per capire come i bambini percepiscono il cubo; nel secondo problema è interessante far disegnare il percorso direttamente su un cubo di cartoncino e poi aprirlo: sullo sviluppo il percorso più breve risulta essere una linea retta.

3. Disegno del quadrato su carta quadrettata e su carta bianca.

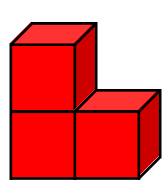
Disegnare il quadrato su carta quadrettata non comporta problemi: basta contare quadretti. Quando invece i bambini dovranno disegnare il quadrato su carta bianca sorgerà la necessità di costruirsi un modello di angolo retto altrimenti il disegno ottenuto non sarà quello di un "vero" quadrato. Si può farne costruire uno con la piegatura della carta o ritagliare uno degli angoli dei quadrati di cartoncino che ricoprono le facce del cubo. L'insegnante deve "far vedere" come si fa ad usarlo, poi i bambini ci provano da soli andando a caccia di angoli retti in classe. In questo modo imparano ad usarlo come modello girandolo correttamente per verificare se gli angoli trovati sono o non sono retti. Successivamente si passa al disegno individuale del quadrato. I quadrati non saranno sicuramente perfetti ma ciò che conta è la strategia usata dai bambini. Per giungere ad una procedura condivisa, l'insegnante può far finta di essere un robot e chiedere ai bambini di impartirle gli ordini per disegnare il quadrato alla lavagna. A questo punto un'altra "caccia" interessante è quella ai quadrati: i bambini si accorgeranno che sono difficilissimi da trovare, mentre è molto facile trovare rettangoli che sembrano quadrati. Ma che differenza c'è tra un quadrato e un rettangolo?

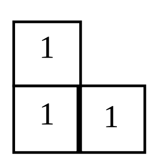
4. Progettazione e costruzione di alcuni sviluppi piani del cubo; costruzione di cubi di dimensioni diverse.

"Provate ad attaccare insieme questi 6 quadrati con il nastro adesivo in modo che chiudendo la figura ottenuta si formi un cubo". Questo può essere un problema che avvia alla scoperta degli sviluppi del cubo. Lavorando a gruppi i bambini costruiranno più d'uno sviluppo: diventerà interessante confrontarli e costruire insieme un cartellone con tutti gli sviluppi che man mano verranno trovati. Le combinazioni sono tante ma non tutte permettono di ottenere un vero sviluppo. Cambiando la misura del lato dei quadrati si ottengono cubi di diverse dimensioni che possono poi essere utilizzati nelle fasi successive per varie attività. Per questo motivo è bene mantenere una modularità (es. 5, 10, 15, 20, 25, 30 cm di spigolo).

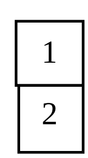
5. Progettazione e costruzione di "casette" formate da più cubi "uguali" uniti tra loro facendo combaciare le facce: il gioco dell'architetto.

Immaginiamo che i bambini abbiano costruito tanti cubi di cartoncino della stessa dimensione. Si può giocare a costruire casette formate da 2, poi 3, poi 4 cubi, facendo combaciare le facce, e in modo che le casette siano tutte diverse. L'ufficio dell'architetto è il posto dove i bambini devono andare a depositare i loro progetti,


Casetta



Vista da



Vista da

cioè i disegni delle casette da diversi punti di vista (davanti, dietro, alto, destra, sinistra). Ma come far capire che dietro a un cubo ce n'è un altro? Diventa necessario usare delle simbologie condivise per rendere comprensibili i progetti all'architetto, ad esempio scrivere un numero sui quadratini che indichi quanti cubi ci sono dietro quello disegnato. Dal disegno i bambini possono così risalire alla costruzione della casetta.

Un problema interessante: Quante case diverse si possono fare con 2 cubi? E con 3? E con 4? Questa attività può anche essere simulata con materiale strutturato (cubetti incastrabili).

6. Realizzazione di un villaggio con le "casette" costruite.

Le casette possono essere collocate su un piano[2] e diventare quindi un villaggio con personaggi fantastici: casa di Biancaneve e dei 7 nani, della Bella Addormentata, di Cappuccetto Rosso e così via. Le case possono essere unite da strade, si può mettere un fiume, costruire un parco giochi… I bambini possono far agire dei pupazzetti immaginando storie e percorsi che si snodano nel villaggio. La "modellizzazione" obbliga il bambino ad un decentramento permettendogli di cogliere con un solo sguardo le relazioni spaziali tra gli oggetti e i personaggi facenti parte del villaggio (davanti a, dietro a, vicino a, lontano da, sopra, sotto, destra, sinistra, prima, dopo).

7. Mappa del villaggio e percorsi eseguiti da pupazzetti.

Aspetti rilevanti.

- I bambini fanno eseguire i percorsi da pupazzetti che rappresentano i personaggi fantastici abitanti del villaggio. Devono quindi proiettare sui pupazzetti il proprio schema corporeo per individuare correttamente gli spostamenti e le rotazioni.
- L'uso della quadrettatura come base del villaggio facilita la costruzione della mappa sul quaderno e stimola il passaggio da descrizioni qualitative a descrizioni di tipo quantitativo, ad esempio si possono misurare le distanze contando quadretti e quindi localizzare con più accuratezza gli oggetti (il piano quadrettato è come un sistema di riferimento cartesiano). I cambiamenti di direzione, rotazioni di un quarto di giro verso destra o verso sinistra, diventano modelli dinamici di angoli retti.
- I percorsi possono assumere la forma di figure geometriche riconoscibili dai bambini (quadrati, rettangoli, rombi, triangoli…) e possono essere misurati con strumenti non convenzionali (cordini, conteggi di quadretti) per coglierne congruenze e simmetrie. Un'attività di misurazione in questo contesto apre verso l'acquisizione dell'idea di perimetro come percorso intorno ad una figura.
- Nel rappresentare le diverse situazioni i bambini si abituano ai cambiamenti di scala. Si possono così sviluppare semplici idee circa il mantenimento delle proporzioni: 1 lato di quadretto è 5 cm sul villaggio e 1 cm sul quaderno, sul quaderno le misure sono 5 volte più piccole.

Strumenti

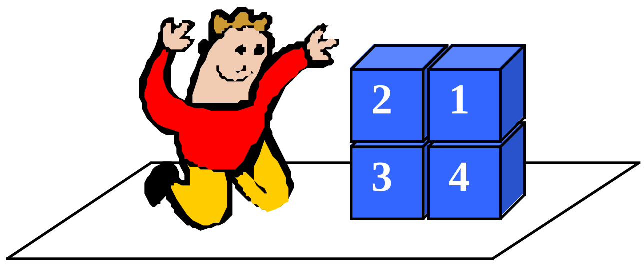
Uno o più cubi di polistirolo o di legno di 10 cm di spigolo, cartoncino colorato, cannucce e pongo oppure scovolini, forbici, colla, nastro adesivo, fogli di carta quadrettata e non quadrettata, matite, pennarelli, cordini, alcuni pannelli di legno di 50 cm x 50 cm per comporre la base del villaggio, cubetti incastrabili, macchina fotografica, fotocopie della mappa del villaggio.

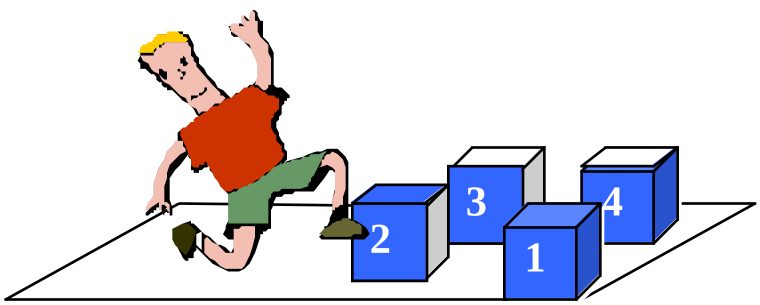
[2] Il piano può essere realizzato con carta quadrettata, in tal caso è bene che la quadrettatura coincida con lo spigolo dei cubi modulari, es. 5 cm

Elementi di prove di verifica

<u>I cubetti</u>

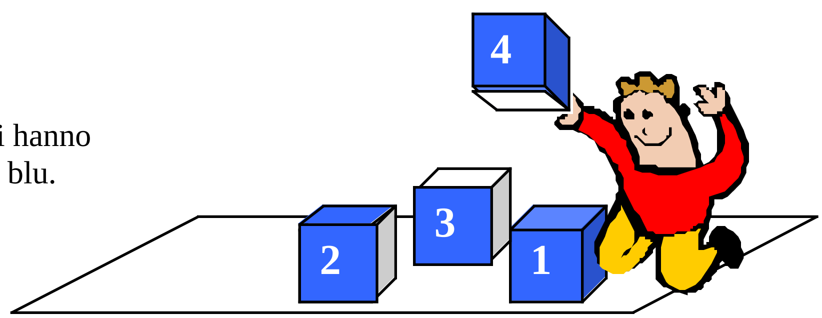
Luca giocando con 4 cubi di cartoncino bianco realizza la costruzione che vedi disegnata e la colora di blu. Non può colorare la parte appoggiata sul pavimento.





Carlo fa cadere la costruzione di Luca.

Luca osserva che i cubetti caduti hanno delle facce bianche e delle facce blu.



Quante facce blu ha il cubetto **1** ?
Quante facce blu ha il cubetto **2** ?
Quante facce blu ha il cubetto **3** ?
Quante facce blu ha il cubetto **4** ?

Sequenze ritmiche nel gesto, nel suono, nel disegno… nell'arte

Livello scolare: 1ª e 2ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori, …) Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma e uso Progettare e costruire oggetti con forme semplici	Collocazione di oggetti in un ambiente Mappe, piantine e orientamento Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo…)	<u>Lo spazio e le figure</u> Il numero Le relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana Scienze Educazione motoria Educazione all'immagine Educazione al suono e alla musica

Contesto
Ritmi e moduli nello spazio

Commento
Rudolf Steiner ci mette in guardia verso la possibilità che l'uso del foglio quadrettato possa condizionare la percezione delle forme e gli sviluppi delle capacità geometriche. Parla di «forze interiori geometrizzanti» e suggerisce di iniziare con il «disegnar forme», a mano libera, partendo dalle «simmetrie sul foglio bianco,»... è importante che le figure vengano disegnate a mano libera, senza l'aiuto di altri mezzi, «...attivando il senso dell'equilibrio, il sentimento dell'armonia e l'attività libera dell'occhio.» Sempre secondo Steiner, il passaggio dal disegnar forme alla vera e propria geometria avviene iniziando a osservare i rapporti e le leggi che vengono a formarsi nelle forme geometriche di base. Questa è l'impostazione di una scuola pedagogica che possiamo anche non abbracciare in toto, ma di cui può essere utile considerare le ipotesi. Altro stimolo interessante ci è dato dall'opera dell'artista olandese M.C. Escher che ci permette di scoprire come sia possibile accostare all'espressione artistica la matematica, mostrandola come strumento per organizzare, razionalizzandola, l'osservazione e per realizzare disegni basati su tassellazioni. Un ultimo riferimento teorico può essere fatto per individuare una prospettiva di lavoro per classi successive nello studio delle forme dei cristalli, nell'analisi delle simmetrie multilaterali che si presentano nelle sostanze cristalline e nel conseguente studio delle trasformazioni isometriche nello spazio. L'esame della struttura dei solidi cristallini farà emergere la proprietà distintiva dello stato cristallino che è la ripetizione regolare di un motivo costituito da atomi, molecole e ioni, il motivo si ripete ad intervalli regolari lungo tre direzioni non complanari.

Descrizione dell'attività

Con l'utilizzo di simboli condivisi rappresentare ritmi e regolarità

Si tratta di portare gli alunni, partendo da attività ludico corporee, ad identificare ritmi e regolarità da loro già conosciuti come la marcia, per costruirne altri che possiamo chiamare andature e su cui concordiamo i simboli da usare (gesti, suoni, segnali vari), per far sì che tutti ci si muova in modo uniforme. Quindi da un ritmo corporeo si passa alla verbalizzazione, poi alla sua rappresentazione simbolico-gestuale per giungere infine ad una rappresentazione grafico-simbolica.

Contare coordinando il gesto e la parola

Si tratta di attività che trovano una prima espressione nella scuola dell'infanzia e che ora acquistano in sistematicità e favoriscono la memorizzazione della successione dei numeri naturali. I gesti concordati, indicheranno se la successione andrà in senso progressivo o regressivo, se la successione comprenderà solo i numeri pari o quelli dispari, etc.

Su carte variamente strutturate, per mezzo della colorazione, costruire ritmi lineari o bidimensionali

Già dai 4 5 anni il bambino è in grado di operare delle seriazioni (capacità di disporre elementi in successione ordinata, utilizzando la trascrizione grafica), si potrà pertanto stimolare la costruzione di motivi ornamentali dati da una ripetizione ritmica di grafismi o simboli grafici per giungere alla costruzione di ritmi più complessi in cui la «sfida» può essere rappresentata dall'individuazione, in successioni date, del motivo che si ripete con regolarità.

Su carte strutturate individuare, evidenziare graficamente, descrivere e successivamente costruire tassellature

La ripetizione ritmica e continua di un medesimo motivo è la più semplice forma che si può individuare nell'arte ornamentale e può essere definita divisione regolare del piano o tassellatura del piano. Nella tassellatura un unico motivo detto «pattern» viene ripetuto con continuità, applicando ad esso trasformazioni isometriche. Tramite l'azione di una mattonella base, si ottengono copie delle figure geometriche da cui eravamo partiti, ma in differenti posizioni nel piano. Si ottiene una tassellatura regolare se l'unione di tutte queste figure ricopre tutto il piano e se esse, pur non essendo sovrapposte, combaciano lungo un lato in modo da non lasciare «buchi». Uno dei risultati del lavoro sarà la scoperta delle proprietà dei poligoni regolari e del fatto che tra questi solo alcuni permettono la costruzione di tassellature regolari.

Possiamo vedere i collegamenti tra attività e competenze anche ricorrendo allo schema seguente:

Attività	Competenze interessate
Individuare ritmi in gestualità, movimenti, suoni Produrre moduli e ritmi gestuali e sonori Rappresentare graficamente moduli che si ripetono con regolarità Individuare moduli in sequenze e carte strutturate e colorarli Osservare figure prodotte con un caleidoscopio e riprodurle Confrontare alcuni disegni per far emergere il legame esistente tra simmetria, armonia, arte Riconoscere simmetrie in figure prodotte con specchi	Individuare e descrivere regolarità Riconoscere e descrivere le principali relazioni spaziali Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno alcune semplici figure geometriche Indicare una proprietà che spieghi una data classificazione Individuare e descrivere regolarità in ambiti vari Partendo da situazioni concrete note all'allievo o proposte dall'insegnante individuare gli elementi essenziali di un problema

I collegamenti esterni possono essere più precisamente così esplicitati:

Educazione all’immagine:

- distinguere in un’immagine la figura dallo sfondo;
- riconoscere attraverso un approccio operativo le forme, i colori, le linee, presenti nell’ambiente, nelle immagini e anche nelle opere d’arte; esprimere verbalmente ritmi lineari o bidimensionali.
- avviare la descrizione di sensazioni e di emozioni suscitate da figure, forme, colori, linee, osservate nelle immagini, nelle opere d’arte, nei testi multimediali e audiovisivi uso di sequenze di immagini parole, suoni, gesti e movimenti del corpo

Educazione al suono e alla Musica:

- produrre suoni e ritmi anche attraverso l’uso di semplici strumenti
- saper collegare canti, musiche e suoni alla gestualità e a movimenti del corpo

Lingua Italiana:

- ascoltare poesie e filastrocche, cogliendo alcune caratteristiche del suono e del ritmo

Educazione motoria:

- percepire gli elementi del proprio corpo
- esplorare le diverse percezioni sensoriali

Scienze:

- osservare, descrivere e confrontare gli elementi della realtà circostante … per individuare somiglianze, differenze ed interrelazioni.

Dalle ruote al cerchio (*)

Livello scolare: 3ª, 4ª e 5ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche Individuare gli elementi significativi di una figura (centro e raggio del cerchio) Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche	Le principali figure del piano e dello spazio I principali enti geometrici Unità di misura di lunghezze	<u>Lo spazio e le figure</u> Risolvere e porsi problemi Misurare Argomentare e congetturare	Educazione linguistica Ambito tecnologico Educazione all'immagine

Contesto
Ruote e ingranaggi

Commento
Il campo di esperienza è costituito da oggetti quotidiani e di gioco, che contengono ruote e ingranaggi, presenti nella esperienza scolastica ed extrascolastica dei bambini. Esso favorisce l'esplorazione dinamica delle situazioni problematiche proposte e la produzione di ipotesi progettuali e interpretative: l'attività su referenti concreti (gli ingranaggi e i meccanismi) introduce la dimensione tattile visiva, che riveste un'importanza particolare nella conquista di strategie esplorative fondamentali per lo sviluppo di abilità di tipo argomentativo.
L'esempio è articolato in due percorsi strettamente intrecciati: dalle ruote dentate, presenti nei meccanismi, e dalle ruote di un " carretto" costruito da i bambini ai cerchi che ne rappresentano la modellizzazione geometrica.

Descrizione dell'attività

1. Dalle ruote del carretto alla definizione di cerchio

- L'attività inizia con la richiesta :"*Spiega con precisione come pensi di costruire un carrettino con ruote funzionanti*".
  Scopo dell'attività è sollevare il problema della costruzione di cerchi per le ruote del carretto con bambini che non conoscono l'uso del compasso.
- L'insegnante propone il confronto fra ruote rotonde, quadrate e ovali disegnate su una scheda predisposta, con la richiesta: " *Scrivi quali ruote, secondo te, vanno bene per costruire un carretto, spiegando il motivo per cui pensi che alcune funzionino meglio di altre*". Segue una discussione collettiva sulle scelte dei ragazzi.
  Scopo di questa attività è far sì che la scelta di ruote "rotonde" non sia casuale o semplicemente basata sul fatto che normalmente le ruote sono rotonde.
- Ai ragazzi si richiede a questo punto un'ipotesi progettuale: "*Scrivi un progetto per disegnare una forma rotonda ed essere sicuro che sia un cerchio utilizzando uno o più oggetti fra quelli che vedi sul tavolo*". (Sul tavolo abbiamo una stringa, un gesso a base quadrata, un cubo, un pennarello, un righello….l'importante è che non compaia alcun oggetto a base circolare che permetta un semplice ricalco né un compasso). Segue una discussione per condividere i progetti e scegliere quello da utilizzare per costruire le ruote.
- Ogni ragazzo costruisce il proprio carretto, seguendo il progetto comune.

- L’insegnante prepara poi una scheda su cui compaiono alcuni cerchi, senza centro segnato, e due “ovali” con la seguente consegna: *“Decidi quali di queste forme sono sicuramente cerchi e motiva le tue scelte*”. Lo scopo di questa attività è quello di far emergere nella classe la proprietà principale del cerchio: l’invarianza del raggio. I bambini focalizzano l’attenzione sulla invarianza del segmento che va dal centro alla circonferenza: alcuni disegnando tanti raggi e misurandoli, altri utilizzando un raggio che ruota intorno a un punto fisso e percorre la circonferenza.
- Si introducono nella classe due voci della storia che esplicitano l’approccio statico (Euclide) e l’approccio dinamico (Erone) al cerchio:

  EUCLIDE*: Un cerchio è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette (segmenti) che giungono ad essa da un punto tra quelli interni alla figura sono uguali fra loro (Definizione 15). E tale punto è chiamato centro del cerchio (Definizione 16).*

  ERONE: *Un cerchio è la figura descritta quando una linea retta (segmento), sempre rimanendo nello stesso piano, si muove intorno ad uno dei suoi estremi fino a tornare alla posizione iniziale.*

  Ai ragazzi viene data la seguente consegna “ *Spiega con parole tue ciascuna definizione e scrivi se una delle due è simile alla tua e perché*”. Segue discussione di bilancio per la condivisione degli aspetti principali delle definizioni di cerchio.

  Scopo di questo lavoro è quello di far cogliere a tutti le analogie tra le definizioni prodotte in classe e quelle dei due matematici, sottolineando le due visioni diverse del cerchio, e far scoprire che ciò che loro avevano intuito e esplicitato, trova nelle definizioni matematiche espressione sintetica attraverso un linguaggio preciso ed essenziale.

Elementi di prove di verifica

“ *Pippo vuole costruirsi un tirassegno. Aiutalo a disegnare su una tavola di legno di forma quadrata un cerchio che occupi tutta la tavola. Spiega bene il tuo metodo*.”

Si vuole che i bambini si rendano conto che il centro della tavola corrisponde al centro del cerchio, che individuino un modo per trovare questo centro, che capiscano che il raggio deve “toccare” il punto medio del lato del quadrato e non il vertice.

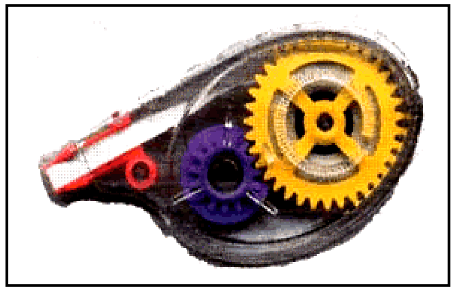
2. Dalle ruote ingranate ai cerchi tangenti

- Si inizia con una serie di attività introduttive legate all’osservazione e alla descrizione del funzionamento di diversi meccanismi presi dalla vita quotidiana (apriscatole, frullatore manuale, cavatappi,…), se questa attività non è stata svolta nei primi due anni.

Nei meccanismi sono presenti ingranaggi costituiti da ruote dentate ingranate ed è su questo che si ferma l’attenzione.

Si chiede ai ragazzi di descrivere il funzionamento di oggetti di uso quotidiano(cavatappi, frullino, apriscatole) con particolare attenzione agli ingranaggi che li fanno funzionare. Segue discussione e confronto sul funzionamento degli oggetti analizzati.

- Si chiede ai ragazzi di descrivere il funzionamento del correttore a nastro. Il problema riguarda un oggetto comune che, per consentire lo svolgimento del nastro, contiene, di solito in un involucro trasparente, due ruote dentate colorate di diverso raggio ingranate fra loro. Il problema è di funzionamento e l'attenzione è al movimento delle due ruote ingranate. L'insegnante propone ai ragazzi una scheda con l'immagine del correttore e con la seguente consegna individuale "*Descrivi come funziona il bianchetto. Come sono le ruote? Come girano? Puoi utilizzare schizzi e disegni*".



  Segue discussione di bilancio per la costruzione di un testo collettivo che metta in evidenza il funzionamento del correttore. Scopo dell'attività è la formulazione del postulato fondamentale delle ruote ingranate complanari: "*due ruote ingranate complanari girano in versi opposti*".
- La modellizzazione geometrica di due ruote ingranate esternamente richiede la costruzione di cerchi tangenti esternamente perciò l'insegnante pone ai ragazzi il problema di come rendere tangenti due cerchi secanti.

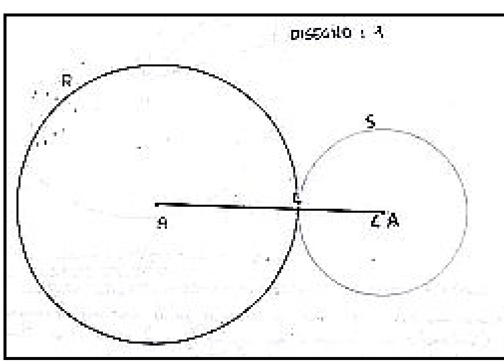
"In una classe è stato dato il seguente problema:

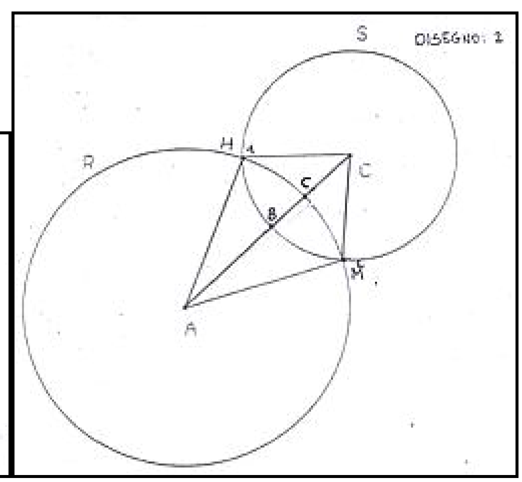
Disegna una ruota S con il raggio di 3 cm che ingrani con la ruota R qui disegnata *[è disegnato un cerchio]*. Uno studente, dopo alcuni tentativi, ha prodotto questo disegno, però si è accorto che c'è qualcosa che non va *[sono disegnati due cerchi parzialmente sovrapposti]*. Cosa c'è che non va? Prova a risolvere tu il problema e spiegagli bene come aggiustare la figura".

L'attenzione dell'insegnante deve focalizzarsi sulle strategie che possono portare ad individuare le condizioni di tangenza ed in particolare verso quelle strategie che utilizzano la traslazione senza misura (puntando l'attenzione sull'allineamento dei due centri e del punto di tangenza) e verso quelle strategie che utilizzano la misura (puntando l'attenzione sulla distanza fra i centri come somma dei raggi).

Esempio di risoluzione basata sull'allineamento

"Lo studente ha sbagliato perché i due cerchi si incontrano in due punti, H e M, invece devono incontrarsi in un unico punto come nel disegno 1."





Si tratta di un problema di costruzione che ha lo scopo di far emergere enunciati su cerchi tangenti esternamente che modellizzano ruote ingranate (esternamente).

Vengono costruite collettivamente le condizioni di tangenza di due cerchi:

Dati due cerchi tangenti (esternamente):

1) Il punto di tangenza è allineato con i due centri;
2) Il segmento congiungente i due centri passa per il punto di tangenza:
3) La distanza tra i due centri è uguale alla somma dei raggi.
4) Viceversa, dati tre punti allineati A,T,B, i cerchi con centro A e raggio At e con centro B e raggio BT sono tangenti in T.

Gli enunciati 1) e 3) sono equivalenti da un punto di vista adulto, ma per i ragazzi essi alludono a modi diversi di affrontare il problema (con misura e senza misura).

Un altro aspetto di questo problema riguarda il fatto che nella consegna volutamente si parla di ruote, mentre vengono disegnati cerchi e questo per mantenere aperta la dialettica fra ruote e cerchi già istituzionalizzata nell'attività precedente con il confronto fra Erone ed Euclide.

Elementi di prove di verifica

Disegna due cerchi di raggio 2 cm e 4 cm, tangenti nel punto K dato.
Spiega con cura come fai a costruirli e perché sei certo che i due cerchi siano tangenti.

. ***K***

(*) da un'idea elaborata nel NRD dell'Università di Modena, sez. scuola elementare e nel NRD dell'Università di Genova, sez. scuola elementare.

Solidi noti e solidi misteriosi

Livello scolare: 4ª e 5ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche Individuare gli elementi significativi di una figura Effettuare traslazioni e rotazioni (movimenti rigidi) di oggetti e figure Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche Classificare oggetti, figure, numeri in base a due o più proprietà ……… Produrre semplici congetture Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Verificare le congetture prodotte, sia empiricamente sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo ad eventuali controesempi Attribuire denominazioni a “oggetti” matematici e stabilire definizioni… Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni Individuare le risorse necessarie per raggiungere un obiettivo … Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere ……	Le principali figure del piano e dello spazio I principali enti geometrici Simmetrie, traslazioni, rotazioni (nello spazio 3D) Uguaglianza tra figure Semplici scomposizioni di figure spaziali	<u>Lo spazio e le figure</u> Le relazioni Argomentare e congetturare Porsi e risolvere problemi	Educazione all’immagine Lingua italiana

Contesto

Figure geometriche come oggetti matematici

Descrizione dell'attività
Attraverso la risoluzione di problemi che richiedono la manipolazione e la costruzione di poliedri ci si pone l'obiettivo di favorire la visualizzazione mentale e l'identificazione delle proprietà di figure solide che abbiano come facce quadrati e triangoli equilateri.
Contestualmente alla situazione problema centrale si danno indicazioni sia di attività preparatorie sia di attività successive di consolidamento e di ampliamento.
La metodologia si fonda sull'orchestrazione da parte dell'insegnante di discussioni matematiche, alternando momenti in piccolo gruppo ad altri a classe intera.

Attività preparatorie

Costruzione del tetraedro. L'insegnante forma alcuni piccoli gruppi di 3 o 4 bambini e distribuisce ad ogni gruppo 7/8 triangoli equilateri di cartoncino.
Consegna: *Dovete costruire una scatola chiusa usando solo triangoli equilateri, vince chi usa il minor numero possibile di triangoli.*
I bambini scoprono che il numero minore è 4 e con lo scotch costruiscono la "scatola".
L'insegnante dice che il solido composto da 4 triangoli equilateri si chiama "tetraedro".
Consegna: *Disegnate il tetraedro come lo vedete e scrivete quante facce, quanti spigoli, quanti vertici ha.*
Il risultato di questa attività sono disegni spontanei che in qualche modo cercano di rendere sul piano la tridimensionalità.
Consegna: *Immaginate di togliere lo scotch da alcuni spigoli e di aprire il tetraedro in modo da ottenere il suo sviluppo piano: che forma ha? Ne esiste solo uno?*
I bambini producono i disegni di tutti gli sviluppi del tetraedro e danno loro dei nomi.
Consegna: *Immaginate di dover descrivere il tetraedro ad un bambino di un'altra classe: che parole usereste?*
I bambini svolgono questa attività senza avere il tetraedro davanti e alla fine della discussione devono produrre una descrizione condivisa da scrivere e inviare ai bambini dell'altra classe.
Costruzione della piramide a base quadrata. Consegna: *Un bambino ha costruito una figura usando quadrati e triangoli equilateri, non si sa quanti, ma si sa che questa figura ha 5 facce, 5 vertici e 8 spigoli. Che figura può essere?*
I bambini lavorano di nuovo in piccoli gruppi e hanno a disposizione triangoli equilateri e quadrati di cartoncino con cui fare le prove. Ottenuta la piramide l'insegnante dirà che si chiama "piramide a base quadrata" e seguiranno consegne analoghe a quelle date per il solido precedente (disegno, sviluppo, descrizione….). Per variare la proposta si possono chiedere descrizioni individuali scritte da discutere successivamente fino a giungere ad una descrizione condivisa.
La gara, che nasce dalla formulazione del primo problema (Vince chi usa il minor numero possibile di triangoli), serve ad aumentare la motivazione e stimola a inventare strategie e a confrontarle fra di loro. La consegna su cui si basa la risoluzione del secondo problema richiede capacità di astrazione e maggiore consapevolezza delle proprietà dei solidi. È importante che si crei un clima favorevole agli "esperimenti mentali" che nascono da riflessioni sulle relazioni esistenti fra le figure piane e le figure solide: ad esempio, i bambini devono capire come sia possibile, facendo combaciare due lati, ottenere uno spigolo e quindi passare dalle due alle tre dimensioni .

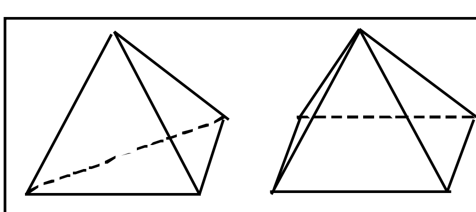


fig.1

Il lavoro è rapido, i bambini trovano quasi subito le soluzioni, a volte anche sbirciando i compagni più svelti, però non termina con la costruzione. La parte più importante di quest'attività è la descrizione del tetraedro e della piramide (fig.1) che deve essere fatta senza che i bambini possano vedere concretamente i solidi stessi. Per descriverli infatti dovranno basarsi solo sulla ri-costruzione mentale degli stessi. Quest'espediente si dovrebbe usare sovente nell'attività geometrica perché i bambini possano interiorizzare meglio le caratteristiche peculiari delle figure sia solide sia piane. Nella realtà non esistono le forme "perfette" della geometria: il quadrato, il tetraedro e le altre figure geometriche sono il risultato di un’attività mentale (modellizzazione), servono all’uomo per interpretare la realtà, non per fotografarla. Conoscere la geometria significa quindi capire le regole di questo gioco mentale che ci permette di riconoscere, denominare e classificare le figure. Ma se vogliamo che il gioco funzioni, dobbiamo imparare a “definire” gli oggetti di cui parliamo in modo che non ci siano equivoci. Anche quello delle definizioni è un gioco che si impara e che ha delle regole precise. Le definizioni si basano su un’attività di classificazione degli oggetti geometrici e devono essere il punto d’arrivo della ricerca di caratteristiche comuni e non comuni. L’uso inclusivo dei nomi (ad es. un quadrato può sempre chiamarsi rombo ma un rombo può chiamarsi quadrato solo se ha gli angoli retti) deve essere imparato perché non è spontaneamente usato dai bambini che tendono piuttosto a dare ad ogni figura un nome diverso e univocamente determinabile. Quindi si può immaginare quanto sforzo mentale costi ad un bambino chiamare “rettangolo” un “quadrato” o “parallelogramma” un “rombo”. Un altro elemento da considerare è quello relativo al conflitto tra aspetti figurali e concettuali: gli aspetti figurali, in genere veicolati dalle rappresentazioni col disegno, sono sempre i più evidenti in una figura e sono inscindibili da quelli concettuali, determinati invece dalla conoscenza delle proprietà della figura stessa. Spesso gli aspetti figurali hanno il sopravvento e costituiscono un ostacolo alla comprensione delle situazioni geometriche. Anche il disegno stereotipato delle forme (es. il triangolo sempre appoggiato alla base, il rombo mai appoggiato su un lato…), può creare degli ostacoli alla comprensione e deve quindi essere evitato. I bambini devono, e possono, imparare a riconoscere le forme attraverso le loro trasformazioni isometriche per cogliere ciò che muta e ciò che rimane invariato quando una figura viene traslata, ruotata, ribaltata e così via.

Situazione problema

Dopo aver lavorato per un certo periodo di tempo in contesti come quelli creati dalle due situazioni precedenti si può proporre la seguente situazione problema:

“*Provate ad immaginare una piramide a base quadrata con le facce laterali costituite tutte da triangoli equilateri ... provate ad immaginare una seconda piramide a base quadrata, identica alla prima ... ora le due piramidi vengono appoggiate su un piano e si uniscono, in modo che due spigoli di base combacino. Tra i due solidi rimane un vuoto: sapete dire che solido manca per riempire quel vuoto?*” (vedi fig. 2)

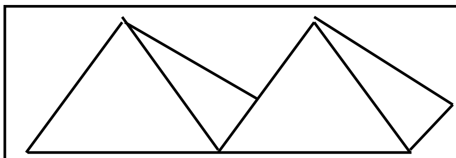


fig. 2

Il problema, posto verbalmente dall’insegnante (i bambini non devono vedere né i solidi né loro rappresentazioni), consiste nella ricostruzione mentale del solido costituito dalle due piramidi.

Per arrivare alla soluzione bisogna ragionare sugli indizi ricavabili non dai dati percettivi, in questo caso ingannevoli (mentalmente può prevalere una visione bidimensionale della situazione che fa “vedere” 3 triangoli di cui due con la base in basso e uno con la base in alto), ma dai dati di tipo “concettuale” che permettono di individuare poco per volta le caratteristiche del solido mancante.

I dati percettivi, come si diceva prima, fanno prevedere una figura con la punta all’ingiù e per analogia si pensa alla stessa piramide di partenza. La prima risposta che danno di solito, sia i bambini sia gli adulti, di fronte alla domanda “Qual è il solido che manca?” è: “Un’altra piramide a base quadrata”.

Il ruolo dell’insegnante, nel momento della discussione, è supportare i bambini nel costruirsi altri modi di “vedere” il solido, riflettendo sul vuoto tra le due piramidi e ripensando alle caratteristiche dei due solidi di partenza. “Che forma hanno le facce delle piramidi? E le facce del “buco”? Quante facce servono per chiudere il buco? Quanti spigoli ha questo solido?…”

I bambini, come Sherlock Holmes, devono cercare indizi che permettano di arrivare alla soluzione del mistero, intanto l’insegnante annota alla lavagna le caratteristiche scoperte, su cui tutti concordano. Poco per volta, grazie all’interazione che si crea e ai conflitti cognitivi generati dalla situazione stessa, i bambini definiscono le caratteristiche del solido mancante. Il momento centrale

dell'attività è la scoperta del fatto che alla base e nella parte superiore non ci sono una "punta" e una faccia ma due spigoli, con direzioni perpendicolari fra di loro.
Ad un certo punto della discussione si comincerà a leggere alla lavagna il "ritratto" di un tetraedro: 4 facce costituite da triangoli equilateri, 6 spigoli, 4 vertici. Di solito la soluzione meraviglia i ragazzini che vogliono subito verificare con i solidi costruiti in cartoncino, anche se ormai il solido è stato completamente ri-costruito nella loro mente.
La verifica diventa il punto di partenza per la parte finale del lavoro, il disegno dello sviluppo del solido costituito dalle due piramidi e dal tetraedro uniti. "*Disegnate il solido che abbiamo costruito come lo ricordate e provate ad immaginare che le facce dei tre solidi si uniscano perfettamente in modo da far scomparire le linee di giunzione: Quante facce avrà? Con che forma? Quanti spigoli? Quanti vertici?*"

Attività di consolidamento e di ampliamento

Il contesto creato dalla soluzione del problema precedente apre verso gli esperimenti mentali e costituisce un terreno fertile per altre attività di risoluzione di problemi. Si propongono due esempi che fanno riferimento alle sezioni del cubo. Nel primo si ottiene la sezione con l'esagono regolare, nel secondo quella con il triangolo equilatero. L'aspetto interessante dei problemi è dato dal fatto che la scoperta delle sezioni avviene partendo dalla costruzione di solidi che, inizialmente, sembrano non avere nulla a che fare con un cubo.

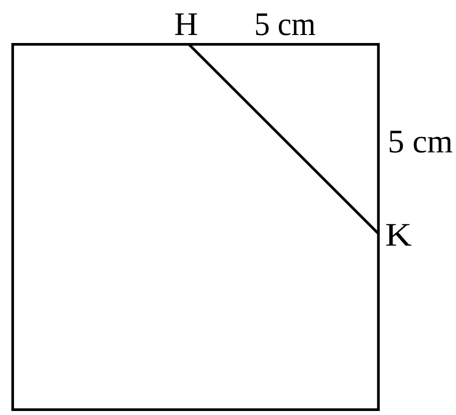


fig.3

Primo problema: "*Prendete 3 quadrati col lato di 10 cm, tagliateli lungo la linea HK in modo da ottenere 3 triangoli e 3 pentagoni (fig. 3). Disegnate un esagono regolare con i lati lunghi come HK e unite i triangoli e i pentagoni ai lati dell'esagono alternandoli (un triangolo, un pentagono e così via). Provate a chiudere la figura come fosse uno sviluppo. Che tipo di solido è venuto fuori? Assomiglia a qualche solido che conoscete? Sapete calcolare il volume di questo solido?*"
L'insegnante guida i bambini nella costruzione, che deve essere fatta a piccoli gruppi in modo da avere alla fine più solidi uguali. Terminata la parte operativa, si comincia a descrivere il solido cercando congruenze fra facce e spigoli e somiglianze con altri solidi conosciuti. Si procede all'incirca come per il lavoro precedente, ma, se non avviene spontaneamente, l'insegnante ad un certo punto chiederà di avvicinare due di questi solidi misteriosi in modo da far combaciare i due esagoni. I bambini resteranno meravigliati nello scoprire che si ottiene un cubo, ma poco per volta, guidati dall'insegnante, scopriranno che le caratteristiche dello sviluppo disegnato all'inizio corrispondono a quelle che si ritrovano nella sezione: un esagono ottenuto tagliando il cubo per i punti medi di due spigoli di ogni faccia (fig.4).

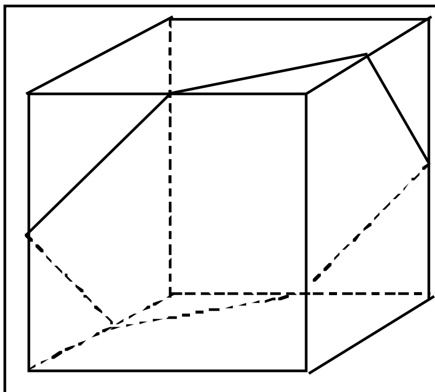


fig.4

Secondo problema: "*Disegnate 6 quadrati col lato di 10 cm e tagliatene 3 lungo una diagonale: otterrete 6 triangoli rettangoli. Misurate la diagonale dei quadrati di partenza e disegnate un triangolo equilatero con il lato lungo come questa diagonale. Ora attaccate 3 triangoli rettangoli ai lati del triangolo equilatero e a questi attaccate i tre quadrati interi (fig. 5). Con i tre triangoli*

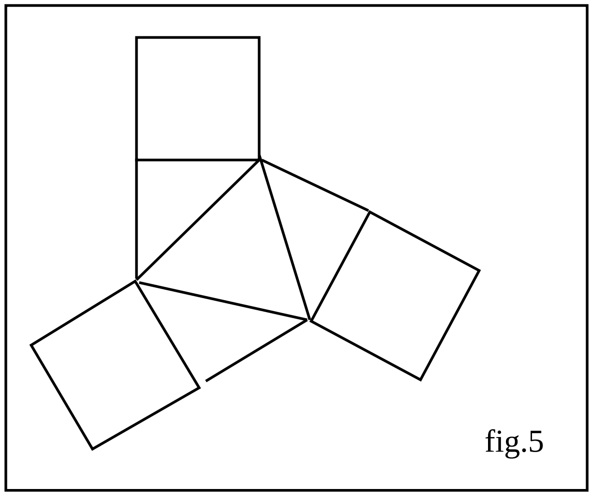


fig.5

rimanenti formate una piramide senza base. Se attaccate questa piramide al solido precedente nel modo giusto otterrete una figura che conoscete!!! Quante di queste piramidi potreste tagliare via dal solido che avete appena scoperto? Che figura resterebbe alla fine? Perché?"
Questa volta si parte con 6 quadrati e questo può già suggerire parentele con il cubo e le sue facce. Qualcuno probabilmente comincerà a "vedere" mentalmente che, anche in questo caso, prende forma una parte di cubo. Ma la costruzione del triangolo equilatero può momentaneamente portare fuori strada. I tre triangoli rimanenti, con i quali i bambini costruiscono una piramide, sono il "pezzo" mancante, la "fetta" tagliata via dal cubo. Quindi è facile ricostruirlo.
Qui si inserisce l'ultima sollecitazione dell'insegnante: "Quante di queste piramidi potreste tagliare via dal solido che avete appena scoperto? Che figura resterebbe alla fine? Perché?"
Ormai i bambini hanno una discreta competenza e sapranno trovare la risposta ricostruendo mentalmente il solido risultante: chi si ritrova?(fig.6)

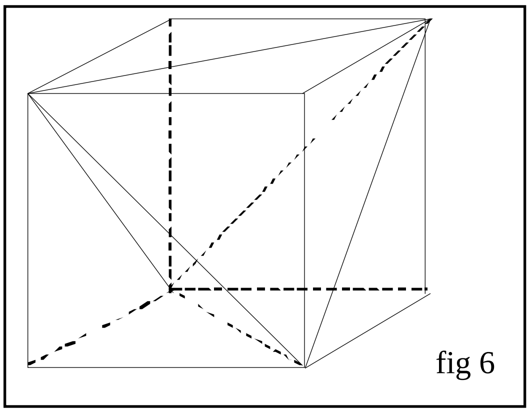


fig 6

Il discorso delle sezioni come "fette" può essere visualizzato utilizzando un cubo di polistirolo da tagliare usando l'apposito seghetto a caldo o più facilmente con la spugna da fiorai. Per ottenere prima la sezione esagonale e poi quella triangolare, il taglio presenterà una certa difficoltà, perché il cubo non può essere appoggiato su una faccia, ma può essere significativo lavorare per la gestualità propria del compito che stimola ad usare nuovamente immagini mentali per prevedere che cosa succederà tagliando in una direzione o in un'altra..Per non sbagliare infatti, bisogna prima definire correttamente le linee di taglio, poi tracciarle a matita sul cubo: qui si possono aprire discussioni di una certa rilevanza. Anche in questo caso i bambini devono essere guidati a ragionare sulle caratteristiche geometriche sia delle sezioni sia del cubo mettendo a confronto mentalmente le due figure. I frequenti passaggi dalle 3D e alle 2D obbligano i bambini a continui cambi di registro e adattamenti del linguaggio, per descrivere correttamente ciò che vedono realmente e mentalmente.

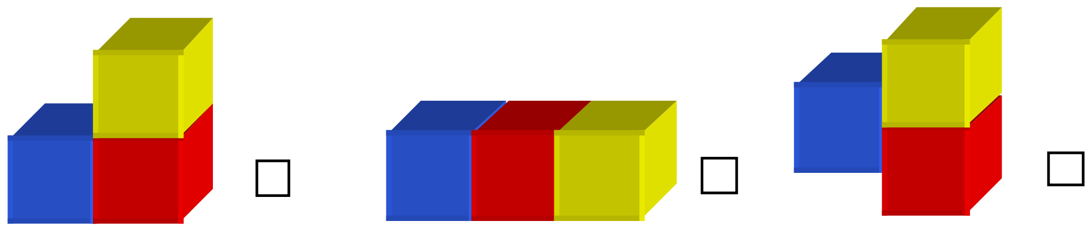
Strumenti

Un congruo numero di triangoli equilateri e di quadrati con il lato di 10 cm di cartoncino colorato, cartoncino, nastro adesivo, fogli, occorrente per scrivere e disegnare, righelli, squadrette, forbici, matite, pennarelli, alcuni cubi di polistirolo oppure spugna per fiorai, seghetto per polistirolo o un coltello.

Elementi di prove di verifica

<u>Le torri</u>
Competenze: Individuare gli elementi significativi di una figura (lati, angoli, altezze…). Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e rappresentare su un piano una figura solida. Formulare semplici ipotesi; verificarle provandole su casi particolari.

Alessio ha tre cubi uguali. Prende due di questi cubi e li sovrappone in modo da far coincidere due facce e dice: “Questa è una torre formata da due cubi”. Poi avvicina la torre al terzo cubo in modo da far combaciare una delle facce laterali della torre con una delle facce del cubo.
Che solido ottiene? Metti una crocetta vicino a quello giusto:

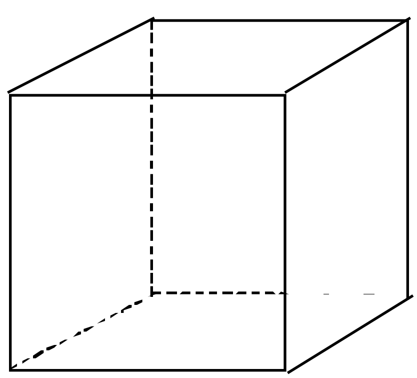


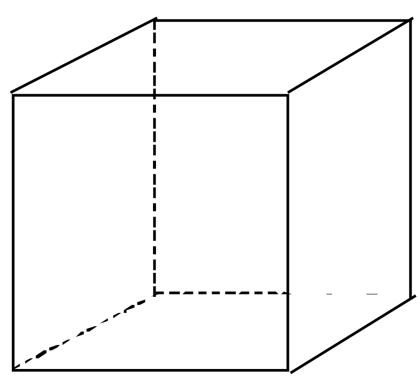
Le sezioni del cubo

Competenze: Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e rappresentare su un piano una figura solida. Formulare semplici ipotesi; verificarle provandole su casi particolari. Giustificare o rifiutare le ipotesi formulate, mediante argomentazioni o ricorrendo a controesempi.

1. Andrea vuole tagliare il cubo in modo da ottenere come sezione un quadrato. Traccia le linee di taglio sul primo disegno. C’è un solo modo? Spiega perché.

2. E se volesse ottenere un rettangolo? Traccia le linee di taglio sul secondo disegno. C’è un solo modo? Spiega perché.





La rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva (*)

Livello scolare: 4ª e 5ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma ed uso Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche Individuare gli elementi significativi di una figura. Conoscere le principali proprietà delle figure	Le principali figure del piano e dello spazio. I principali enti geometrici. Rette incidenti parallele perpendicolari. Uguaglianza tra figure.	<u>Lo spazio e le figure.</u> Porsi e risolvere problemi. Argomentare e congetturare	Lingua italiana Educazione all'immagine Scienze Storia

Contesto
La rappresentazione dello spazio

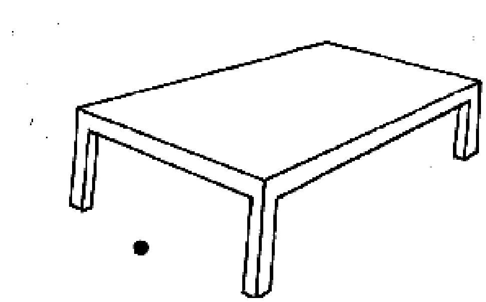
Commento
Il nucleo fondamentale del percorso è costituito da problemi di rappresentazione dello spazio visibile: prima il micro-spazio, poi il meso-spazio, cioè quella situazione in cui il soggetto è all'interno dello spazio e ha una visione globale e quasi simultanea di ciò che ha intorno. L'attività si sviluppa in due filoni: disegno dal vero e geometria della rappresentazione. La rete motivazionale che sottende questa proposta si può sintetizzare in questi punti:

- offrire un insieme di strumenti per il disegno, in grado di soddisfare il bisogno crescente di verosimiglianza, che manifestano i bambini di questa età, per evitare che smettano di disegnare quando non sono più soddisfatti del prodotto dei loro elaborati;
- offrire un sistema per organizzare le loro proprie conquiste in riferimento a quelle culturali dell'umanità, senza assumere modelli rigidi;
- costruire una rete di concetti geometrici come strumenti utili per la soluzione di problemi di rappresentazione ;
- proporre una geometria "senza misura" che inibisca l'uso di uno strumento di validazione e ponga il problema sulla giustificazione basata sulla deduzione.

Descrizione dell'attività

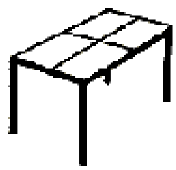
<u>1 - Il tavolo e pallina: il micro-spazio</u>

- *Consegna*: disegna la pallina al centro del tavolo. Puoi usare gli strumenti. Spiega il tuo ragionamento.

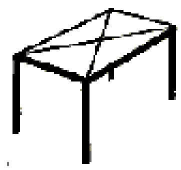


Le soluzioni che i bambini potrebbero individuare si possono raggruppare in tre tipologie:

a. legate da stime ad occhio: la pallina viene disegnata direttamente in un punto individuato in modo approssimativo;
b. legate alla misura: vengono individuati, tramite misurazione, i punti medi dei lati, la pallina viene posta all'incrocio dei segmenti passanti per detti punti.
c. legate all'allineamento: la pallina viene disegnata all'incrocio delle diagonali.



b



c

2 – Discussione di bilancio

L'insegnante pone in discussione le soluzioni individuate dai bambini. I bambini che hanno risolto correttamente la situazione, di solito pochi, non posseggono adeguati strumenti dialettici né per giustificare la strategia seguita né per convincere i compagni della correttezza delle loro scelte. Per sbloccare la situazione si deve far ricorso a due fotografie (senza grandangolo) in cui vengono riprese le situazioni "b" e "c", ricostruite concretamente su di un tavolo: apparirà chiaro che la situazione corretta risulta essere la "c". Tuttavia è bene focalizzare l'attenzione sui cambiamenti che avvengono quando si passa da ciò che si vede alla sua riproduzione: senza dare regole generali si comincia a delineare un embrione della teoria della rappresentazione.

3 – Invarianti del disegno in prospettiva

Si invitano i bambini a disegnare copie dal vero di un oggetto con struttura geometrica regolare (una scatola, un tavolo, una sedia), successivamente l'oggetto in questione viene fotografato con lo stesso angolo prospettico della visione di ogni bambino che ricalcherà, poi, una copia della fotografia. Attraverso una discussione si cerca di focalizzare l'attenzione su cosa cambia tra realtà (ad esempio un tavolo presente in classe) e rappresentazione, per giungere alla costruzione collettiva di una tabella simile a questa:

REALTA'	**RAPPRESENTAZIONE**
• diversi punti di vista	• punto di vista fisso
• linee dritte	• linee dritte
• angoli congruenti	• angoli diversi
• lati congruenti	• lati di misura diversa
• quadrato	• quadrilatero
• piedi del tavolo: 4 linee verticali parallele	• piedi del tavolo: 4 linee verticali parallele
• ripiano del tavolo: linee a 2 a 2 parallele	• ripiano del tavolo: 2 linee orizzontali parallele e 2 no
• c'è allineamento	• c'è allineamento

La ricchezza e l’articolazione della tabella dipende dallo conoscenze geometriche in possesso dai bambini. Con l’introduzione di questa tabella l’insegnante centra l’attenzione sulle invarianti della riproduzione.

4 - Il disegno del tavolo in prospettiva: mesospazio

- *Consegna*: disegna l’aula (oppure il corridoio) dal tuo punto di vista. Scrivi il tuo commento.

Ai bambini viene richiesto il disegno di un ambiente che li contenga, con l’ uso della tabella la qualità dei disegni risulta essere migliorata, anche se permangono difficoltà ed imprecisioni, soprattutto nel collocare gli oggetti nello spazio.

5 – Discussione di bilancio

I disegni ed i commenti individuali vengono discussi. Dal confronto dovrebbe emergere la necessità di trovare delle regole generali o un metodo che possa consentire il disegno prima dello spazio e poi degli oggetti contenuti in esso (ad esempio prima disegno le mura dell’aula e poi inserisco gli arredi).

6 – Piero della Francesca

Viene proposta la lettura collettiva e guidata dall’insegnante di due brani originali dal “De prospectiva pingendi” di Piero della Francesca (Piero della Francesca, 1460, “De Prospectiva Pingendi”, edizione critica di G. Nicco Fasola, 1942, Firenze, Sansoni).

Il primo illustra la teoria della visione e della pittura; il secondo fornisce il primo passo per disegnare una griglia su un quadrato disegnato in prospettiva. Durante la lettura, da parte dell’insegnante, potrebbe essere necessaria un’opera di attualizzazione dello stile del testo per renderlo accessibile ai bambini.

Commenti alle attività

Questa proposta didattica si costituisce un’ideale continuazione dell’attività di rappresentazione di oggetti nel micro-spazio. Nell’utilizzare una proposta di questo tipo i ragazzi debbano già essere abituati a risolvere problemi spaziali mettendo in gioco contemporaneamente l’azione diretta, la visione e il linguaggio al fine di favorire la costruzione del campo visivo interno, nel quale il bambino può usare la funzione pianificatrice del linguaggio.

La metodologia usata si può riassumere in disegni dal vero individuali, discussioni, e verbalizzazioni individuali scritte. Le discussioni effettuate si possono riassumere in due diverse tipologie: di "bilancio", ossia discussioni miranti al confronto di prodotti e strategie e alla loro socializzazione, e di "tessitura" (concettualizzazione), ossia discussioni miranti a costruire il significato di un termine o di una locuzione matematica con riferimento ad una serie di esperienze sia di natura matematica che di altro genere.

Una particolare attenzione nella discussione matematica deve essere posta nella parte verbale-linguistica dell’attività di insegnamento-apprendimento, l’utilizzo sistematico di un registratore ed, in un secondo tempo la riflessione dell’insegnante su ciò che è emerso dalla sbobinatura, può offrire informazioni rilevanti sui processi che si svolgono all’interno della classe.

Durante la discussione può essere frequente avere difficoltà nel tenere sotto controllo le numerose variabili implicate durante il confronto del gruppo sul problema aperto; la sbobinatura o l’analisi della trascrizione può far emergere interventi significativi da parte di uno o più allievi che non erano stati opportunamente valorizzati.

Tale intervento può essere ripreso successivamente attraverso la rilettura di brani scelti ed orientare di nuovo la discussione sul tema desiderato. Nell’attività 3 si vuole avviare i ragazzi ad un distacco dall' esperienza empirica per andare verso una decontestualizzazione dell'oggetto reale, cioè verso l' enunciazione di proprietà generali indipendenti dagli oggetti particolari. Questo processo, osservabile nella classe attraverso la scelta opportuna di attività, è una ricapitolazione del processo storico di costruzione dello spazio matematico, avvenuta nel periodo in cui si risolve il problema della prospettiva. Tutto ciò non è spontaneo: lasciati a loro stessi i bambini continuerebbero a confondere oggetti ed immagini, non disponendo di uno strumento linguistico che consenta di distinguerli.

L'introduzione del linguaggio della geometria crea una rottura tra l'esperienza e la reazione immediata del bambino e porta alla costruzione di " testi " che paiono riferiti ad un linguaggio specifico e che consentono il distacco dagli oggetti. Occorre precisare che il distacco dall'esperienza empirica sarà lento e graduale. Nella stessa discussione sono presenti interventi degli allievi che si collocano a livelli diversi: la comunicazione è possibile perché la discussione è intorno ad un'esperienza comune che riguarda un oggetto fisicamente presente nella classe.
Nell'attività 6 la lettura collettiva, con interpretazione dei brani selezionati dall'insegnante, focalizza la centralità del linguaggio; si vuole, ora, far emergere quanto ciascuno ha interiorizzato rispetto ai contenuti esplicitati durante la lettura, proprio grazie alla funzione pianificatrice del linguaggio.
L'uso di una fonte storica non è casuale in quanto si vuole aggiungere alle voci della classe, che potrebbero essere monologiche, una voce esterna che divenga parte attiva del dialogo rendendo così il testo, che si va costruendo all'interno della classe stessa, dialogico.

Un possibile sviluppo: il prospettografo
Si può proporre uno studio dettagliato del "prospettografo". I prospettografi sono semplici strumenti meccanici(vedi illustrazione tratta da Dürer).

Tali strumenti consentono di realizzare il disegno in prospettiva senza il ricorso a regole geometriche complicate. E' possibile costruirne di artigianali da utilizzare in classe. Si prende uno scatolone, si ritaglia un rettangolo su di una faccia e vi si applica un foglio di acetato da lavagna luminosa su cui si è precedentemente disegnato un reticolo; sulla faccia opposta si pratica un foro da cui si guarderà il soggetto da riprodurre; sulle due facce laterali occorrerà praticare dei fori adatti per introdurvi le mani che disegneranno sul foglio di acetato ciò che si vede.

* Da una proposta del Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena.

1. Disegno spontaneo di oggetti. Consegna: i ragazzi disegnano oggetti comuni (noti nella quotidianità) la cui forma sia possibilmente inquadrabile fra quelle tradizionalmente studiate nella geometria solida.
2. Ricalco del contorno di oggetti su acetato. Si utilizza una lastra di plexiglas incorniciata posta su un tavolo e si pone a pochi cm di distanza uno degli oggetti già disegnati, o sospeso mediante un filo, oppure infilzato in uno spiedino con le estremità sostenute da appoggi laterali. Consegna: i ragazzi appendono con delle mollette un foglio di acetato alla lastra dalla parte opposta a quella in cui si trova l'oggetto e cercano di riprodurlo ricalcandone i contorni.
3. Fotografia di oggetti. Consegna: i ragazzi fotografano gli oggetti guardandoli attraverso l'obiettivo nella stessa posizione in cui erano stati disegnati.
4. Proiezione di oggetti per mezzo di un proiettore. Il proiettore è posto in modo che lo schermo sia ortogonale all'asse del cono d'ombra. Si invitano i ragazzi a identificare le sezioni dell'ombra intercettata dal muro di oggetti aventi varie forme. Ad esempio proiettando scatole aventi la forma di un parallelepipedo rettangolo si ottengono sezioni d'ombra aventi la forma di rettangoli, quadrati, … ma anche pentagoni, esagoni.
5. Previsione delle sezioni d'ombra di un oggetto. Consegna: ogni ragazzo sceglie un oggetto del quale deve disegnare le sezioni d'ombra su un foglio specificando, in corrispondenza ad ogni disegno, la posizione dell'oggetto rispetto alla fonte luminosa.
6. Previsione delle possibili sezioni di un solido mediante l'uso di modelli concreti. Si possono prima scegliere oggetti comuni: un'arancia, una carota, la cialda di un cono gelato, un pezzo di plastilina modellato secondo diverse forme. Successivamente si focalizza l'attenzione sul poliedro più familiare: il cubo e si analizzano le sezioni di un cubo, utilizzando cubi costruiti con spugna da fioraio o un cubo contenente acqua colorata

b) <u>Passaggio dall'immagine bidimensionale alla sua interpretazione tridimensionale.</u>
1. Elencazione delle possibili forme degli oggetti che hanno una determinata proiezione sul muro.
2. Individuazione di un oggetto a partire da sue proiezioni su un telone. Si pone un telone traslucido fra due ragazzi. Un ragazzo da una parte del telone illumina un oggetto con un proiettore e l'altro, dall'altra, deve indovinare la forma dell'oggetto esaminando l'ombra proiettata sul telone. In una determinata posizione è possibile dare più risposte, ma se l'oggetto viene rigirato da diverse angolazioni, dalle sue diverse ombre è possibile risalire all'oggetto stesso, o almeno alla sua forma.

L'attività del disegno spontaneo deve essere proposta a tutti i ragazzi con le stesse modalità. Lo stesso oggetto viene disegnato da più ragazzi in momenti successivi, in modo da poter comparare i risultati. Uno degli accorgimenti da seguire nel disegno spontaneo è quello di variare la posizione dell'oggetto da disegnare e il punto di vista da parte del ragazzo; ciò per evitare lo stereotipo di affidarsi nella rappresentazione più al ricordo e all'immaginazione dell'oggetto così come lo si conosce, che a ciò che di fatto e oggettivamente si vede, in modo che il ragazzo sia costretto a osservare e il disegno non subisca condizionamenti.
Uno dei momenti più significativi dell'attività è quello della discussione che nasce dal confronto fra il disegno spontaneo dell'oggetto (in cui ciò che si vede viene filtrato dall'esperienza), il disegno attraverso la lastra di plexiglas (che costituisce una rappresentazione meno soggettiva in quanto guidata dalla lastra) e le fotografie dello stesso oggetto che forniscono una rappresentazione oggettiva e distaccata (la macchina fotografica non interpreta ciò che vede). La fase di riflessione successiva consente di notare le incongruenze del disegno spontaneo

si disegna ciò che non è possibile vedere, ma che si sa che c'è

e fa sentire la "necessità" della perdita di informazioni (in termini di relazioni geometriche) nel passaggio dal tridimensionale al bidimensionale. Questo tipo di osservazioni facilita il graduale passaggio allo studio della prospettiva, che in tal modo non diventa una passiva acquisizione di regole, ma riesce a dare un codice con determinate regole della trasposizione del tridimensionale.

Attraverso le attività della prima fase (a) i ragazzi colgono la non univocità fra l'oggetto e le sue sezioni d'ombra e fra l'oggetto e le sue sezioni.

L'attività 5 della prima fase (a) e le attività 1 e 2 della seconda fase (b), quella relativa al passaggio inverso dall'immagine bidimensionale all'oggetto tridimensionale, favoriscono un ulteriore passaggio verso l'astrazione, hanno lo scopo infatti di far acquisire la capacità di riconoscere un oggetto in presenza solo di alcuni stimoli sensoriali prodotti dall'oggetto stesso [E. Azzali Carminati, I. Visintin Mancino, *La formazione dei concetti geometrici nel primo ciclo: dalle sensazioni alle immagini mentali*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 16 n.9 1993].

Queste attività costituiscono un avvio verso la costruzione delle immagini mentali, nel momento in cui il ragazzo tenta di dare un'interpretazione tridimensionale ad un'immagine.

Durante l'attività 6 della fase (a) i ragazzi analizzano le sezioni di un cubo, utilizzando cubi costruiti con spugna da fioraio o un cubo di plexiglas contenente acqua colorata [cfr. V. Villani, *Geometria dello spazio*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 1987] e M. Dedò, *Modelli di poliedri*, Atti del XVII Convegno sull'insegnamento della matematica: *L'insegnamento della geometria* a cura di B. Micale e S. Pluchino (Latina 1994) Notiziario UMI, supplemento al n.8-9, 1995]. L'insegnante guida il graduale passaggio dal primo momento in cui i ragazzi tirano ad indovinare il tipo di poligono sezione, senza aver stabilito alcun criterio per condurre l'indagine, al momento successivo in cui un tipo di ragionamento più organizzato porta ad ipotizzare l'esistenza di alcune sezioni, che poi viene validata attraverso opportune inclinazioni del cubo contenente acqua colorata o dal taglio del cubo di spugna da fioraio. Si analizzano i vari casi che si presentano aumentando da tre a sei il numero delle facce tagliate e ci si sofferma sulle proprietà dei poligoni sezione. Dopo aver fatto rilevare che il cubo è un solido particolare avente le facce opposte parallele, l'insegnante pone domande del tipo:

La relazione di parallelismo fra le facce ci può dare qualche informazione in più sulla relazione fra i lati di questi poligoni sezione?

In corrispondenza di ogni tipo di poligono trovato, a tre, quattro, cinque, sei lati, troviamo sempre il poligono regolare corrispondente?

Perché nel caso del pentagono non si può mai avere come sezione un pentagono regolare?

Le risposte alle varie domande poste dall'insegnante o dal gruppo stesso coinvolgono gli alunni in una attività argomentativa in cui le giustificazioni, via via che si va avanti, diventano sempre più serrate e corrette dal punto di vista formale e del linguaggio usato. Può essere significativo sottolineare i limiti dell'intuizione, con e senza il supporto visivo costituito dal cubo con l'acqua colorata. La presenza di alcuni poligoni sezione può essere verificata di fatto con il cubo, non senza qualche difficoltà, solo dopo averne supposto l'esistenza in base a ragionamenti fatti in assenza dell'oggetto preso in considerazione.

I momenti di verbalizzazione sia durante le esperienze descritte, sia a conclusione delle stesse, consentono ai ragazzi di condurre ragionamenti che conquistano a poco a poco la loro indipendenza dalla presenza dell'oggetto fisico su cui si ragiona.

In un primo periodo si va avanti con nomi convenzionali (scatola, palla, …), si procede con una terminologia più appropriata solo quando i ragazzi avvertono la necessità di definire gli oggetti con i quali lavorano per poter scoprire la rete di relazioni che imbriglia nelle sue maglie gli oggetti stessi. In questo senso l'attività definitoria può creare diverse occasioni che costituiscono spunto all'argomentazione.

(*) tratto da B. Micale – C. Milone , " L'interpretazione della visualizzazione spaziale: *lo spazio fa paura?*", inviato per la pubblicazione a L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, anno 2001
ed elaborato dal N.R.D. del Dipartimento di Matematica dell'Università di Catania

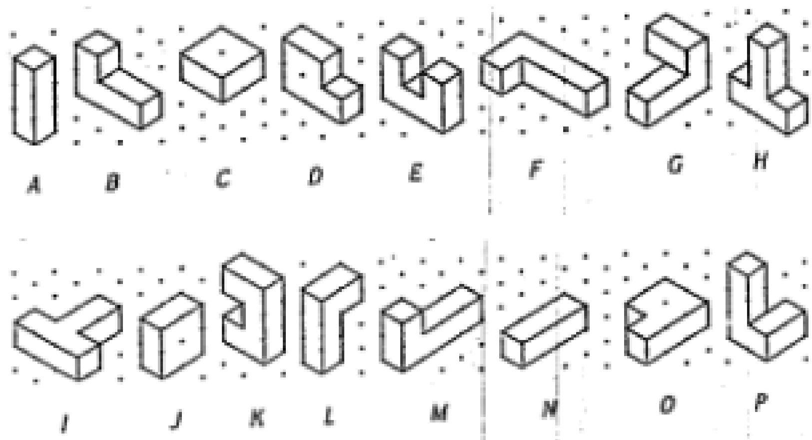
Elementi di prove di verifica (*)

Forma le coppie

Osserva questi solidi:

Qui ci sono gli stessi solidi disegnati in modi diversi.

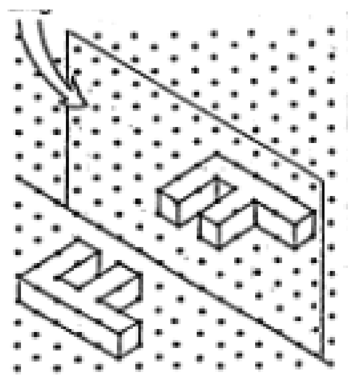
Elenca le coppie che descrivono lo stesso solido.



Allo specchio

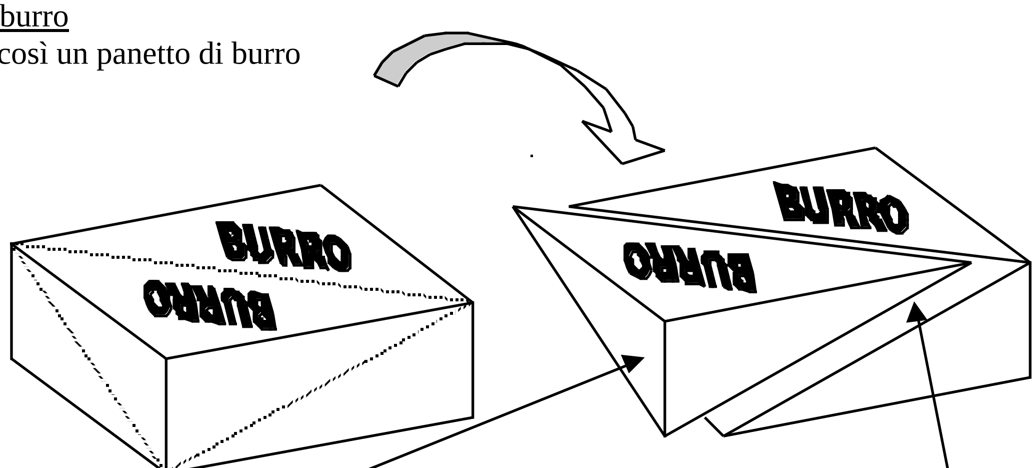
Questo è uno specchio che mostra l’immagine riflessa della lettera F

Disegna l’immagine riflessa della lettera J in questo specchio.



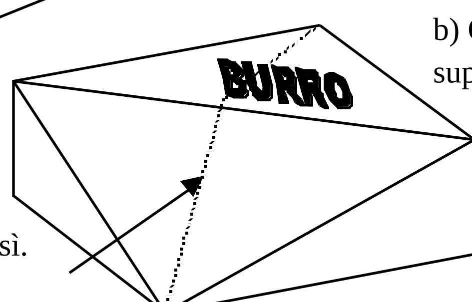
Il panetto di burro

Paolo taglia così un panetto di burro



b) Quale forma ha questa superficie tagliata?

a) Quale tipo di solido è?



c) Paolo fa ora un taglio verticale, così.
Quale forma ha la superficie tagliata?

(*) da Harper E. (a cura di): 1987 – 88 , NMP *Mathematics for Secondary school*, Longman, Essex, England

Definire quadrilateri con le simmetrie (*)

Livello scolare: 2ª media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Riconoscere figure uguali e descrivere le isometrie necessarie per portarle a coincidere Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche Individuare simmetrie in oggetti e figure date; realizzarle e rappresentarle col disegno. Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze Classificare oggetti, figure, numeri in base a due o più proprietà e realizzare adeguate rappresentazioni delle stesse classificazioni. Descrivere proprietà di figure con termini appropriati. Produrre congetture. Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari. Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi. Comprendere il ruolo delle definizioni in matematica. Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati. Riconoscere il carattere problematico di un compito, individuando l'obiettivo da raggiungere sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere. Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito…..	Le principali figure del piano e dello spazio Simmetrie, traslazioni, rotazioni Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a…)	<u>Lo spazio e le figure</u> Le relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana Educazione tecnica

Contesto
Figure geometriche come oggetti matematici

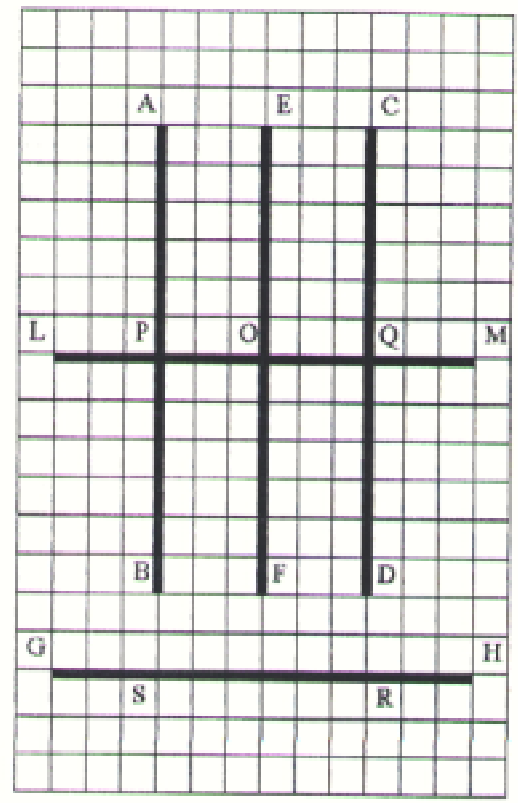
Commento
Scopo di quest'attività è quello di condurre i ragazzi alla costruzione di nuove definizioni per i quadrilateri convessi, definizioni che non assumono proprietà quali la congruenza di lati, di angoli, … o il parallelismo o la perpendicolarità, ma gli elementi di simmetria che possono essere presenti.

Questo porta a classificare per inclusione, ma anche a prevedere altre eventuali definizioni per partizione alla maniera euclidea

Descrizione dell'attività

I ragazzi, divisi in piccoli gruppi, costruiscono con l'aiuto dell'insegnante il modello qui descritto e seguono, attraverso schede appositamente predisposte, le istruzioni per il suo utilizzo.

Costruzione del modello



Materiale occorrente:

- due cartoni rettangolari (cm 14 × cm 20);
- un foglio di carta quadrettata della stessa misura (quadretti da 1 cm);
- sei puntine da disegno e sei pezzetti di sughero;
- filo elastico di due colori diversi;
- colla, forbici, taglierino, strumenti da disegno.

Realizzazione:

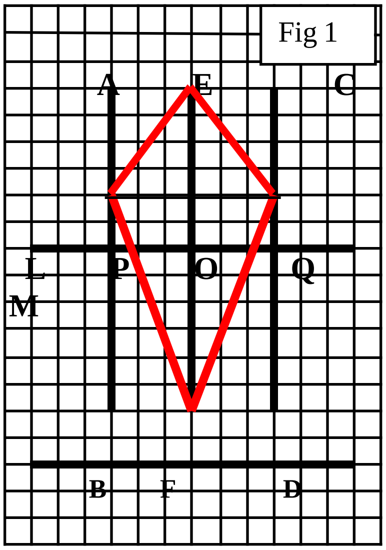
- praticare le incisioni così come mostra il disegno (le incisioni sono indicate dai tratti in neretto);
- inserire le puntine da disegno con la punta rivolta verso l'alto, e sistemarne due lungo la retta GH, due lungo la retta EF, una lungo la retta AB e una lungo la retta CD;
- incollare tutto sull'altro cartone;
- ricoprire le puntine con pezzetti di sughero.

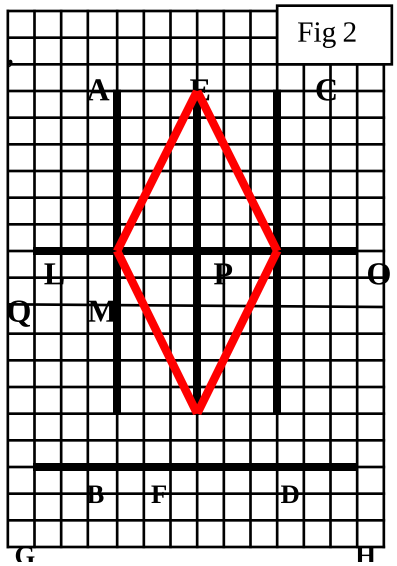
Attraverso i movimenti indicati nella scheda i ragazzi individuano quadrilateri che hanno assi di simmetria passanti o no per i vertici e in cui è presente o no un centro di simmetria. Di volta in volta scoprono o verificano la presenza di relazioni fra gli elementi del quadrilatero (lati, angoli, diagonali,…), riflettendo su eventuali situazioni di isoperimetria o di equiestensione.
Individuano infine eventuali relazioni di inclusione fra le famiglie dei quadrilateri determinate tenendo conto della presenza o meno del centro di simmetria, del numero degli assi di simmetria, e dell'appartenenza o meno dei vertici del quadrilatero all'asse di simmetria.

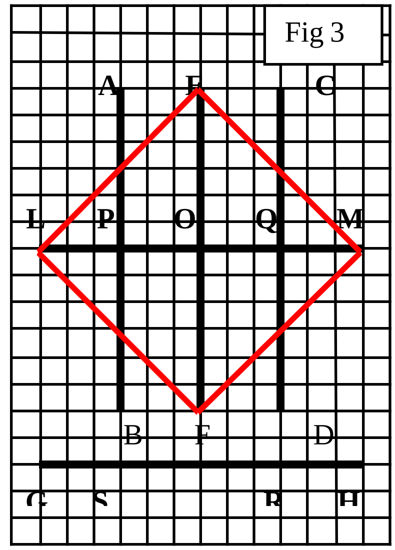
<u>Prima scheda operativa</u>

Si dispone inizialmente un vertice (una puntina protetta dal pezzetto di sughero) sul segmento EF, uno sul segmento AB, uno sul segmento CD (non in posizione simmetrica rispetto ad EF) e uno sul segmento LM.
Premessa: un generico quadrilatero non ha assi di simmetria. Consegna: *scopri la forma di un quadrilatero avente un asse di simmetria* (si suggerisce di scegliere come asse la retta passante per E ed F).
1. I ragazzi discutono sul numero di vertici che possono trovarsi sull'asse giungendo alla conclusione che *se un vertice del quadrilatero si trova sull'asse di simmetria, un altro vertice deve trovarsi su tale asse.* Si possono scegliere come vertici sull'asse i punti E ed F. Si dispongono simmetricamente rispetto all'asse i punti sui segmenti AB e CD.

2. I ragazzi sistemano degli elastici attorno ai vertici del quadrilatero e attorno alle diagonali. Si conviene di definire **deltoide** *un quadrilatero convesso che ha un asse di simmetria passante per due vertici opposti* (Fig1) [Si escludono dall'osservazione i punti mobili sul segmento GH.]







3. Tenendo fissi i vertici in E ed F i ragazzi fanno scorrere gli altri due vertici sulle rette AB e CD secondo vettori di uguale intensità e verso, scoprendo attraverso il movimento le proprietà particolari di cui godono gli elementi del deltoide.

4. Consegna: *individua, se esiste, in questa famiglia di deltoidi quello che ha due assi di simmetria passanti ciascuno per due vertici opposti.* I ragazzi disporranno i vertici sulle rette AB e CD rispettivamente nei punti P e Q. Si conviene di definire **rombo** *un quadrilatero convesso che ha due assi di simmetria ciascuno passante per due vertici opposti.*(Fig2).

5. Consegna: *il rombo gode delle proprietà di cui gode il deltoide? perché?* Tenendo fissi i vertici in E ed F, e facendo scorrere quelli in P e Q sulla retta LM secondo vettori aventi uguale intensità, ma verso opposto, si ottiene una famiglia di rombi.

Consegna: *gli elementi del rombo godono anche di altre proprietà di cui non godono i deltoidi?*

6. Tenendo fissi i vertici in E ed F, i ragazzi dispongono gli altri due in L ed M, riportano su un foglio quadrettato il rombo e lo ritagliano. Piegano il rombo lungo la retta che congiunge i punti medi dei lati EM ed LF e osservano che … Ripetono lo stesso procedimento per gli altri due lati opposti del rombo. Si conviene di definire **quadrato** *un quadrilatero convesso che ha quattro assi di simmetria, di cui due passanti per due vertici opposti e due non passanti per alcun vertice* (Fig3)

7. Consegna: *il quadrato gode delle proprietà di cui gode il rombo? Perché? Gli elementi del quadrato godono anche di altre proprietà? Quali?* [Si tolgono gli elastici e si escludono dalle considerazioni che seguono i vertici sulla retta EF.]

8. Si passa poi al caso in cui nessun vertice si trova sull'asse di simmetria: si suggerisce ai ragazzi di sistemare un vertice sulla retta GH alla distanza di 5 quadretti dall'asse di simmetria e un altro sulla retta LM alla distanza di un quadretto dall'asse di simmetria. Consegna: *dove si troveranno i simmetrici di tali vertici?* Si pone un elastico attorno ai vertici del quadrilatero e altri due attorno ai vertici opposti. Si conviene di definire **trapezio isoscele** *un quadrilatero convesso con un asse di simmetria non passante per alcuno dei vertici* (Fig4).

9. I ragazzi fanno scorrere i vertici sulla retta LM secondo vettori di uguale intensità, ma verso opposto e fanno lo stesso con i vertici che si trovano sulla retta GH scoprendo attraverso il movimento le proprietà particolari di cui godono gli elementi di un trapezio isoscele.

10. A partire dalla famiglia dei trapezi isosceli, con considerazioni analoghe a quelle descritte precedentemente a partire dalla famiglia dei deltoidi, vengono individuati *un quadrilatero convesso avente due assi di simmetria non passanti per alcuno dei vertici* al quale viene dato il nome di **rettangolo** (Fig5) e a partire dalla famiglia dei rettangoli viene ritrovato il **quadrato**.

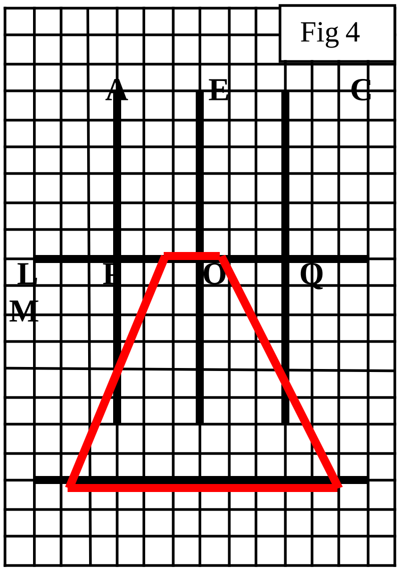


Fig 4

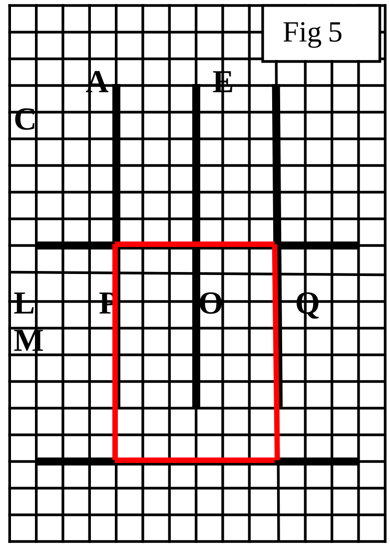
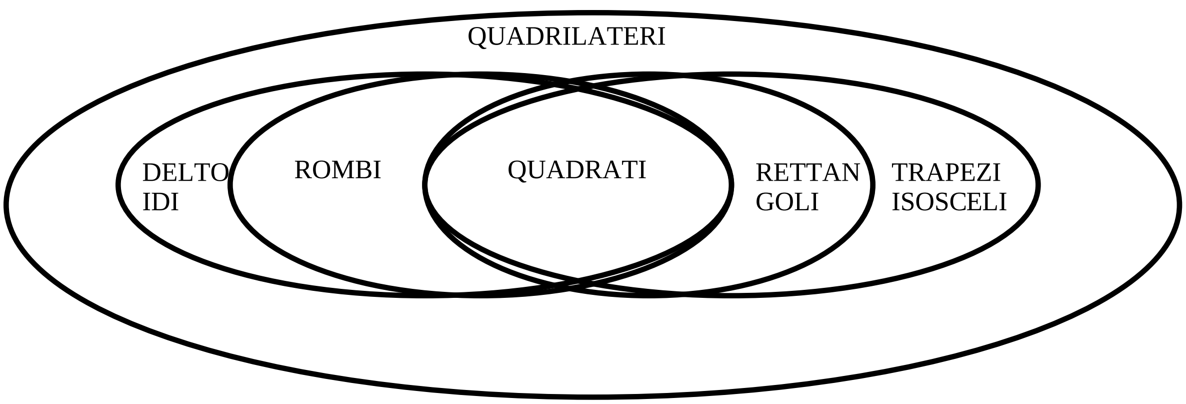


Fig 5

11. Si invitano infine i ragazzi a sistemare in maniera opportuna i quadrilateri incontrati lungo il percorso in un diagramma di Venn, tenendo conto del numero degli assi di simmetria, e dell'appartenenza o meno dei vertici del quadrilatero all'asse di simmetria.



<u>Seconda scheda operativa</u>

1. Consegna: *Scopri la forma di un quadrilatero avente un centro di simmetria..*

L'insegnante suggerisce di scegliere come centro il punto O.

2. Consegna: *Poni un vertice sulla retta EF e un altro sulla retta AB, dove si troveranno gli altri due vertici?* Si pone un elastico attorno ai vertici. Si conviene di definire **parallelogramma** *un quadrilatero convesso con un centro di simmetria* (Fig6).

3. I ragazzi fanno scorrere i vertici sulle rette AB e CD secondo vettori di uguale intensità e verso opposto scoprendo attraverso il movimento le proprietà particolari di cui godono gli elementi del parallelogramma.

A partire dalla famiglia dei parallelogrammi, con considerazioni analoghe a quelle descritte precedentemente viene ritrovato il

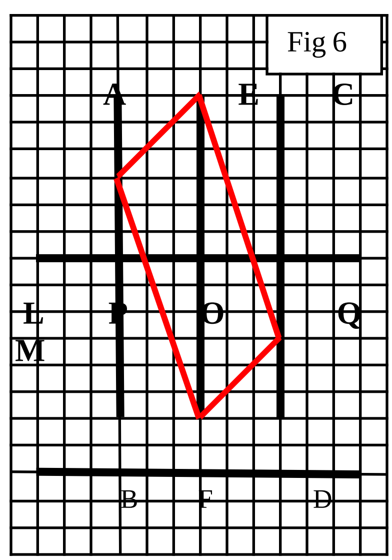


Fig 6

rombo, già trovato per altra via. Il rombo dunque non ha solo due assi di simmetria passanti per i vertici, ma anche un centro di simmetria. A partire dalla famiglia di rombi viene ritrovato il **quadrato**. Il quadrato dunque possiede oltre a quattro assi di simmetria, anche un centro di simmetria.

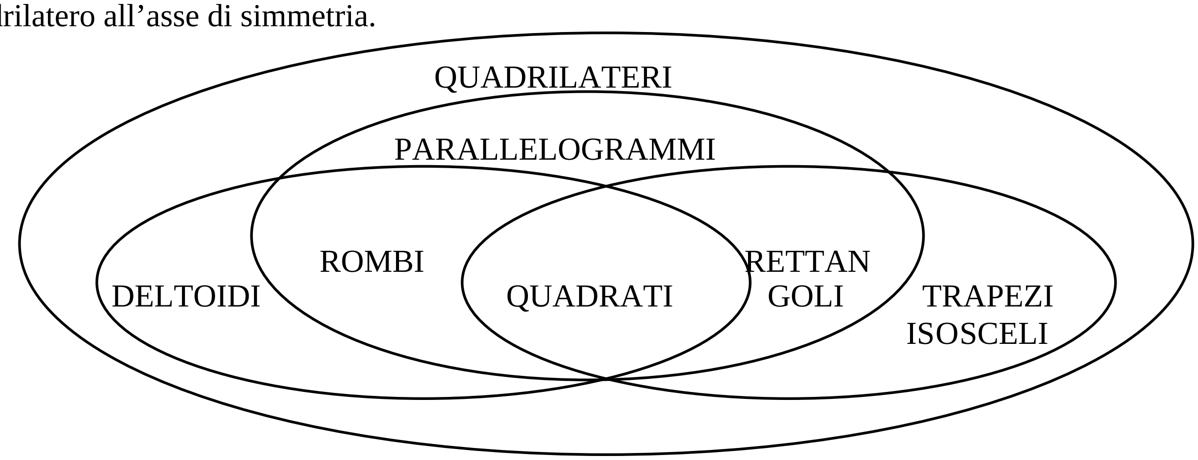
4. I ragazzi sistemano poi i vertici sulla retta EF e fanno scorrere i vertici sulle rette AB e CD secondo vettori di uguale intensità e verso opposto fin quando, misurando le diagonali, non risultino congruenti; ritrovano così il **rettangolo**. Il rettangolo dunque possiede non solo due assi di simmetria non passanti per i vertici, ma anche un centro di simmetria.

5. Consegna: *Lasciando fermi i punti sulla retta EF e facendo scorrere solo i vertici sulle rette AB e CD, quanti di questi rettangoli puoi ottenere?*

6. Si spostano i vertici sulla retta EF e poi, tenendoli fermi, si fanno scorrere i vertici sulle rette AB e CD. Si ottiene un'altra famiglia di parallelogrammi nella quale è possibile individuare altri due rettangoli. Consegna: *puoi sistemare i vertici sulla retta EF in modo che questi due rettangoli coincidano? Il rettangolo che ottieni risulta simmetrico rispetto alle sue diagonali? Quanti assi di simmetria ha?*

Si ritrova dunque il **quadrato** anche nella famiglia dei rettangoli.

Si invitano infine i ragazzi a sistemare in maniera opportuna i quadrilateri incontrati lungo il percorso in un diagramma di Eulero Venn, tenendo conto della presenza o meno del centro di simmetria, del numero degli assi di simmetria, e dell'appartenenza o meno dei vertici del quadrilatero all'asse di simmetria.



<u>Momenti significativi</u>

- Nella fase 4 della prima scheda i ragazzi, fissati due vertici nei punti E ed F e facendo scorrere gli altri due vertici secondo vettori di uguale intensità e verso sulle rette AB e CD, trovano infinite coppie di deltoidi simmetrici rispetto all'asse rappresentato dalla retta LM. Il rombo è l'elemento unito fra queste infinite coppie di deltoidi simmetrici. A conclusioni analoghe possono giungere anche in altri momenti dell'attività, ad esempio nella fase 6 della seconda scheda in cui in relazione ad ogni posizione fissata per i vertici sulla retta EF si individuano due rettangoli che si corrispondono nella simmetria rispetto al centro O. Il quadrato è l'elemento unito fra queste infinite coppie di rettangoli simmetrici.
- Laddove si presenti l'occasione si farà notare come le proprietà individuate per una famiglia di quadrilateri si conservano anche nei casi limite, ad esempio nella fase 4 i casi limite di posizione dei vertici sulle rette AB e CD danno origine ad una coppia di triangoli isosceli, in essi si riscontrano le stesse proprietà individuate nei deltoidi, compresa la somma degli angoli interni, perché nel caso del triangolo due dei lati consecutivi del deltoide diventano segmenti adiacenti e quindi uno degli angoli del deltoide diventa un angolo piatto.
- Durante l'attività con la scheda 1 si osserverà che, una volta fissati i vertici sulla retta EF, le figure che si ottengono facendo variare la posizione degli altri due vertici sulle rette AB e CD secondo i movimenti indicati, sono equiestese, ma non isoperimetriche. È possibile a questo proposito

condurre l'osservazione sulle variazioni del perimetro, ed individuare le configurazioni di perimetro minimo e massimo.
- Ogniqualvolta viene individuato e poi definito un quadrilatero particolare all'interno di una famiglia di quadrilateri viene sempre posta la domanda: *Il quadrilatero che hai trovato gode delle proprietà di cui godono i quadrilateri della famiglia? Gli elementi del quadrilatero che hai individuato godono anche di altre proprietà? Quali?* Queste osservazioni consentono di stabilire relazioni di tipo inclusivo fra famiglie di quadrilateri.
- Questa attività consente di porre l'accento sul fatto che, a partire dalla presenza di elementi di simmetria, è possibile definire figure geometriche note in maniera diversa da quella usuale basata su relazioni di congruenza di lati o di angoli e su relazioni di parallelismo fra lati. A partire da queste nuove definizioni è possibile riscoprire fra le proprietà della figura anche quelle che all'interno delle "vecchie" definizioni erano utilizzate per caratterizzarla. La coerenza delle "nuove" definizioni sarà validata anche visivamente attraverso il diagramma di Eulero Venn.
- Si può cogliere l'occasione per fare con gli alunni un'analisi critica di alcune definizioni fornite dai libri di testo (ad esempio nell'ambito dei quadrilateri), facendo notare come talvolta ci sia poca coerenza nel passaggio da una definizione all'altra. Tale mancanza di coerenza viene sottolineata dalla difficoltà di rappresentare graficamente, attraverso relazioni fra insiemi, le relazioni esistenti fra queste famiglie di figure geometriche. In questa attività verranno messe alla prova le capacità non solo critiche, ma anche argomentative degli alunni.

Attività di questo tipo possono condurre ad approfondimenti di carattere storico: la geometria che studiamo ancora a scuola, soprattutto nel ciclo della scuola di base, è la geometria euclidea, può risultare interessante andare ad esaminare le definizioni che Euclide dà dei quadrilateri e confrontarle con quelle dei libri di testo per metterne in rilievo le differenze. Le definizioni che dava Euclide avevano lo scopo di determinare una partizione nell'insieme dei quadrilateri. La scelta che si fa oggi è quella di mettere a confronto le figure geometriche in modo da rilevarne analogie e differenze, pertanto vengono privilegiate le definizioni che danno luogo a relazioni di tipo inclusivo.

Elementi di prove di verifica

- Dopo aver realizzato l'attività descritta è opportuno coinvolgere i ragazzi in una classificazione dei triangoli per mezzo delle simmetrie assiali. Anche in questo caso si giungerà a nuove definizioni per il triangolo scaleno, isoscele, equilatero.
- Successivamente è possibile fare scoprire ai ragazzi le eventuali simmetrie rotazionali che i triangoli possono presentare intorno ad un punto O detto centro. [N.B. una figura possiede una simmetria rotazionale di ordine n attorno ad un punto O, detto centro, quando 1/n di giro è la più piccola rotazione attorno ad O che fa riassumere alla figura l'aspetto iniziale.] Si trovano i triangoli equilateri che ammettono una simmetria rotazionale di ordine 3.
- Lo studio delle simmetrie rotazionali può essere esteso ai quadrilateri, giungendo alla scoperta dei parallelogrammi, che ammettono una simmetria rotazionale di ordine 2 e ai quadrati che ammettono una simmetria rotazionale di ordine 4. Generalizzando ulteriormente, nell'ambito dei poligoni ad n lati si trovano i poligoni regolari che ammettono una simmetria rotazionale di ordine uguale al numero dei loro lati.

Per l'attività sulle simmetrie rotazionali può essere utile servirsi di due poligoni uguali ritagliati su due fogli di cui uno trasparente e fissati insieme per mezzo di una puntina da disegno nel baricentro della figura, in modo che il poligono trasparente possa ruotare sull'altro.

* tratto da: A.M. Damiani – A.M. Facenda – P. Fulgenzi – F. Masi – J. Nardi – F. Paternoster, "*Quadrilatero con vertici mobili*", Sezione Mathesis Pesaro.
ed elaborato dal N.R.D. del Dipartimento di Matematica dell'Università di Catania

Regolarità e modularità nella natura e nell'opera dell'uomo

Livello scolare: 1ª, 2ª e 3ª media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche Utilizzare le trasformazioni geometriche per operare su figure Utilizzare software di geometria dinamica Riconoscere figure uguali e descrivere le isometrie necessarie per portarle a coincidere	Simmetrie	<u>Lo spazio e le figure</u> Argomentare e congetturare Le relazioni	Educazione artistica Lingua italiana Scienze Educazione tecnica

Contesto
Ritmi e moduli nello spazio

Commento
Il contesto è inizialmente di tipo matematico poiché si tratta di individuare le caratteristiche della simmetria assiale e centrale; in seguito la matematica diviene strumento per modellizzare la realtà.
Queste attività possono essere utilmente svolte nel laboratorio di matematica.

Descrizione dell'attività
1. Approccio operativo alle proprietà della simmetria assiale

Viene fornito ad ogni ragazzo un foglio bianco sul quale devono disegnare a piacere alcuni punti e una retta. Gli allievi piegano il foglio lungo la retta scelta e procedono a forare il foglio piegato con spilli in corrispondenza dei punti disegnati precedentemente. Attraverso l'osservazione delle coppie di fori, guidata con opportune domande, sul foglio è possibile fare le prime scoperte sulle proprietà di questa corrispondenza fino alla caratterizzazione di due punti simmetrici rispetto ad una retta.
Emergono le prime osservazioni sulla simmetria assiale:
" Ad ogni punto di un semipiano corrisponde un punto nell'altro semipiano"
" Punti distinti vanno in punti distinti"
"Stabilito un punto di arrivo, è possibile risalire al punto di partenza"
" Un punto della retta corrisponde a se stesso"
" Le distanze tra punti vengono conservate".
Per arrivare alla caratterizzazione di due punti simmetrici rispetto ad una retta si propone la seguente consegna:
" *Riprendi il foglio di carta bianca e fissa l'attenzione su una coppia di punti corrispondenti. Con un'altra piegatura del foglio individua la retta che passa per essi*". Gli alunni vengono guidati a scoprire le condizioni di simmetria di due punti P e P' rispetto ad una retta r:

a) P e P' sono alla stessa distanza da r;
b) La retta PP' è perpendicolare alla retta r.

L'attività manipolativa privilegia un apprendimento di tipo euristico: l'insegnante deve porre attenzione nel guidare gli alunni a ricavare dall'esperienza operativa tutte le proprietà matematicamente interessanti.

In questa fase si incontra già la perpendicolarità fra rette; con la piegatura della carta è immediato riconoscere rette perpendicolari come rette che dividono il piano in quattro parti sovrapponibili.
Si può ora passare alla determinazione della figura simmetrica di una figura data rispetto a una retta con le seguenti attività: foratura con spilli, uso di uno specchio, ricalco della figura su un foglio trasparente e ribaltamento dello stesso foglio attorno all'asse, disegno, ecc…
Seguendo i versi di percorrenza dei contorni di due poligoni simmetrici si può inoltre osservare che la simmetria assiale è una isometria opposta (cioè cambia l'orientamento del piano).
E' particolarmente interessante scoprire il "destino" di una retta perpendicolare all'asse nella simmetria: essa si trasforma in se stessa.
Si crea così negli alunni la base intuitiva per una diversa definizione, rispetto a quella precedente, di rette perpendicolari che potrà essere ripresa in una successiva sistemazione assiomatica, euclidea o non, nelle scuole superiori.

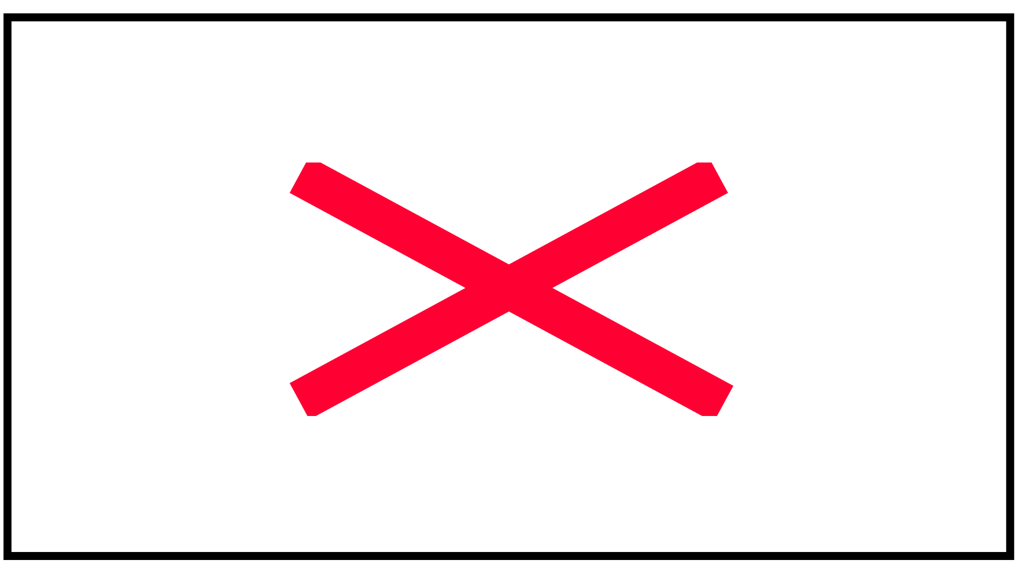
2. Ricerca operativa degli assi di simmetria di una figura

Come nell'attività precedente il punto di partenza è di tipo operativo attraverso piegature, ricalchi,…
Il passaggio dalla fase manipolativa al concetto di asse di simmetria di una figura è delicato. Non è banale far capire ai ragazzi che gli assi di simmetria non sono "proprietà privata" delle figure, ma che interviene sempre una simmetria assiale che coinvolge tutto il piano e che riporta la figura su se stessa.
Seguono attività su diverse figure geometriche al fine di scoprire proprietà caratteristiche.
Possiamo osservare che l'acquisizione, anche solo operativa, degli assi di simmetria permette a tutti alunni di individuare autonomamente proprietà delle figure.
Un ulteriore elemento di interesse è rappresentato dall'uso del linguaggio che nel corso delle attività diviene via via più preciso e rigoroso.

3. La simmetria assiale nella natura e nell'opera dell'uomo

I ragazzi portano in classe oggetti: fiori, foglie, frutti, oggetti della vita quotidiana; vengono inoltre cercate immagini di opere d'arte. Si tratta di riconoscere in questi oggetti e in queste immagini la struttura matematica soggiacente.
(Le immagini dei singoli oggetti sono state realizzate con lo scanner)

Fig.1
Immagini
di oggetti
reali



Possiamo osservare che il piacere estetico suscitato da alcune forme è compreso dalla maggior parte dei ragazzi.

L’attività prosegue chiedendo ai ragazzi di esprimere la loro creatività realizzando con materiali diversi configurazioni con uno o più assi di simmetria.

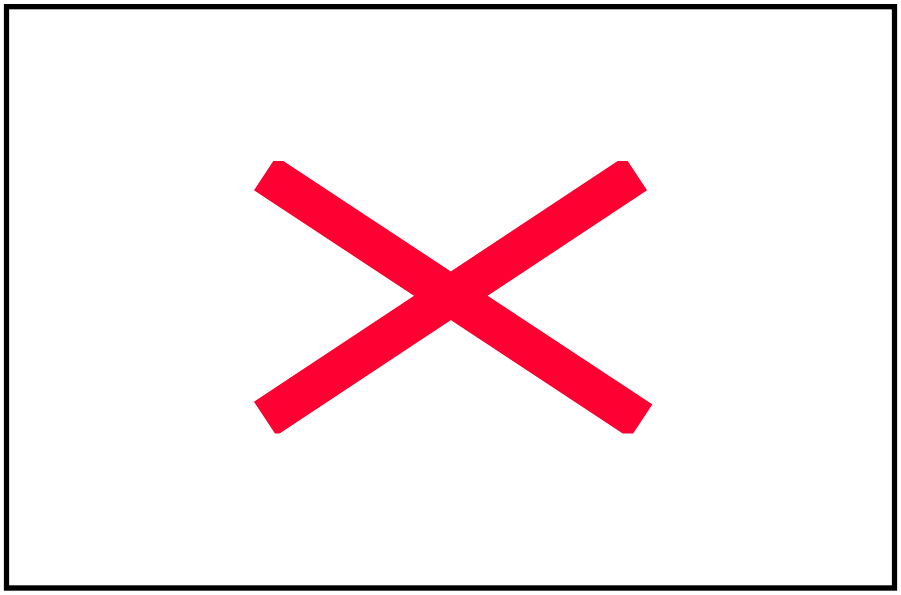


Fig.2 Immagini realizzate dai ragazzi

4. Approccio operativo alla simmetria centrale e al centro di simmetria

Viene nuovamente fornito ai ragazzi un foglio bianco su cui devono disegnare alcuni punti e fissare un centro. Si sovrappone al foglio bianco un foglio trasparente, fissato al foglio bianco per mezzo di un bottone automatico, su cui si devono ricalcare i punti scelti. Dopo aver eseguito un mezzo giro del foglio di carta trasparente si forano con spilli i punti ruotati in modo da ottenere sul foglio bianco le nuove posizioni dei punti.

Con un percorso analogo a quello seguito per la simmetria assiale si scoprono via via le proprietà della simmetria centrale, si caratterizzano due punti simmetrici rispetto a un punto dato e si determina la figura simmetrica di una figura data rispetto a un punto.

Le caratteristiche del centro di simmetria vengono di nuovo individuate con approccio operativo attraverso il ricalco e domande guidate.

Possiamo osservare che utilizzando la simmetria centrale si valuta agevolmente la somma degli angoli interni di un poligono e si scopre, in particolare, che qualsiasi triangolo e qualsiasi quadrilatero (convesso o non convesso) è una “mattonella” adatta a una pavimentazione (vedi Fig.3).

Un ulteriore elemento di interesse riguarda il fatto che utilizzando le simmetrie assiali e centrali si classificano in maniera significativa i triangoli e i quadrilateri (ad esempio i quadrilateri vengono classificati in quadrilateri con un asse di simmetria diagonale, quadrilateri con un asse di simmetria mediano e quadrilateri con centro di simmetria).

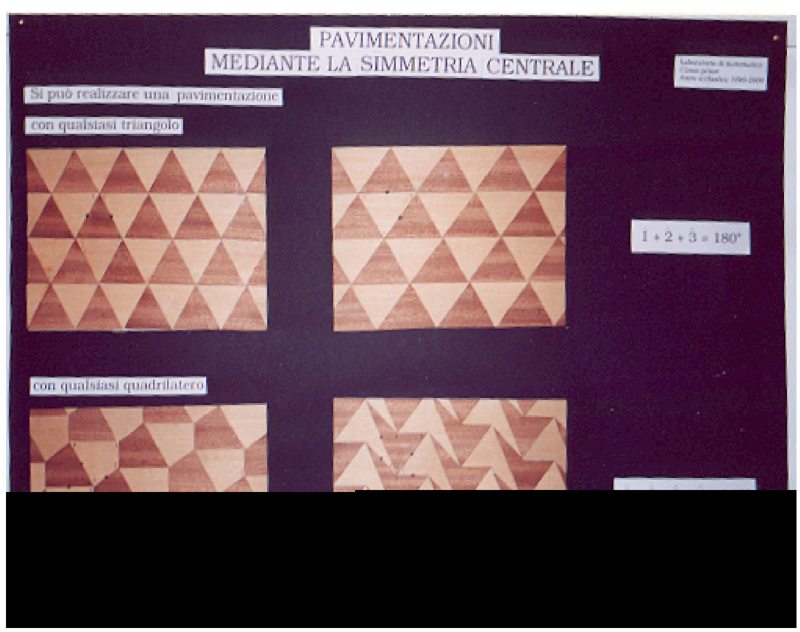


Fig.3 Pavimentazioni realizzate dai ragazzi

Le pavimentazioni possono essere realizzate in modo veloce e piacevole utilizzando il software Cabrì.

Elementi di prove di verifica

“Considera due triangoli rettangoli scaleni uguali e accostali in modo che abbiano un lato in comune. Cerca di ottenere tutte le figure possibili. Descrivi il tuo procedimento. Sei sicuro di aver trovato tutte le figure possibili? Perché?”

La richiesta di trovate tutte le figure possibili induce a procedere in modo sistematico e le simmetrie motivano la correttezza del procedimento utilizzato organizzando o completando le modalità scoperte per tentativi.

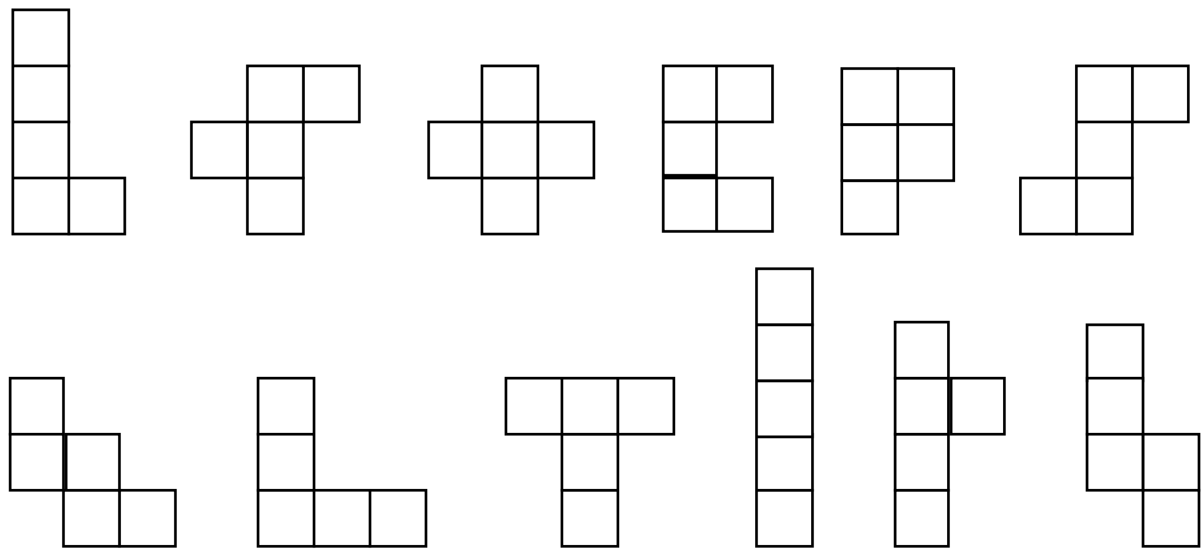
I Pentamini

Livello scolare: 2ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire e disegnare…figure geometriche Riconoscere figure uguali e descrivere le isometrie necessarie per portarle a coincidere Risolvere problemi, usando proprietà geometriche delle figure… Riconoscere figure equiscomponibili… Calcolare perimetri, aree In situazioni concrete, classificare…figure…in base a una data proprietà Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale… Produrre semplici congetture Verificare le congetture prodotte… Porsi e risolvere problemi	Traslazioni, rotazioni, simmetrie Scomposizione e ricomposizione di poligoni Calcolare perimetri, aree Equivalenza tra figure Rappresentazione piana di figure solide	<u>Lo spazio e le figure</u> Misurare Le relazioni Argomentare e congetturare Porsi e risolvere problemi	Lingua italiana

Contesto
Figure geometriche come oggetti matematici

Descrizione dell'attività
Costruire tutte le possibili figure geometriche piane, unendo opportunamente cinque quadrati uguali. Le dodici figure che si possono ottenere in questo modo prendono il nome di «pentamini».
I primi problemi che si pongono in questa attività sono quali sono e quante sono le figure ottenibili.
Ci si può chiedere se tra le figure ottenute ve ne siano concave o convesse (questa domanda porta alla costruzione di una o più definizione di figura convessa).
Si potrà poi calcolare il perimetro e l'area di queste figure e cercare assi e centri di simmetria.
Un'altra domanda sarà quali pentamini sono lo sviluppo piano di una scatola cubica con sole cinque facce.
Questa attività può essere proposta alle età più diverse. Abbiamo avuto docenti della scuola dell'infanzia che dopo averla realizzata in incontri di aggiornamento l'hanno subito proposta a bambini di 4 - 5 anni, con i dovuti adattamenti e valorizzando gli aspetti ludici del costruire forme con la carta, colorarle, dare loro un nome, inventare una storia,… Questa attività è stata utilizzata più volte anche in incontri di formazione per docenti della scuola dell'obbligo in quanto esempio di laboratorio di geometria che, prendendo spunto dalla manipolazione di semplici quadrati di carta, arriva a suscitare discussioni collettive di carattere squisitamente matematico.



Indicazioni didattiche
L’attività inizia distribuendo ad ognuno un certo numero di foglietti quadrati (sono utili quelli con il lato lungo 8 - 10 centimetri, che si vendono in blocchetti e che vengono utilizzati per prendere appunti delle telefonate).
Per unire i quadrati si può usare un pezzetto di nastro adesivo. La regola è che due quadrati adiacenti devono avere un lato in comune, evitando sovrapposizioni.
Un esempio di problema non banale che queste figure pongono nelle prime fasi del lavoro è il decidere quando due pentamini si debbano ritenere uguali, capita spesso infatti che persone diverse costruiscono due figure che si differenziano solo per una rotazione o un ribaltamento. Ci pare formativo lasciare che il gruppo dibatta l’argomento, fino ad accordarsi immancabilmente sul fatto che due figure saranno ritenute uguali nel caso si differenzino soltanto per un movimento rigido.
Le cinque proposte che abbiamo indicato in tabella non sono prescrittive. Ogni docente potrà adattarle come meglio crede al suo itinerario didattico. Esse non esauriscono peraltro l’argomento.
Poiché i pentamini sono 12, la loro area complessiva equivale a quella di 5 x 12 = 60 quadrati unitari. Ci possiamo allora chiedere se essi possono ricoprire in modo esatto un rettangolo formato da 60 quadratini.
I rettangoli aventi area 60 e i lati misure intere sono diversi. Alcuni vengono esclusi in partenza (1 x 60, oppure 2 x 30). Per altri è divertente cercare una o più soluzioni. Ci si può aiutare appoggiando i 12 modelli di pentamini realizzati su un cartellone nel quale si è disegnato il rettangolo preso in esame.
I ragazzi si divertono anche a giocare una sorta di «partita»: su una scacchiera 8 x 8 (con al centro quattro quadrati oscurati) due giocatori a turno appoggiano un pentamino a loro scelta, Vince il giocatore il cui avversario non riesce più a collocare alcuna figura.
Le attività contenute in questa proposta sono tratte dall’articolo di Clara Colombo Bozzolo, *Polimini –Poliamanti – Poliaboli – Poliesagoni nella scuola dell’obbligo,* in L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, volume 18, n.3, maggio 1995.

Definizioni e costruzioni geometriche "in discussione" (*)

Livello scolare: 2ª, 3ª media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure anche ricorrendo a opportuni strumenti	Le principali figure del piano e dello spazio	Lo spazio e le figure	Lingua italiana Educazione tecnica
In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze.		Le relazioni	
Descrivere proprietà di figure con termini appropriati. Produrre congetture. Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi. Comprendere il ruolo della definizione in matematica. Dare definizioni di semplici oggetti matematici Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati.		Argomentare e congetturare	
Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere scegliendo opportunamente le azioni da compiere e concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema		Porsi e risolvere problemi	

Contesto

Figure geometriche come oggetti matematici

Commento

È opportuno mettere l'alunno in posizione critica di fronte alle definizioni, che in tal modo non sono più delle conoscenze trasmesse, o peggio imposte da "chi detiene il sapere" (l'insegnante o il libro di testo), ma possono essere conoscenze costruite dai ragazzi stessi.

Descrizione dell'attività

I ragazzi riuniti in piccoli gruppi, o individualmente, utilizzano il software Cabri nella versione 1 per MS DOS e nella versione 2 per Windows per svolgere una funzione di controllo da applicare in ambiti diversi:

a) <u>verificare la correttezza di determinate costruzioni con riga e compasso</u>:

All'interno di ogni gruppo i ragazzi realizzano con il Cabri 1 costruzioni geometriche del tipo *"Dati due segmenti costruire il triangolo isoscele che ha il primo segmento come base e il secondo come lato obliquo"*. Poiché nel Cabri 1 non esiste né la funzione compasso, né la funzione arco di circonferenza, i ragazzi sono costretti a utilizzare durante la costruzione le circonferenze, ciò consente di visualizzare sullo schermo, in corrispondenza ad un segmento scelto come base, non un triangolo, ma due [Fig1]. Si rendono così conto del fatto che disegnare solo degli archi risulta riduttivo per la visione della figura da costruire.
In un secondo momento i ragazzi vengono guidati, attraverso una scheda, a costruire con il Cabri 2 una macro per la costruzione degli archi che consente di costruire il triangolo isoscele, così come si fa utilizzando riga e compasso. L'utilizzo di questa macro conduce i ragazzi a rendersi conto del fatto che disegnare su un foglio da disegno solo degli archi, può risultare condizionato da informazioni inconsce:
… bisogna tracciare il primo arco non in una zona del foglio scelta a caso, ma in maniera tale che intersechi l'asse del segmento in un prestabilito semipiano
…bisogna tracciare il secondo arco in modo che intersechi il primo…. [Fig2].
L'utilizzo degli archi inoltre può indurre i ragazzi a dimenticare che gli archi che vengono tracciati sono archi di circonferenza. L'uso della circonferenza si inquadra dunque in un "uso consapevole" di riga e compasso, non considerati come strumenti di precisione, ma "*recuperati alla logica che sta alla base del loro funzionamento*" .

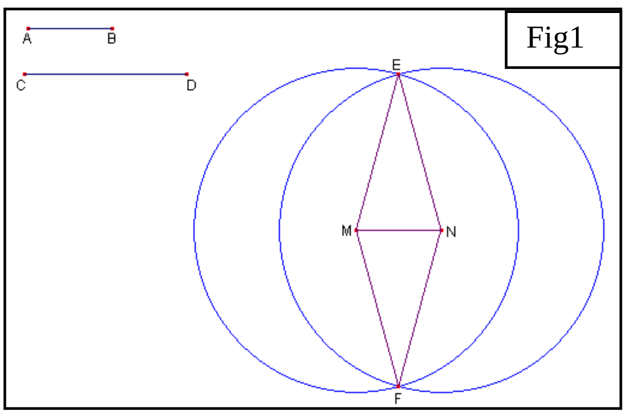


Fig1

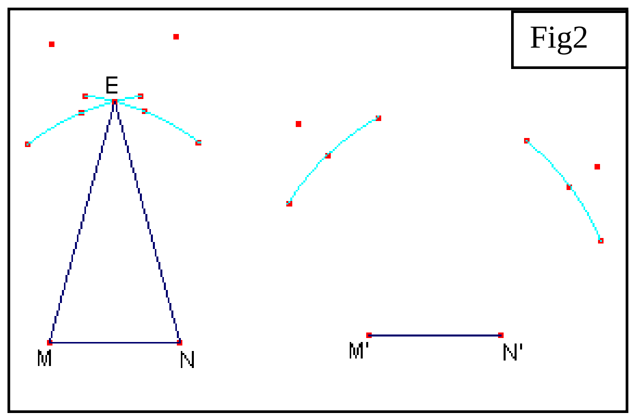
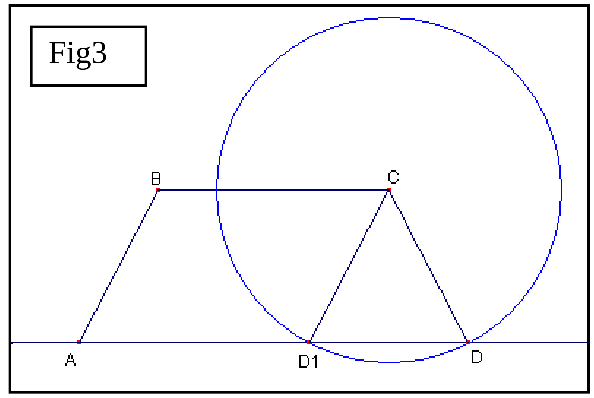


Fig2

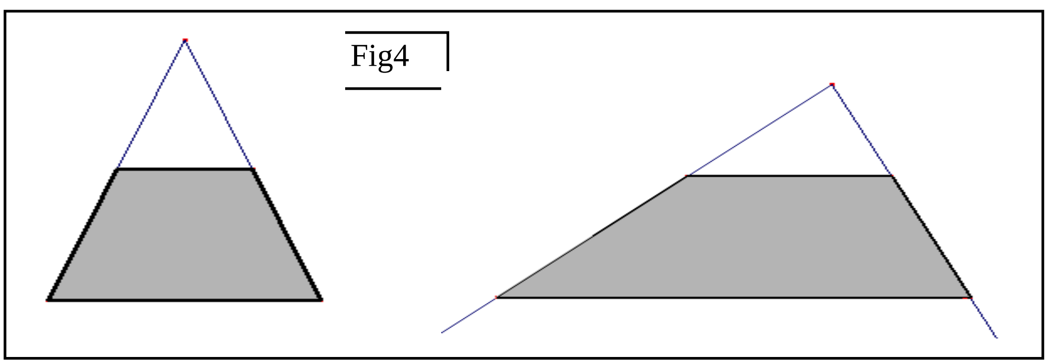
b) validare determinate definizioni dei libri di testo:
1) i ragazzi all'interno di ogni gruppo confrontano e analizzano le definizioni di una stessa figura geometrica date da diversi libri di testo;
2) per mezzo del Cabri costruiscono la figura geometrica descritta da ognuna delle definizioni;
3) commentano in gruppo la correttezza della definizione e socializzano i risultati con gli altri gruppi .

Questa attività contribuisce a potenziare la capacità di analisi di un testo, ad affinare le capacità espressive e argomentative e a costruire un atteggiamento critico.
I ragazzi possono ad esempio provare a disegnare con Cabri un trapezio isoscele accettando la definizione che più comunemente si trova sui libri di testo: *"Un trapezio si dice isoscele se ha i lati obliqui congruenti"*. Imponendo il parallelismo di due lati e poi l'eguaglianza degli altri due, nonché garantendo la convessità del quadrilatero, otteniamo non solo un trapezio isoscele, ma anche …... un parallelogramma [Fig3].
Si può chiedere ai ragazzi se i parallelogrammi possono essere considerati particolari trapezi isosceli, come porterebbe a supporre una definizione di questo tipo. Se così fosse dovrebbero godere di tutte le proprietà di cui godono i trapezi isosceli. I singoli gruppi elencano per iscritto le proprietà di cui godono i trapezi isosceli e che non sono proprietà del parallelogramma (congruenza degli angoli alla base, congruenza delle diagonali, asse di simmetria, …). Il fatto di dover risolvere questa situazione di ambiguità può portare ad ulteriori considerazioni riguardanti oltre che le

relazioni fra trapezio isoscele e parallelogramma, anche altre definizioni di trapezio isoscele e di trapezio, considerazioni in cui può essere sfruttata la funzione di validazione del Cabri.



Ad esempio alcuni ragazzi possono trovare sui libri di testo un collegamento fra trapezio isoscele e triangolo isoscele: il trapezio isoscele si può pensare come ottenuto dal triangolo isoscele secandolo con una retta parallela alla base Fig 4. Alla luce di quello che leggono riescono a dare una spiegazione al fatto che nella definizione di trapezio isoscele si parla di congruenza dei lati obliqui. D'altronde osservano che qualsiasi trapezio può avere un'origine simile: può derivare dalla sezione di un triangolo qualunque con una retta parallela ad un lato; riscontrano infatti che in alcuni testi il trapezio viene definito a partire dalla intersezione di due insiemi di punti, quello di una striscia e quello dei punti di un angolo convesso avente il vertice fuori dalla striscia. Ma, da un trapezio così definito, non può mai venire fuori un parallelogramma. I ragazzi possono realizzare la costruzione e rendersi conto che, comunque si modifichi l'ampiezza dell'angolo, non si potrà mai avere come intersezione un trapezio con i lati obliqui paralleli e quindi non si potrà mai realizzare un parallelogramma. Accettando questa definizione di trapezio i parallelogrammi non potrebbero costituire un sottoinsieme dei trapezi, così come seguirebbe dalla definizione classica: "*Un trapezio è un quadrilatero convesso che ha due lati opposti paralleli*"



Un'attività di questo tipo porta a fare rientrare nei ranghi di trapezio anche quello che in molti libri è ignorato, e cioè il trapezio che ha gli angoli adiacenti ad una stessa base uno acuto ed uno ottuso. Dal trapezio da tutti riconosciuto, con gli angoli adiacenti alla base tutti e due acuti o ottusi, nel caso in cui i lati obliqui sono congruenti, discende il trapezio isoscele propriamente detto, mentre da quello che ha gli angoli adiacenti ad una stessa base uno acuto ed uno ottuso, per congruenza dei lati obliqui, discende il parallelogramma. I ragazzi possono costruire con Cabri i due tipi di trapezio e, utilizzando la funzione di trascinamento, ritrovare nell'insieme dei trapezi del primo tipo il trapezio isoscele e nell'insieme dei trapezi del secondo tipo il parallelogramma.
Per eliminare le ambiguità che si vengono a creare, si può proporre ai singoli gruppi di studenti di formulare una nuova definizione per il trapezio isoscele, definizione che faccia superare l'ambiguità di calzare a pennello sia per il trapezio isoscele propriamente detto sia per il parallelogramma. Per aiutare i ragazzi nella formulazione di una definizione, si può ulteriormente sottolineare che all'origine dell'ambiguità sta il fatto che nella definizione comunemente riportata nei libri si fa riferimento ad una proprietà comune al trapezio isoscele e al parallelogramma: la congruenza dei lati, forse sarebbe il caso di utilizzare una proprietà che risulta essere caratteristica del trapezio isoscele, ma non del parallelogramma …
Si può giungere così a questa definizione: "*Un trapezio è isoscele se ha gli angoli alla base congruenti*".

Ripetendo la costruzione con il Cabri, i ragazzi si rendono conto che questa definizione caratterizza in maniera univoca il trapezio isoscele.
La discussione su certe definizioni riportate su qualche libro di testo: *"Il rettangolo è un parallelogramma che ha tutti e quattro gli angoli retti"*, favorisce delle osservazioni. Nella costruzione di detto rettangolo, quando, dopo aver costruito il parallelogramma, si impone che un angolo sia retto, anche gli altri angoli diventano retti, quindi nella definizione ci sono condizioni sovrabbondanti. Si potrebbe anche riflettere sull'equivalenza delle seguenti definizioni e verificarla realizzando le relative costruzioni con il Cabri.: "*Il rombo è un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti*" e "*Il rombo è un quadrilatero avente i quattro lati congruenti*".

c) <u>validare una "figura geometrica" ovvero per ribadire la differenza fra disegno e costruzione geometrica</u>
In questa attività i ragazzi lavorano singolarmente. La consegna per loro è quella di disegnare sul foglio di Cabri un quadrato.
Di solito i ragazzi, soprattutto se hanno poca dimestichezza con il Cabri, disegnano sullo schermo un quadrilatero e lo aggiustano pazientemente con piccoli spostamenti del mouse in modo che i lati siano pressoché congruenti e che gli angoli siano pressoché congruenti, dopodiché mostrano all'insegnante con soddisfazione l'opera finita. A questo punto l'insegnante, passando per le singole postazioni, trascina con il mouse un vertice, deforma la figura e il quadrato scompare: al suo posto rimane un comune quadrilatero.
Questa attività è utile perché aiuta a notare la differenza fra ciò che "*è*" e ciò che "*appare*". Se disegniamo un quadrato "*ad occhio*", cercando di realizzare con precisione delle linee "diritte", il risultato è un disegno che percepiamo come quadrato, ma in effetti rappresenta solo la componente figurale del concetto di quadrato.
Tale disegno, per rappresentare effettivamente un quadrato deve anche mantenere quelle caratteristiche che lo definiscono. Si chiede a questo punto ai ragazzi di costruire un quadrato non "*ad occhio*", ma a partire dalle sue proprietà geometriche. La validazione viene effettuata con Cabri, attraverso la funzione di trascinamento.

Questo tipo di funzione di controllo può essere sfruttata anche per distinguere fra le proprietà di una figura quelle che la caratterizzano univocamente .
I ragazzi, divisi in gruppi, costruiscono, ad esempio, un rombo con Cabri, elencano, quindi per iscritto le proprietà dei lati, degli angoli, delle diagonali che sono invarianti al variare del rombo per trascinamento dei suoi vertici.

Il rombo è un quadrilatero che ha:
- ◊ *i lati congruenti*
- ◊ *le diagonali perpendicolari*
- ◊ *le diagonali che si dimezzano*
- ◊ *gli angoli opposti congruenti*
- ◊ *i lati opposti paralleli*

…………………………….

Si chiede ai ragazzi di verificare quali di queste proprietà (prese singolarmente) individuano univocamente un rombo, cioè si possono considerare caratterizzanti. Per rispondere a questa domanda i ragazzi dovranno provare a costruire la figura geometrica corrispondente alla proprietà presa volta per volta in esame e controllare se si ottiene o no un rombo. Successivamente si potrebbe chiedere di verificare se queste proprietà, opportunamente accoppiate, possono caratterizzare un rombo.

Particolare attenzione durante questo percorso deve essere rivolta alla verbalizzazione, alla produzione e alla verifica di ipotesi argomentate. In questo senso risulta utile lavorare in gruppo, confrontarsi all'interno di piccoli gruppi e sostenere, argomentando, le proprie ipotesi nei confronti di quelle di altri gruppi. Il ruolo di mediatore nel processo di apprendimento, di solito svolto dall'insegnante, viene in parte devoluto al computer, l'insegnante si trasforma da depositario del sapere a guida per giungere a comprendere e superare l'errore.

Attività di questo tipo possono anche condurre ad approfondimenti di carattere storico: la geometria che studiamo ancora a scuola, soprattutto fino alla scuola media, è la geometria euclidea, può risultare interessante andare ad esaminare le definizioni che Euclide dà dei quadrilateri e confrontarle con quelle dei libri di testo per metterne in rilievo le differenze. Le definizioni che dava Euclide avevano lo scopo di determinare una partizione nell'insieme dei quadrilateri. La scelta che si fa oggi è quella di mettere a confronto le figure geometriche in modo da rilevarne analogie e differenze, pertanto vengono privilegiate le definizioni che danno luogo a relazioni di tipo inclusivo.

Elementi di prove di verifica

<u>Sono proprio deltoidi?</u>

Costruisci con Cabri il deltoide a partire dalle seguenti definizioni che si trovano sui libri di testo:

"Il deltoide è un quadrilatero che ha due coppie di lati consecutivi uguali".

"I deltoidi sono quadrilateri che hanno i lati consecutivi congruenti a due a due".

In ognuno dei due casi puoi affermare che viene definito univocamente un deltoide?

[Dalla prima definizione vengono fuori il deltoide propriamente detto e un quadrilatero avente tre lati congruenti, dalla seconda, poiché in un deltoide ci sono quattro coppie di lati consecutivi, si potrebbe ottenere, oltre al deltoide, anche … un rombo].

<u>Cosa c'è in più</u>

Verifica realizzando la costruzione con Cabri, se in questa definizione ci sono condizioni sovrabbondanti:

"Un triangolo si dice rettangolo se ha un angolo retto e due acuti".

<u>Tante definizioni per il rettangolo</u>

Costruisci con Cabri un rettangolo e, deformando il quadrilatero con il mouse, elenca le proprietà che rimangono invarianti durante il movimento. Verifica con Cabri quali di queste proprietà (prese singolarmente) individuano univocamente un rettangolo, cioè si possono considerare caratterizzanti. Per rispondere a questa domanda prova a costruire la figura geometrica corrispondente alla proprietà presa volta per volta in esame e controlla se si ottiene o no un rettangolo.
Verifica dopo se queste proprietà, opportunamente accoppiate, possono caratterizzare un rettangolo.

(*) tratto da:
- Carmela Milone, *"Valenza cognitiva delle funzioni di Cabri : ambiguità connesse a certe costruzioni con riga e compasso e a certe definizioni"*, Bollettino Cabrírrsae giugno 1999, N°20
- Elena Lanzi e Angela Pesci, *"Un'analisi a priori dell'utilizzo di Cabri nella scelta di proprietà per definire figure: il caso del rettangolo"*, Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Università di Parma 1997

Dal dialogo del "Menone" al teorema di Pitagora

Livello scolare: 2ª e 3ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure anche ricorrendo ad opportuni strumenti Riconoscere figure uguali Calcolare aree	Rapporto fra grandezze Teorema di Pitagora	<u>Lo spazio e le figure</u> Misurare Argomentare e congetturare Porsi e risolvere problemi	Lingua italiana Storia

Contesto
Figure geometriche come oggetti matematici

Commento
Il contesto nel quale si pone l'attività didattica è interno alla matematica e tratta del teorema di Pitagora. L'attenzione non è rivolta tanto all'applicazione del teorema, quanto a coglierne gli aspetti di generalità. Per questo motivo l'attività inizia con uno stralcio tratto dal dialogo del Menone di Platone, dove si osserva il passaggio da una soluzione di tipo particolare ad una soluzione, geometrica, di tipo generale.

Descrizione dell'attività
1. Il problema del "Menone"

Ai ragazzi viene il posto il seguente problema
" *Trova il lato di un quadrato di area doppia di quella di un quadrato dato. Puoi utilizzare un quadrato di lato 2 cm o 2 quadretti. Spiega con cura il tuo procedimento*".
Le possibili strategie sono di due tipi:

a) strategie numeriche per prove successive:
   " *2x2=4 area del primo quadrato, 4x2=8 area del secondo, ma non c'è un numero che moltiplicato per se stesso dia 8* [I ragazzi conoscono la definizione di radice quadrata, ma molto raramente investono questa conoscenza aritmetica in ambito geometrico.]
   Per risolvere il problema faccio alcune prove:
   Parto da un quadrato di lato 3. In questo caso la prima area è 9, la seconda deve essere 18, ma nessun numero moltiplicato per se stesso dà 18.
   Se raddoppio il lato [L'allieva considera il quadrato di lato 6] *risulta 36, ma 36 non è il doppio di 9.*
   [L'allieva cerca di disegnare una figura con 18 quadretti, ma si accorge che non è un quadrato].
   Secondo me questo problema è impossibile da risolvere perché facendo delle prove non risulta."

b) strategie numeriche per approssimazioni successive:
   "*2x2= 4 area del primo quadrato, l'area del secondo deve essere 8, allora prendo un quadrato di lato 4 e avrò 4x4= 16* [Il tutto accompagnato da disegni], *ma 16 è troppo, è il quadruplo. Allora provo con il lato di 3 perché è più grande di due e più piccolo di 4. Ma 3x3 fa 9 ed è ancora troppo. Però ci sono più vicino e potrei provare con 2,5….*"

c) strategie di tipo geometrico utilizzando il "ritaglio", senza però arrivare ad una soluzione del problema .

Discussione di bilancio sulle strategie emerse nella classe.

2. La voce di Platone

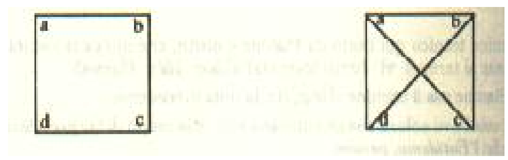
   Viene portato in classe il brano tratto dal Menone di Platone che tratta dello stesso problema. La voce storica oltre ad essere una suggestione per i ragazzi, rappresenta, in questo caso, anche un' importante indicazione metodologica per diversi motivi

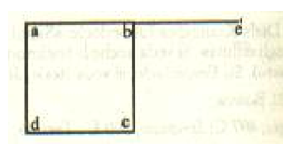
   - l'idea di insegnamento-apprendimento che emerge dal brano è di tipo interattivo: Socrate (che rappresenta il maestro) guida attraverso domande il ragionamento dello schiavo di Menone (che rappresenta l'allievo); inoltre la strategia messa in atto dallo schiavo corrisponde a strategie proposte dai ragazzi.
   - dal punto di vista del contenuto matematico il brano media il passaggio da soluzioni numeriche di tipo particolare a soluzioni geometriche di carattere generale.

Riportiamo una sintesi del brano citato:

Prima fase: il problema

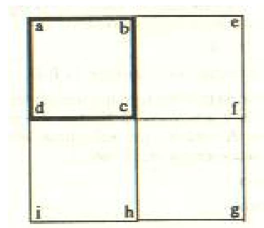
Socrate:... il lato di questo ABCD è di due piedi, quanto sarà quello di superficie doppia?
Schiavo : *evidentemente il doppio, Socrate!*
Socrate: tu dici che da questo lato si genererà la superficie di otto piedi, se i quattro lati sono uguali?
<u>Schiavo: Sì</u>
[viene costruito il quadrato]
Socrate: Il quadruplo è dunque quanto il doppio?
Schiavo: *No, per Zeus*

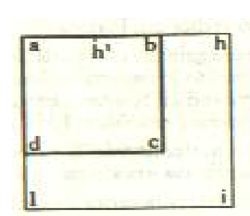




Seconda fase : un altro tentativo

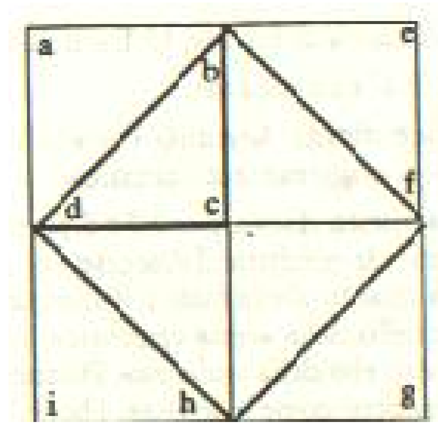
Schiavo: allora il lato sarà di tre piedi [più grande di due e più piccolo di quattro]
Socrate: Ma tre volte tre piedi quanto fa?
Schiavo: Nove
Socrate: Dunque neppure dal lato di tre piedi si genera la superficie di otto piedi.
Schiavo: No certo
Socrate: Da quale lato allora? Prova a dircelo con esattezza.
Schiavo: Per Zeus, non lo so!
….
Socrate: Vedi Menone, quanto è progredito ormai? Prima non sapeva quale fosse il quadrato di otto piedi e neppure adesso lo sa, ma allora credeva di saperlo e non si considerava in difficoltà … Ormai invece si considera in difficoltà e poiché non sa, non crede neppure di sapere





Terza fase: la soluzione

Socrate: Questa linea, condotta da un angolo all’altro in ciascuno di questi quadrati, non divide in due ciascuno di essi?
chiavo: Sì
…….
Socrate:… *sicchè, se il suo nome è diagonale, la superficie doppia, come dici tu, schiavo di Menone, sarà generata dalla diagonale*



3. Verso il Teorema di Pitagora

- Si pone il seguente problema:

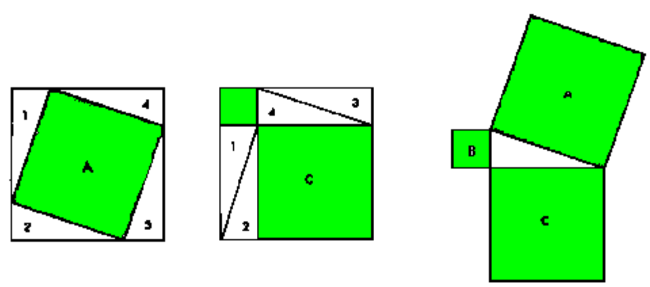
“ *Abbiamo un triangolo isoscele rettangolo (mezzo quadrato) di lato l. Costruiamo i quadrati sui lati del triangolo. Che cosa possiamo dire di questi tre quadrati? Che relazione hanno tra di loro*?”
I ragazzi, in genere, riconoscono le equivalenze:
“ Possiamo dire che A e B sono uguali e sono il doppio del triangolo, mentre C è il quadruplo del triangolo, come ci ha insegnato Socrate, ed è il doppio di A e B.”

- Si pone il problema di generalizzare la relazione a triangoli rettangoli di cateti di lunghezza diversa: “ *Prova a vedere se la relazione scoperta vale anche per un triangolo rettangolo di cateti 3 e 4*”.

La scelta di questi valori numerici, terna pitagorica, è giustificata dalla semplicità di rappresentazione della situazione sulla carta a quadretti. I ragazzi, con strategie diverse, scoprono che la relazione funziona anche in questo caso.

4. Il Teorema di Pitagora

Si pone il problema di generalizzare la relazione scoperta a tutti i triangoli rettangoli e per questo si presenta agli allievi la seguente visualizzazione chiedendo di descrivere a parole la relazione di equivalenza soggiacente e di esprimerla tramite un enunciato generale.
Si arriva ad osservare che “ *Il quadrato grande è uguale a C+ i 4 triangoli oppure ad A+B + i 4 triangoli e allora A+B=C, come nei casi precedenti*”.



L’insegnante dovrà curare il passaggio verso l’enunciato che potrà essere espresso sia in forma condizionale, sia in forma dichiarativa:
“ In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull’ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti” (forma dichiarativa);
“ Se un triangolo è rettangolo, allora il quadrato costruito sull’ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti” (forma condizionale).
Si propone una discussione sul confronto dei due enunciati, i quali pur esprimendo lo stesso teorema, esplicitano in modo diverso il suo contenuto. Da punto di vista dei ragazzi il senso

“psicologico” dei due enunciati è diverso: la condizionalità espressa nel secondo caso apre la strada alla implicazione contronominale: e se il triangolo non fosse rettangolo?
L’insegnante deve rendersi conto che aver enunciato l’implicazione diretta non autorizza ad utilizzare l’implicazione inversa *“Se in un triangolo il quadrato costruito sul lato maggiore è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, allora il triangolo è rettangolo”*.
Essa costituisce un altro teorema.

Alla ricerca della città perduta

Livello scolare: 2ª-3ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riprodurre in scala Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti	Omotetie, similitudini Rapporto tra grandezze Grandezze direttamente proporzionali	Lo spazio e le figure Le relazioni Misurare Argomentare e congetturare	Geografia

Contesto
Carte geografiche

Commento
L'esempio è una situazione problematica che introduce l'allievo al concetto di similitudine tra figure. La situazione contestualizza tale nozione alle carte geografiche. La risoluzione del problema in tale contesto avviene perciò in modo naturale a partire dalle conoscenze intuitive che l'allievo ha maturato relativamente ad esso. L'attività proposta porta quindi l'allievo a costruire le conoscenze fondamentali relative alle figure simili. L'insegnante alla fine presenta il sapere così costruito in modo decontestualizzato.
Segue il testo della situazione problematica e le attività proposte agli allievi. L'attività risulterà particolarmente efficace se l'insegnante stimolerà gli allievi a discutere le soluzioni proposte (cfr. discussione matematica).

Descrizione dell'attività
L'immagine che vedete nella figura 1 è una parte della carta della Francia: la scala è 1 : 1 000 000. Su di essa abbiamo evidenziato tre città - Lyon, Grenoble e St.-Étienne - che formano i vertici di un triangolo scaleno. Queste tre città si trovano tutte nella Francia del sud-est: Lyon appartiene al dipartimento di Rhône, St.-Étienne a quello della Loire e Grenoble a quello d'Isère.

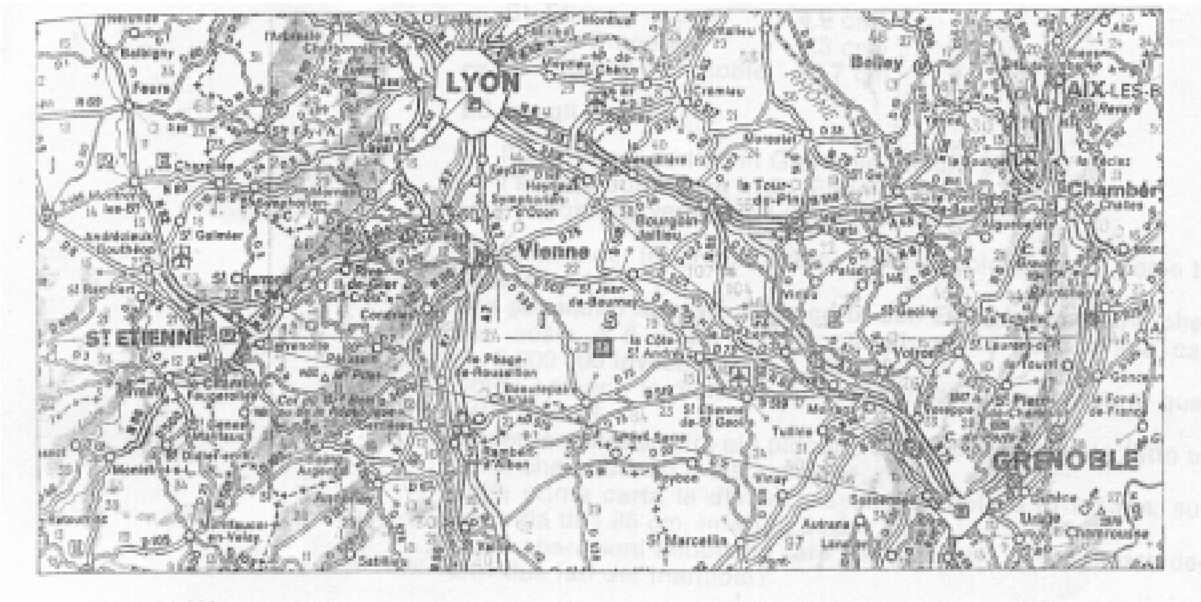
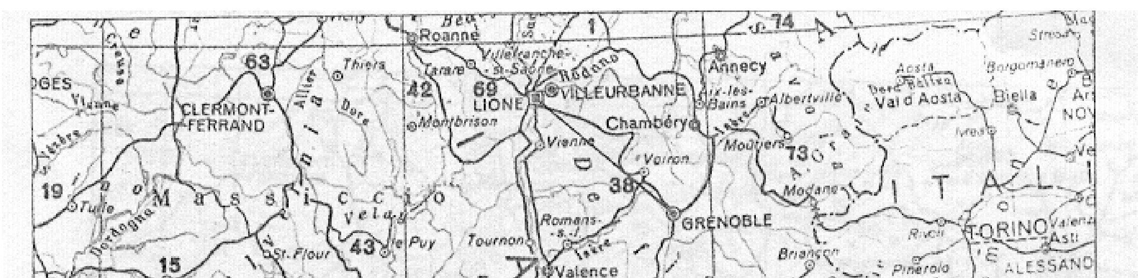


Fig.1

Di esse la meno famosa è forse St.- Étienne. Probabilmente per questo motivo non l'abbiamo più ritrovata nella carta dell'Europa all'interno di un atlante (Fig. 2).



[redacted]

Fig.2

In questa seconda carta la scala è 1 : 5 000 000. Il problema che abbiamo di fronte è quello di collocare anche su questa carta St.- Étienne conoscendo la scala e la posizione di Lyon e Grenoble.
Come fare? Abbiamo detto che le tre città formano un triangolo scaleno: dovremo perciò costruire sulla seconda carta un triangolo più piccolo, ma con le stesse caratteristiche dei primo. Per prima cosa dobbiamo effettuare delle misurazioni sul triangolo noto.
Iniziamo dalla lunghezza dei lati:

- St.- Étienne - Lyon 4.9 cm
- Lyon - Grenoble 9.3 cm
- St.- Étienne - Grenoble 10.7 cm

Ed ora gli angoli:

- l'angolo coi vertice in Grenoble misura 27°
- l'angolo coi vertice in St.- Étienne misura 60° -
- l'angolo coi vertice in Lyon misura 93°

La somma dei tre angoli interni dei triangolo ci dà - come ben sapete – 180°.

Ora possiamo lavorare sulla carta dell'Europa: sappiamo che la sua scala è 5 volte più piccola di quella della prima carta (1 : 5 000 000 invece che 1 : 1 000 000).
Come saranno le distanze sulla seconda carta rispetto a quelle della prima?
Evidentemente 5 volte più piccole. Controlliamo questo fatto con i dati che abbiamo a disposizione.
Sulla prima carta la distanza Lyon-Grenoble è di 9.3 cm; sulla seconda di 1.86 cm. Infatti 9.3 : 5 = 1.86.
Quali operazioni dobbiamo fare per calcolare la lunghezza degli altri due lati dei triangolo?

4,9 : 5 = 0.98
10.7 : 5 = 2.14

Ora conosciamo gli altri due lati del triangolo piccolo. Per costruirlo sulla carta dell'Europa dobbiamo ancora tenere conto degli angoli.
Dobbiamo variarli rispetto al triangolo della prima carta?
Ragionate un po': la direzione da prendere per andare da una città non può variare passando da una carta all'altra! Quindi gli angoli **devono** restare uguali.
Ora abbiamo tutti gli elementi necessari per costruire il secondo triangolo (Fig. 3).

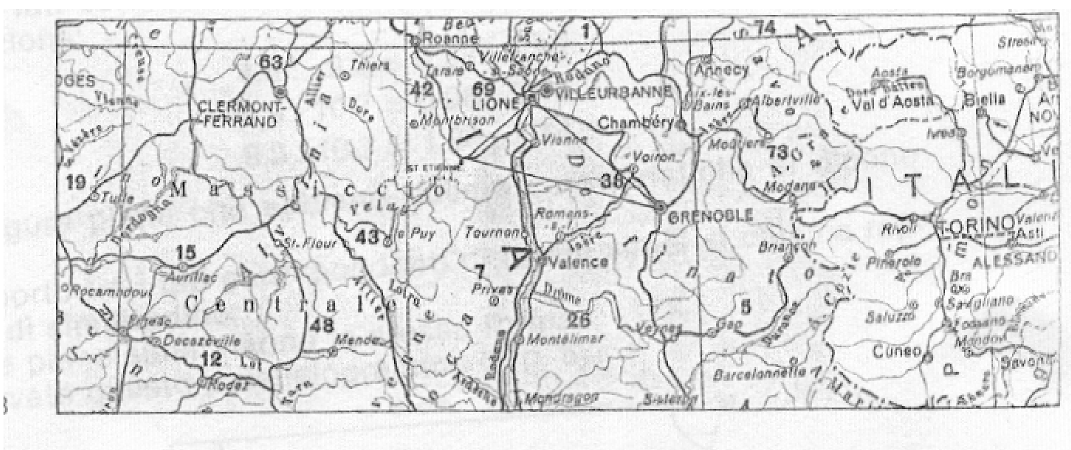


Fig.3

Riassumiamo le caratteristiche di questo secondo triangolo:

Lunghezza lati	**Ampiezza angoli**
St.- Étienne-Lyon 0.98 cm Lyon-Grenoble 1.86 cm St.- Étienne-Grenoble 2.14 cm	angolo col vertice in Grenoble 27° angolo col vertice in St.- Étienne 60° angolo col vertice in Lyon 93°

Bene: il nostro problema è risolto, ma ora soffermiamoci a considerare i due triangoli e le loro caratteristiche (Fig. 4)..

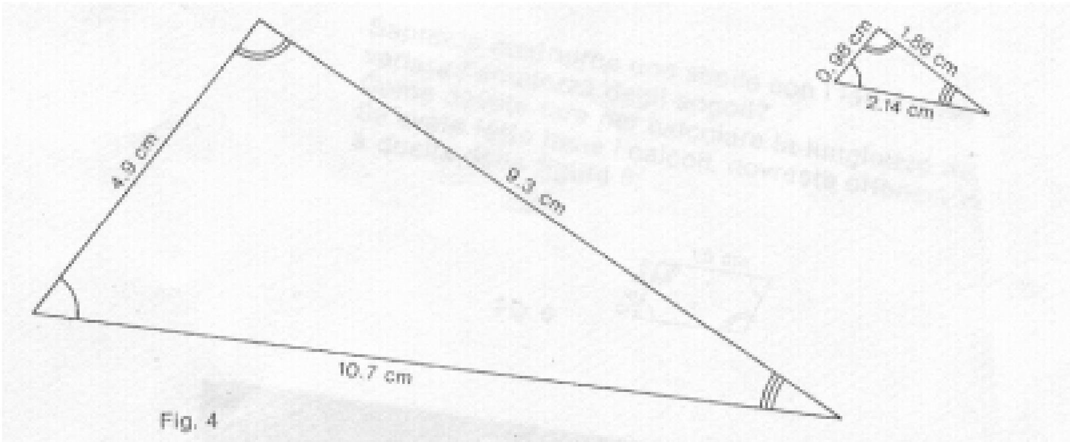


Fig.4

Gli angoli sono uguali, mentre la lunghezza dei lati dei triangolo maggiore è 5 volte più grande di quella dei lati dei triangolo minore. Se calcoliamo il rapporto tra il lato maggiore e quello minore dei primo triangolo otteniamo:

10,7 / 4,9 ~ 2,1836734

Quanto otteniamo calcolando lo stesso rapporto per il secondo triangolo?

2,14 / 0,98 ~ 2.1836734 0.98

La stessa verifica possiamo farla con gli altri rapporti tra i lati. Possiamo quindi dire che i due triangoli hanno costante il rapporto tra i lati corrispondenti e quindi che i loro lati formano una proporzione:

4,9 : 9,3 = 0,98 : 1,86
4,9 : 10,7 = 0,98 : 2,14
9,3 . 10,7 = 1,86 : 2,14

Due figure piane che abbiano queste caratteristiche si dicono **simili**.
Il rapporto tra i lati corrispondenti di figure simili si chiama **rapporto di similitudine.**
Figure piane simili hanno la stessa forma.

NUCLEO: Le relazioni

Introduzione

La matematica concorre alla formazione delle competenze del cittadino. Il nucleo tematico *Le relazioni* contribuisce in modo specifico alla costruzione delle seguenti competenze trasversali:

- *generalizzare*
  - individuare regolarità e proprietà in contesti diversi;
  - astrarre caratteristiche generali e trasferirle in contesti nuovi;
- *inventare*
  - costruire "oggetti" anche simbolici rispondenti a determinate proprietà;
- *porre in relazione*
  - stabilire legami tra fatti, dati, termini;
- *rappresentare*
  - scegliere forme di presentazione simbolica per rendere evidenti relazioni esistenti tra fatti, dati, termini;
  - operare in situazioni rappresentate.

Si tratta di competenze da acquisire nel lungo periodo, che mettono in gioco sia la funzione simbolica del linguaggio matematico, sia il concetto unificante di relazione e di funzione, cruciale nell'edificio matematico.

Con la funzione simbolica del linguaggio matematico i bambini hanno a che fare fin dal primo anno della scuola elementare, ad esempio quando imparano a condensare in un'espressione come 3+2 = 5 una serie di esperienze concrete (ad es., di conteggio, di ordinamento, di aumenti di grandezze: si vedano gli esempi nel Nucleo *Il numero*) e di espressioni linguistiche che tali esperienze descrivono. In tal modo gli allievi acquisiscono via via il *senso* e il *significato* delle espressioni simboliche e il rapporto di queste con le nozioni che sintetizzano (ad es., che acquistando due quaderni, uno al prezzo di 3 euro, uno al prezzo di 2 euro, si spendono 5 euro; oppure che se Pierino ha nel salvadanaio 3 euro e gliene regalano 2 ne possiede infine 5). La funzione simbolica del linguaggio matematico mette in moto rilevanti dinamiche di pensiero negli allievi, ad es. quelle connesse con le strutture additive dei numeri naturali in opportuni campi di esperienza, nei primi anni della scuola elementare, oppure quelle necessarie per tradurre in equazione una situazione problematica. Un altro aspetto rilevante connesso con la funzione simbolica del linguaggio aritmetico e algebrico è il fatto che esso sintetizza nei suoi segni sia processi computazionali sia oggetti astratti**;** ad es., la scrittura (3+2) può essere concepita in due modi: operativamente, cioè come processo (aggiungi 2 a 3), e strutturalmente, cioè come oggetto (il numero ottenuto aggiungendo 2 a 3). L'apprendimento avviene spesso in dialettica tra concezioni operative e strutturali della stessa nozione: occorre quindi presentare situazioni didattiche e interventi opportuni dell'insegnante che evidenzino i due aspetti. Si noti che tale dialettica è alla base del processo di messa in equazione di una situazione, in cui si immagina di dovere operare con una quantità ignota come se fosse nota, e di risoluzione della medesima, in cui lo stesso processo viene letto all'inverso per trovare il numero ignoto (incognita).

La nozione di relazione (e il caso particolare di funzione) è un concetto basilare sia in matematica sia per l'apprendimento degli allievi dai sei ai quattordici anni: si tratta infatti di un concetto unificante che permette di sintetizzare molti altri concetti matematici e condensare varie esperienze didatticamente significative. In sintesi, si può considerare l'apprendimento dall'aritmetica all'algebra come un unico itinerario, che parte con le strutture additive (problemi additivi e sottrattivi), prosegue con quelle moltiplicative (problemi di moltiplicazione e divisione), e giunge a una prima sintesi. Essa è rappresentata dalla classe dei problemi moltiplicativi, quando cioè si giunge a comprendere una tabella come la seguente:

COSTO	?	18	54	?	72	?	324	…
N° PEZZI	1	3	?	25	?	150	?	…

Il risolvere i vari punti interrogativi fornisce una prima sintesi di un'intera classe di problemi, che sono rappresentati dalla tabella risolta, ovvero dalla relazione:

$$\text{COSTO} = (\text{N° PEZZI}) \times 6 \ \text{ euro}$$

Tale relazione trova un'ulteriore rappresentazione e sintesi rappresentandola graficamente in un piano cartesiano con il numero dei pezzi in ascisse e i prezzi (in euro) in ordinate: il grafico sarà costituito dai punti a coordinata intera non negativa della funzione di equazione:

$$y = 6x$$

Questa è un'ulteriore sintesi, successiva alla classe dei problemi moltiplicativi; si tratta infatti della nozione di proporzionalità diretta, ovvero di linearità. Dire che la variabile y è direttamente proporzionale alla x o che la y è funzione lineare della x significa solo usare due linguaggi diversi per concettualizzare lo stesso fenomeno. Il primo linguaggio è più arcaico, il secondo è più moderno. Comunque lo si dica, il concetto di dipendenza lineare permette una notevole economia di pensiero, in quanto permette di affrontare in modo unitario tutti i problemi il cui modello sia appunto quello lineare, senza perdersi in obsoleti quanto indigesti algoritmi per la risoluzione delle proporzioni.
Il cammino dai problemi additivi alle funzioni lineari costituisce un po' la sintesi di gran parte del lavoro aritmetico e algebrico nelle scuole elementare e media. A questo devono mirare gli insegnanti di entrambi le scuole.
Naturalmente il cammino va perseguito con le opportune gradualità e anche con le necessarie attenzioni alle difficoltà che gli allievi incontrano. Si tenga presente però che è necessario avere presente questa unitarietà per evitare da un lato di fornire ai bambini una serie infinita di casi tutti apparentemente diversi tra di loro, dall'altro di addestrare i ragazzi alla manipolazione puramente sintattica di formule avulse da ogni significato.
Facciamo un esempio per meglio capire (1); consideriamo il seguente problema pratico: sono le 14.00 e ho già percorso 6 km in un'ora e mezza. Mi rimangono 11 km da percorrere. A che ora arriverò?
Innanzitutto, se voglio calcolare la mia ora d'arrivo, devo supporre di camminare tutto il tempo alla stessa velocità, senza fare soste. In altri termini, prendo in considerazione non un movimento reale, ma un movimento regolare che ne costituisca un'approssimazione ragionevole. Si dice che facendo ciò si *modellizza* la situazione reale, per creare un terreno al quale si possa applicare il calcolo.
Detto questo, il problema si riduce al calcolo del tempo che impiegherei per percorrere 11 km. Dispongo dei dati riassunti in *Tab. 1*

tempo	1 h _	?
distanza	6 km	11 km

Tab. 1

(1) Da "La Matematica dalla scuola materna alla maturità": 7 Algebra, ed. italina a cura di L. Grugnetti e V. Villani, Bologna: Pitagora, 1999

Un passo abbastanza spontaneo, e che non è algebrico, consiste nel dirsi che se si percorrono 6 km in 1 h _, allora se ne percorrono 2 in _ h. Dunque per percorrere 11 km, serviranno prima 5 volte _ h per farne 10, poi _ h per il rimanente kilometro. Serviranno, quindi, in tutto 2 h _. La *Tab.2* completa la *Tab. 1* mostrando i valori particolari per i quali siamo passati.

tempo	1 h _	_ h	2 h _	_ h	2 h _
distanze	6 km	2 km	10 km	1 km	11 km

Tab. 2

La soluzione al problema si ottiene aggiungendo 2 h _ a 14 h, che dà le 16.45. Ritornando alla situazione reale poteri pensare che una mezz'ora di pausa non sarà troppa, e quindi annuncerò il mio arrivo per le 17.15.
Supponiamo, ora, di dovere risolvere un problema analogo, ma con numeri molto meno maneggevoli, per esempio quello proposto dalla *Tab. 3* per un qualunque corpo mobile (non necessariamente una persona che cammini).

tempo	2,83 h	?
distanza	9,7 km	27,2 km

Tab. 3

Qui l'algebra può intervenire ad un primo livello. Ci si accorge che nelle tabelle di proporzionalità come le *Tab. 1, 2, 3*, il rapporto fra due elementi di una stessa riga è uguale al rapporto fra gli elementi corrispondenti di un'altra riga… Si può generalizzare la questione e cercare di stabilire una formula che dia comodamente il tempo che impiegherà il corpo per percorrere qualunque distanza.

Il cammino continuo dall'aritmetica all'algebra qui delineato non avviene senza ostacoli naturalmente, come illustra la seguente citazione di G.Vergnaud: "L'aritmetica consiste nel ricercare incognite intermediarie, scegliere in maniera intuitiva i dati e le operazioni che permettono di calcolare queste incognite intermediarie, fare queste in un ordine conveniente, che permetta di controllare il senso della successione delle operazioni effettuate.
La soluzione algebrica di un problema di aritmetica passa per tutt'altro cammino: l'astrazione e la scelta delle relazioni pertinenti tra incognite e dati, la scrittura formale di queste relazioni, il trattamento quasi automatico di queste espressioni formali. Al controllo delle successioni delle operazioni fatto attraverso il loro significato, si sostituisce il controllo più astratto, attraverso la necessità delle regole di manipolazione dei significati algebrici e attraverso l'adeguatezza della modellizzazione iniziale (traduzione in equazioni).
Esiste, dunque, *una rottura epistemologica* tra aritmetica ed algebra: l'approccio aritmetico ai problemi è operativo, procedurale, collocato nel tempo; quello algebrico è sistemico, relazionale, atemporale."
D'altra parte, moltissimi sono gli aspetti didattici che possono favorire il superamento di tale rottura, soprattutto con un accorto intervento didattico dell'insegnante. Diamo qui di seguito alcuni cenni per possibili interventi in questo senso. Gli esempi sono in gran parte tratti dal volume *NCTM – Standards 2000 – ottobre 1998 – I.R.R.E. Emilia Romagna* (Cap. 3: Panoramica degli standard per i livelli pre-K-12), reperibile in rete al seguente sito: www.irreer.it
Un tipico intervento riguarda l'identificazione di regolarità, il riconoscimento dello stesso schema in forme differenti e l'uso di modelli per prevedere valori. Per esempio "rosso-blu-blu-rosso-blu-blu-rosso-blu-blu…" è lo stesso che "ABBABBABB…" e il dodicesimo elemento sarà blu.
Modelli emersi da semplici situazioni introducono funzioni e successioni (quindi relazioni). Per esempio, se un giocattolo costa 2 euro, quanto spendo se compro un giocattolo? Due giocattoli? Tre giocattoli, n giocattoli? Il lavoro successivo con modelli crescenti (quali 1,3,6,10,15, …) e con schemi ripetuti (quali1, 1, 3, 1, 1, 3, …) pone ulteriori fondamenti per queste nozioni.

Come altro importante passo nel lavoro iniziale con i modelli, gli studenti spesso descrivono le regolarità a parole piuttosto che con i simboli matematici. Uno scopo dell'istruzione matematica scolastica è quello di basarsi su questa verbalizzazione e fornire agli studenti un'esperienza sufficiente che li faccia trovare a proprio agio e li aiuti a utilizzare con scioltezza i simboli matematici per rappresentare generalizzazioni.
La nozione di incognita appare molto presto nell'insegnamento primario, da quando si propone ai bambini di trovare la soluzione (una soluzione …) di un problema. Non è opportuno, a questo stadio, formalizzare l'idea di incognita. È buona cosa, invece, che la maggior parte dei problemi rimandino a situazioni concrete. Si propongono a volte agli allievi delle vere e proprie equazioni, nelle quali l'incognita appare sotto forma di un punto interrogativo.
I primi approcci alle funzioni e alla loro rappresentazione grafica "fanno la loro comparsa nella scuola primaria, per esempio sotto forma di un rilevamento di temperature ora dopo ora, o l'altezza di una pianta che cresce giorno per giorno, o sotto forma di una tabella di proporzionalità. Si riconoscono in ogni caso gli elementi costitutivi di una funzione. Così in una tabella o in un grafico di temperature, l'ora della giornata è la variabile indipendente e ad ogni ora corrisponde un valore della temperatura, variabile dipendente. Non bisogna certo formalizzare la funzione a questo stadio. Ma queste funzioni che esprimono delle situazioni concrete, preparano bene gli allievi ad incontrare più tardi le funzioni scritte in forma simbolica.
La rappresentazione simbolica di relazioni quantitative, è quindi, l'essenza dell'algebra. Il suo potere di compressione permette di esprimere sinteticamente idee matematiche complesse, mentre i simboli e le espressioni agevolano la ricerca e la scoperta della soluzione.
Verso la fine della scuola primaria si imparano anche alcune forme che danno lunghezze, aree, o volumi di oggetti geometrici. Queste formule esprimono, in effetti, sotto forma simbolica delle funzioni in più variabili. Bisogna guardarsi dall'insistere troppo su queste formule, poiché esse rischiano di nascondere cose essenziali: la maturazione delle idee di lunghezza, area e volume, a partire dal riporto dell'unità, affrontando le difficoltà che queste attività comportano.
In altri termini, è meglio insistere, piuttosto che sulle formule e le loro applicazioni, sulla loro costruzione e sull'idea di misura.
Un altro esempio di difficoltà concettuale nella comprensione della rappresentazione simbolica di relazioni quantitative riguarda la nozione di eguaglianza. Il segno uguale può essere percepito in modi assai diversi. Per esempio, come conseguenza dell'ampia esperienza, con l'uso del segno uguale nel calcolo aritmetico, gli studenti percepiscono il segno di uguale in modo operativo, cioè come un segnale per calcolare. Prima della scuola secondaria, comunque, gli studenti devono imparare a considerare il segno di uguale come un simbolo di equivalenza e di equilibrio. In generale, se gli studenti sono invitati a impegnarsi ampiamente con la manipolazione simbolica prima che abbiano sviluppato una solida base concettuale per il loro lavoro, non potranno fare altro che manipolazioni meccaniche. La base per un significativo lavoro con la notazione simbolica deve essere elaborata in un lungo periodo di tempo, cominciando dalle classi elementari, ben prima dei livelli medi o secondari, quando si può incontrare la materia formalmente denominata "algebra".
Quando i bambini lavorano con i numeri, spesso adottano strategie personali che sono di natura algebrica. L'insegnante può basarsi su queste tendenze naturali in modi adatti. Per esempio un bambino può accorgersi che "4 + 5 = 4 + 4 + 1" e "5 + 6 = 5 + 5 + 1" e così via. Spiegando la sua osservazione a un altro bambino, lo studente potrebbe disegnare la seguente figura:

L'uso di una figura come esempio dimostrativo e non come registrazione di un fatto isolato rende algebrica la rappresentazione figurata. Oppure il bambino può semplicemente dire "doppio più 1". Poiché questa affermazione esprime una generalizzazione, essa è algebrica.

Le competenze nell'ambito di modelli, funzioni e algebra si sviluppano, dunque, in complessità durante gli anni. In modo analogo, il pensiero degli studenti in questi ambiti dovrebbe evolversi e maturare attraverso una dialettica che prevede il continuo passaggio tra formule, come strumenti di pensiero e formule, come depositi di conoscenza.

Come si vede sono da evitarsi, perché inutili, gli addestramenti alle pure manipolazioni sintattiche delle formule: gli automatismi necessari non sono infatti moltissimi a questi livelli di età e comunque le ricerche in merito dimostrano che i feroci addestramenti alla manipolazione delle espressioni (esplicitamente sconsigliati nel curriculo proposto dall'UMI) non sortiscono alcun effetto nella comprensione dei concetti da parte degli allievi e nelle loro capacità di risolvere problemi.

Indice delle attività
Nucleo Le relazioni

Livello scolare	**Titolo**	**Contesto**	**Collegamenti Esterni**
1ª elementare	Gli amici del 5	Numeri naturali da 0 a 5.	
2ª elementare	Sopra o sotto il pelo dell'acqua	Classificazione di oggetti in base al materiale, alla forma, al volume, al peso, …	Scienze Tecnologia
3ª elementare	Le ombre	Relazioni tra luce, forme, dimensioni di oggetti e la loro ombra.	Scienze
4ª elementare	Le biciclette VELOX	Compra-vendita: Relazione prezzo/quantità.	
4ª - 5ª elementare	Diversi tra confini uguali	Rapporto tra le nozioni di area e perimetro di un poligono.	
1ª media	I figlio del re e il messaggero	Racconto di due storie parallele ed interagenti, in cui il rapporto spazio/tempo gioca un ruolo primario.	Lingua italiana
2ª media	Il numero … di ferro	Relazione tra peso e volume di un oggetto.	Fisica
3ª media	Quante camicie usava Diofanto?	I numeri interi.	
3ª media	Modellizzazione del fenomeno fisico delle molle	Modellizzazione di un fenomeno fisico	Scienze sperimentali
3ª media	Classificazione degli insiemi numerici	Gli insiemi numerici.	

SCUOLA ELEMENTARE

Gli amici del cinque

Livello scolare: 1ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scoprire semplici relazioni fra numeri a partire da esperienze concrete. Utilizzare semplici rappresentazioni per esprimere relazioni.	Semplici relazioni tra numeri naturali.	<u>Le relazioni</u> Il numero Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
L’attività consiste nell’individuazione di tutti i modi in cui si può “comporre o scomporre” le coppie additive del numero cinque.
Questa attività si colloca all’inizio dell’anno scolastico ed in contemporaneità con attività che prevedono la conoscenza della filastrocca dei numeri (contare per contare), la capacità di leggere e di scrivere i numeri entro il 5 e molto tempo prima dell’introduzione dell’operazione di addizione.
È necessario che i bambini, in una fase preliminare, si siano esercitati ad associare il nome dei numeri da zero a cinque, alla quantità delle dita della mano mostrate dall’insegnante. L’attività si deve svolgere “velocemente”, in modo da inibire il conteggio uno a uno delle dita.

Descrizione dell’attività
L’attività si realizza in tre fasi.
Prima fase
È caratterizzata dall’operatività.
L’insegnante mostra una mano, dalla parte del palmo, tenendo alcune dita sollevate e chiede ai bambini: “*Quante sono le dita abbassate*?”. Poi l’attività viene ripetuta mostrando la mano dalla parte del dorso. Mostrando successivamente la mano dall’altro lato si consente la verifica della correttezza delle risposte.
I bambini a turno riproducono il gioco.
In un secondo momento l’insegnante ripete l’attività utilizzando degli oggetti piccoli (che possano essere racchiusi nella mano di un bambino), che preleva da un gruppo di cinque. L’insegnante mostra la mano chiusa e dichiara il numero degli oggetti prelevati e chiede: “*Quanti oggetti mi mancano per averne cinque*?”.
Ripete successivamente l’attività dichiarando il numero degli oggetti non presi e chiedendo quanti oggetti ha in mano.
In entrambi i casi la correttezza delle risposte viene verificata con il conteggio degli oggetti.
I bambini a turno riproducono il gioco.
Seconda fase
È caratterizzata dalla rappresentazione dell’attività.

All’inizio le rappresentazioni sono di tipo spontaneo e successivamente proposte dall’insegnante, in particolare mediante il disegno di gettoni di due tipi.

Terza fase
È caratterizzata dalla ricerca di regolarità.
L’insegnante pone la seguente situazione problema: “*Come si può fare per essere sicuri di aver trovato tutti i modi possibili per formare “cinque” utilizzando gettoni di due tipi?”*.
L’insegnante conduce l’attività di risoluzione a livello collettivo. Fa esplicitare le ipotesi risolutive individuali (“Quanti modi hai trovato?” “Quali?” …), le registra alla lavagna in modo da facilitare il confronto delle risposte degli alunni, richiede di argomentare sull’analogia o la differenza delle soluzioni.
L’insegnante a questo punto formula un nuovo problema all’interno della situazione problema: *“Come possiamo disporre i gettoni, per essere sicuri di avere rappresentato tutti i casi e ogni caso una volta soltanto?”*.
L’insegnante conduce alla seguente rappresentazione ordinata

– – – – –
– – – – –
– – – – –
– – – – –
– – – – –

Successivamente l’insegnante cerca di far emergere la coppia 0 e 5 e “istituzionalizza” il risultato dell’attività, attraverso lo schema seguente e fa notare che sono state trovate sei “coppie amiche” del 5.

	Numero gettoni neri	Numero gettoni bianchi
– – – – –	0	5
– – – – –	1	4
– – – – –	2	3
– – – – –	3	2
– – – – –	4	1
– – – – –	5	0

Numero delle coppie 6.

L’esperienza deve essere ripetuta con altri numeri, ripartendo dal numero 10. In tal modo si potrà arrivare a cogliere la regolarità delle rappresentazioni e il legame tra il numero di partenza e il numero delle “coppie amiche”.

Nell’attività si individuano i seguenti nodi:
- il passaggio da una situazione riferita al proprio corpo, (o a quello dell’insegnante), ad una situazione rappresentata mediante oggetti, simboli iconici ed infine simboli numerici;
- l’uso della rappresentazione come generatrice di un nuovo problema, all’interno della situazione problematica più generale;
- la ricerca di un metodo sistematico nell’esplorazione di situazioni problematiche, a partire da tentativi;
- il riconoscimento dello zero come numero;
- il riconoscimento, nella situazione concreta, della non commutatività delle coppie.

Possibili sviluppi
- Addizione in **N**;
- avvio alla sottrazione in **N** a partire dall'individuazione del complemento ad un numero dato;
- proprietà commutativa dell'addizione.

Sopra o sotto il pelo dell'acqua

Livello scolare: 2ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni concrete classificare oggetti in base a una data proprietà. Utilizzare semplici rappresentazioni per esprimere relazioni.	Relazioni e prime loro rappresentazioni	<u>Le relazioni</u> Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi Misura	Scienze

Contesto
L'attività proposta consiste nel classificare oggetti rispetto alla proprietà di galleggiamento.

Descrizione dell'attività
A gruppi di allievi si consegnano alcuni oggetti di forma, di grandezza e di materiali diversi. Si consiglia di utilizzare polistirolo, vetro e plastilina, ad esempio almeno tre oggetti di ognuno dei materiali prescelti: due sferici di diversa dimensione ed uno concavo.
Si chiede ai gruppi di classificare gli oggetti in base ad una proprietà individuata: possono emergere classificazioni in funzione della forma (sferica – concava), del volume (grande – piccolo), del materiale, del peso (pesante – leggero), ma anche del colore o di altre caratteristiche.
Questo momento iniziale, fortemente operativo e manipolatorio, crea il contesto nel quale si pone il problema.

Si chiede ai bambini di ipotizzare quali tra gli oggetti consegnati possono galleggiare nell'acqua e perché; in tal modo si sollecita la selezione dei dati significativi e l'esclusione di quelli non utili, ad esempio il colore.
Dopo aver registrato le ipotesi si passa alla verifica empirica: si consegna ad ogni gruppo una vaschetta possibilmente trasparente piena d'acqua. Ogni gruppo effettua prove ed osserva; poi si passa ad una verifica collettiva sistematica.

Si posano sull'acqua tre oggetti sferici di grandezza approssimativamente uguale, ma di materiale diverso: alcuni galleggiano (polistirolo), altri no (vetro, plastilina).
Si chiede ai bambini di formulare qualche congettura: “Il rimanere a galla o meno dipende dal materiale? Perché ?”.

Si posano sull'acqua oggetti sferici dello stesso materiale, ma di grandezza diversa: “Il rimanere a galla o meno dipende dalla grandezza? Perché ?”.

Si posano sull'acqua oggetti dello stesso materiale e della stessa grandezza, ma di forma diversa (sferica e concava) e si osserva il loro comportamento: alcuni oggetti galleggiano indipendentemente dalla forma (polistirolo), altri galleggiano solo se hanno una forma adeguatamente concava, altrimenti vanno a fondo: "Il rimanere a galla o meno dipende dalla forma? Perché ?".
Dal punto di vista metodologico si può gestire questa attività complessa attraverso l'uso di una tabella, che offre agli insegnanti l'opportunità di rendere evidente la struttura dell'attività e i risultati ad essa connessi.
Si procede, dunque, attraverso tre fasi distinte, in ognuna delle quali si fa variare una sola caratteristica e si tengono fisse le altre due.
Si riportano i possibili risultati di un'esperienza.

Fase	**Materiale**	**Grandezza**	**Forma**	**RISULTATO**
1)	Variabile	Fissa	Fissa	Tabella a
2)	Fisso	Variabile	Fissa	Tabelle b
3)	Fisso	Fissa	Variabile	Tabelle c

Il risultato della prima fase può essere sintetizzato nella tabella a:

Tab. a

Materiale	**Cosa succede ?**
Polistirolo	Galleggia
Vetro	Non galleggia
Plastilina	Non galleggia

Il risultato della seconda fase può essere sintetizzato nelle tabelle b:

Sfere di polistirolo Tab. b1

Grandezza	**Cosa succede ?**
Piccola	Galleggia
Media	Galleggia
Grande	Galleggia

Sfere di vetro Tab. b2

Grandezza	**Cosa succede ?**
Piccola	Non galleggia
Media	Non galleggia
Grande	Non galleggia

Sfere di plastilina Tab. b3

Grandezza	**Cosa succede ?**
Piccola	Non galleggia
Media	Non galleggia
Grande	Non galleggia

Il risultato della terza fase può essere sintetizzato nelle tabelle c:

Oggetti di polistirolo Tab. c1

Forma	**Cosa succede ?**
Sferica	Galleggia
Concava	Galleggia

Oggetti di vetro Tab. c2

forma	Cosa succede ?
Sferica	Non galleggia
Concava	Galleggia *

* La possibilità che il vetro galleggi dipende ovviamente dall'adeguatezza della concavità. Per la gestione didattica dell'esperienza è opportuno che l'insegnante, in questa fase, scelga un contenitore di vetro che possa galleggiare.

Oggetti di plastilina Tab. c3

forma	Cosa succede ?
Sferica	Non galleggia
Concava	Galleggia**

** In questo caso è opportuno che l'insegnante faccia notare che l'oggetto di plastilina può galleggiare oppure no a seconda dell'adeguatezza della concavità.

La conclusione alla quale possono arrivare i bambini è che il galleggiamento è in relazione

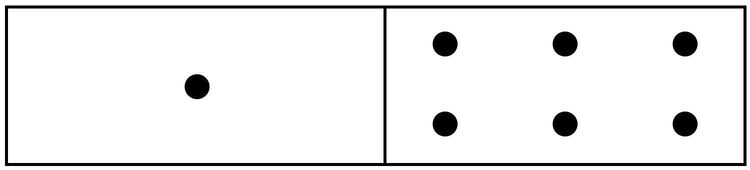
- con il materiale: alcuni materiali galleggiano comunque, come il polistirolo;
- con la forma: alcuni oggetti, costituiti da materiale che non galleggia in tutti i casi osservati, come il vetro e la plastilina, possono galleggiare se hanno una forma adeguatamente concava.

Nell'esplorazione sistematica dei diversi casi, la caratteristica peso è stata esclusa, perché non è opportuno che il tema venga approfondito a questo livello scolare; è necessario però che la questione non rimanga senza risposta, qualora fosse sollevata dagli alunni.
Si può procedere a pesare singoli oggetti ed osservare che alcuni di questi più leggeri di altri vanno a fondo, mentre i secondi galleggiano: può essere il caso di una piccola e leggera biglia di vetro confrontata con un recipiente di vetro più pesante, ma capace di galleggiare. Oppure si può evidenziare ulteriormente la questione confrontando la capacità di galleggiamento di una grande sfera di polistirolo e di una piccola sfera di vetro, nel caso che la prima sia più pesante della seconda.
È sufficiente che i bambini rilevino, a questa età, che il peso di per sé non incide sulla capacità di galleggiamento di un corpo.
Il problema potrà essere ripreso ed affrontato in modo più completo in seguito, con strumenti concettuali più adeguati.

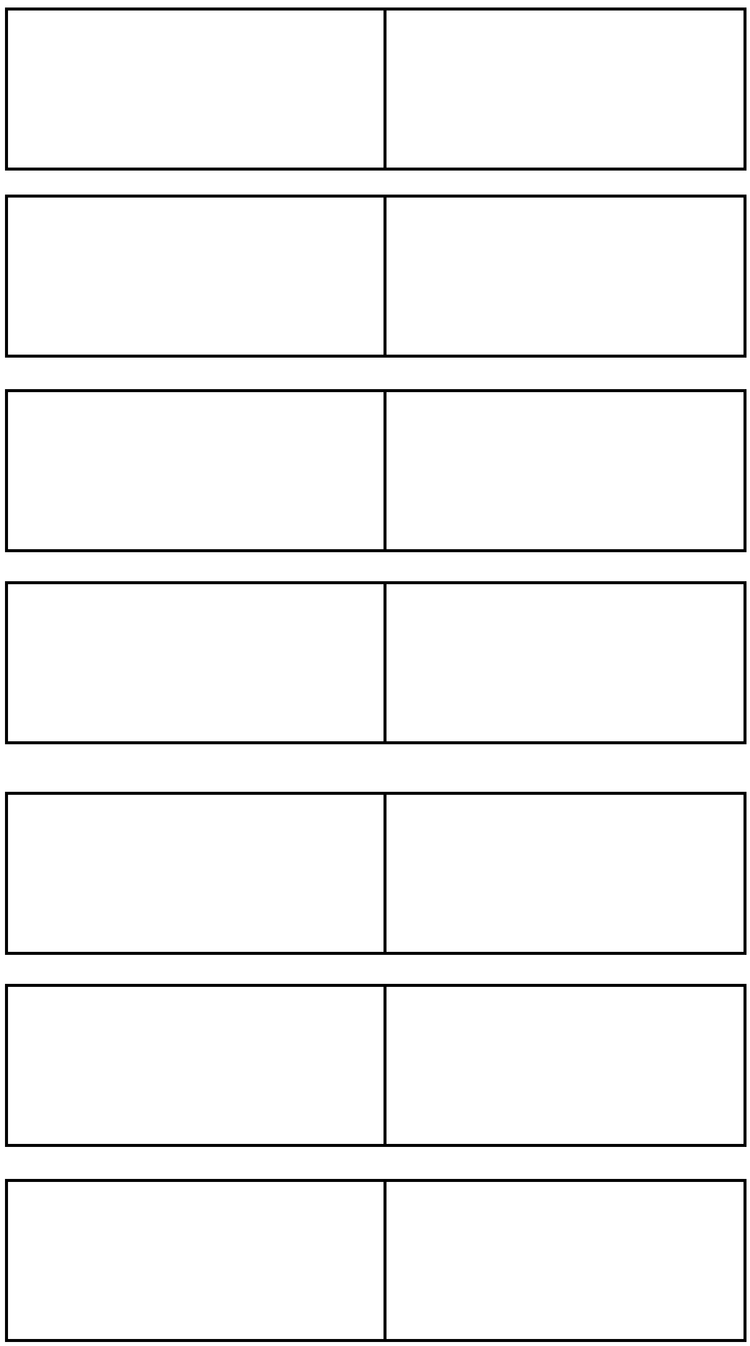
Elementi di prove di verifica
Il domino

Livello scolare: 1^{a} elementare
Competenza: scoprire semplici relazioni tra numeri naturali.

Questa è una tessera del domino.
Ha 7 pallini.

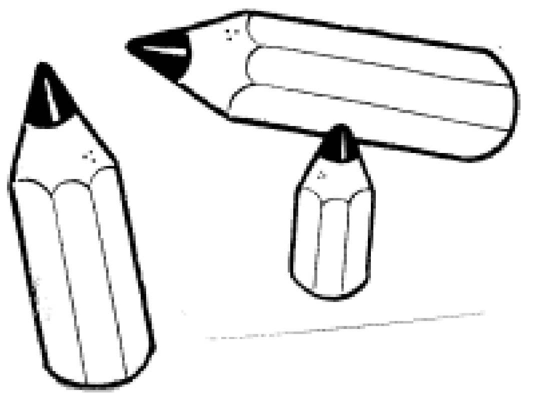


Disegna tutte le altre tessere del domino con 7 pallini.



Le matite

Livello scolare: 1ª elementare
Competenza: cogliere una relazione fra oggetti.

COLORA LA MATITA PIÙ LUNGA.


Sequenze

Livello scolare: 2ª elementare
Competenza: riconoscere ordinamenti dati.

COMPLETA.				
–	– – –	– – – – –		– – – – – – – – –

COMPLETA.				
0	**3**		**9**	

COMPLETA.				
	42	**41**	**40**	

Mi piace mangiare

Livello scolare: 2^a elementare
Competenza: indicare una proprietà che spieghi una data classificazione.

Un bambino ha detto: *Voglio sempre mangiare queste cose:*

PASTA AL SUGO
TORTA
PATATINE
ZUCCHERO FILATO
CARAMELLE
PIZZA
GELATI
CIOCCOLATA
POP – CORN

Poi le ha scritte nella tabella.

PIZZA POP – CORN PATATINE PASTA AL SUGO	CARAMELLE CIOCCOLATA ZUCCHERO FILATO GELATO TORTA
__dolci __pizze __salati __gelati	__dolci __pizze __salati __gelati

Metti una crocetta sul quadratino “giusto”.

Le ombre

Livello scolare: 3^a elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Ordinare elementi di un insieme in base ad un criterio.	Relazioni e loro rappresentazioni. Ordinamenti.	<u>Le relazioni</u> Lo spazio e le figure I dati e le previsioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Educazione all'immagine Scienze

Contesto

La proposta didattica si inserisce nel contesto delle relazioni tra la luce, gli oggetti e le ombre.
Da osservazioni empiriche ed esperienziali sul fenomeno delle ombre, i bambini sono guidati ad individuare e descrivere relazioni tra gli elementi in gioco.
Le situazioni didattiche sono varie e gradualmente strutturate.

Descrizione dell'attività

Prima fase

L'attività propedeutica può essere la rievocazione delle esperienze individuali sul fenomeno delle ombre.
La rievocazione può essere facilitata e favorita attraverso un brainstorming, la produzione di testi orali e scritti e sollecitata attraverso domande stimolo del tipo:

- Che cosa vi fa venire in mente la parola ombra?
- Da dove viene l'ombra?
- C'è sempre l'ombra?
- Qual è il colore dell'ombra?
- A che cosa somiglia l'ombra?
- Quali sono le qualità dell'ombra?
- Si può toccare l'ombra?
- Cammina l'ombra?
- Avete mai giocato con l'ombra?
- …

L'insegnante sceglie, quindi, alcuni bambini, per esempio quattro (i bambini devono essere scelti in modo che due di essi abbiano la stessa altezza e, magari, diversa corporatura) e su un grande foglio di carta bianca attaccato al muro fa disegnare, con colori diversi, le loro sagome, una accanto all'altra (la disposizione dei bambini deve essere casuale).

Seconda fase

In un giorno di sole, l'insegnante porta i bambini nel cortile della scuola per osservare e misurare l'ombra del corpo dei compagni scelti.
Prima di uscire chiede a tutti di fare ipotesi sulla lunghezza di tali ombre.

- Avranno tutte la stessa lunghezza? Oppure lunghezza diversa? Perché?

- Ha importanza l'altezza dei ragazzi? E la loro corporatura?
- ...

Il docente sistema in una zona soleggiata e pianeggiante del cortile un grande foglio di carta da pacchi bianca.
Invita i bambini scelti a disporsi uno accanto all'altro, con i piedi lungo il bordo del foglio, in modo che le loro ombre si trovino sul foglio, all'incirca perpendicolarmente al bordo, ed in modo che non si sovrappongano l'una all'altra.
Un compagno contorna con un pennarello colorato il disegno delle ombre che si formano sul foglio bianco, avendo cura di utilizzare per ogni bambino lo stesso colore usato in classe per le sagome.
L'insegnante invita a misurare la lunghezza dell'ombra servendosi di un cordino dello stesso colore del pennarello usato.
Successivamente, si ripete la stessa operazione con gli altri bambini scelti.
L'insegnante fa registrare l'ora in cui è stata effettuata la misurazione dell'ombra.
Questa fase si conclude con la raccolta delle osservazioni spontanee dei bambini.

Terza fase
In aula, l'insegnante dispone su una parete il foglio su cui, in cortile, sono state disegnate le ombre, avendo cura che il bordo, lungo cui gli alunni hanno poggiato i piedi, si collochi a livello del pavimento.
Fissa accanto a ciascuna sagoma i cordini colorati facendo sì che restino ben tesi per mezzo di un piccolo peso e scrive accanto a ciascun cordino il nome del rispettivo bambino.
Invita ora gli alunni a discutere su quanto ottenuto ed a confrontarlo con le previsioni espresse da ciascuno prima dell'esperienza in cortile (l'insegnante avrà avuto cura di raccogliere precedentemente tali previsioni, analizzarle e registrarle per tipologia).

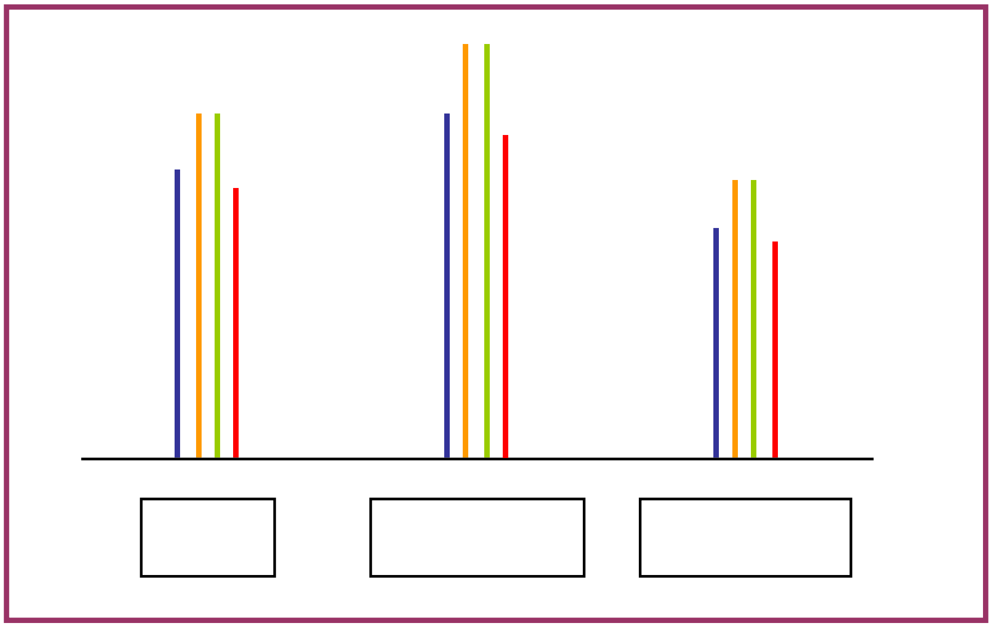
- Qual è l'ombra più lunga?
- Qual è l'ombra più corta?
- Perché ci sono ombre più lunghe di altre?
- Da cosa dipende la lunghezza dell'ombra?
- …

Quarta fase
L'insegnante fa ripetere l'esperienza ad un'ora diversa dalla volta precedente (per esempio a mezzogiorno se la prima volta si è realizzata alle nove), misurando l'ombra degli stessi bambini.
Anche questa volta, prima di uscire in cortile, invita gli alunni a fare, per iscritto, ipotesi: Cosa succede alle ombre?

Quinta fase
Si ripete l'attività prevista per la terza fase, relativamente alle nuove misurazioni.

- Qual è l'ombra più lunga?
- Qual è l'ombra più corta?
- Perché ci sono ombre più lunghe di altre?
- Da cosa dipende la lunghezza dell'ombra?
- È cambiata la lunghezza dell'ombra di (inserire il nome) nei due casi? Quale delle due è più lunga?
- E per l'ombra di…?
- Che cosa non è cambiato?

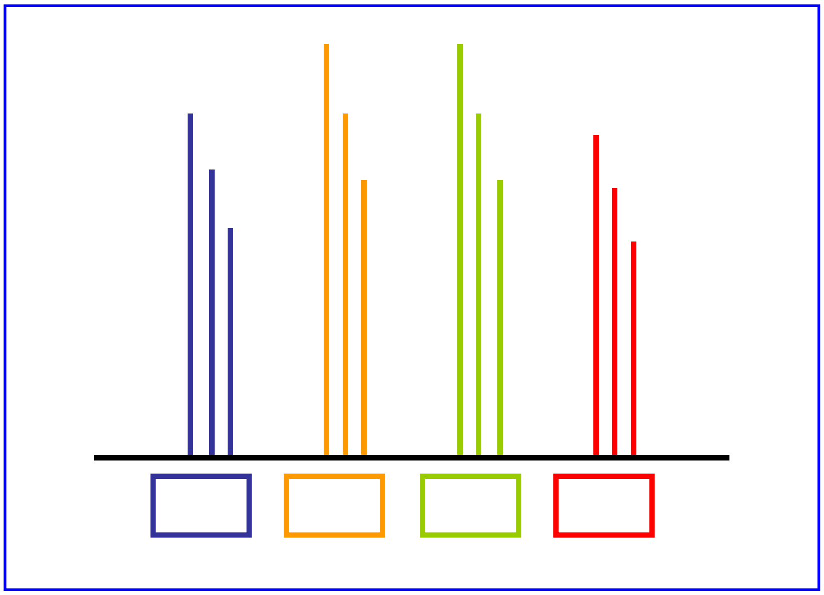
Sesta fase
L'insegnante stacca i cordini colorati disposti sul primo dei tre fogli di carta e li fa fissare, disponendoli dal più corto al più lungo, su un foglio sul quale abbia precedentemente predisposto una griglia quadrettata (lato del quadrato 20cm).
Allo stesso modo procede per gli altri due fogli.



Quindi, invita tutti i bambini ad osservare con attenzione la disposizione dei cordini ottenuta ed a riprodurla sul proprio foglio quadrettato, facendo corrispondere a un quadrato della griglia un quadratino del foglio che ha davanti a sé.
Al termine dell'attività si deve pervenire ad un risultato condiviso: **cambia la lunghezza dei tre cordini per ciascun colore, ma nei tre casi vengono disposti nello stesso ordine**.
Il risultato viene registrato per iscritto da ciascuno.

Possibili sviluppi

Tutti i cordini dello stesso colore, corrispondenti allo stesso bambino, possono venire disposti dal più corto al più lungo. Affiancando le disposizioni relative ai vari colori, si ottiene una rappresentazione che evidenzia come la lunghezza vari in base alle diverse rilevazioni, mantenendo però costante il rapporto tra le lunghezze.



Le biciclette Velox

Livello scolare: 4[a] elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Rappresentare relazioni tra dati numerici. Passare da una rappresentazione all'altra.	Relazioni e loro rappresentazioni (tabelle, piano cartesiano).	<u>Le relazioni</u> Il numero I dati e le previsioni Risolvere e porsi problemi Argomentare e congetturare	

Contesto

La proposta è costituita da una situazione problema sul costo di 60 biciclette, dato un grafico che rappresenta i prezzi fino a un massimo di 25 biciclette.
Essa va inserita nel contesto della compra-vendita, con cui gli alunni devono aver potuto familiarizzare in precedenza, ad esempio attraverso attività del tipo:

- racconto dettagliato delle loro esperienze di compratori e di venditori (mercatini dell'usato: giornalini, giocattoli, raccolte di figurine, ...);
- visita ad un mercato rionale, ad un negozio (es.: una cartoleria), ad un supermercato, ponendo l'attenzione alle analogie ed alle differenze relative alle modalità operative dell'atto del "vendere", del "pagare" e del "dare il resto" nei tre diversi casi; alla stima delle possibilità di acquisto della somma di denaro di cui si dispone; all'analisi degli scontrini, ...;
- simulazione in classe dell'attività di compra-vendita di alcuni prodotti (es.: bancarella della frutta secca) con particolare attenzione alla definizione del prezzo di vendita dei prodotti ("Di che cosa deve tener conto un negoziante per stabilire il prezzo di vendita di un prodotto?"); alla costruzione di tabelle e di grafici relativi ai prezzi dei prodotti in vendita, al variare delle loro quantità, per velocizzare l'operazione del pagamento.

È importante che queste ed altre attività simili[1] costituiscano esperienze significative per gli alunni affinché il contesto reale e quotidiano, ricco, complesso e motivante della compra-vendita non corra il rischio di appiattirsi sul calcolo del "guadagno-spesa-ricavo" e sull'applicazione di aride formule.
Per esemplificare si allega il seguente testo collettivo, prodotto da una classe quarta nell'ambito delle attività sul mercato.

"Noi sappiamo che la mamma va a comprare la frutta dal fruttivendolo, il quale la compra ai mercati generali dal grossista, il quale la compra dai contadini, i quali vanno al mercato a comprare i semi e gli antiparassitari e i macchinari per coltivare la terra e così via.

E' UNA CATENA CHE NON FINISCE.

[1] Ovviamente tali attività concorrono a sviluppare altresì competenze indicate nei nuclei tematici e in quelli di processo: eseguire moltiplicazioni e divisioni tra naturali con metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e penna, calcolatrici) utilizzando le tabelline e le proprietà delle operazioni; rappresentare i dati con tabelle e con diagrammi di vario tipo; risolvere problemi; produrre e validare congetture.

In questa catena ci sono tanti passaggi, in tutti questi succede la stessa cosa:

- il cliente dà i soldi e riceve la merce e a volte anche il resto;

- il venditore dà la merce al cliente e riceve i soldi da lui.

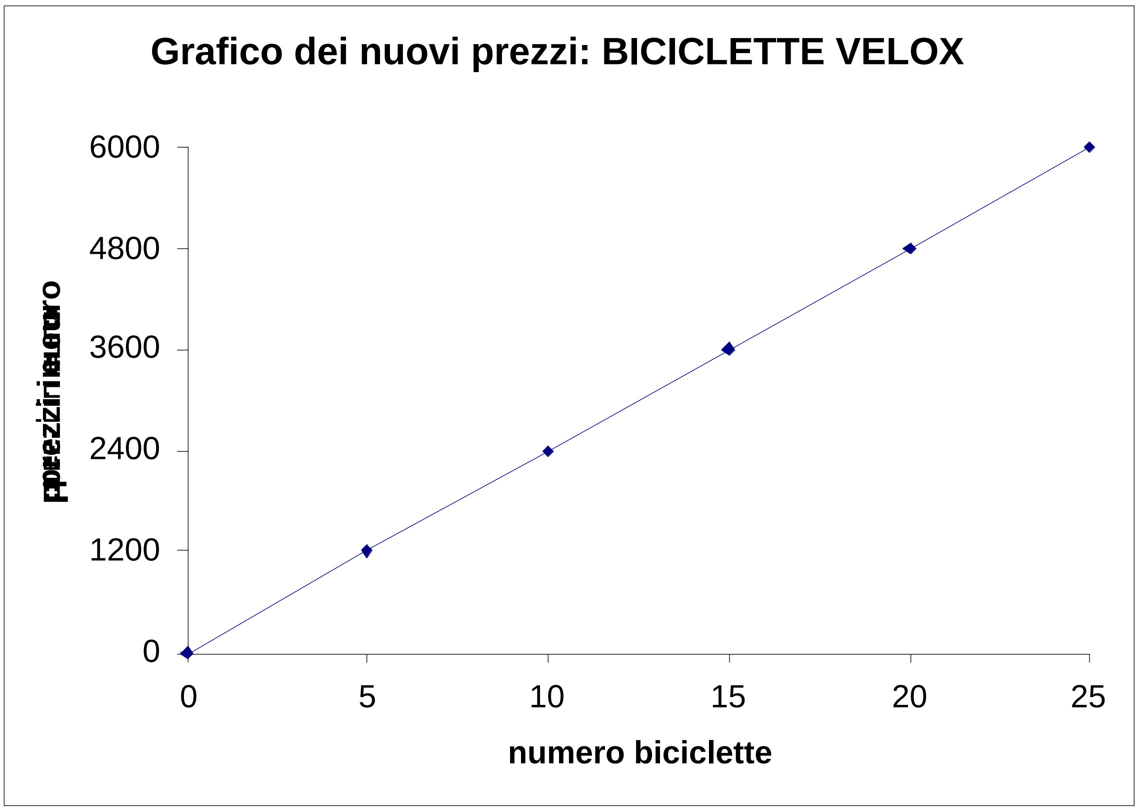
AVVIENE UNO SCAMBIO TRA IL VENDITORE ED IL CLIENTE.

Noi sappiamo anche che il venditore è un cliente, e che quando compra la merce dal grossista, la paga a un certo prezzo (COSTO) e quando la rivende aumenta il prezzo.

<u>Il prezzo di vendita contiene il costo della merce e i costi del venditore</u>: il banco, la bilancia, la cassa, il camion, le tasse, l'affitto dello spazio della bancarella, le borse e i sacchetti e il guadagno del venditore.".

Descrizione dell'attività

situazione problema



Un commerciante di biciclette riceve dal grossista il grafico dei nuovi prezzi delle biciclette VELOX.

Quanto gli costerà rifornire il suo negozio di 60 nuove biciclette VELOX?

Attenzione!

<u>Nessuna linea può essere aggiunta al grafico.</u>

L'insegnante conduce l'attività attraverso due fasi successive.

Prima fase

L'insegnante consegna il testo ad ogni alunno e invita a leggerlo individualmente (da 5 a 10 minuti). Forma, quindi, piccoli gruppi di lavoro di tre alunni. Il compito di ogni gruppo è quello di risolvere il problema e di produrre un documento finale con la soluzione o le soluzioni

discusse e condivise. Nel caso in cui i tre componenti del gruppo non riescano a produrre una soluzione comune, devono esplicitare, nel documento, le diverse soluzioni e il motivo del mancato accordo.
L'insegnante in questa prima fase non interviene in alcun modo nell'attività di risoluzione, cerca di non sovrapporsi agli alunni, di non fornire risposte dirette o indirette (attraverso domande, gestualità, espressioni del viso, sguardi, ...) di incoraggiare gli alunni ad impegnarsi e a portare a termine il compito e cerca di garantire un clima di lavoro disteso e produttivo.

Seconda fase
L'insegnante propone a tutta la classe la discussione delle soluzioni. La discussione dovrebbe essere proposta dopo alcuni giorni e orchestrata dall'insegnante in modo da garantire a tutti gli alunni lo spazio ed il tempo per esplicitare, confrontare, spiegare, argomentare, confutare, verificare soluzioni. L'importante è che siano favorite le riflessioni sui ragionamenti prodotti che hanno condotto alle soluzioni. È opportuno che l'insegnante accetti le risposte di tutti gli alunni, prestando più attenzione a quelle sbagliate, raccogliendole e portando il gruppo ad analizzarle, facendo così esplicitare ragionamenti che altrimenti non avrebbero forse motivo di essere manifestati. In tale situazione può succedere che gli errori attivino, negli alunni, un buon controllo sui ragionamenti prodotti e che anche gli alunni in difficoltà manifestino una nuova “voglia di capire".
Dalla scoperta e dal confronto di più soluzioni prodotte è utile pervenire collettivamente, al termine della discussione, ad una soluzione condivisa da tutto il gruppo classe; essa dovrebbe essere scelta od elaborata anche tenendo conto del criterio di economicità.

Durante la discussione può essere opportuno far costruire una tabella dei prezzi delle biciclette desunta dal grafico.

Numero biciclette VELOX	Prezzi in euro biciclette VELOX
5	1 200
10	2 400
15	3 600
20	4 800
25	6 000
30	?
35	?
40	?
45	?
50	?
55	?
60	?

Dall'osservazione della tabella è possibile far cogliere agli alunni alcune regolarità; in particolare la regola che genera i numeri della colonna del numero delle bicilclette (+5) e quella della colonna dei prezzi (+ 1 200).
L’obiettivo primario non è tanto trovare il costo delle 60 biciclette, quanto quello di cogliere relazioni tra il variare del numero delle biciclette e il variare dei relativi prezzi.
Gli alunni dovrebbero passare da cogliere le relazioni di tipo additivo ad utilizzare quelle di tipo moltiplicativo (per passare dalla prima alla seconda riga, nell'ambito della stessa colonna, occorre "fare x2". E per passare dalla prima riga alla terza? ...
Per calcolare il prezzo delle 60 biciclette, prendendo come riferimento la prima riga, (5 biciclette), per quale numero occorre moltiplicare il prezzo di 5 biciclette?
Quale riga è più opportuno prendere come riferimento per economizzare i calcoli e trovare il prezzo delle 60 biciclette?
....

Diversi tra confini uguali

Livello scolare: 4^a - 5^a elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare relazioni tra figure. Classificare figure, in base a due o più proprietà. Rappresentare relazioni. Passare da una rappresentazione all'altra.	Relazioni e loro rappresentazioni. Equivalenze. Costruire e disegnare le principali figure geometriche. Calcolare perimetri, aree delle più semplici figure geometriche.	Le relazioni. Le figure e lo spazio. Il numero. Risolvere e porsi problemi. Argomentare e congetturare. Misurare.	

Contesto

Questa attività può essere introdotta in quarta elementare o nella prima parte dell'anno della quinta, quando gli alunni sanno misurare e calcolare il perimetro di alcune figure piane, riconoscere l'equiestensione di due figure e dare significato al termine "area"[2], senza però saperne ancora calcolare la misura con l'uso di formule. L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, permette agli alunni di scoprire relazioni tra le figure, di consolidare i concetti di perimetro e area di un poligono e il loro rapporto e di acquisire piena consapevolezza della diversità concettuale esistente tra le due nozioni.

Descrizione dell'attività

Il percorso proposto, pur se abbastanza articolato, mantiene costantemente l'attenzione sul rapporto (e sulla differenza!!) tra i due concetti di area e di perimetro di un poligono.
Parte da una attività prevalentemente manipolativa e legata ad un numero piuttosto limitato di casi e cerca, via via, di avviarsi ad una generalizzazione dei risultati che può portare, in anni successivi, ad una formalizzazione algebrica del tipo $x+y=k$, con tutti i numerosi problemi che essa apre: vincoli sulle variabili, rappresentazioni grafiche, diverse interpretazioni della formula, …

Prima fase

- L'insegnante consegna agli alunni una scheda dove sono rappresentati dei poligoni di cui si conoscono le misure dei lati (alcuni dei quali isoperimetrici, per esempio di perimetro 24 cm) e chiede di calcolarne la misura del perimetro.

[2] L'area è la grandezza che rappresenta la parte di piano occupata da una figura bidimensionale

- Nell'insieme universo delle figure disegnate sulla scheda, l'insegnante propone una classificazione in base alla proprietà "avere il perimetro di 24 cm", in modo da individuare un sottoinsieme di poligoni isoperimetrici**.**
- Relativamente a tale sottoinsieme si pone la questione: "poligoni isoperimetrici sono anche equiestesi?". Gli alunni sono invitati a formulare delle ipotesi e a giustificare le loro affermazioni.
- Per sottoporre a verifica le ipotesi fatte, l'insegnante può proporre di costruire dei modelli di figure isoperimetriche (in cartoncino abbastanza consistente) e di procedere al loro confronto per mezzo della bilancia a due piatti: a peso maggiore corrisponde area maggiore. Dal confronto risulta evidente che figure isoperimetriche non sono necessariamente equiestese.
- Si riprende in considerazione l'insieme dei poligoni isoperimetrici e in esso si considera la relazione "avere lo stesso numero di lati" in modo da individuare il sottoinsieme dei quadrilateri isoperimetrici.
- L'insegnante sollecita l'emergere di un nuovo problema: "fra tutti i quadrilateri isoperimetrici, qual è quello che ha area maggiore?". Gli alunni sono invitati a formulare delle ipotesi e a giustificare le loro affermazioni.
- Per sottoporre a verifica le ipotesi fatte è necessario far costruire agli alunni altri quadrilateri isoperimetrici. L'insegnante sollecita i bambini a suggerire proposte per costruire tali poligoni e, se non è emerso dalle risposte degli alunni, suggerisce di utilizzare una cordicella di 24 cm chiusa ad anello e quattro grossi spilli da fissare su un cartoncino ed intorno a cui tendere il cordino. Tolti gli spilli, si collegano con la matita i fori da questi lasciati sul cartoncino e si ritagliano le figure ottenute. Per far sì che venga costruito anche il quadrato è opportuno utilizzare un cartoncino centimetrato.
- Confrontando i poligoni per mezzo della bilancia si mette in evidenza che fra tutti i quadrilateri isoperimetrici costruiti, il quadrato è quello che ha peso maggiore, quindi area maggiore.

Seconda fase
L'attività viene ripresa quando gli alunni conoscono la formula per calcolare la misura dell'area dei rettangoli, nota quella dei lati.
- L'insegnante divide la classe in gruppi poco numerosi di alunni ed assegna a ciascuno di essi un cordino (in questa prima fase è opportuno che la lunghezza del cordino risulti pari ad un numero intero di centimetri), col compito di misurarlo, accordarsi su una strategia per individuare i rettangoli col contorno lungo quanto il cordino e disegnare su carta quadrettata i rettangoli individuati.
- Vengono messe a confronto le strategie seguite (se tutti i gruppi si sono limitati a scrivere le coppie additive della misura in centimetri del semiperimetro, l'insegnante li solleciterà a scoprirne altre, per esempio utilizzando il cordino chiuso ad anello o la metà del cordino) e vengono confrontate le quantità di rettangoli ottenuti da ciascun gruppo. Se i rettangoli risultano disegnati due volte, perché "poggiati" su due lati di diversa lunghezza, l'insegnante può ritornare sui concetti di congruenza e di spostamento. I vari gruppi hanno trovato lo stesso numero di rettangoli? Sono stati disegnati tutti i possibili rettangoli? Se tutti i gruppi si sono limitati alle dimensioni "intere" in centimetri, sarà l'insegnante a suggerire la possibilità di trovarne altri, per esempio utilizzando ancora una volta il cordino disposto a formare il contorno di un rettangolo, che si deforma con continuità.
- L'insegnante sollecita nuovamente gli alunni a riflettere sul problema: "Fra tutti i rettangoli isoperimetrici individuati, qual è quello che ha la misura dell'area maggiore?" e a verificare, con il calcolo, che si tratta del quadrato.
- Alcuni gruppi passano ora a ritagliare con carta adesiva colorata i rettangoli di dimensioni trovate (o alcuni), altri a compilare una tabella in cui annotare la possibile misura della base e della corrispondente altezza dei rettangoli trovati. L'insegnante farà notare che si è ottenuta una tabella di coppie additive della misura del semiperimetro. Avendo cura di utilizzare sempre come unità di misura il centimetro, dalla tabella si otterrà un grafico cartesiano congiungendo i

punti che hanno per coordinate le coppie di numeri in tabella (una retta parallela alla seconda bisettrice del riferimento cartesiano avente per intercetta la misura del semiperimetro); allo stesso modo, disponendo i rettangoli costruiti con la carta colorata su un foglio su cui è stato tracciato un riferimento cartesiano in modo che un vertice coincida sempre con l'origine e due lati si "poggino" sui semiassi positivi, congiungendo i vertici di ogni rettangolo che rimangono "liberi", si otterrà lo stesso grafico.

- Cosa cambia se viene modificata la misura del perimetro assegnata inizialmente tramite il cordino? Ogni gruppo ripete il lavoro partendo da un numero diverso; i grafici risultanti vengono confrontati per dedurre varianti ed invarianti.

Possibili sviluppi:

- Gli alunni, a questo punto, sono in grado di costruire "il grafico dei rettangoli isoperimetrici", assegnata la misura del perimetro, senza effettuare nessun passaggio intermedio.
- Fissata ora la misura del perimetro, l'insegnante assegna una delle due dimensioni ed invita gli alunni a determinare l'altra (anche per tentativi), più volte. Poi sollecita i ragazzi a stabilire una procedura che consenta di determinare la dimensione incognita. I risultati conseguiti da ciascuno vengono socializzati e confrontati. Se non è già emerso dalle risposte degli alunni, l'insegnante suggerirà di determinare la misura incognita graficamente, utilizzando il grafico dei rettangoli isoperimetrici: si parte dal punto di uno dei due assi che ha per ascissa la misura assegnata, si conduce la parallela all'altro asse fino ad incontrare il grafico in un punto, da cui si conduce la perpendicolare al segmento tracciato che incontra l'altro asse in un punto, la cui ascissa è la misura cercata. Come fare quando la misura non "cade" esattamente sulla quadrettatura del foglio? Il metodo grafico ha dei limiti rispetto a quello aritmetico? L'insegnante può sollecitare la discussione.
- Facendo uso di variabili numeriche per le misure dei lati del rettangolo, si formalizzano i risultati ottenuti, in corrispondenza di un valore assegnato per la misura del perimetro, ottenendo in tal modo la funzione che lega una dimensione del rettangolo all'altra.
- L'insegnante sollecita nuovamente gli alunni a riflettere sul problema: "fra tutti i rettangoli isoperimetrici, qualunque sia la misura del perimetro, qual è quello che ha area maggiore?". Gli alunni sono invitati a formulare delle ipotesi, a giustificare le loro affermazioni e a proporre metodi per sottoporle a verifica.

Ulteriori sviluppi potrebbero essere:

- studio di altre famiglie di poligoni isoperimetrici (quello regolare ha area maggiore?)
- studio di una famiglia di rettangoli equiestesi (qual è il rettangolo di perimetro minimo?)

Elementi di prove di verifica
Gara a Flipper

Livello scolare: 3[a] elementare
Competenza: ordinare elementi di un insieme numerico in base ad un criterio

Cinque amici hanno fatto una gara a Flipper e hanno totalizzato dei punti.
A fine gara la situazione è la seguente:

Partecipanti	**Punti**
Antonio	701
Carlo	700
Piero	759
Mario	749
Enzo	760

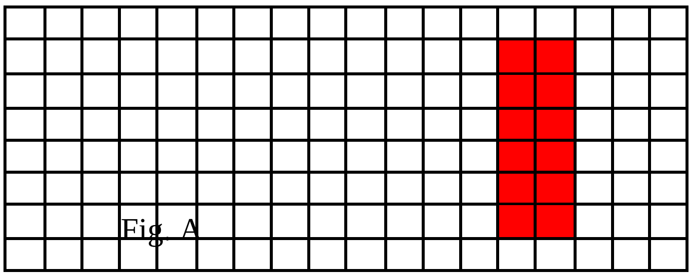
Scrivi la classifica finale della gara.

Classifica finale	
1° posto	
2° posto	
3° posto	
4° posto	
5° posto	

Frammenti colorati

Livello scolare: 4ª elementare
Competenze: individuare relazioni fra elementi

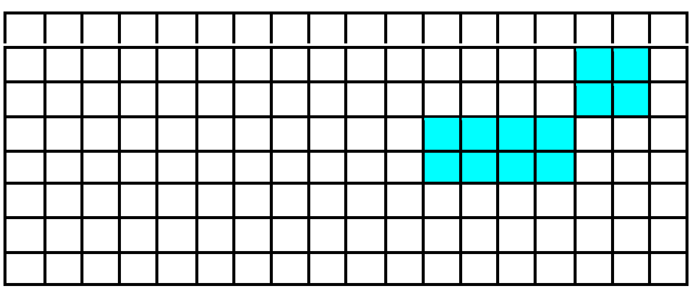
Segna con una crocetta le risposte che ritieni corrette.



☐ La figura colorata è 1/3 della figura A.

☐ La figura colorata è 1/2 della figura A.

☐ La figura colorata è 1/4 della figura A.



☐ La figura colorata è 1/3 della figura B.

☐ La figura colorata è 1/2 della figura B.

☐ La figura colorata è 1/4 della figura B.

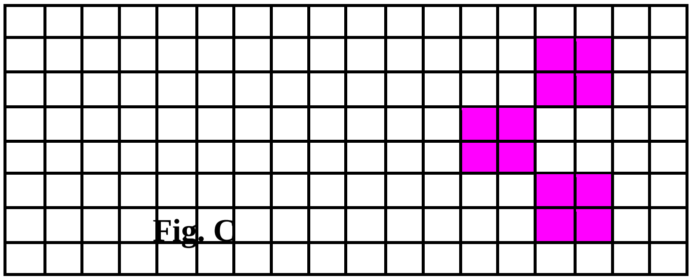


Fig. C

☐ La figura colorata è 1/3 della figura C.

☐ La figura colorata è 1/2 della figura C.

☐ La figura colorata è 1/4 della figura C.

Le tre figure colorate hanno in comune:

☐ il numero dei lati

☐ l’area

☐ il perimetro

☐ niente

Segna con una crocetta la risposta che ritieni corretta e spiega la tua scelta.

Rifornimento d'olio

Livello scolare: 5ª elementare
Competenza: individuare relazioni fra elementi

Leggi il problema e segna con una crocetta la risposta che ritieni corretta

Un commerciante fa rifornimento d'olio che pensa di vendere in tre mesi.
Dopo i tre mesi fa di nuovo rifornimento, decide di comprarne una quantità tripla e scopre che il prezzo dell'olio è raddoppiato.

Per il secondo rifornimento pagherà

- ☐ il doppio del prezzo del primo rifornimento
- ☐ il triplo del prezzo del primo rifornimento
- ☐ 6 volte il prezzo del primo rifornimento
- ☐ non si può sapere

Spiega la tua scelta.

SCUOLA MEDIA

Il figlio del re e il messaggero

Livello scolare: 1[a] media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze. Riconoscere in fatti e fenomeni relazioni tra grandezze. Usare coordinate cartesiane, diagrammi, tabelle per rappresentare relazioni e funzioni.	Grandezze direttamente proporzionali Funzioni: tabulazioni e grafici. Comprendere il significato di elevamento a potenza.	<u>Le relazioni</u> Il numero I dati e le previsioni Misurare Risolvere e porsi problemi Argomentare e congetturare	Lingua italiana

Contesto

La proposta è costituita da una situazione problema, che si colloca in un contesto narrativo (racconto liberamente tratto da "*I sette messaggeri*" di D. Buzzati), dove il rapporto spazio/tempo gioca un ruolo primario.

Il racconto narra di re e di cavalieri, di castelli e di reami, richiamando alla mente degli alunni un mondo leggendario. Il contesto narrativo favorisce il loro coinvolgimento nella risoluzione della situazione problema, attivando ragionamenti in cui si tengono sotto controllo due storie parallele ed interagenti, rispetto alla durata ed alla contemporaneità di azioni.

Dal punto di vista strettamente disciplinare, nella proposta didattica sono presenti:

- scoperta di regole in sequenze numeriche, (non lineari, di tipo esponenziale);
- confronto di velocità diverse, in un contesto operativo al fine di risolvere problemi;
- tabelle e grafici cartesiani per rappresentare dati relativi al rapporto tempo/spazio;
- rappresentazioni come modello per descrivere e per risolvere la situazione problema;
- calcolo mentale, mediante strategie utili che lo rendono più rapido.

Descrizione dell'attività

Testo narrativo

IL FIGLIO DEL RE E IL MESSAGGERO

Il figlio di un re, ormai diventato grande, era curioso di visitare e di conoscere il regno del padre. Tutti raccontavano che il regno era immenso, ricco di boschi, di laghi, di fiumi, di villaggi, di campagne coltivate e di verdi prati profumati.

Un bel giorno il figlio del re decise quindi di partire insieme a tutto il suo seguito: cavalieri, servi, carri, tende e viveri.

Percorsero 50 chilometri. Alla sera si fermarono e si accamparono per la notte: questa fu la prima tappa.
Al mattino presto i servi smontarono l'accampamento per rimettersi in cammino. Prima di partire il figlio del re chiamò il cavaliere più fidato e gli disse: "Devi tornare al castello a prendere alcune erbe medicinali; dovrai portarmi anche notizie di mia madre, di mio padre e riferirmi cosa succede al castello. Io intanto continuerò ad andare avanti."
Così si salutarono e il figlio del re riprese a cavalcare, allontanandosi sempre più dal castello.
Ogni giorno il figlio del re percorreva 50 chilometri e il suo messaggero ne percorreva 100.
La seconda sera tutti si fermarono e dormirono e al mattino del terzo giorno ripresero il cammino.
La terza sera, finalmente, il messaggero raggiunse il figlio del re e gli portò le erbe e le notizie dal castello. Mangiarono e si riposarono.
Il mattino seguente il figlio del re chiamò di nuovo il cavaliere e lo rimandò al castello a prendere pietre preziose, da donare alle contesse. Così i due ripartirono nelle due direzioni opposte; uno verso il castello e l'altro in avanti.
Passarono dei giorni, il cavaliere arrivò di sera, incontrò il figlio del re per la seconda volta e gli consegnò le pietre preziose.
Il mattino dopo, il figlio del re chiamò il cavaliere e lo rimandò al castello a prendere la mappa del regno, perché temeva di superare i confini.
Il messaggero ripartì, per la terza volta. Passarono molti più giorni prima di poter consegnare la mappa al figlio del re…..

(Racconto liberamente tratto da "I sette messaggeri" di D. Buzzati)

L'attività si svolge attraverso diverse fasi:

Prima fase

L'insegnante legge il racconto e chiede successivamente agli alunni di esplicitare gli elementi più importanti che intrecciandosi determinano la storia stessa:

- il procedere in avanti del principe, che si trova ogni giorno sempre più lontano dal castello;
- il tornare più volte al castello del messaggero;
- il coprire ogni giorno la stessa distanza, diversa tra i due personaggi, da parte di ognuno di loro;
- lo scorrere del tempo fra un incontro e l'altro dei due personaggi.

L'insegnante invita gli alunni a disegnare e a raccontare per iscritto ciò che succede dalla partenza al loro primo incontro.
L'insegnante, dopo aver analizzato gli elaborati degli alunni, propone una discussione, avendo cura di far emergere le difficoltà incontrate e i ragionamenti seguiti, attraverso il confronto delle varie rappresentazioni prodotte.
Chiede loro, quindi, di prevedere quanti giorni devono passare perché i due personaggi si possano incontrare per la seconda e per la terza volta, rappresentando con disegno, schema e racconto la situazione.

Seconda fase

L'insegnante propone una nuova discussione sulle previsioni prodotte dagli alunni, avendo cura di far emergere gli elementi che ricorrono con maggiore frequenza nelle verbalizzazioni prodotte, perché indispensabili alla comprensione della storia:

- lo scorrere del tempo, in rapporto alla posizione dei due personaggi (es.: la sera dell'ottavo giorno, il re si trova ... mentre il messaggero si trova ...);
- la distanza percorsa ogni giorno da ciascuno dei due personaggi, con l'esplicitazione del senso di marcia e della distanza dal castello;

- la distanza tra i due personaggi, evidenziando che finché si muovono in senso opposto tale distanza aumenta ogni giorno di 150 km mentre, quando riprendono a procedere nello stesso senso, la distanza via via diminuisce (di 50 km ogni giorno).

Terza fase
L'insegnante propone agli alunni il seguente quesito:

In quale giorno avverrà il quarto incontro?
... e il quinto?
... e il sesto?
...

Successivamente chiede di rappresentare la storia con una tabella.

INCONTRI	**GIORNI**
PRIMO	3
SECONDO	9
TERZO	27
QUARTO	?
QUINTO	?
...	?

L'osservazione della tabella fa emergere la regola che fa passare dal numero dei giorni dell'incontro precedente al numero dei giorni di quello successivo.
Una volta emersa la regola del "x3", l'insegnante invita gli alunni a contestualizzarla in modo che non rimanga una regola priva di significato (un terzo del numero dei giorni è già trascorso, il messaggero ne impiega altrettanto per tornare al castello e per raggiungere il punto dell'ultimo incontro con il figlio re; ed infine impiega l'ultimo terzo per procedere in avanti e coprire la distanza, percorsa dal figlio del re, nel frattempo).
L'insegnante conduce l'attività in modo che gli alunni giungano a calcolare il numero di giorni, mesi e anni (utilizzando il calcolo mentale, in particolare strategie moltiplicative) dei successivi incontri possibili, valutando quanti ne potranno avvenire, tenendo conto dell'età media di una persona.

Quarta fase
L'insegnante invita gli alunni a rappresentare individualmente la storia con un grafico cartesiano, registrando le distanze sull'asse delle ascisse ed i tempi sull'asse delle ordinate.
Si può concordare di disegnare i grafici sullo stesso riferimento cartesiano, usando un colore per il principe e un altro per il messaggero, avendo cura che ogni alunno abbia consapevolezza di quale momento della storia sta rappresentando ogni qual volta traccia un punto o un segmento.
Risulta opportuno far costruire prima la "storia" del figlio del re, che è più semplice e, successivamente, quella del messaggero.
L'insegnante invita a riflettere sulla rappresentazione e a confrontare i due grafici.
In questa fase è importante che gli alunni si rendano conto che le linee dei grafici non sono il disegno delle strade percorse dai due personaggi, così come i punti non rappresentano i luoghi del castello o delle tappe, ma le linee "raccontano in modo matematico" la storia.

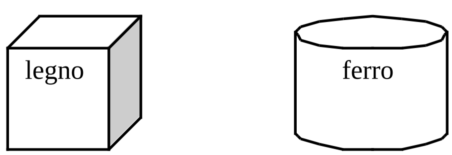
Il numero… di ferro

Livello scolare: 2ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze Utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (fisiche) Costruire, interpretare e trasformare formule Riconoscere in fatti e fenomeni relazioni tra grandezze Usare coordinate cartesiane, diagrammi, tabelle per rappresentare relazioni e funzioni Usare modelli dati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni	Grandezze direttamente e inversamente proporzionali Funzioni: tabulazioni e grafici Funzioni del tipo y=ax e loro rappresentazione grafica Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche.	<u>Le relazioni</u> Porsi e risolvere problemi Argomentare e congetturare Misurare	Fisica

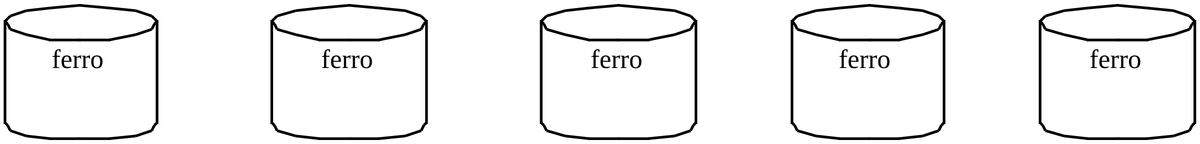
Contesto
Questa proposta didattica si colloca alla fine del secondo quadrimestre della seconda media. E' necessario che i ragazzi, in una fase preliminare abbiano acquisito alcune conoscenze relative alla proporzionalità diretta e inversa e alla costruzione dei grafici e che conoscano le misure di peso e di volume.
Il contesto di riferimento è il campo scientifico - tecnologico. L'insegnante coordina e guida il lavoro in classe e le discussioni che portano gli alunni alla determinazione del peso specifico del ferro.

Descrizione dell'attività
L'insegnante dispone vari oggetti sulla cattedra. Le dimensioni dei solidi sono abbastanza simili tra loro, ma i materiali sono diversi: legno, ferro, plastica, vetro. Si discute sulla stima dei rispettivi pesi.
Si scelgono, tra tutti, due oggetti: uno di legno e uno di ferro.



"Il peso degli oggetti sarà lo stesso per i due solidi?"
"Quale sarà secondo voi il più pesante..?"
Gli alunni riescono facilmente a "confrontare ad occhio" i vari pesi concludendo che gli oggetti di legno pesano meno di quelli di ferro a parità di grandezza.

Prima situazione problema:
"C'è qualcosa che accomuna gli oggetti dello stesso materiale?"
Per rispondere a questa domanda si effettua le seguente esperienza:
si prendono diversi cilindretti di **ferro** (uguali tra loro):



Ad esempio si possono utilizzare i pesi da 50 g della bilancia a piatti. Il lavoro ora consiste nel riportare i dati nella prima e nella terza colonne della tabella:

numero cilindretti	**Volume (cm^3)**	**Peso (g)**

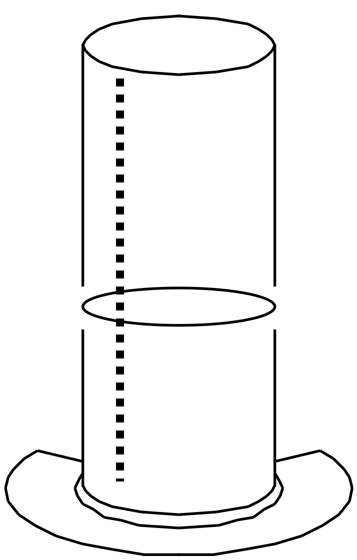
Tabella1

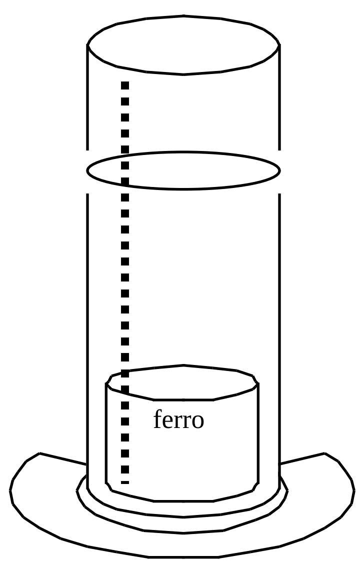
in questo modo

numero cilindretti	**Volume (cm^3)**	**Peso (g)**
1		50
2		100
3		150
4		200
5		250

Tabella2

Seconda situazione problema:
"Qual è il volume dei cilindretti?"
Si prende un cilindro graduato con una certa quantità di acqua e vi si immerge un cilindretto:





Si legge la variazione del livello dell'acqua. Il volume dell'acqua innalzata è equivalente al volume del cilindretto. Si ripete l'esperienza con due cilindretto e così via. Ora può essere riempita la seconda colonna.

numero cilindretti	**Volume (cm^3)**	**Peso (g)**
1	6,5	50
2	13	100
3	19,5	150
4	26	200
5	32,5	250

Tabella3

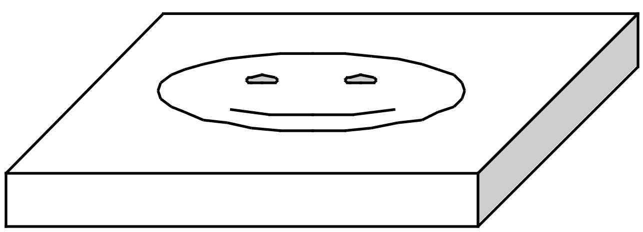
Terza situazione problema:
Gli alunni rappresentano i dati della tabella 3 in un grafico su carta millimetrata, mettendo sull'asse delle x i volumi e sull'asse delle y i pesi.
Dopo aver osservato il grafico rispondi alle domande:

- *All'aumentare del volume, come cambia il peso: aumenta, diminuisce, rimane sempre uguale?*
- *Se il volume raddoppia, come cambia il peso?*
- *Se il volume si dimezza, come cambia il peso?*
- *Riconosci nel grafico la rappresentazione di una legge che hai studiato?*
- *Conoscendo il valore del peso come ottieni la misura del volume?*
- *Qual è il "numero caratteristico" del ferro?*
- *Se indichiamo con y il peso e con x il volume, esprimi con una formula la relazione tra y e x.*

Gli alunni, tracciando il grafico e osservando la proporzionalità, concludono che il peso è uguale a k volte il volume, cioè $p = k\ v$ con $k = 7{,}8$

Quarta situazione problema:

A questo punto si prende un altro oggetto di ferro di forma diversa. (es. un fermacarte) che non entri nel cilindro graduato.



L'insegnate chiede agli alunni:

" Quanto misura il volume?"

Gli alunni arrivano facilmente alla soluzione pesando il

Quante camicie usava Diofanto?

Livello scolare: 3[a] media

Competenze	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà regolarità numeriche Costruire, leggere, interpretare e trasformare formule Riconoscere in fatti e fenomeni relazioni tra grandezze	Equazioni numeriche di primo grado Funzioni: tabulazioni e grafici Massimo comun divisore	<u>Le relazioni</u> Il numero Argomentare e congetturare	

Contesto: I numeri interi
L'esempio è un problema che introduce l'allievo a trattare alcune semplici equazioni diofantee (o indeterminate), precisamente le equazioni del tipo Ax + By = C, dove A, B, C sono numeri interi e anche le soluzioni vanno ricercate nell'anello degli interi {…-2, -1, 0, +1, +2, …}.
La questione presenta interesse didattico e matematico per i seguenti motivi:
1. Di un'equazione occorre sempre dire in quale ambito numerico (ad es., naturali, interi, razionali, ….) si cercano le soluzioni (ad es., un'equazione come $x^2= 2$ non è risolubile nei razionali ma lo è nei reali): per gli allievi è spesso automatico pensare invece che un'equazione sia risolubile (o meno) in assoluto. L'esempio introduce in modo naturale la necessità di limitarsi alle soluzioni intere non negative; poi l'esempio viene esteso anche alle ricerca delle soluzioni negative.
2. Spesso gli allievi pensano che un'equazione (se ha soluzioni) ha un'unica soluzione; costa fatica immaginare che ne possa avere più di una o addirittura infinite: le equazioni diofantee qui indagate o non hanno soluzioni o ne hanno infinite. Si è quindi in una situazione in cui tipicamente non ci si trova con le solite equazioni di primo grado.
3. Il problema proposto porta in modo abbastanza naturale a cercare una messa in formula della situazione per analogia con le equazioni di primo grado e quindi a utilizzare le lettere (due in questo caso) per esprimere il costo dei due tipi di camicie che il commerciante deve acquistare; si ottiene una relazione numerica del tipo Ax + By = C (dove A, B, C sono numeri dati), che ha somiglianza con le equazioni di primo grado ma che non si sa trattare con algoritmi noti.
4. Il fatto che non si posseggano algoritmi risolutivi (che non vanno assolutamente forniti agli allievi: il problema non vuol essere un'anticipazione di argomenti delle superiori) fa emergere la necessità di esplorare gli interi (non negativi) per cercare eventuali soluzioni; gli allievi procedono usualmente per tentativi ed errori, cioè con un metodo intuitivo e molto naturale, che favorisce la produzione di congetture e un'interazione feconda con la formula che si ottiene (cioè un'equazione di primo grado canonica). Così facendo sono indotti a leggere continuamente la formula che hanno davanti per interpretare quello che succede: la necessità di trovare i valori numerici di un'incognita (ad es. per la y), una volta fissato un valore per l'altra (ad es. per la x), li porta anche a trasformare la formula in modo opportuno.
Nella situazione giocano in modo essenziale le rappresentazioni su tabelle o su grafici: esse forniscono agli allievi un utile strumento che supporta e stimola i loro ragionamenti e le loro congetture. Tipicamente le strategie per tentativi ed errori corrispondono a ragionamenti del tipo "facciamo finta che" (ad es. che il commerciante acquisti 2 camicie da 40 euro): questi emergono e rendono particolarmente produttiva la situazione rispetto alle competenze se il lavoro di soluzione

viene condotto in modo da stimolare la discussione e la produzione di ipotesi da parte degli allievi (cfr. Nucleo Argomentare e Congetturare).

Problema: «Un negoziante acquista un certo numero di camicie da 40 euro ed un certo numero di camicie da 60 euro. Ha a disposizione 560 euro. Quante camicie di un tipo e quante dell'altro può acquistare ponendosi come obiettivo quello di utilizzare tutta la cifra a disposizione?»

In questo problema le incognite sono due: il numero delle camicie da 40 euro e quello delle camicie da 60 euro; il problema non fornisce altra informazione su relazioni tra questi numeri che non sia quella dell'intera cifra a disposizione.
L'equazione risolutiva è quindi la seguente:
$40\ x + 60\ y = 560\ 000$
dove x rappresenta il numero delle camicie da 40 euro e y il numero delle camicie da 60 euro (40x rappresenta quindi la spesa sostenuta per le camicie dei primo tipo e 60y la spesa sostenuta per le camicie dei secondo).
Si tratta quindi di un'equazione di I grado in cui ci sono due incognite. Non conosciamo nessun metodo per risolverla. Possiamo però ragionare con calma per capire se possiamo scoprire un metodo risolutivo efficace. Proviamo con qualche tentativo e utilizziamo una tabella per rappresentare i risultati così trovati.
Cominciamo a vedere che cosa succede ponendo x = l. Avremo allora:
$40\times 1 + 60y = 560.$
Si è ottenuta una equazione di primo grado che siamo in grado di risolvere. Si trova in effetti:
$60y = 560 - 40 = 520$
$y = 520/60 \sim 8{,}7$
È accettabile questa soluzione?
Poiché y rappresenta una certa quantità di camicie, non può essere un numero non intero: ecco quindi una peculiarità rispetto alle solite equazioni.
Nel nostro caso dovremo cercare **solo le soluzioni rappresentate da coppie x, y di numeri interi** (non negativi): quindi il commerciante non può impegnare tutta la cifra di cui dispone comprando una sola camicia da 40 euro.
Proviamo allora con x = 2.
L'equazione ottenuta è la seguente:
$40\times 2 + 60y = 560$
$80 + 60y = 560$
$60y = 560 - 80$
$y = 480/60 = 8$
Ecco quindi trovata la prima soluzione del problema: (2, 8). Il commerciante può comprare 2 camicie da 40 euro e 8 camicie da 60 euro.
Può però darsi che esistano altre soluzioni.
Proviamo per x = 3 e x = 4:

$40\times 3 + 60y = 560$	$40\times 4 + 60y = 560$
$120 + 60y = 560$	$60 + 60y = 560$
$60\ 000\ y = 440$	$60y = 400$
$y = 440/60 \sim 7.3$	$y = 400/60 \sim 6.7$

In entrambi i casi il valore ottenuto per y non è intero e quindi le soluzioni non sono accettabili.
Se provate invece con x = 5 ottenete y = 6.
Quindi le soluzioni trovate finora sono le seguenti:

x	y
2	8
5	6

Procedendo per tentativi otteniamo la seguente tabella:

x	2	5	8	11	14	
y	8	6	4	2	0	

Riuscite a scoprire una regola con cui si succedono i valori della x ed i relativi valori della y? Mentre i valori della x aumentano di tre in tre, quelli della y diminuiscono di due in due.
Proviamo allora a non ragionare più sulle camicie, ma manteniamo la condizione che le soluzioni dell'equazione siano numeri interi (anche negativi). Procedendo con la regola appena esposta avremo:

x	-1	2	5	8	11	14	17
y	10	8	6	4	2	0	-2

Verifichiamo se le due coppie trovate soddisfano l'equazione. Ad es., si trova:

$40 \times (-1) + 60 \times 10 =$	$40 \times 17 + 60 \times (-2) =$
$= -40 + 600 = 560$	$= 680 - 120 = 560$

Come vedete, entrambe sono soluzioni dell'equazione. Tutto ciò lascia prevedere che
si possa procedere nella costruzione della tabella e che le soluzioni siano infinite. Si tratta precisamente dei punti a coordinata intera che appartengono alla retta disegnata in fig.1, passante per i punti (2,8), (5,6).
Analizziamo ora la struttura dell'equazione da cui siamo partiti; si tratta di un'equazione in
due incognite, di I grado, in cui i coefficienti di x e di y sono numeri interi, così come il
termine noto.

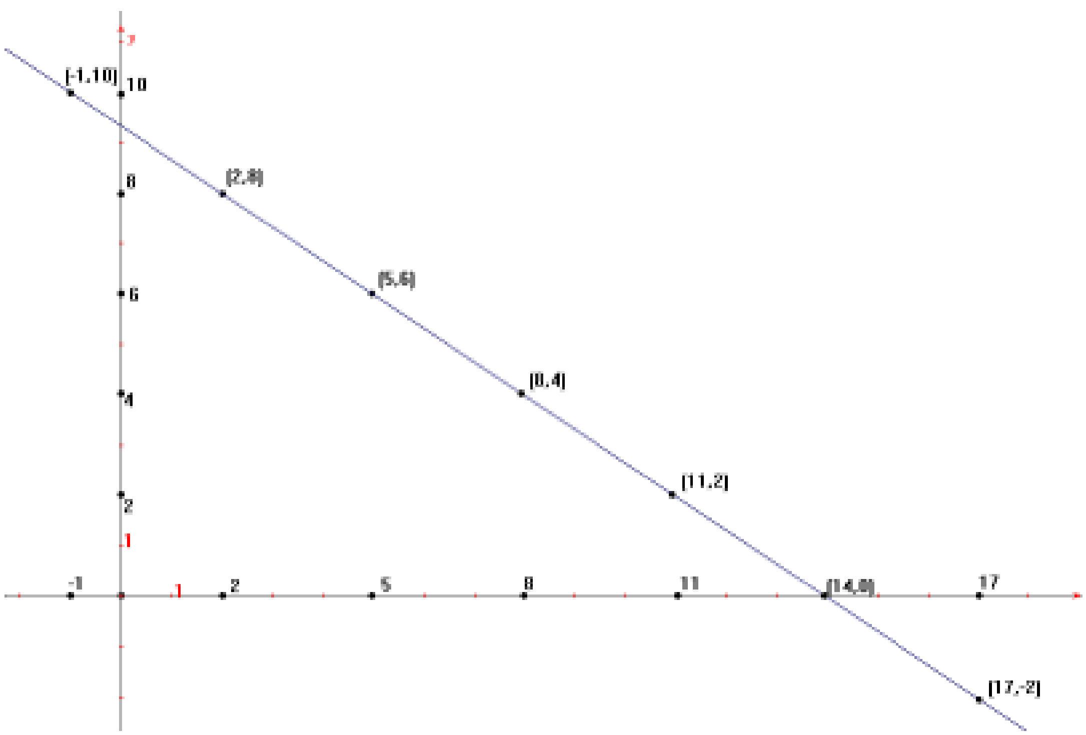


Fig.1

Equazioni di questo tipo vengono chiamate **equazioni diofantee** dal nome di un famoso algebrista greco (Diofanto, appunto) che per primo le ha studiate.
Nel nostro esempio tutto è filato liscio ed abbiamo trovato infinite soluzioni, ma non sempre è cosi.
Vediamo allora di fare alcuni esempi fornendo le relative soluzioni.
Cominciamo con $3x - 5y = 0$

Come devono essere i due numeri che costituiscono le soluzioni dell'equazione? È sufficiente scriverla in un altro modo:

$3x = 5y$

per capire come procedere. Poiché i due prodotti devono essere uguali è sufficiente sostituire alla x il valore 5 ed alla y il valore 3.
Avremo dunque: $3 \times 5 = 5 \times 3$.
D'altra parte, in generale 3x è un multiplo di 3, esattamente come 5y è un multiplo di 5: si tratta quindi di trovare a sinistra e a destra del segno di uguale un numero che sia contemporaneamente multiplo di 3 e di 5, cioè multiplo di 15. Le soluzioni sono quindi le seguenti:

x	5	10	15	20	…
y	3	6	9	12	…

Anche in questo caso, una volta trovate le prime due soluzioni, le altre si trovano con molta facilità.
Troviamo ora le soluzioni dell'equazione $4x + 6y = 2$. Possiamo riscriverla nel seguente modo: $4x = 2-6y$.
Non dobbiamo dimenticare che 4x è un multiplo di 4 cosi come 6y è un multiplo di 6: l'equazione scritta nel nuovo modo ci dice che dobbiamo ricercare un multiplo di 4 ed un multiplo di 6 che differiscono di 2.
Rappresentiamo allora graficamente i multipli di 4 ed i multipli di 6, per avere alcune indicazioni:

multipli di 4: ____
multipli di 6: ____

– – – –

Si vedono subito le situazioni in cui la differenza tra due multipli è uguale a due: nel caso dei primo multiplo di entrambi, oppure nel caso del terzo multiplo di 6 e dei quarto di 4 e cosi via.
Tenendo conto dei segni avremo le seguenti soluzioni:

x	-1	-4	-7	-10	…
y	1	3	5	7	…

La rappresentazione grafica ci consente, poi, di trovare anche le soluzioni dell'equazione:

$4x + 6y = 6$ ovvero $4x = 6 - 6y$

Come potete facilmente controllare, il terzo multiplo di 4 ed il terzo multiplo di 6 differiscono appunto di 6, così il sesto multiplo di 4 ed il quinto multiplo di 6.
Avremo quindi (tenendo conto dei segni):

x	-3	-6	-9	-12	-15	…
y	3	5	7	9	11	

Riflettiamo ora sui multipli di 4 e su quelli di 6, soffermandoci sulle loro differenze: queste differenze possono essere di 2, 4, 6, 8 ecc., cioè possono valere quanto un multiplo di 2.
Provate allora a risolvere l'equazione diofantea:

$4x + 6y = 5$ ovvero $4x = 5-6y$

Abbiamo appena visto che fra un multiplo di 4 e un multiplo di 6 non può mai esservi la differenza di 5, quindi questa equazione non ammette soluzioni.

Riflettete ora sul fatto che 2 è massimo comun divisore di 4 e 6: abbiamo scoperto che l'equazione ammette soluzioni quando il termine noto è un suo multiplo (abbiamo fatto le verifiche nel caso 2 e 6). Ebbene, questa situazione vale come soluzione generale:

- un'equazione diofantea del tipo ammette soluzioni se e solo se il termine noto è un multiplo del massimo comun divisore tra i coefficienti di x e di y. Ad esempio 6 è multiplo di 2, massimo comun divisore di 4 e 6 nell'esempio visto.
Possiamo verificarlo con altri esempi. data l'equazione:
$6x + 9y = 15$ ovvero $6x = 15-9y$
Dobbiamo trovare un multiplo di 6 ed un multiplo di 9 che differiscano di 15 (tenuto presente che M.C.D. (6, 9) = 3 e che 15 è un multiplo di 3):

15

multipli di 6: ______________________________
multipli di 9: ______________________________

Come vedete ancora una volta, poiché 3 è il M.C.D. (6, 9) i multipli di questi due numeri differiscono o di 3, o di 6, o di 6, o di 12 o di 15 ecc.
In particolare, il secondo multiplo di 6 ed il terzo di 9 risolvono la nostra equazione; quindi, tenendo presenti i segni, avremo:

x	-2	-5	-8	-11	…
y	3	5	7	9	…

Modellizzazione del fenomeno fisico delle molle (*)

Livello scolare: 3ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Rappresentare graficamente misure di grandezze per individuare regolarità, andamenti, relazioni Riconoscere in fatti e fenomeni relazioni tra grandezze Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli Usare coordinate cartesiane, diagrammi, tabelle per rappresentare relazioni e funzioni Usare modelli dati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni	Funzioni: tabulazioni e grafici. Funzioni del tipo y=ax Semplici modelli di fatti sperimentali	<u>Relazioni</u> Misura	Scienze sperimentali

Contesto
Contesto di modellizzazione di un fenomeno fisico, l'allungamento delle molle.
Questa attività riguarda un'esperienza di insegnamento delle "funzioni" con alunni di terza media. Le "funzioni" sono introdotte come "formule che operano sui valori di una variabile" e poi, in un secondo tempo applicate come "modello" di un fenomeno reale: l'allungamento della molla.

Durante queste attività di modellizzazione matematica i diagrammi cartesiani sono introdotti e utilizzati come strumenti di concettualizzazione euristica e di analisi delle relazioni tra i dati sperimentali e i modelli matematici. Questo ambito appare assai produttivo per:

- l'acquisizione del **concetto di funzione** come trasformazione di variabili all'interno di una formula.
- l'esperienza di **modellizzazione matematica** di un fenomeno fisico;
- la **formulazione di ipotesi** e loro verifica;
- l'uso dei **diagrammi cartesiani** come strumenti di concettualizzazione euristica e di analisi delle relazioni tra i dati sperimentali e i modelli matematici.

Descrizione dell'attività

1. Percepire ciò che varia nel fenomeno delle molle

Ad ogni alunno vengono distribuiti elastici e molle di diversa grandezza (diverse dimensioni e spessore), ad occhi chiusi muovono l'elastico e la molla tirandolo con le dite alle due estremità e verbalizzano quanto le mani suggeriscono. Ripetono lo stesso lavoro ad occhi aperti verbalizzando su quanto e cosa gli occhi suggeriscono.

In questo modo si guidano gli alunni a studiare più in dettaglio cosa succede e cosa appare quando 1 o più sistemi/sorgenti interagiscono con un elastico (molla) per scoprire, ad un livello qualitativo il tipo di dipendenza funzionale fra esse.

I ragazzi individueranno molti fattori (variabili) che possono avere caratterizzazione scalare o vettoriale.

Scoprono che vi sono variabili che individuano numericamente il materiale di cui sono fatte gli elastici e le molle, e le loro caratteristiche geometriche su un piano puramente qualitativo che permette di stabilire solo relazioni d'ordine.

In questa attività si lavora attraverso la "percezione", questo è importante perché si mette insieme sia quello che si sente che quello che si vede.

2. Individuazione della legge matematica

Considera una molla avente la lunghezza iniziale di 20 cm. Sospendendo ad essa delle grosse graffette uguali tra loro ed indicando con N il numero delle graffette sospese e con L la corrispondente misura della molla, si ottiene (nel corso di una serie di 11 successive misurazioni) la seguente tabella:

N	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
L (cm)	20.1	21.7	23.8	25.8	27.8	29.9	31.9	34.0	36.0	38.2	40.2

Considera le seguenti formule: (in cui L è espresso in cm)

L = 20*(1+N)
L=20-0.2*N
L=20+0.2*N
L=20+20*N

Una sola di esse è in accordo con la tabella: effettuando meno calcoli che puoi trova tale formula e scrivi i motivi per cui escludi le altre. Traccia poi (con lo stesso sistema di assi) il grafico associato alla formula scelta e quello ricavato dai dati sperimentali e confrontali

In generale gli allievi non incontrano grandi difficoltà ad individuare la formula corretta, ma molto diverse appaiono le strategie utilizzate per individuarla. E' utile pertanto sviluppare al termine un'attività di discussione e di confronto di strategie per socializzare i diversi metodi.

In generale si possono individuare tre diversi comportamenti degli studenti:
a) Uso del solo calcolo per verificare quale formula è in accordo con i dati della tabella:
b) Riflessione sulla formula per giustificare l'accettazione o l'esclusione della formula stessa; questo riguarda soprattutto l'esclusione della prima e della quarta formula e l'accettazione della terza:
c) Riferimento diretto al fenomeno fisico nell'analisi della formula:

> " La secondo la escludo perchè la lunghezza dell'elastico invece che aumentare diminuirebbe. La terza è esatta perchè secondo me ha aggiunto alla lunghezza dell'elastico, la lunghezza che si formava con la graffetta (facendo 0,2 per il numero delle graffette). Infatti io ho pensato che 0,2 fosse la larghezza di ogni graffetta e quindi lo spazio di elastico che occupa una graffetta."

2. Primi esperimenti
Si consiglia di usare molle di lunghezza uguale, ma di materiale e diametro delle spire diverso e piccoli bulloni inseriti in graffette da appendere alla molla . L'esperimento può essere fatto anche con elastici, più facili da reperire delle molle.
Riportiamo i dati ottenuti nel primo degli esperimenti effettuati in una classe:
Materiali: molla lunga 15,5 cm , graffette N°5, bullone diametro 1 cm.

N	L
0	15,5
1	16,2
2	17,3
3	18,5
4	19,7
5	20,8
6	22
8	24,4
10	26,9
15	32,9
20	38,9
30	50,9

Ai ragazzi viene chiesto (individualmente) di determinare i valori di H e K nella formula loro proposta **L=H+K*N** in modo che essa sia in accordo con i dati sperimentali.
Il valore di H è in modo palese legato alla natura del fenomeno fisico ed è chiaro per tutti che esso rappresenta la lunghezza della molla a riposo. Per ciò che riguarda il valore di K la sua determinazione sembra legata all'analisi della regolarità numerica. I ragazzi procedono per tentativi tanto più strutturati, quanto maggiore è la loro "sensibilità numerica". Infatti i ragazzi più deboli incontrano difficoltà a stimare il valore di K e procedono per tentativi .
Le strategie sviluppate dai ragazzi sono essenzialmente due :
- strategie di tipo "algebrico": tolgo la lunghezza iniziale e trovo di quanto si allunga per un certo numero di graffette e poi divido per il numero di graffette e trovo di quanto si allunga per una graffetta..
- strategie di tipo aritmetico: sommo tutti gli allungamenti fra loro e calcolo la media aritmetica.

Alla fine è importante far riportare sullo stesso riferimento cartesiano i dati sperimentali e quelli teorici ottenuti utilizzando la formula scoperta.
Il secondo esperimento effettuato è stato del tutto simile al primo, si è utilizzato una molla diversa, avente la stessa lunghezza iniziale, ma più "rigida" in modo che fosse diverso il coefficiente di elasticità e fosse possibile un confronto sulla natura fisica della molla. I ragazzi dovevano di nuovo determinare K in modo che la formula fosse in accordo con i dati sperimentali. Anche in questo

caso i ragazzi dovevano riportare sullo stesso riferimento cartesiano i dati sperimentali e i dati matematici.

3. Significato fisico del modello matematico

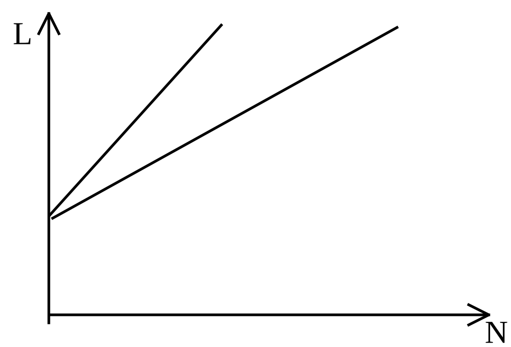
Dopo aver fatto l'esperimento con le due molle di tipo diverso è importante proporre una discussione sul significato fisico di H e K. Nella realtà fisica ci sono tre variabili: la natura della molla, il diametro delle spire e la lunghezza iniziale . Come già detto non ci sono difficoltà ad indicare il significato fisico di H (che nei due esperimenti era lo stesso). Più complesso è individuare quello di K e soprattutto indicare da che cosa dipende. Confrontando i valori, diversi fra loro, che assume K nei due esperimenti molti ragazzi si sono limitati a dire che questo dipende dal tipo di molla, senza ulteriori approfondimenti circa questa diversità.
In questa fase è utile manipolare molle molto diverse fra loro facilmente reperibili nella realtà, come ad esempio molle da biro, molle anti-stress, molle da letto, ecc. Risulta così chiara la dipendenza di K dal tipo di molla scelto (a parità di lunghezza iniziale)..

4. Modello grafico

Il grafico che rappresenta le formule relative ad un fenomeno come quello dell'allungamento della molla appare un mediatore importante per la modellizzazione; in particolare esso serve a discutere della validità o meno del modello del fenomeno espresso dalla formula. Vengono perciò rappresentate su uno stesso riferimento cartesiano le rette che rappresentano le due formule :

a) $L = 15{,}5 + 1{,}18 * N$

b) $L = 15{,}2 + 2{,}1 * N$



L'individuazione di quale fra le due rette corrisponda ad ognuna delle due formule è immediata e si crea così un legame fra fenomeno, grafico e formula: *"quella che va su più in fretta è quella con K maggiore, ed è la molla più tenera*" Si arriva quindi a comprendere che nelle formule date:

- da un punto di vista fisico K rappresenta il "coefficiente di allungamento";
- da un punto di vista geometrico K rappresenta la pendenza della retta.

L'intermediazione del grafico determina un salto verso l'astrazione. Chiedendo di rappresentare sullo stesso riferimento cartesiano le molle manipolate nella fase precedente non è difficile per i ragazzi dire che la molla di un letto avrà un andamento "quasi piatto", mentre la molla anti-stress avrà un grafico "quasi verticale"

5. Trasformare formule, cambiare variabili per esprimere una nuova relazione

Si vuole ordinare ad una ditta che fabbrica molle alcune molle che rispondano alle seguenti caratteristiche:

- sostenere un carico di 50 graffette arrivando ad una lunghezza totale massima di 30 cm
- una lunghezza a riposo della molla contenuta tra 10 cm e 20 cm

Devi stabilire entro quale valore dovrà variare il coefficiente di allungamento di tali molle in modo che siano soddisfatte le condizioni sopra descritte per comunicarlo alla ditta.
Per tale scopo, tenendo conto che la formula che descrive l'allungamento della molla è **L=H+K*N,** sostituisci a L e N valori pertinenti tratti dal testo e prova a trasformarla in modo di esprimere la variazione che può assumere la lunghezza della molla a riposo al variare del coefficiente di allungamento in base alle condizioni espresse dal testo. Rappresenta la formula che hai ricavato in un sistema di assi cartesiani e ricava ciò che vai cercando dalla lettura del grafico.

Con quest’ultima consegna si vuole focalizzare l’attenzione degli alunni sul fatto che la formula dell’allungamento della molla, a seconda di come è posto il problema, può essere usata anche per descrivere una relazione tra variabili, differenti da quelle considerate nelle precedenti attività.
Si tratta di una situazione problematica delicata, molto ricca sul piano formativo, da gestire con particolare cura da parte degli insegnanti.

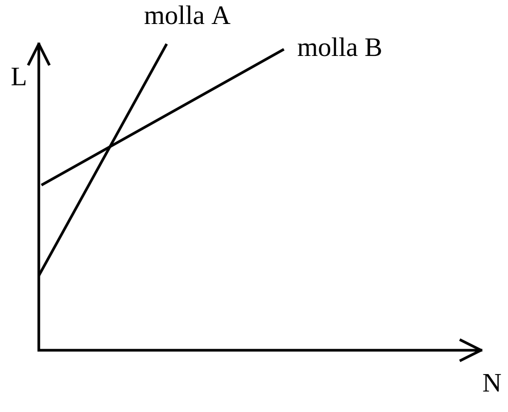
(*) Da idee elaborate nel NRD dell’Università di Genova, sez. scuola media e dal NRD dell’Università di Napoli

Elementi di prove di verifica

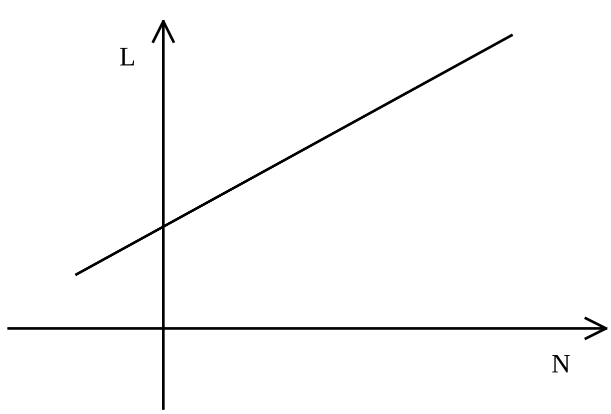
L’allungamento delle molle

Come noto, il grafico sotto riportato può descrivere il fenomeno dell’allungamento di due molle (A e B) dove L rappresenta la lunghezza delle molle e N il numero di graffette ad essa appese.
Utilizzando il grafico prova a descrivere a parole il fenomeno dell’allungamento delle due molle spiegando in particolare che cosa indica:

- il punto di intersezione di ogni grafico con l’asse L
- il punto di intersezione dei due grafici
- la diversa inclinazione o pendenza dei due grafici
- Disegna sullo stesso piano cartesiano il grafico dell’allungamento di una molla che a riposo ha la stessa lunghezza della molla A, e che sia più “dura” della molla B



Considera ora il nuovo grafico sotto riportato che descrive lo stesso fenomeno di allungamento di una molla. Spiega come potresti interpretare la parte di grafico a sinistra dell’asse L



Classificazione degli insiemi numerici

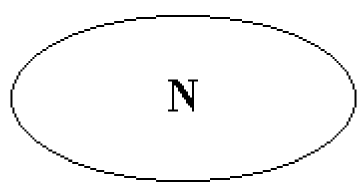
Livello scolare: 3[a] media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni varie, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze Classificare i numeri in base ad una data proprietà Rappresentare relazioni	Relazioni significative Relazioni e loro rappresentazioni	<u>Le relazioni</u> Il numero Argomentare e congetturare	

Contesto
Questa proposta didattica si colloca alla fine della terza media, quando gli alunni conoscono i numeri naturali, gli interi, i razionali e le loro proprietà, ed hanno incontrato anche qualche numero non razionale (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…). A questo punto appare didatticamente proficuo rappresentare i diversi insiemi numerici in una forma organica.

Descrizione dell'attività
L'attività si realizza in varie fasi.

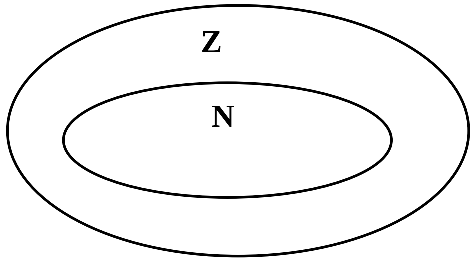
In una prima fase gli alunni conoscono i numeri naturali, cioè i numeri che "servono per contare", e le loro proprietà. Dopo aver acquisito i primi elementi del linguaggio e delle notazioni degli insiemi essi racchiudono i numeri naturali nel circoletto di Eulero – Venn



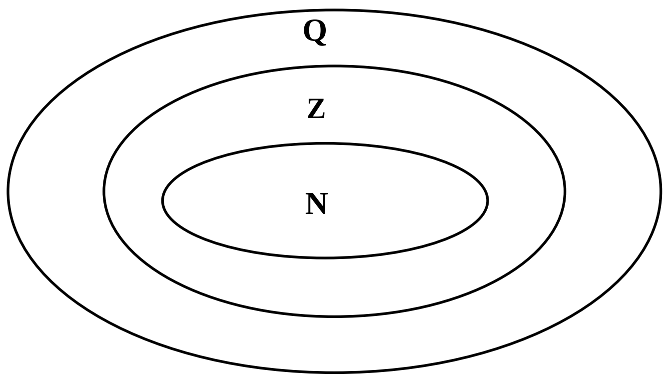
In tal modo iniziano ad acquisire familiarità col concetto "insieme numerico", gli attribuiscono una rappresentazione e lo chiamano con una lettera, nel nostro caso **N.** Un altro momento di riflessione è dato dall'inserimento o meno del numero **zero** nell'insieme dei naturali.
Iniziano anche a conoscere la rappresentazione "fra parentesi graffe": in questo caso

N = { 0, 1, 2, 3, ……. }

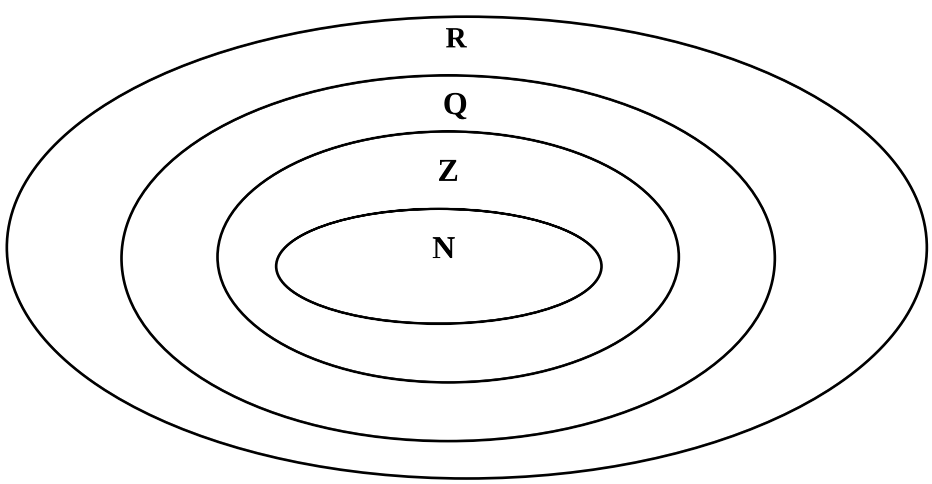
In una seconda fase una discussione matematica sulle operazioni, nel caso specifico della sottrazione e delle sue proprietà, porta naturalmente ad un ampliamento dell'insieme precedente dando luogo a quello dei numeri interi, chiamati comunemente numeri interi relativi, cioè all'insieme dei numeri naturali ampliato con l'insieme dei naturali col segno meno. Tale rappresentazione viene realizzata con un circoletto che "circonda" l'insieme **N.** Questo nuovo insieme viene chiamato **Z**.



Nella terza fase, discutendo sull'operazione di divisione, si giunge con naturalezza ad un ulteriore ampliamento che porta ai numeri razionali, indicati ora con **Q.** E' bene far notare che tali numeri, se rappresentati sotto forma di numeri decimali (numeri con virgola), possono presentarsi come decimali limitati o illimitati periodici; gli stessi numeri, in veste frazionaria, si presentano come frazioni decimali o non decimali, ed i primi sono scritti spesso anche in forma percentuale.



Nell'ultima fase, la determinazione delle misure di alcune grandezze geometriche, conduce gli alunni alla scoperta di altri numeri (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…). che non fanno parte degli insiemi numerici visti finora. Tali numeri (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…). sono usualmente rappresentati in forma decimale non limitata non periodica. Essi sono numeri non razionali e denominati quindi irrazionali. I numeri razionali unitamente ai numeri irrazionali, che saranno affrontati negli studi successivi, sono denominati numeri reali e costituiscono l'insieme **R.**

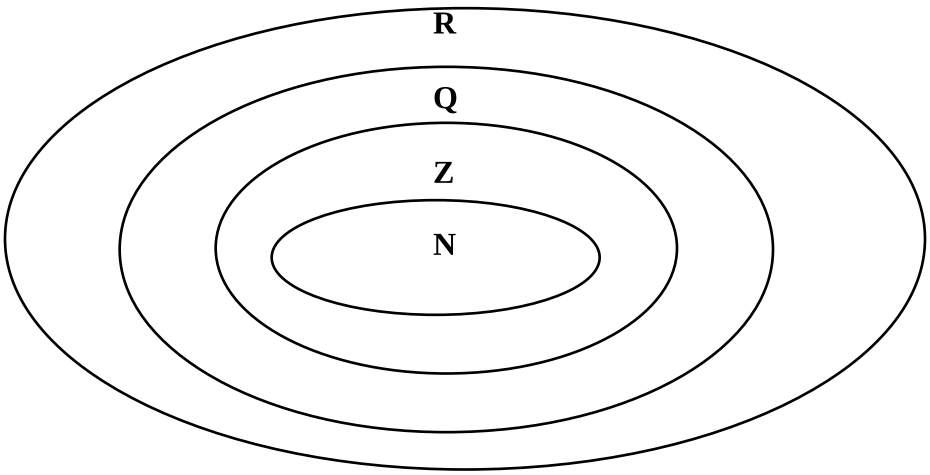


Si giunge così ad una sistemazione dei numeri via via conosciuti, che la rappresentazione insiemistica rende percettivamente visibile. In questa rappresentazione è bene che l'alunno comprenda con chiarezza quali sono i numeri appartenenti a ciascuno degli insiemi considerati e quali quelli che si collocano negli "anelli" compresi tra due insiemi. Ad esempio, l'insieme **Q** dei numeri razionali contiene i naturali, gli interi negativi, i decimali limitati (frazioni decimali) ed i decimali illimitati periodici (frazioni non decimali), preceduti dal segno positivo o negativo. L'anello compreso tra l'insieme **Z** e l'insieme **N** contiene, invece, i soli numeri interi negativi. Il numero 10/5 è nell'insieme **N**, il numero –20/4 è nell'anello compreso tra gli insiemi **Z** ed **N**, il numero 3/7 è nell'anello compreso tra **Q** e **Z** .

Elementi di prove di verifica

1) Colloca nel diagramma di Venn sotto rappresentato i seguenti numeri:

3,5; 0; 3/5; 5/3; -2; √2 ; 10/2



2) Colloca nel diagramma di Venn i numeri 3,5 e 3,25.
Quale di essi è più grande?

3) Scrivi sotto forma decimale il numero 2/5.
Scrivi sotto forma decimale il numero 2/3.
Colloca i due numeri nel diagramma di Venn. Sono nello stesso anello?

4) Colloca nel diagramma di Venn il numero 3%

5) Quali tra le seguenti scritture rappresentano lo stesso numero?

0,50; 5/10; 20/100; 15/30; 50%; 3/15

6) Si indichino tre scritture diverse che rappresentano il numero _ ?

7) Quanti numeri naturali sono compresi tra 3 e 4 ?
Quanti numeri naturali sono compresi tra 3 e 5 ?

8) Esistono numeri decimali limitati compresi tra 3,5 e 3,7 ?
Nel caso esistano, quanti sono?
Nel caso esistano e sono più di uno, se ne indichino almeno due

9) Esistono numeri decimali positivi più piccoli di 0,1 ?
Motivare la risposta.

10) Quale tra le due frazioni 3/5 e 7/5 è la più grande ?
Quale tra le due frazioni 3/10 e 2/5 è la più grande ?

11) Se a e b sono due numeri decimali limitati, la loro media aritmetica (a+b)/2 è anch'essa un numero decimale limitato? Motivare la risposta.

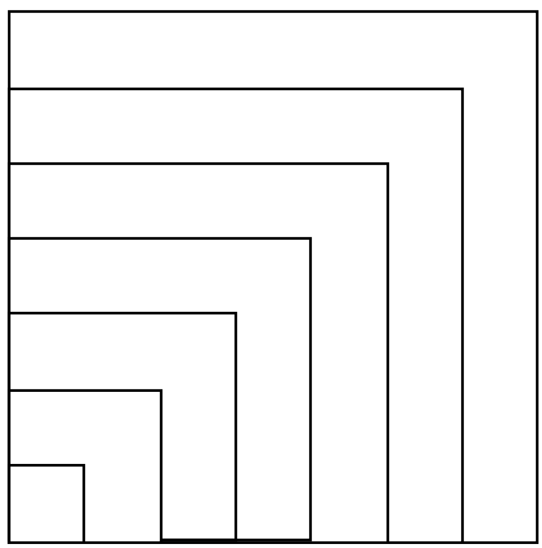
12) Osserva i numeri decimali limitati positivi 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001…..
Rappresentano una sequenza di numeri crescenti o decrescenti?

Elemento di prove di verifica
Quadrati sovrapposti

Livello scolare: 2[a] media
Competenze:

- Costruire, leggere, interpretare e trasformare formule
- Riconoscere relazioni tra grandezze
- Usare coordinate cartesiane, diagrammi, tabelle per rappresentare relazioni e funzioni

Considera i seguenti quadrati (sovrapposti l'uno all'altro) e, col righello, misurane la lunghezza dei lati:



Compila, poi, le seguenti tabelle:

lato (cm) *x*	Perimetro (cm) *y*

lato (cm) *x*	Area (cm^2) *y*

Perimetro (cm) *x*	Area (cm^2) *y*

Per ciascuna di esse indica la legge che lega la variabile y alla variabile x. Sono leggi di proporzionalità? Perché? Se sì, qual è il fattore di proporzionalità?
Rappresentale graficamente in un riferimento cartesiano.

NUCLEO: I dati e le previsioni

Introduzione

La società moderna offre informazioni quantitative in grande abbondanza, differenti per contenuto, tipo di presentazione, qualità e fonte dell'informazione, trasparenza sulla definizione del fenomeno indagato e sul modo in cui i dati sono raccolti, elaborati ed interpretati. Basta leggere un giornale, guardare la televisione, ascoltare la radio, navigare su Internet per trovarsi di fronte a dati statistici. Comprenderne il significato però non è sempre facile. E' perciò necessario aiutare il cittadino ad orientarsi, in modo che egli sappia valutare la qualità dei dati, leggerli, interpretarli ed utilizzarli. I dati, infatti, sono raccolti per essere utilizzati e dunque per dar modo di conoscere o approfondire la conoscenza dei fenomeni collettivi - ossia di quei fenomeni che per essere conosciuti quantitativamente richiedono una collettività di osservazioni di fenomeni più semplici - e per fornire la base su cui, eventualmente, prendere decisioni in condizioni d'incertezza.

Prendere decisioni in condizioni di incertezza è parte della vita quotidiana di ciascuno. Così, prima di uscire da casa, decidiamo di prendere l'ombrello in base alla previsione del tempo (quella ufficiale o quella fatta grazie alla nostra personale esperienza e conoscenza del luogo in cui ci troviamo). Quando dobbiamo fare un acquisto importante, preferiamo raccogliere informazioni presso più rivenditori e confrontare prezzi e modalità di pagamento, piuttosto che rivolgerci al primo rivenditore incontrato.

La realtà è variabile, mutevole, ciò spiega da una parte la necessità di raccogliere informazioni dall'altra la consapevolezza che, nella scelta dell'azione da intraprendere, è possibile commettere errori, per la mancanza di informazioni sufficienti ed anche per la non corretta utilizzazione delle informazioni a disposizione.

Qualunque sia il problema conoscitivo che riguarda un fenomeno collettivo e qualunque sia il motivo da cui tale problema ha origine, per giungere alla sua soluzione è necessario definire ciò che si intende studiare, pianificare la raccolta dell'informazione, raccogliere i dati, rappresentarli, analizzarli, ed interpretarli.

Col fine di contribuire ad una formazione culturale del cittadino che gli consenta di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica, il nucleo "I dati e le previsioni" persegue la costruzione delle seguenti competenze:

"In situazioni varie, relative alla vita di tutti i giorni e ad altri ambiti disciplinari:

- organizzare una ricerca
- interpretare dati usando i metodi statistici
- effettuare valutazioni di probabilità di eventi
- risolvere semplici situazioni problematiche che riguardano eventi
- sviluppare e valutare inferenze, previsioni ed argomentazioni basate su dati"

Il programma della scuola di base è dunque aperto all'esigenza dell'alfabetizzazione statistica dei cittadini e del ragionamento statistico nella completezza del suo "ciclo investigativo": dall'enucleazione e definizione del problema, alla pianificazione della raccolta, al dato, per giungere poi alle conclusioni, passando attraverso la fase fondamentale dell'analisi.

Gli obiettivi specifici di apprendimento relativi alle competenze degli alunni sono cadenzati nella scuola dell'obbligo nel modo che segue.

Scuola elementare

(1°-2° anno)

Raccogliere dati su se stessi e sul mondo circostante e organizzarli in base alle loro caratteristiche

Classificare dati e oggetti

Rappresentare i dati raccolti

Fare osservazioni su un insieme di dati

Identificare la modalità più frequente

(3°-4°-5° anno)
Raccogliere dati mediante osservazioni e questionari
Classificare i dati
Rappresentare i dati con tabelle e grafici
Osservare e descrivere un grafico, usando: moda, mediana e media aritmetica
Confrontare fra loro modi diversi di rappresentare gli stessi dati
In situazioni concrete, riconoscere eventi certi, possibili, impossibili
In situazioni concrete, riconoscere eventi equiprobabili, più probabili, meno probabili.

Scuola media
(1°-2°-3° anno)
Classificare dati ottenuti da misurazioni
Rappresentare dati, anche utilizzando un foglio elettronico, ed interpretarli
Usare ed interpretare misure di centralità e dispersione
Confrontare due distribuzioni rispetto allo stesso carattere
Scegliere, in modo casuale, un elemento da un collettivo
Interpretare in termini probabilistici i risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali e virtuali (giochi, software,….)
Riconoscere eventi complementari, eventi incompatibili, eventi indipendenti
Prevedere, in semplici contesti, i possibili risultati di un esperimento e le loro probabilità.

Tali obiettivi richiedono l’acquisizione dei contenuti essenziali che seguono.
Scuola elementare
(1°-2° anno)
Il collettivo statistico e i suoi elementi
Semplici tabelle di frequenze
Semplici rappresentazioni grafiche
Confronti di frequenze
(3°-4°-5° anno)
Caratteri qualitativi e caratteri quantitativi
Diagrammi di vario tipo
Moda, mediana e media aritmetica
Evento certo, possibile, impossibile
Valutazione di probabilità in casi elementari
Aspetti storici connessi: questioni statistiche nel passato (ad esempio: le prime tavole statistiche sulla natalità e sulla mortalità, sui battesimi e sulle epidemie, nell'Inghilterra del 1600); questioni probabilistici del passato (ad esempio: Gli eventi incerti e le predizioni al tempo dei Greci e dei popoli antichi)

Scuola media
(1°-2°-3° anno)
Caratteri derivanti da misurazioni
Classificazione di dati con intervalli di ampiezza uguale o diversa
Istogramma di frequenze
Calcolo di frequenze relative e percentuali, e loro confronti
Campione estratto da una popolazione: esempi di campioni rappresentativi e non
Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di semplici eventi
Media aritmetica e valore atteso
Aspetti storici connessi: questioni probabilistiche nel passato (ad esempio: I primi giochi con i dadi nella Francia del 1600)

Il programma si sviluppa in modo graduale, introducendo dapprima il problema conoscitivo che porta alla richiesta della raccolta di dati, per giungere alla loro rappresentazione in tabelle e grafici ai quali si perviene utilizzando il concetto base della classificazione e gli strumenti matematici opportuni per la rappresentazione di grandezze. L'interpretazione dei dati raccolti e classificati, e la loro elementare modellizzazione, con l'aiuto degli elementi del calcolo delle probabilità, consente di avviare gli alunni e le alunne ad effettuare semplici ragionamenti induttivi circa la validità ed il modo in cui fare previsioni su una popolazione a partire da un campione.

Il nucleo “I dati e le previsioni” tiene conto del legame con gli altri nuclei fondanti. Così “Il numero” è legato alla classificazione e all'enumerazione che porta alla frequenza assoluta e poi alla frequenza relativa e percentuale. “Lo spazio e le figure” è strettamente connesso alle rappresentazioni grafiche. “Le relazioni” trovano un valido supporto, per la loro comprensione ed utilizzazione nel mondo reale, nel confronto fra distribuzioni statistiche rispetto allo stesso carattere. Basta pensare al confronto delle distribuzione rispetto al sesso di due classi diversamente numerose, o alla relazione fra statura ed età, statura e peso, oppure allo studio della variazione dell'altezza di una pianta nel tempo. E' infine evidente il legame coi nuclei di processo “Risolvere e porsi problemi” e "Argomentare e congetturare” ed anche con “Misurare”. Rispetto a questo ultimo, la risposta a semplici domande del tipo: Quanto sei alto?, Quanto pesi? potrà concorrere a rendere più chiaro sia il problema della individuazione e della scelta di una unità di misura, sia dell'errore di misura, sia del suo trattamento.

I legame con gli altri nuclei è anche sincronico, infatti i contenuti di “I dati e le previsioni” sono articolati in modo che quelli degli altri nuclei fondanti siano o già acquisiti o acquisiti in parallelo. Ciò è possibile riconoscendo la valenza, anche didattica, della “classificazione dei caratteri”. Le informazioni che si raccolgono quando si studia un fenomeno collettivo - caratteri - possono infatti essere espresse o con parole o con numeri. Diviene allora opportuno trattare dapprima i caratteri qualitativi (sesso, colore dei capelli, regione di nascita, mezzo di trasporto usato, ecc.), poi i caratteri quantitativi discreti (numero di fratelli, numeri di sorelle, numero di figurine acquistate, e così via) ed infine i caratteri quantitativi continui (statura, peso, lunghezza, volume, superficie, ecc.). Infatti alla diversa tipologia dei caratteri corrispondono diverse possibilità di elaborazione degli stessi. Poiché tali elaborazioni sono via via più complesse, esse richiedono competenze matematiche adeguate.

Il nucleo "I dati e le previsioni" si pone in posizione peculiare anche rispetto all'uso del computer in classe. Da un punto di vista strumentale l'uso del computer da una parte favorisce la rappresentazione e l'elaborazione dei dati, rendendo meno pesante le applicazioni, dall'altra dà una valida giustificazione all'uso dello strumento che vede, nella costruzione di data-base statistici e nella loro utilizzazione, una applicazione fondamentale per l'organizzazione di una società moderna.

Anche gli aspetti storici della disciplina sono importanti. In particolare, il modo ed il contesto storico in cui il calcolo delle probabilità è nato e si è sviluppato conferisce una maggiore importanza alle attività proposte in classe, mentre il mettere in evidenza come la statistica sia nata dalle esigenze conoscitive pratiche di una società organizzata e da quelle proprie del sapere scientifico induce una maggiore consapevolezza dell'importanza dell'informazione quantitativa.

Bibliografia

M. Di Bacco, E. Lombardo, *Fatti e congetture. Statistica e calcolo delle probabilità*, La Nuova Italia, Firenze, 1990.

G. Leti, *Statistica descrittiva*, il Mulino, Bologna, 1983.

G. Leti, La nascita della statistica e le origini della nuova scienza della natura, in *Induzioni*, 20, 2000.

E. Lombardo, A. Zuliani, *Statistica per esempi*, La Nuova Italia, Firenze, 1988.

M. G. Ottaviani, Statistica nella scuola, motivazioni e problemi, in *Induzioni*, 18, 1999.

A. Quetelet, *Instructions populaires sur le calcul des probabilités*, Bruxelles, 1828 (ristampa ISTAT 1996).

Indice delle attività
Nucleo I dati e le previsioni

Livello scolare	**Titolo**	Contesto	**Collegamenti esterni**
1ª elementare	Iniziamo a conoscerci L'animale preferito	Extramatematico: aspetti del vissuto relativi alle preferenze personali	Lingua italiana
2ª elementare	Continuiamo a conoscerci: maschio o femmina	Extramatematico: aspetti del vissuto personale	Lingua italiana
3ª elementare	Il giorno di nascita	Extramatematico: aspetti del vissuto personale	Lingua italiana
4ª elementare	Certo e incerto: riflessione linguistica sul "mondo della probabilità"	Extramatematico: l'esperienza dell'alunno descritta dalla lingua italiana	Lingua italiana
5ª elementare	Ritrovarsi nelle statistiche ufficiali	Extramatematico: aspetti del vissuto personale	Lingua italiana Storia Geografia Studi sociali

1ª media	Il tempo libero	Extramatematico: educazione alla salute	Italiano Scienze Educazione tecnica
2ª media	Come ci alimentiamo	Extramatematico: educazione alimentare	Italiano Scienze Educazione tecnica
3ª media	Frequenza assoluta o frequenza relativa?	Contesto matematico: lancio di una moneta, prove riopetute	Italiano Educazione tecnica

SCUOLA ELEMENTARE

Iniziamo a conoscerci: l'animale preferito[1]

Livello scolare: 1ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Raccogliere dati su se stessi e sul mondo circostante (la classe) e organizzarli in base alle loro caratteristiche Rappresentare i dati raccolti	Il collettivo statistico e i suoi elementi Semplici rappresentazioni grafiche	<u>Dati e previsioni</u> Numero Relazioni Risolvere e porre problemi Misurare Argomentare e congetturare	Lingua italiana

Contesto extramatematico: aspetti del vissuto relativi alle preferenze personali

Commento
L'ambito nel quale l'attività si inserisce, è quello del "conoscersi", finalizzato alla costruzione del gruppo-classe.
Si tratta di un momento coinvolgente e "caldo" dal punto di vista relazionale, affettivo ed emotivo.
Si chiederà ai bambini e alle bambine:

- di farsi conoscere, di parlare di sé ai compagni, di ascoltare e conoscere gli altri
- di costruire, con la mediazione dell'insegnante, dei quadri descrittivi attraverso cui la classe (il gruppo) venga identificata come un oggetto che le singole individualità contribuiscono a definire.

La scelta degli argomenti su cui lavorare, cominciando ad utilizzare gli strumenti della statistica, sono, come si è detto, fortemente connotati per ciascun bambino. Ciò costituisce un vantaggio e un rischio:
- un vantaggio, perché le rappresentazioni e i simboli racchiuderanno in sé la ricchezza originata da una esperienza vissuta e sentita;
- un rischio perché ciò potrebbe costituire un ostacolo alla rappresentazione e alla simbolizzazione. Infatti nella rappresentazione statistica che, per sua natura, descrive il fenomeno collettivo ma non le singole individualità, il bambino non si ritrova.
Occorrerà quindi rendere evidente la possibilità di "ritorno", in modo tale che il bambino colga, non la perdita della propria individualità, ma la possibilità di ricomporla insieme a quella degli altri, in una dimensione sociale.
Punti di attenzione:

[1] Da un'idea presente nel quaderno delle unità didattiche per la scuola elementare della ricerca "Sperimentazione di nuove strategie didattiche per l'apprendimento della Statistica" del Programma cofinanziato dal MURST e dalle Università di Padova, Palermo, Perugia e Roma . Perugia 1999

- Gestione della discussione
- Rapporto tra la realtà e la sua rappresentazione
- Simbolizzazione

Descrizione dell'attività

La sequenza delle azioni didattiche

In questa attività iniziale il **collettivo statistico** è la classe e le singole **unità statistiche** sono gli allievi; i **caratteri** che si suggerisce di esaminare sono quelli **qualitativi** (ossia quelle caratteristiche che si descrivono con nomi propri o comuni , aggettivi , avverbi …).
Ciò nasce dall'esigenza di strutturare logicamente il percorso didattico in modo tale da evitare la frequente confusione tra espressioni del carattere (**modalità**) e frequenze.
Nell'esperienza qui esemplificata **oggetto dell'osservazione** è: l'animale preferito nella classe prima...
Attraverso questa attività didattica si intende avviare all'acquisizione del metodo per raccogliere ed organizzare dati secondo i principi di una didattica lunga che si fonda sull'acquisizione dei concetti in un conveniente utilizzo della scansione temporale.
Partendo da attività già iniziate nella scuola dell'infanzia si prosegue, nell'arco della scuola elementare, con successivi sviluppi e approfondimenti in modo tale da portare gli alunni all'acquisizione delle competenze specifiche previste. Tale attività si svilupperà attraverso pratiche di gioco e di coinvolgimento che, pur in semplicità di situazioni, consentano l'acquisizione di una corretta procedura.
In sintesi, s'intende far si che bambini e bambine attraverso un graduale avvio giungano progressivamente nel biennio ad acquisire competenze in relazione a:

Elementi concettuali statistici	**Esplicitazione degli elementi concettuali nella attività**
1. Fenomeno collettivo	1. Informazione su preferenze nell'ambito dell' "animale preferito"
2. Collettivo statistico	2. Classe
3. Unità statistica	3. Ogni singolo alunno
4. Carattere	4. Espressione di una preferenza
5. Modalità	5. Cane, gatto , orso …
6. Strumento di rilevazione	6. Domanda posta oralmente
7. Raccolta dei dati	7. I bambini e le bambine rispondono con rappresentazioni iconiche
8. Classificazione del collettivo statistico	8. La discussione di classe può fornire più criteri di classificazione
9. Enumerazione delle unità statisticheË frequenza	9. Utilizzando un criterio di classificazione costruire materialmente i gruppi corrispondenti alle varie modalità ed effettuare il conteggio degli elementi ad esse corrispondenti, il numero ottenuto è la frequenza

La seguente descrizione analitica riporta, a sinistra, la sequenza delle attività in classe e a destra alcune indicazioni metodologico-operative: l'insegnante, attraverso la sua esperienza, saprà adattare i suggerimenti alla situazione-classe nella quale si trova ad operare.

Attivita' didattiche	**Indicazioni metodologico-operative**
L'insegnante avvia una conversazione con gli alunni, nella quale pone il problema di conoscere alcuni aspetti della classe. Per esempio ci si può chiedere quale sia l'animale preferito dalla classe.	Porre attenzione alla gestione della conversazione iniziale e descrivere esaurientemente le consegne.
Per ottenere questa informazione l'insegnante pone la seguente domanda: **"Qual è il tuo animale preferito? Rappresentalo con un disegno su questo foglio".**	Usare fogli delle stesse dimensioni di forma quadrata.
Ogni bambino **disegna** il proprio animale preferito e successivamente **posa** il foglio ove predisposto dall'insegnante.	Predisporre uno spazio su un tavolo, sul pavimento o su un grande cartellone, avendo cura che i disegni raccolti in modo casuale restino ben visibili agli allievi.
Si avvia la **discussione** che farà emergere la necessità di **organizzare i dati.**	Orientare la discussione e consentire che i bambini propongano i loro criteri di classificazione. L'utilizzazione dei criteri emersi permetterà vari tipi di raggruppamenti dei disegni dei bambini.
Si **raggruppano i disegni** secondo i criteri di classificazione emersi.	Utilizzare i criteri emersi per eseguire vari tipi di raggruppamento dei disegni.
Si **sceglie il criterio** che secondo gli alunni meglio si adatta a rappresentare il fenomeno statistico oggetto di studio (animale preferito).	Discutere la scelta del criterio fino a portare gli alunni alla costruzione di un pittogramma.
Si costruisce su cartellone la rappresentazione condivisa dalla classe.	La costruzione del cartellone può essere realizzata attraverso i seguenti passaggi: disporre i disegni, animale per animale (cioè organizzati in base alle modalità), uno accanto all'altro, avendo come riferimento immagini guida fornite dall'insegnante Si otterrà così un pittogramma nel quale ogni bambino potrà ancora riconoscere la propria preferenza.
Si riprende il "perché" si è avviata la rilevazione delle singole preferenze e si pone la domanda: " possiamo ora conoscere qual è l'animale preferito nella classe?"	Il pittogramma permette di rispondere alla domanda posta inizialmente (l'animale preferito dalla classe) e di ricavare anche altre informazioni quali: "L'animale che ha raccolto meno preferenze nella classe è…", "Nella classe, c'è o non c'è qualcuno che preferisce l'orso"….. l'ippopotamo………

Si propone quindi ai bambini di riprodurre le informazioni del cartellone nel proprio quaderno. Ogni bambino disegna un animale guida seguito da tante crocette uguali quanti i corrispondenti disegni del cartellone.	Discutere la difficoltà (sia in termini di tempo che di fatica) di riprodurre convenientemente tutti i disegni e pervenire alla conclusione che si può sostituire ad ogni disegno un segno convenzionale (pupazzetto, simile, o crocetta) perché anche questa rappresentazione permette il conteggio e le risposte alle domande esemplificate prima.

Continuiamo a conoscerci : maschio o femmina[1]

Livello scolare: 1°o 2° elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Raccogliere dati su se stessi e sul mondo circostante (la classe) ed organizzarli dati in base alle loro caratteristiche Rappresentare i dati raccolti Classificare dati e oggetti Descrivere un insieme di dati Identificare la modalità più frequente	Il collettivo statistico e suoi elementi Semplici rappresentazioni grafiche Semplici tabelle di frequenze Confronti di frequenze	<u>Dati e previsioni</u> Numero Relazioni Risolvere e porre problemi Misurare Argomentare e congetturare	Lingua italiana

Contesto extramatematico: il vissuto del bambino

Commento
L'ambito nel quale l'attività si inserisce, è quello di continuare il processo di conoscenza all'interno della classe.
Come già detto, si tratta sempre di un momento coinvolgente e "caldo" dal punto di vista relazionale, affettivo ed emotivo.
L'argomento scelto per questa attività ha una connotazione affettiva minore di quella precedente, peraltro presenta connotazioni formative un po' più complesse.
Punti di attenzione:
- Gestione della discussione
- Rapporto tra la realtà e sue forme di rappresentazione
- Simbolizzazione

Nell'esempio proposto si trovano i seguenti elementi concettuali statistici:

[1] Da un'idea presente nel quaderno delle unità didattiche per la scuola elementare della ricerca "Sperimentazione di nuove strategie didattiche per l'apprendimento della Statistica" del Programma cofinanziato dal MURST e dalle Università di Padova, Palermo, Perugia e Roma . Perugia 1999

Elementi concettuali statistici	**Esplicitazione degli elementi concettuali nella attivita'**
1. Fenomeno collettivo	1. Informazione sulla composizione di un collettivo rispetto al sesso
2. Collettivo statistico	2. Classe
3. Unità statistica	3. Ogni singolo alunno
4. Carattere	4. Sesso
5. Modalità	5. Maschio, femmina
6. Strumento di rilevazione	6. Domanda posta oralmente
7. Raccolta dei dati	7. I bambini e le bambine rispondono attraverso una rappresentazione materiale
8. Classificazione del collettivo statistico	8. La classificazione si attua raggruppando le rappresentazioni materiali rispetto a ciascuna delle due modalità
9. Enumerazione delle unità statisticheË frequenza	9. Effettuare il conteggio degli elementi del gruppo corrispondenti ad ogni modalità e scrivere il numero ottenuto (frequenza assoluta).
10. Tabella di frequenze	10. Costruire la tabella di frequenze (titolo; modalità; frequenza)

La descrizione delle attività è affiancata da una colonna che riporta alcuni suggerimenti: l'insegnante, attraverso la sua esperienza, saprà adattare i suggerimenti alla situazione-classe nella quale si trova ad operare.

Attivita' didattiche	**Indicazioni metodologico-operative**
L'insegnante, attraverso una conversazione, fa emergere l'esigenza di conoscere la composizione della classe rispetto al sesso.	Anche se la classe sa quanti sono i maschi e quante le femmine, si tenga presente che il fine dell'attività è la rappresentazione, utilizzata ad esempio per la comunicazione ad altri.
L'insegnante mette a disposizione dei bambini dei cartellini.	Preparare dei cartellini rettangolari, dello stesso colore e della stessa altezza ma con basi diverse. Si consiglia di predisporne un numero abbastanza grande al fine di permetterne la scelta.
L'insegnante predispone un cartellone con le due immagini guida di riferimento e invita i bambini a scegliere un cartellino e ad apporlo sul cartellone uno giustapposto all'altro.	Porre attenzione al seguente nodo concettuale: la modalità operativa proposta dovrà produrre due strisce di lunghezza non proporzionale al numero dei cartellini che le

	formano. Ciò indurrà una percezione visiva non corrispondente al numero effettivo dei maschi e delle femmine.
Attraverso domande-stimolo, l'insegnante avvia una discussione che evidenzi l'errore indotto dalla percezione visiva, ne ricerchi le cause e fornisca congetture risolutive per il suo superamento.	Porre attenzione alla gestione della discussione in modo che si arrivi a condividere l'idea che il numero consente di superare l'errore indotto dalla percezione visiva
L'insegnante prevede sul cartellone a destra una terza colonna dove sarà inserito, per ogni modalità, il risultato del corrispondente conteggio (frequenza assoluta)	Valorizzare il risultato ottenuto come elemento significativo per la costruzione della tabella di frequenze
L'insegnante ricorda la finalità comunicativa dell'attività e conduce la classe a cogliere le informazioni essenziali del cartellone, sintetizzandole in una tabella.	Costruire la tabella di frequenze utlizzando le modalità guida della prima colonna e i corrispondenti numeri della terza colonna. Fare emergere la necessità che, per comunicare correttamente le informazioni ad altri, è necessario dare un titolo alla tabella.

A questo punto l'attività può proseguire con la costruzione del diagramma a barre a partire dalla tabella di frequenze. Si ritiene utile suggerire di far realizzare agli alunni la stessa attività, facendo loro raccogliere i dati relativi al collettivo statistico di un'altra classe della

Il giorno di nascita[1]

Livello scolare: 3^{a} elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Raccogliere dati mediante osservazioni e questionari Classificare i dati Rappresentare i dati con tabelle e grafici Osservare e descrivere un grafico usando moda, (mediana e media aritmetica) Riconoscere eventi certi,possibili,impossibili, equiprobabili, più probabili, meno probabili.	Diagrammi di vario tipo Moda	<u>I dati e le previsioni</u> Il numero Relazioni Risolvere e porsi problemi Misurare Argomentare e congetturare	Lingua Italiana

Contesto extramatematico: il vissuto dell'alunno

Commento

Questa attività vuole approfondire alcuni contenuti relativi ai dati e alle previsioni rilevando sempre caratteri appartenenti ai bambini della classe. Dopo avere attuato delle semplici rilevazioni di dati con caratteri le cui modalità venivano espresse da un "attributo" si cominciano ad utilizzare dati espressi con numeri . È importante tenere conto che nell'**attività proposta i dati sono <u>numeri ordinali</u>, che indicano l'ordine progressivo dei giorni (non godono pertanto della proprietà della somma). Il carattere cui la rilevazione si riferisce è ancora qualitativo, ma esso è ora ordinabile** (mentre gli esempi precedenti trattavano caratteri qualitativi sconnessi).

Inoltre si utilizza questa rilevazione per introdurre la rappresentazione grafica del diagramma ramo-foglia particolarmente significativa ed utile per rappresentare dati di questo tipo e non solo.

L'attività permetterà poi di introdurre semplici previsioni basate sulle conoscenze possedute dai bambini.

Punti di attenzione:

- Gestione della discussione
- Rapporto tra la realtà e sue forme di rappresentazione
- Simbolizzazione

[1] [1] Da un'idea presente nel quaderno delle unità didattiche per la scuola elementare della ricerca "Sperimentazione di nuove strategie didattiche per l'apprendimento della Statistica" del Programma cofinanziato dal MURST e dalle Università di Padova, Palermo, Perugia e Roma . Perugia 1999

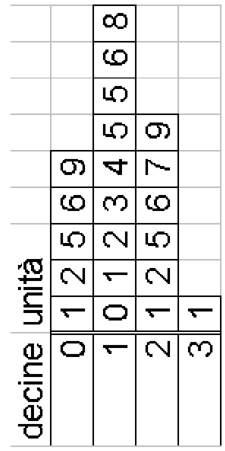
Nella proposta di attività si trovano i seguenti elementi concettuali statistici:

ELEMENTI CONCETTUALI STATISTICI	ESPLICITAZIONE DEGLI ELEMENTI CONCETTUALI NELLA ATTIVITA’
1. Fenomeno collettivo	1. Informazione sulla composizione di un collettivo rispetto al giorno di nascita
2. Collettivo statistico	2. Classe
3. Unità statistica	3. Ogni singolo alunno
4. Carattere	4. Giorno del mese di nascita
5. Modalità	5. 1,2,3………31
6. Strumento di rilevazione	6. Domanda posta oralmente
7. Raccolta dei dati	7. I bambini e le bambine rispondono attraverso una rappresentazione materiale
8. Classificazione del collettivo statistico	8. La classificazione si attua raggruppando gli alunni secondo la decade di nascita
9. Rappresentazione ramo foglia	9. Rappresentazione di ramo corrispondente alle decine (0, 1, 2, 3) e di foglie corrispondenti alle unità (0, 1, …., 9)

La descrizione analitica che segue riporta, a sinistra, la sequenza delle attività in classe e , a destra, alcune indicazioni metodologico-operative: l’insegnante, attraverso la sua esperienza, saprà adattare i suggerimenti alla situazione-classe nella quale si trova ad operare.

ATTIVITA’ DIDATTICHE	INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE
L’insegnante, attraverso una conversazione, fa emergere l’esigenza di conoscere come si distribuisce la classe rispetto al giorno di nascita.	
L’insegnante mette a disposizione dei bambini i cartellini preparati e li invita a scrivere il proprio giorno di nascita, apponendo nella parte sinistra la decina e a destra l’unità.	Preparare dei cartellini rettangolari uguali divisi verticalmente a metà da una riga colorata. I bambini\e se nati nella prima decade del mese potranno chiedere se devono scrivere al posto delle decine 0 o se possono non scrivere nulla. E’ conveniente per costruire il

<table>
<tr><td></td><td>ramo apporre lo zero (anche di uso comune nelle date).
Tale richiesta potrà essere anche utilizzata per un “ripasso” relativo alla scrittura dei numeri e al sistema posizionale.</td></tr>
<tr><td>L’insegnante chiede: “ secondo voi ci sarà una decina che risulterà perdente?”
(*)</td><td>Questa domanda fatta prima della rilevazione dovrebbe indurre, attraverso una conversazione, alla consapevolezza che la decina del “3” ha, nel caso dei giorni dei mesi, solo due modalità per essere presente: 0, 1.</td></tr>
<tr><td></td><td>L’insegnante predispone un cartellone diviso in due parti: sopra a quella di sinistra appone la scritta “ decine”, sopra quella di destra “ unità”.</td></tr>
<tr><td>L’insegnante invita i bambini a dividere secondo la riga il proprio cartellino e ad apporre la prima parte sotto alle decine, sovrapponendo i vari cartellini, e ad apporre la seconda sotto le unità, giustapponendo i cartellini individuali.</td><td>Esempio di rappresentazione che si potrà ottenere:
<table>
<tr><td>decine</td><td>unità</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>5</td><td>9</td><td>6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>0</td><td>2</td><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>7</td><td>6</td><td>2</td><td>9</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>L’insegnante chiede ai bambini se la congettura del punto (1) può essere confermata osservando la rappresentazione ottenuta.
L’insegnante avvia una discussione per giungere alla opportunità dell’ordinamento delle “foglie” della rappresentazione.
L’insegnante fa controllare se, per ogni ramo, il numero dei foglietti relativi alle decine, sovrapposti tra loro, corrisponde al numero delle foglie.</td><td>Esempio di diagramma ordinato per foglie:
<table>
<tr><td>decine</td><td>unità</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Ordinato, controllato e intitolato il digramma ramo – foglia i bambini vengono invitati a fare le loro osservazioni, esprimendo quali informazioni possono essere ricavate dal diagramma costruito.</td><td>Domande che l’insegnante può porre ai bambini (oralmente o per iscritto) o far nascere conversando con la classe:
- Quanti sono i rami?
- Quale ramo ha più foglie (vince)?
- Il primo ramo a quale decina corrisponde?
- Nella prima decina (ramo dello 0) puoi trovare il valore 0 delle unità? Perché?
- Nella quarta decina (ramo del 3) puoi trovare la foglia 6? Perché? E quella del 2?
- …………..</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>L’insegnante ruota il cartellone di 90° e chiede ai bambini di fare le loro osservazioni. La classe dovrebbe notare come la rappresentazione corrisponda ad un grafico a barre verticali, nel quale al posto delle crocette vi sono i singoli valori.</td>
<td>Si otterrà un diagramma del tipo:


Notare che in questo grafico si mantengono tutte le informazioni di un diagramma a barre verticali, ma senza perdere l’informazione sulle singole unità statistiche.
Valutare l’opportunità di sostituire, ordinatamente, all’ “etichetta”: decina 0, decina 1, decina 2, decina 3, l’espressione ordinale: 1° decina, 2°decina, 3° decina, 4° decina.</td>
</tr>
<tr>
<td>L’attività si può concludere trasformando il diagramma in una tabella di frequenze e denominando “ moda” la decade che “ vince”, cioè che ha frequenza assoluta maggiore come già si poteva osservare nel diagramma ramo-foglia (colonnina di foglie più alta)</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Elementi di prove di verifica

VERIFICA 1

Viene presentato all’alunno il seguente diagramma ramo-foglia sull’età delle mamme di una classe.

	ETA' MAMME												
2	9												
3	3	4	5	5	5	5	6	7	8	8	8	9	9
4	3	3	4	4	5								
5	0												

Si chiede quindi di rispondere alle seguenti domande:

- Qual è il ramo con più foglie?
- Ci sono mamme che hanno 30 anni? E 31 anni?

- Qual è il ramo con meno foglie?
- Qual è l’età della mamma più giovane?
- Ci sono delle mamme che hanno la stessa età?
- Qual è l’età che si presenta il maggior numero di volte?

Trasforma il diagramma in una tabella di frequenze.

Certo e incerto: riflessione linguistica sul “mondo della probabilità”[1]

Livello scolare: 4ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere gli eventi certi, possibili, impossibili, equiprobabili, meno probabili	Evento certo, possibile, impossibile. Valutazione di probabilità in casi elementari	<u>I dati e le previsioni</u> Argomentare e congetturare	Lingua italiana

Contesto extra-matematico: esperienze dell’alunno descritte mediante la lingua italiana

Commento

L’attività si propone di indurre negli allievi una riflessione linguistica sul “mondo della probabilità”.
Si intende far acquisire la consapevolezza che la varietà e la ricchezza dei termini che si incontrano nel linguaggio ordinario per esprimere “l’incerto”, il “probabile”, il “verosimile”, fanno riferimento ad un ampio ventaglio di contesti e situazioni che si presentano nella vita quotidiana; quando, invece, si passa all’uso formale dei termini in campo scientifico, nasce la necessità di definire in maniera precisa e in termini quantitativi la nozione di probabilità.
L’attività è corredata da prova di verifica.

Descrizione dell’attività

<u>Elementi concettuali:</u>

- Certezza e incertezza basata sulla totalità/non totalità di informazioni
- Declinazione del certo (vero = certamente certo / falso = certamente impossibile)
- Espressione dell’incerto
- Declinazione dell’incerto, di tipo qualitativo

La descrizione analitica che segue riporta, a sinistra, la sequenza delle attività in classe e, a destra, alcune indicazioni metodologico-operative: l’insegnante, attraverso la sua esperienza, saprà adattare i suggerimenti alla situazione-classe nella quale si trova ad operare.

ATTIVITA’ DIDATTICHE	INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE
L’insegnante può proporre agli alunni/e una frase del tipo: ***“Oggi siamo tutti presenti”*** Gli alunni possono attribuire immediatamente un valore di verità/falsità all’affermazione dell’insegnante.	E’ bene che l’insegnante affermi il falso, in modo da provocare una discussione sulla possibilità o meno di attribuzione del valore di verità e in base a cosa ciò sia possibile.

[1] Da un’idea presente nel Quaderno di aggiornamento n°1 del C.R.D. “U. Morin” di Maria Pia Perelli - 1991

L’insegnante, successivamente, fa una seconda affermazione relativa ad un’altra classe: ***“Nella classe … oggi gli alunni sono tutti presenti”*** Gli alunni si rendono conto che a questa seconda affermazione non è possibile attribuire immediatamente un valore di verità: si può attivare una **ricerca di informazioni**. Ad es: due rappresentanti della classe si recano nella classe … e acquisiscono l’informazione che permette di attribuire il valore di verità alla seconda affermazione.	
L’insegnante chiede, ora, di riformulare le frasi predette supportate dalle informazioni note e raccolte. Le frasi potrebbero essere: certamente oggi… sicuramente oggi… è certo che…	Una riflessione su queste espressioni dovrebbe far emergere come alcuni termini hanno arricchito la frase iniziale di un nuovo elemento (indicazione di certezza)
L’insegnante fa una nuova affermazione seguita da una domanda-stimolo: ***“Domani saremo tutti presenti”*** ***“…è vero?”***	La domanda stimolo indurrà gli alunni a riflettere sul fatto che non è possibile attribuire un valore di verità all’affermazione, dal momento che per quante informazioni si reperiscano esse non saranno comunque sufficienti per permettere di attribuire un valore di verità o di falsità alla frase. Difatti non siamo in grado di conoscere tutto ciò che, da oggi a domani, potrebbe portare ad un cambiamento della situazione odierna.
A questo punto l’insegnante chiede di riformulare la frase. Le frasi riformulate potrebbero essere: - “**Forse** domani saremo tutti presenti” - “E’ **quasi** sicuro che domani saremo tutti presenti” - “E’ **facile** che…” - “E’ **probabile** che…” - “E’ **possibile** che…” - “E’ **molto** probabile…” - “E’ **poco** probabile…” - “E’ **abbastanza** probabile…”	La discussione delle nuove frasi farà emergere quanto esse siano adatte a descrivere la situazione di domani che è incerta: difatti qualunque enunciato, del tipo vero o falso, potrà essere smentito o reso vero solo nel manifestarsi dell’evento, l’indomani.
Si propone, poi, un confronto tra le frasi: - “E’ poco probabile…” - “E’ probabile…” - “E’ molto probabile…”	Queste frasi esprimono non solo l’incertezza della situazione, ma la qualificano, nel senso che ne esprimono un certo grado. Esse rappresentano, tramite il linguaggio, situazioni che, pur sempre incerte ,hanno maggiori possibilità di manifestarsi verso il certo (vero) o verso l’impossibile (falso)
A questo punto l’insegnante può proporre una	Gli alunni sono guidati a cogliere la varietà e la

ricerca linguistica sul vocabolario di termini del tipo: casuale, accidentale, fortuito, eventuale, impensabile, imprevedibile , insperato, occasionale……	ricchezza di termini del linguaggio ordinario e a metterli in relazione ad eventi o situazioni concrete.

Possibili sviluppi dell'attività sopra descritta.

1. Per stimolare ulteriormente la riflessione linguistica, l'insegnante può utilizzare altre affermazioni del tipo:

"**Forse** domani pioverà"
- incertezza espressa dalla parola **forse**
- necessità di attivare una ricerca di informazioni tramite previsioni metereologiche

"E' **molto probabile** che l'attaccante della mia squadra del cuore non giochi domenica, poiché, durante l'allenamento di oggi, si è infortunato"
- incertezza espressa in modo qualificativo verso il certo
- necessità di reperire ulteriori informazioni tramite il bollettino medico della squadra

"Sto rientrando dal week-end in automobile, **presumibilmente** arriverò entro due ore"
- incertezza espressa dalla parola **presumibilmente**
- necessità di reperire informazioni sulla viabilità, sul tempo atmosferico, sull'esperienza dei week-end precedenti

"È **poco probabile** che riesca a finire questo lavoro entro stasera"
- incertezza espressa in modo qualificativo verso l'impossibile
- necessità di interrogarsi sulla quantità di lavoro che rimane da svolgere, sull'impegno che si è disposti a mettere, sul proprio grado di stanchezza, …

2. La proposta che segue può essere svolta nel momento in cui siano state consolidate le competenze linguistiche precedentemente acquisite, sia perché risulta più articolata, sia perché implica il passaggio dalla descrizione intuitiva e qualitativa delle situazioni incerte ad una valutazione quantitativa. Tale passaggio è in qualche modo facilitato dalla visualizzazione, sotto riportata, dei giorni dell'anno.
La proposta si basa sull'attività descritta per la terza classe elementare, denominata "GIORNO DI NASCITA" ampliandola.
L'insegnante chiede nuovamente alla classe:
"Secondo voi, è più probabile che un giorno di compleanno "cada"

- nella prima decade
- nella seconda decade
- nella terza decade
- nella quarta decade ?

Dopo una prima risposta, ragionevolmente argomentata(le foglie del ramo 3 sono poche, il ramo della terza decina non può avere il 2, il 3……)
Si proporrà la costruzione o si presenterà la seguente rappresentazione dei giorni dell'anno:

G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	
3	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	Prima decade
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	
6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	
7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	
8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	
11	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	
12	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	Seconda decade
13	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	
14	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	
15	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	
16	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	
17	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	
18	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	**18**	
19	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	**19**	
20	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	
21	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	
22	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	
23	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	Terza decade
24	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	**24**	
25	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	
26	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	**26**	
27	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	**27**	
28	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	**28**	
29		**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	Quarta decade
30		**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	

Gli alunni potranno mettere ora in atto diverse strategie di soluzione per calcolare quanti giorni fanno parte della prima decade (108), della seconda decade (120), della terza (119), della quarta (18) per pervenire ad una di probabilità dell'evento " essere nati in una certa decade" supportata da un calcolo.

Elementi di prove di verifica

Verifica 1

a. Si propone la seguente frase:
"Penso che domani tutti i bambini della quarta… avranno il merendino"
Si chiede quindi all'alunno di riformulare questa frase con altre modalità linguistiche, mantenendo sempre la stessa valenza di significato.

b. Si chiede di formulare alcune frasi con valore di incertezza, esplicitando gli elementi contenuti:
- frase: ……………………………………………………………
- valore di incertezza dato dalla parola:
…………………………………………………………….
- raccolta di informazioni e conoscenze che danno significato alla previsione:
………………………………………………………………………………………………
……..

c. Le frasi che seguono descrivono la stessa situazione: cancella quelle che non ti sembrano linguisticamente coerenti con il valore di certezza:

- penso che domani andrò a comprare un paio di scarpe nuove
- probabilmente domani andrò a comprare un paio di scarpe nuove
- sicuramente domani andrò a comprare un paio di scarpe nuove
- è poco probabile che domani andrò a comprare un paio di scarpe nuove
- domani, è certo, andrò a comprare un paio di scarpe nuove
- domani, sicuramente non andrò a comprare un paio di scarpe nuove

Ritrovarsi nelle statistiche ufficiali[1]

Livello scolare: 5ª elementare

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Raccogliere dati (mediante osservazioni e questionari) Classificare dati Rappresentare i dati con tabelle e grafici Osservare e descrivere un grafico usando: moda, mediana e media aritmetica Confrontare tra loro modi diversi di rappresentare gli stessi dati	Caratteri qualitativi e caratteri quantitativi Diagrammi di vario tipo Moda, mediana e media aritmetica	<u>Dati e previsioni</u> Argomentare e congetturare	Lingua italiana Storia Geografia Studi sociali

Contesto extramatematico: aspetti della realtà di tipo demografico, territoriale

Commento
L'attività si inserisce in un processo di alfabetizzazione, nel quale la Statistica, svolge un ruolo primario di conoscenza oggettiva. Essa tramite i suoi strumenti permette di analizzare criticamente le informazioni di cui si è in possesso in modo da essere meno soggetti ad informazioni tendenziose. La massa crescente di informazioni, che bombardano quotidianamente il comune cittadino, gli impone la conoscenza in cui le informazioni vengono raccolte, rappresentate, sintetizzate, comunicate, utilizzate e del corrispondente linguaggio.
Troppo spesso nell'attività didattica si privilegia la rilevazione diretta di informazioni, con tutti i rischi ad essa connessi, quali, ad esempio, la difficoltà a porre le domande "giuste" per ottenere le informazioni che si desiderano, ad usare la strumentazione per organizzare, classificare ed elaborare i dati ottenuti tramite la rilevazione, a costruire campioni adeguati per estendere i risultati ottenuti alla popolazione che si vuole conoscere.
È opportuno che la scuola utilizzi sempre di più le raccolte di dati ricche di informazioni, che portano la garanzia dell'Istituto Nazionale di Statistica. Tali rilevazioni permettono di conoscere una molteplicità di aspetti del nostro Paese, di comprenderne l'evoluzione demografica, economica e sociale in sé stessa e in confronto all'Europa (L'ISTAT appartiene al sistema europeo di rilevazione EUROSTAT che può offrire dati comparabili all'interno dell'UE).
Fornire agli allievi strumenti di lettura delle statistiche ufficiali significa dare loro importanti strumenti per essere cittadini informati,consapevoli e critici.

Punti di attenzione:
- Gestione della discussione
- Rapporto tra la realtà e sue forme di rappresentazione numerica tabellare

[1] Da un'idea di Perelli-Fiini (Ritrovarsi nelle statistiche ufficiali – tesi di corso di perfezionamento – Brescia 1996

Descrizione dell' attività

Nella proposta di attività abbiamo i seguenti elementi concettuali statistici:

ELEMENTI CONCETTUALI STATISTICI	ESPLICITAZIONE DEGLI ELEMENTI CONCETTUALI NELLA ATTIVITÀ [2]
1. Fenomeno collettivo	1. Informazioni su aspetti demografici, sociali, geografici
2. Collettivo statistico	2. Popolazione italiana residente
3. Unità statistica	3. Residente
4. Carattere	4. Regione di residenza
5. Modalità	5. Piemonte, Valle d'Aosta,…
6. Raccolta dei dati	6. Fonti statistiche ufficiali

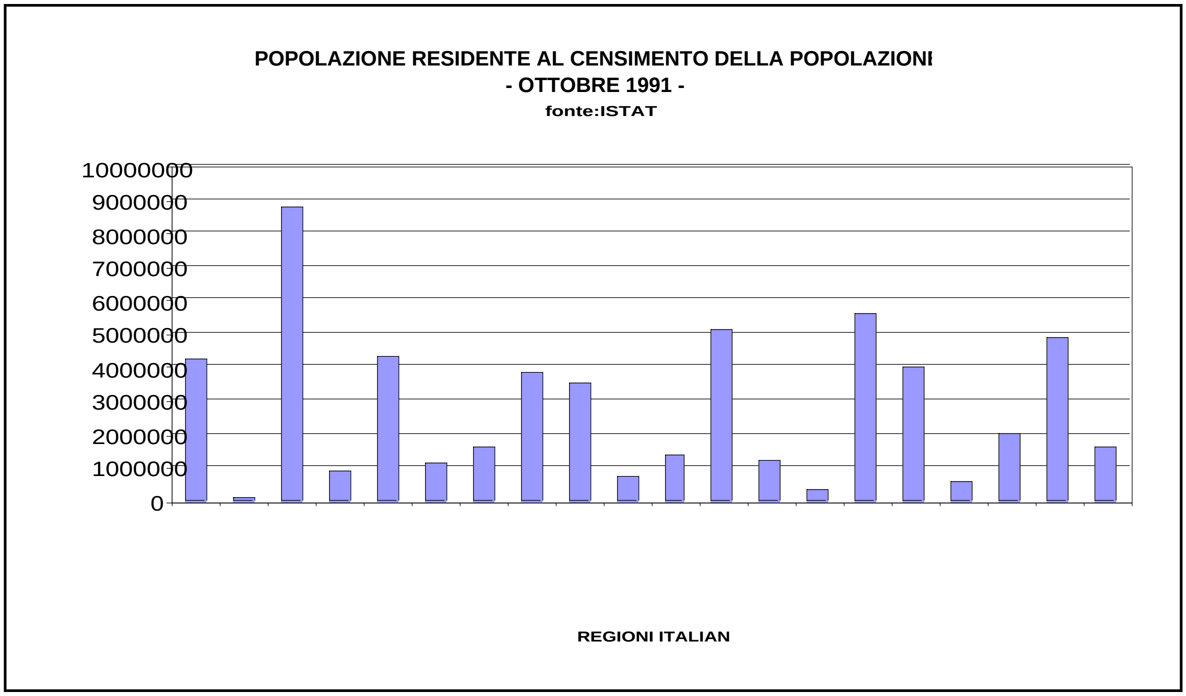
La descrizione analitica che segue riporta, a sinistra, la sequenza delle attività in classe e, a destra, alcune indicazioni metodologico-operative: l'insegnante, attraverso la sua esperienza, saprà adattare i suggerimenti alla situazione classe nella quale si trova ad operare.

ATTIVITA' DIDATTICHE	INDICAZIONI METODOLOGICHE-OPERATIVE
L'insegnante invita gli alunni a raccontare se, e in quali contesti, hanno incontrato tabelle e rappresentazioni statistiche di dati.	La conversazione viene avviata allo scopo di indagare quali esperienze hanno gli alunni e le alunne rispetto alle raccolte di dati statistici.
In seguito, chiede loro di ricercare tabelle o grafici che riportino raccolte di dati.	Ad esempio si potrebbe suggerire agli alunni di ritagliarne alcuni da giornali e riviste.
Vengono raccolti tutti i ritagli che riportano tabelle.	
Agli alunni viene chiesto di identificare gli elementi che inducono a pensare che questa sia una vera e propria raccolta di dati: collettivo di riferimento, carattere, modalità, data, frequenze (assolute o percentuali)	In questo passaggio l'insegnante può avviare un "ripasso" degli elementi concettuali propri della statistica, stimolando la ricerca della loro identificazione in una tabella pubblicata, e consolidando, nello stesso tempo, la capacità di leggere la tabella stessa.
L'insegnante a questo punto chiede alla classe: **"Chi prodotto questi dati?"**	La conversazione viene, in questo modo, portata sulla FONTE che diviene ulteriore elemento caratterizzante di una tabella di una rappresentazione statistica.

[2] L'esplicitazione degli elementi concettuali farà riferimento alle indagini ufficiali scelte dal docente (quelle individuate fanno riferimento ad esempio al Censimento della Popolazione 1991).

L'insegnante propone di selezionare il materiale raccolto, in modo da prendere in considerazione solo materiale di fonte ufficiale (ISTAT, Regione, Provincia, Comune, eventuale Quartiere o Circoscrizione) eliminando le tabelle e i grafici che non riportino la fonte prescelta.	La riflessione sulla indicazione della fonte, può divenire spunto per avviare ad una riflessione più consapevole rispetto all'utilizzo di rilevazioni statistiche o parti di rilevazioni statistiche.
L' insegnante a questo punto potrebbe presentare agli alunni/e alcune tabelle di fonte ufficiale (Regione, Comune di residenza, …) e chiedere loro se ritengono di "essere stati contati" tra le frequenze di qualche tabella	Le indagini devono essere scelte opportunamente, in modo tale che gli alunni si possano rendere conto di come una rilevazione statistica sia esplicativa rispetto ad una loro caratteristica individuale

Riportiamo 2 possibili esempi:
1.Si presenta agli alunni il grafico seguente



(Il grafico è riferito al Censimento 1991; è ovvio che vada sostituita con quella del Censimento in atto non appena disponibile.)

L'insegnante chiede:
Osservando il grafico
- evidenzia la colonna dove sei stato inserito

e rispondi alle seguenti domande:
- i tuoi nonni paterni sono inseriti nella stessa colonna
- i tuoi nonni materni sono inseriti nella stessa colonna
- se no, in quale?
- Quale regione ha più residenti; quale meno; perché?
- Puoi individuare (con una certa approssimazione) qual è la popolazione della Puglia? E della Valle d'Aosta? E della Campania? …

Avendo a disposizione i dati relativi al Censimento 2001, si potranno attuare confronti ed ulteriori riflessioni.

2. La classe ricerca l’altitudine del comune dove è ubicata la scuola.
L’insegnante a tal fine chiede:
Osservando la seguente tabella, in quale casella ritroviamo il territorio dove è situata la nostra scuola?

SUPERFICIE TERITORIALE PER ZONA ALTIMETRICA E AREA GEOGRAFICA
Anno 1999, ettari
Fonte: ISTAT

	MONTAGNA	COLLINA	PIANURA	TOTALE
Nord	5 531 787	2 272 918	4 187 456	11 992 161
Centro	1 576 034	3 723 859	535 469	5 835 362
Mezzogiorno	3 502 927	6 548 037	2 255 354	12 306 318
Italia	**10 610 748**	**12 544 814**	**6 978 279**	**30 133 841**

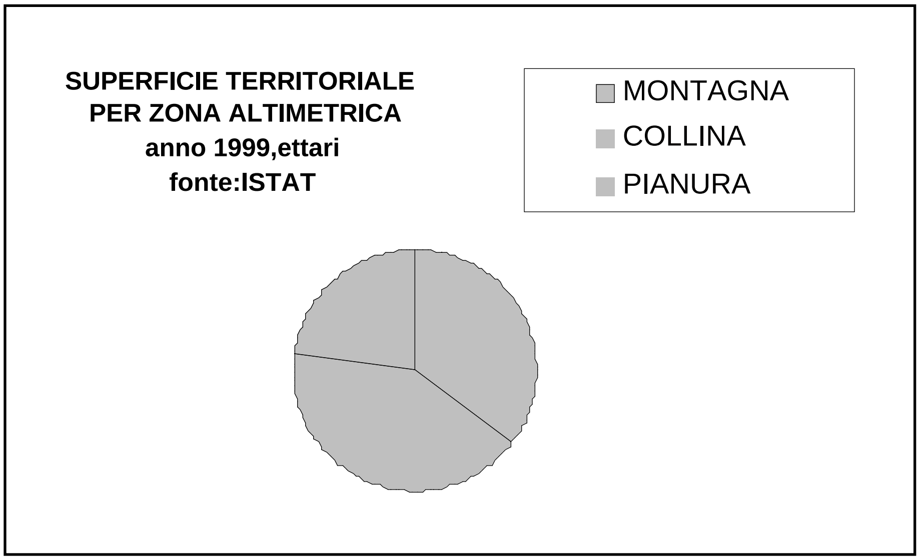
Per rispondere correttamente dobbiamo considerare la finestra informativa della pubblicazione ISTAT nella quale **si definisce** come:

- **zona di montagna**: il territorio caratterizzato dalla presenza di notevoli masse aventi altitudini non inferiori a 600 metri nel Nord* e 700 metri nel Centro** e nel Mezzogiorno***
- **zona di pianura**: il territorio caratterizzato dalla presenza di diffuse masse aventi altitudini inferiori a 600 metri nel Nord e 700 metri nel Centro e nel Mezzogiorno
- **zona di collina**: il territorio basso e pianeggiante, caratterizzato dall’assenza di masse rilevate

*Nord:Piemonte, Valle d’Aosta, Liguria, Lombardia, Trentino-Alto Adige, Friuli-Venezia Giulia, Veneto, Emilia Romagna
**Centro: Toscana, Lazio, Umbria, Marche
***Mezzogiorno: Abruzzo, Molise, Campania, Basilicata, Puglia, Calabria, Sicilia, Sardegna

Da questa tabella possono essere ricavate molteplici informazioni di carattere geografico e ambientale: la sola area geografica , la sola zona altimetrica, l’informazione contemporanea dell’area geografia e della zona altimetrica.

L’attività può proseguire con una richiesta del tipo:
“ Osserva, ora, il grafico ed evidenzia il settore in cui abiti”



Gli esempi potranno essere utilizzati per riflettere sulle caratteristiche, proprietà delle tabelle e dei grafici.

Elementi di prove di verifica

Verifica 1
Si propone all'alunno la seguente tabella pubblicata dall'ISTAT in "L'Italia in cifre 2000"

ALUNNI SECONDO IL TIPO DI SCUOLA
anno scolastico 1998/99
fonte: ISTAT

TIPO DI SCUOLA	FREQUENZE
materne	1·577 696
elementari	2 859 379
medie	1 775 009
superiori	2 543 750
Totale	8 755 834

Si chiede, quindi, di dare una risposta alle seguenti domande:
1. Chi ha svolto questa indagine?
2. A quale anno si riferisce?
3. Qual è il collettivo statistico?
4. Qual è il carattere indagato?
5. Con quali modalità è stato espresso?
6. Indica qual è il dato che ti rappresenta
7. Uno studente universitario si può ritrovare?
8. Qual è il tipo di scuola più frequentata?

Verifica 2

Si può scegliere, altrimenti, di verificare la conoscenza dei termini identificativi degli elementi concettuali esplicitati nella tabella di frequenze.

ALUNNI SECONDO IL TIPO DI SCUOLA
anno scolastico 1998/99
ISTAT

TIPO DI SCUOLA	FREQUENZE
materne	1·577 696
elementari	2 859 379
medie	1 775 009
superiori	2 543 750
Totale	8 755 834

Elementi di prova di verifica

Livello scolare: 1 [a] -2[a] elementare

In base alle indicazioni fornite nella proposta U.M.I. si possono realizzare elementi di prova di verifica relativi ad aspetti delle seguenti competenze :

1) leggere pittogrammi, ideogrammi, diagrammi a barre e tabelle di frequenze.
2) costruire a partire da dati assegnati: pittogrammi, ideogrammi, diagrammi a barre e tabelle di frequenze.
3) saper interpretare l’informazione contenuta nei pittogrammi, ideogrammi, diagrammi a barre e tabelle di frequenze.
4) saper trasformare le informazioni da una data forma di rappresentazione ad un'altra.

Il seguente esempio può verificare le seguenti competenze:
Parte prima: leggere e interpretare pittogrammi
Parte seconda: costruire tabelle di frequenze e trasformare l’informazione del pittogramma
Parte terza: costruire diagrammi a barre a partire da una tabella di frequenze

PARTE PRIMA

Scheda 1:
Il 22 aprile 2001 i bambini e le bambine della classe IIB della Scuola “Leonardo da Vinci” sono venuti a scuola così

A PIEDI	**J J J J**
IN SCUOLABUS	**J J J J J J J J J**
IN AUTOMOBILE	**J J J J J J**
IN BICICLETTA	**J J**

Osservando il pittogramma, e sapendo che uno "smile" corrisponde a un bambino o a una bambina, rispondi alle seguenti domande:

- Qual è stato il mezzo più usato per andare a scuola quel giorno?……………
- Quando è stata compiuta questa indagine?…………………
- Quanti bambini e bambine sono venuti a scuola a piedi?……….
- Quanti bambini e bambine sono venuti a scuola con lo scuolabus?………………
- Quanti bambini e bambine sono venuti a scuola in automobile?……………………
- Quanti bambini e bambine sono venuti a scuola in bicicletta?………………………
- Quanti erano in tutto i bambini e le bambine che hanno partecipato all’indagine?….

PARTE SECONDA

Scheda 2
Utilizzando le informazioni sulla IIB che ti sono state date e quelle che tu hai ricavato completa la seguente tabella di frequenze (*indicazione per l' insegnante : se gli scolari sono stati abituati ad usare il termine corretto di "tabella di frequenze" è preferibile usare tale dizione altrimenti ripiegare sul solo termine tabella)*

TITOLO:…………………………………………………………………..

MEZZO DI ……………..	**NUMERO DI BAMBINI/E ………………….**
A PIEDI	………………….
………………….	9
………………….	………………….
………………….	………………….
TOTALE	**………………….**

PARTE TERZA

Completa il diagramma a barre verticali utilizzando i dati del pittogramma

_______|__________|___|__________|___|__________|___|__________|__
scuolabus ……….. ……….. bicicletta

SCUOLA MEDIA

Il tempo libero

Livello scolare: 1ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Organizzare una ricerca Interpretare i dati usando i metodi statistici Usare ed interpretare misure di centralità e di dispersione	Il collettivo statistico e suoi elementi Semplici tabelle di frequenze Semplici rappresentazioni grafiche Confronti di frequenze Caratteri qualitativi e caratteri quantitativi Moda	<u>I dati e le previsioni</u> Numero Relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Italiano Scienze Educazione tecnica

Contesto extramatematico: educazione alla salute

Commento.
L'attività si può inserire in un percorso di educazione alla salute che preveda la raccolta di dati ed informazioni utili ad elaborare, ad esempio, un "profilo di salute della scuola".
L'argomento scelto (il tempo libero) ha sicuramente una connotazione anche affettiva e, di conseguenza, coinvolge sul piano dell'interesse e della formazione perché aderente al vissuto personale degli alunni

Punti di attenzione:

- gestione della discussione collettiva;
- rapporto tra la realtà e le sue forme di rappresentazione;
- simbolizzazione**.**

ELEMENTI CONCETTUALI STATISTICI	ESPLICITAZIONE DEGLI ELEMENTI CONCETTUALI NELL'ATTIVITA'
Fenomeno collettivo	Informazione sulla composizione di un collettivo rispetto all'utilizzazione del tempo libero.
Collettivo statistico	La popolazione della scuola
Unità statistica	Ogni singolo alunno della scuola
Caratteri	1. Età 2. Sesso 3. Classe di appartenenza 4. Significato attribuito al tempo libero 5. Tempo libero disponibile 6. Luogo ove si trascorre la maggior parte del tempo libero 7. Con chi si trascorre la maggior parte del tempo libero 8. A quale attività è dedicata la maggior parte del tempo libero
Modalità	Carattere 1: 10; 11; 12; 13….anni Carattere 2: maschio/femmina Carattere 3: prima, seconda; terza Carattere 4 a) momento di svago; b) momento di riflessione; c) momento di noia; d)momento di libertà assoluta,; e) altro Carattere 5: a) molto, b) abbastanza; c) poco; d) pochissimo Carattere 6: a) in casa; b) in palestra/impianti sportivi; c) in cortile; d) per strada; e) a scuola per attività opzionali; f) altro Carattere 7: a) da solo/a; b) con la famiglia; c) con i compagni di classe; d) con altri coetanei non compagni di classe; e) con amici più grandi Carattere 8: a) ascoltare musica; b) guardare la TV; c) leggere; d) praticare sport; e) giocare con il computer; f) giocare con gli amici; g) coltivare un hobby
Strumento di rilevazione	Questionario
Organizzazione dei dati	Costruzione per ciascun carattere delle tabelle di frequenze assolute, relative e percentuali per confrontare i dati relativi alle diverse classi
Moda	Individuazione della moda e relativa analisi critica

La descrizione delle fasi dell'attività è affiancata da una colonna che riporta alcuni suggerimenti metodologico-operativi.
Ogni docente potrà utilizzare tali indicazioni, adattando l'azione didattica alla situazione in cui si trova ad operare.

FASI DELL’ATTIVITA’ DIDATTICA	INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE
P R I M A F A S E : a) *Presentazione dell’attività didattica e discussione iniziale* L’insegnante espone le motivazioni dell’attività e invita gli alunni a discutere liberamente e a formulare proposte per l’elaborazione di un questionario per un’indagine sul loro tempo libero	

Gli alunni, divisi in piccoli gruppi, elaborano le loro proposte, che vengono successivamente confrontate e discusse, per giungere ad una scelta adeguata alle finalità dell’indagine e condivisa dalla classe	E’ importante che l’insegnante prenda nota delle proposte fatte, senza escluderne inizialmente alcuna e senza esprimere giudizi. Durante la discussione l’insegnante avrà l’opportunità di far sperimentare concretamente agli alunni i problemi che si presentano quando si devono formulare domande per acquisire informazioni su un collettivo statistico. Dovrà pertanto emergere la delicatezza di questa fase dell’indagine. L’insegnante coglierà dunque l’occasione per far riflettere gli allievi sui seguenti punti: a) Nella formulazione delle domande, è importante stabilire la forma di risposta che si desidera avere, ovvero se l’intervistato possa rispondere con parole proprie o debba soltanto scegliere fra una serie di alternative offerte. Nel primo caso si parla di domanda aperta, nel secondo di domanda chiusa. La domanda aperta ha il vantaggio di offrire libertà di espressione all’intervistato ma non consente un facile confronto tra le risposte. La domanda chiusa deve comportare, inoltre, una serie esauriente di alternative e prevede di solito anche la voce “altro”. Occorre, tuttavia, far rilevare che se un gran numero di intervistati sceglie l’alternativa “altro”, l’informazione che si ottiene è di scarsa utilità statistica e quindi lo strumento-questionario proposto non risulta adeguato allo scopo dell’indagine. b) Nella formulazione delle domande è necessario usare un linguaggio il più possibile: chiaro, preciso e funzionale al contesto comunicativo, in modo che tutti possano facilmente comprendere quanto chiesto loro c) Sarà opportuno inoltre far rilevare che il questionario deve contenere anche richieste di dati anagrafici (età, sesso e classe) che potranno essere utilizzati per analisi più approfondite dei dati raccolti

b) *Elaborazione del questionario* L'insegnante guida gli alunni nell'elaborazione del questionario	
c) *Somministrazione del questionario* Il questionario viene somministrato agli alunni di tutte le classi	
S E C O N D A F A S E : *Raccolta ed organizzazione dei dati* L'insegnante invita gli alunni a procedere alla raccolta dei dati e all'organizzazione, per ciascuna domanda (carattere), di una tabella di frequenze assolute (provvista di titolo), ottenuta mediante conteggio delle unità corrispondenti a ciascuna modalità	In questa fase si consiglia di far lavorare i ragazzi in piccoli gruppi che si divideranno il lavoro e potranno approntare delle tabelle di spoglio che facilitino la successiva costruzione delle tabelle di frequenze. È bene sottolineare l'importanza del titolo di ogni tabella di frequenze: esso costituisce la finestra di dialogo con chi legge e quindi deve comunicare chiaramente la classe di riferimento, il carattere indagato e la data della rilevazione. Gli alunni dovranno cogliere anche il fatto che nella raccolta dei dati e nella loro organizzazione in tabella, il dato individuale "si perde", fondendosi con gli altri, affinché si possa ottenere l'informazione desiderata sul collettivo.
T E R Z A F A S E : a) *Costruzione della tabella delle frequenze relative e percentuali*	L'insegnante fa sorgere negli alunni la curiosità di confrontare i dati della propria classe con quelli dell'intera scuola. Gli alunni saranno così avviati al calcolo e all'uso delle frequenze relative e percentuali, per conoscere, rispetto ad uno o più caratteri, la situazione della propria classe e della scuola
b) *Rappresentazione grafica* Gli alunni elaborano i dati graficamente ed individuano la moda.	Si consiglia di far discutere i ragazzi sul tipo di rappresentazione grafica da scegliere e di illustrare (o richiamare) i principali criteri da seguire nell'elaborazione di un grafico (ad esempio l'importanza della legenda).

Come ci alimentiamo

Livello scolare: 2° media

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Organizzare una ricerca Interpretare i dati usando i metodi statistici Usare ed interpretare misure di centralità e di dispersione	Caratteri derivanti da misurazioni Classificazione di dati con intervalli di ampiezza uguale o diversa Calcolo di frequenze relative e percentuali, e loro confronti Diagrammi di vario tipo Moda, mediana, media aritmetica	<u>I dati e le previsioni</u> Numero Relazioni Misurare Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Italiano Scienze Educazione tecnica

Contesto extramatematico: “Educazione alimentare”

Commento
Si tratta di un tema coinvolgente perché riguarda un problema d’interesse generale (la salute fisica) e investe anche la sfera emotiva per i significati psichici e sociali che l’alimentazione riveste. L’argomento può scaturire da considerazioni derivanti da esperienze didattiche precedenti, come lo studio del corpo umano e delle sue funzioni ovvero da considerazioni di carattere più generale, per le valenze sociali e culturali che il cibo assume nella vita quotidiana. Bisogna fare in modo che emerga la curiosità di conoscere e di ricavare informazioni chiare dagli strumenti utilizzati per la ricerca.

<table>
<tr><th>ELEMENTI CONCETTUALI STATISTICI</th><th>ESPLICITAZIONE DEGLI ELEMENTI CONCETTUALI NELL’ATTIVITA’</th></tr>
<tr><td>Fenomeno collettivo
Collettivo statistico
Unità statistica
Caratteri</td><td>Le abitudini alimentari dei ragazzi
Due classi della scuola
Ogni alunno di ciascuna classe
• Classe
• Età
• Sesso
• Statura
• Peso
• Attività fisica
• Numero dei pasti principali
• Alimento preferito nella prima colazione
• Alimento preferito a pranzo
• Alimento preferito a cena
• Numero spuntini "fuori pasto"
• Alimento preferito nello spuntino "fuori pasto"
• Condimento preferito
• Bibita preferita</td></tr>
<tr><td>Modalità</td><td>Vedi esempio di questionario allegato</td></tr>
</table>

ATTIVITÀ DIDATTICHE	INDICAZIONI METODOLOGICO - DIDATTICHE
Fase 1: Raccogliamo dati L’insegnante porta la classe alla scelta del tema d’indagine, ad individuare la popolazione di riferimento e a proporre uno strumento d’indagine. Si perviene così alla individuazione delle domande del questionario.	Porre attenzione alla gestione della conversazione iniziale (Qual è il tema dell’indagine? Come indagare e con quali strumenti? Quale collettivo scegliere?) che ha il fine di indurre gli alunni a trovare soluzioni e individuare percorsi operativi, a partire da una situazione problematica. Le idee dei ragazzi devono essere sempre valorizzate e registrate dal docente, discusse e categorizzate. L’insegnante evidenzia che alcuni dei caratteri da studiare sono quantitativi, altri, qualitativi.

Fase 2: Sistemiamo i dati in tabelle Dopo aver somministrato il questionario l'insegnante propone ai ragazzi di inserirli in tabelle relative a un carattere o a una coppia di caratteri.	

Esempio per caratteri qualitativi e quantitativi discreti. Si suggerisce la seguente procedura che potrà essere, per la classe, lo spunto per classificare anche rispetto a caratteri continui.

Carattere: "Numero dei pasti principali"		
MODALITA'		***fequenze assolute***
1	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17
2	~~||||~~	5
3	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	33
4	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
5	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17

Caratteri: "Numeri dei pasti principali in relazione al sesso"				
MODALITA'	***M***	***fequenze assolute***	***F***	***frequenze assolute***
1	~~||||~~ ~~||||~~	10	~~||||~~ ||	7
2	~~||||~~	5		0
3	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	18
4	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15		15
5	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15	||	15

Fase 3: Prima lettura e analisi dei dati raccolti Al fine di effettuare confronti fra i dati relativi ai collettivi dei maschi e delle femmine, si guidano gli alunni, attraverso la conversazione e la riflessione guidata a percepire la necessità di passare dalle frequenze assolute a quelle relative e percentuali. E' opportuno che il lavoro venga eseguito utilizzando un foglio di calcolo.	

Esempio di realizzazione mediante l'utilizzo del foglio di calcolo.

	M			***F***		
Modalità (numero dei pasti)	Frequenze assolute	Frequenze relative	Frequenze percentuali	Frequenze assolute	Frequenze relative	Frequenze percentuali
1	2	0,15	15%	3	0,18	18%
2	1	0,08	8%	4	0,24	24%
3	7	0,54	54%	6	0,35	35%
4	2	0,15	15%	1	0,06	6%
5	1	0,08	8%	3	0,18	18%
	13	***1,00***	***100%***	***17***	***1,00***	***100%***

ATTIVITÀ DIDATTICHE	INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE
Fase 4: Costruzione e lettura di grafici di vario tipo	Attraverso domande-stimolo e opportuni esempi si avviano i ragazzi alla percezione della opportunità di rappresentare graficamente i dati raccolti e analizzati. La conversazione va indirizzata sulla differenza “visiva” tra i vari tipi di grafico e sulla opportunità di scegliere il grafico più adatto ai diversi tipi di carattere. Possono essere utilizzati esempi di rappresentazioni di vario tipo. Tutti i grafici richiedono un titolo ed una legenda che renda più immediata la loro lettura.
Fase 5: Elaboriamo i dati A questo punti si avviano gli alunni alla individuazione e al calcolo di moda, media e mediana.	L’attività si svolge attraverso conversazioni, esempi ed esercitazioni guidate sul significato dei valori medi e sulle procedure di calcolo. Si evidenzierà che la moda si può individuare per qualsiasi carattere, la mediana richiede che il carattere sia almeno ordinato, la media aritmetica, che il carattere sia quantitativo.

ESEMPIO DI QUESTIONARIO

Dati personali

Classe: 1ª 2ª 3ª

Età: 10 11 12 13 …

Sesso: ⊂ M ⊂ F

Statura in cm: …………

Peso in kg: ………..

Attività fisica

Oltre alla normale attività scolastica, quante volte, nella settimana, pratichi uno sport?

⊂ nessuna
⊂ una volta
⊂ due volte
⊂ tre volte
⊂ più di tre volte

Abitudini alimentari

Escludendo gli “spuntini fuori pasto”, quanti sono generalmente i tuoi pasti principali nella giornata?

£1 £2 £3 £4 £5 £più di 5

Quale dei seguenti gruppi di alimenti preferisci nella prima colazione?

- nessuno
- carne, pesce, uova
- latte e derivati (formaggi, yogurt, ecc.)
- legumi (lenticchie, fagioli, piselli, ecc)
- Pane, pasta, pizza, cereali (grano, mais, riso, avena, ecc.)
- Zuccheri e derivati (dolci, caramelle, ecc.)
- Ortaggi e frutta

Quale dei seguenti gruppi di alimenti preferisci a pranzo ?

- nessuno
- carne, pesce, uova
- latte e derivati (formaggi, yogurt, ecc.)
- legumi (lenticchie, fagioli, piselli, ecc)
- Pane, pasta, pizza, cereali (grano, mais, riso, avena, ecc.)
- Zuccheri e derivati (dolci, caramelle, ecc.)
- Ortaggi e frutta

Quale dei seguenti gruppi di alimenti preferisci a cena?

- nessuno
- carne, pesce, uova
- latte e derivati (formaggi, yogurt, ecc.)
- legumi (lenticchie, fagioli, piselli, ecc)
- Pane, pasta, pizza, cereali (grano, mais, riso, avena, ecc.)
- Zuccheri e derivati (dolci, caramelle, ecc.)
- Ortaggi e frutta

Quale dei seguenti condimenti preferisci?

- Olio d'oliva
- Burro
- Altro ……….

Quanti spuntini "fuori pasto" consumi di solito durante la giornata?

£1 £2 £3 £4 £5 £più di 5

Quale alimento preferisci negli "spuntini fuori pasto" ?

- nessuno
- carne, pesce, uova
- latte e derivati (formaggi, yogurt, ecc.)
- legumi (lenticchie, fagioli, piselli, ecc)
- Pane, pasta, pizza, cereali (grano, mais, riso, avena, ecc.)
- Zuccheri e derivati (dolci, caramelle, ecc.)
- Ortaggi e frutta

Che cosa ti piace bere, se hai sete, oppure durante i pasti?

- Acqua
- Bibite (coca cola, aranciata etc.)
- Altro (specificare) ……………………..

Frequenza assoluta o frequenza relativa?[1]

Livello scolare: 3ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Rappresentare e interpretare dati, anche utilizzando un foglio elettronico. Usare e interpretare misure di centralità e dispersione. Scegliere in modo casuale un elemento da un collettivo. Interpretare in termini probabilistici i risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali e virtuali (giochi, software, …). Prevedere, in semplici contesti, i possibili risultati di un esperimento e le loro probabilità.	Calcolo di frequenze relative e percentuali, e loro confronti Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di un evento semplice	<u>I dati e le previsioni</u> Il numero Le relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Italiano Educazione Tecnica

Contesto matematico: lancio di una moneta, prove ripetute.

Commento

L'introduzione a questa attività parte dall'osservazione della realtà, intesa in questo caso come riflessione su avvenimenti legati a giochi tipo Lotto, Super Enalotto, etc

Quest'approccio dovrebbe far scaturire una discussione e dunque una riflessione che metta in evidenza i numerosi misconcetti e fraintendimenti che sono alla base delle considerazioni che vengono fatte dalla maggior parte di noi nelle situazioni di incertezza.

I fraintendimenti nascono anche dalla non discriminazione tra frequenza assoluta e frequenza relativa. Sono infatti comuni le seguenti "convinzioni":

- *In un numero elevato di casi la frequenza tende alla probabilità;*
- *L'evento che ritarda acquista maggiore probabilità rispetto alla norma, anzi la probabilità viene considerata in funzione crescente rispetto al tempo del ritardo;*
- *Si crede fermamente nella "compensazione"*
- *E' difficile rilevare l'indipendenza degli eventi futuri da quelli passati, non si riflette sul fatto che il numero "pigro" non ha memoria, in generale il caso non ha memoria.*

Con quest'attività si vuole dunque favorire la consapevolezza da parte del ragazzo che, ad esempio:

1) non è vero che in tanti lanci il numero delle TESTE tende al numero delle CROCI!
2) non è vero che la frequenza assoluta tende alla probabilità all'aumentare del numero delle prove!

[1] Da un'idea presente nelle dispense del corso di CALCOLO DELLE PROBABILITA' per l'indirizzo didattico, tenuto dal prof. Mario Barra, del Dipartimento di Matematica – Facoltà di Scienze

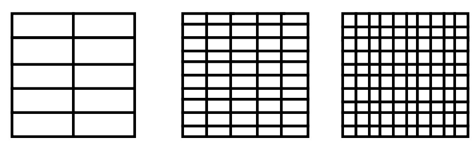
3) non è vero che se in un certo numero di prove è uscito un gran numero di TESTE, deve esserci un recupero delle CROCI perché la frequenza relativa tende ad _!

Punti di attenzione

A) Gestione della discussione rispetto alle ipotesi
B) Rilevazione dei fraintendimenti

ELEMENTI CONCETTUALI STATISTICI	ESPLICITAZIONE DEGLI ELEMENTI CONCETTUALI NELL'ATTIVITÀ
Fenomeno statistico	Uscite possibili nel caso di più lanci di una moneta
Unità statistica	Lancio
Carattere	Faccia mostrata
Modalità	testa; croce
Raccolta dei dati	Esperimento pratico con lancio di una o più monete

La descrizione delle fasi dell'attività è integrata da alcuni suggerimenti metodologico-operativi. Ogni docente potrà utilizzare tali suggerimenti, adattando l'azione didattica alla situazione in cui si trova ad operare

ATTIVITÀ DIDATTICHE	INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE
Prima FASE: il problema e la discussione iniziale L'insegnante pone il problema alla classe e invita gli alunni a discutere liberamente e a formulare ipotesi: *"Supponiamo di lanciare una moneta prima 10 volte, poi 50 volte ed infine 100 volte. Secondo voi la differenza tra il numero delle teste e il numero delle croci aumenterà? Il numero delle teste tenderà al numero delle croci? Proviamo ad eseguire più volte questo esperimento. Formate dei gruppi. "*	Probabilmente il ragionamento dei ragazzi porterà alla conclusione che se la frequenza di TESTA deve tendere ad _, allora necessariamente il numero delle TESTE deve tendere al numero delle CROCI, quindi deve esserci una compensazione. Questo anche in considerazione del fatto che nel linguaggio comune si pone scarsa attenzione all'uso delle parole. Ad esempio si dice la frequenza tende alla probabilità, intendendo la frequenza assoluta e non quella relativa, questo favorisce sicuramente gli errori di comprensione. E' importante far osservare ai ragazzi che, se si vuole stimare la probabilità di un evento con un numero, non ha senso scegliere la frequenza assoluta in quanto essa varia approssimativamente in proporzione al numero delle prove eseguite, ma ha senso scegliere la frequenza relativa.
Seconda FASE: l'esperimento a) La classe viene divisa in gruppi, ciascuno dei quali effettua tre serie di lanci di una moneta: 10 lanci, 50 lanci, 100 lanci. Per recuperare tempo i ragazzi possono nel gruppo suddividersi il numero dei lanci e poi mettere insieme i risultati.	A ciascun gruppo viene consegnata una scheda nella quale sono disegnati tre quadrati suddivisi rispettivamente in 10, 50 e 100 parti uguali: 10 lanci 50 lanci 100 lanci  fig.1 fig.2 fig.3 La scheda contiene le seguenti indicazioni a) Lanciare una moneta b) Colorare il primo riquadro in alto a sinistra della fig.1 con il blu se è uscita testa c) Colorare il primo riquadro in alto a destra della fig.1 con il rosso se è uscita croce. d) Ripetere per 10 volte dal punto a) al punto c). (è necessario che i riquadri colorati con la stessa tinta siano adiacenti) e) Ripetere dal punto a) al punto c) per 50 volte per la fig.2 f) Ripetere dal punto a) al punto c) per 100 volte per la fig.3
b) I gruppi registrano i risultati ottenuti utilizzando due colori diversi.	I tre quadrati offrono una rappresentazione dei risultati che mette in evidenza, che sebbene la differenza tra le frequenze assolute di TESTA e di CROCE tende ad aumentare, le aree colorate tendono ad essere equivalenti all'aumentare del numero dei lanci.

Terza FASE: elaborazione dei risultati

a) I ragazzi calcolano la frequenza relativa e quella percentuale di entrambe le modalità

Sulla scheda sarà presente la seguente tabella che mostra le frequenze assolute f_a , le frequenze relative f_r e le frequenze percentuali $f_{\%}$.

n° lanci	f_a (T)	f_a(C)	f_r (T)	f_r (C)	$f_{\%}$(T)	$f_{\%}$(C)
10	…...	…...	……	…...	…...	……
50	…...	…...	……	…...	…...	……
100	…...	…...	……	…...	…...	……

I ragazzi dovranno compilare la prima riga della tabella per la serie di 10 lanci, la seconda riga per la serie di 50 lanci e la terza riga per la serie di 100 lanci.

b) Prima riflessione sui risultati ottenuti

Si analizzano i risultati ottenuti e si dovrebbe notare che la frequenza relativa tende sempre di più ad _ e quella percentuale sempre di più al 50%. Visivamente, avendo usato due colori diversi con l'accortezza di avere i riquadri adiacenti con la stessa tinta, si coglie che è sempre più probabile che la frequenza relativa tende alla probabilità, all'aumentare del numero dei lanci.
Con questo tipo di rappresentazione si pone bene in evidenza che:

- È verificato che il numero delle TESTE non tende mai al numero delle CROCI, anzi se ne allontana sempre di più;
- La tendenza ad _ della frequenza relativa risulta dalla presenza dei due colori, uno per le Teste e l'altro per le CROCI, all'interno del quadrato;
- Il recupero, ad esempio delle CROCI non c'è (ci potrebbe essere anche un sorpasso), ma le uscite successive hanno un "minor peso" rispetto alle prime, quando si considera la frequenza relativa o quella percentuale (infatti, l'area dei quadratini diminuisce nella terza figura)

Quarta FASE: simulazione al computer

"L'attività precedente ci ha permesso di osservare come vanno le cose nella realtà. Chi si aspettava di ottenere un ugual numero di Teste e di Croci, sarà sicuramente rimasto deluso.
Qualcuno non è ancora convinto? Vogliamo provare ad aumentare il numero delle

Proprio per rafforzare queste conclusioni o per arrivare ad esse, è fondamentale l'esperienza di simulazione con il computer in laboratorio.
La simulazione al computer favorisce operativamente l'aumento del numero di prove in poco tempo e con facilità.
In questo modo, avendo a disposizione un gran numero di prove, si potrà porre l'attenzione su aspetti che giocano un ruolo determinante per la

prove? *Bene, a questo punto però è necessario per questioni organizzative e pratiche, usare uno strumento più funzionale al nostro scopo.* *Simuleremo con il computer un elevato numero di lanci di una moneta servendoci del foglio elettronico EXCEL"*	piena comprensione dei concetti fondamentali emersi finora. Si potrà ribadire che calcoli o ragionamenti per dimostrare che lanciando una moneta, diventa più probabile l'uscita Testa, dopo che è uscita Croce, non hanno alcun fondamento Utilizzando il foglio elettronico EXCEL, si rappresenteranno i dati ottenuti dalla simulazione con aerogrammi. Anche in questo caso le aree dei due diversi colori tenderanno ad essere equivalenti.
Quinta FASE: approfondimento numerico	Dopo la simulazione, si potranno sfruttare i risultati ottenuti per evidenziare il ruolo che i concetti di rapporto o di proporzionalità giocano su numeri molto alti. E' vero che se $\frac{A}{B}=1 \to A=B$ ma solo se A e B sono numeri piccoli e $\frac{A}{B}=1$ allora $\lvert A-B \rvert \to 0$ Se A e B sono numeri molto grandi questo può non essere vero. La differenza tra A e B può dunque aumentare e il loro rapporto tendere comunque ad 1.

SCHEDA 1: Lancio di una moneta

Gruppo n° …   Componenti: ……………………………………………

Scopo: Osservare l'andamento delle uscite testa e croce in una serie di lanci

Materiale: Monete, colori blu e rosso.

Esecuzione:

g) Lanciare una moneta
h) Colorare il primo riquadro in alto a sinistra della fig.1 con il blu se è uscita testa
i) Colorare il primo riquadro in alto a destra della fig.1 con il rosso se è uscita croce.
j) Ripetere per 10 volte dal punto a) al punto c).
   (è necessario che i riquadri colorati con la stessa tinta siano adiacenti)
k) Compilare la prima riga della tabella (fig.4)
l) Ripetere dal punto a) al punto c) per 50 volte per la fig.2
m) Compilare la seconda riga della tabella (fig.4)
n) Ripetere dal punto a) al punto c) per 100 volte per la fig.3
o) Compilare la terza riga della tabella (fig.4)

10 lanci

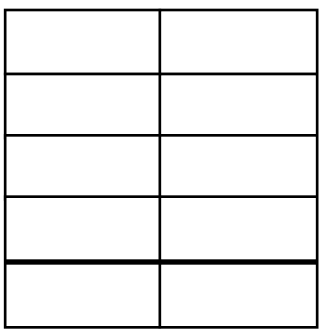


fig.1

50 lanci

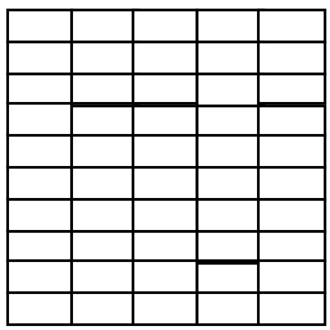


fig.2

100 lanci

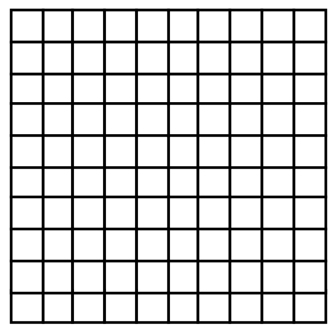


fig.3

n° lanci	f_a (T)	f_a (C)	f_r (T)	f_r (C)
10	……………	……………	……………	……………
50	……………	……………	……………	……………
100	……………	……………	……………	……………

fig.4

Le aree ricoperte dai due colori rappresentano le frequenze relative di ciascuno dei due eventi: "uscita Testa" e "uscita Croce".
Riportate le vostre osservazioni.
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Per le tre serie di lanci, potete affermare che:

a. Il numero delle teste tende al numero delle croci? SI NO

b. La frequenza relativa tende ad _? SI NO

Elementi di prove di verifica

Livello scolare: 1ª media
Si chiede all'alunno di osservare, analizzare, commentare la tabella riportata (la tabella può essere spunto per osservazioni di tipo storico-demografico)

FAMIGLIE PER NUMERO DI COMPONENTI
Censimenti 1961-1991e rilevazione anno 1998, composizioni percentuali
Fonte: ISTAT

	Censimento 1961	**Censimento 1971**	**Censimento 1981**	**Censimento 1991**	**Rilevazione 1998**
1	10,6	12,9	17,9	20,6	21,7
2	19,6	22,0	23,6	24,7	26,1
3	22,4	22,4	22,1	22,2	23,4
4	20,4	21,2	21,5	21,2	21,1
5	12,6	11,8	9,5	7,9	6,1
6 e più	14,4	9,7	5,4	3,4	1,8
Totale (migliaia)	**13747**	**15981**	**18632**	**19909**	**21220**
Numero medio di componenti	**3,6**	**3,3**	**3,0**	**2,8**	**2,7**

1. Si possono confrontare i dati del 1961 con quelli degli altri anni? Perché?
2. Descrivi, a parole, l'andamento della percentuale delle famiglie con un solo componente dal 1961 al 1998. Commenta.
3. Cosa significa che il numero medio di componenti della famiglia la Censimento 1961 è 3,6?
4. Quante sono in migliaia le famiglie al censimento 1981?
5. Per le famiglie di 3 componenti nel 1991, risali dalla percentuale 22,2 alla corrispondente frequenza assoluta.

Livello scolare: 2ª – 3ª media
Esempio relativo alle seguenti competenze specifiche:

- Classificare dati.
- Rappresentare i dati con tabelle e grafici.
- Osservare e descrivere un grafico, usando moda, mediana e media aritmetica.
- Confrontare tra loro modi diversi di rappresentare gli stessi dati
- Classificare dati ottenuti da misurazione.
- Usare ed interpretare misure di centralità (e dispersione)

Testo della prova

Lo scorso anno , nel mese di marzo, ai 27 allievi della classe 2°B venne proposto il seguente questionario:

QUESTIONARIO

1) Qual è la tua materia preferita ?…………………..
2) Qual è stato il giudizio che hai riportato a fine del primo quadrimestre nella tua materia preferita? …………………….
3) Quante ore hai dedicato allo studio della tua materia preferita la scorsa settimana?………….

Gli alunni così risposero:

ALLIEVO	MATERIA	GIUDIZIO	TEMPO (in ore)
Allievo 1	Educazione fisica	Ottimo	0
Allievo 2	Italiano	Distinto	4
Allievo 3	Lingua straniera	Buono	3
Allievo 4	Storia	Buono	5
Allievo 5	Educazione musicale	Distinto	7
Allievo 6	Educazione artistica	Distinto	3
Allievo 7	Italiano	Buono	1
Allievo 8	Educazione fisica	Ottimo	1
Allievo 9	Matematica	Buono	5
Allievo 10	Educazione artistica	Sufficiente	3
Allievo 11	Italiano	Distinto	2
Allievo 12	Matematica	Ottimo	2
Allievo 13	Lingua straniera	Buono	2
Allievo 14	Italiano	Buono	6
Allievo 15	Matematica	Distinto	4
Allievo 16	Storia	Sufficiente	2
Allievo 17	Matematica	Distinto	7
Allievo 18	Lingua straniera	Sufficiente	5
Allievo 19	Lingua straniera	Non sufficiente	3
Allievo 20	Educazione musicale	Ottimo	4
Allievo 21	Educazione fisica	Ottimo	0
Allievo 22	Educazione tecnica	Distinto	1
Allievo 23	Lingua straniera	Ottimo	2
Allievo 24	Matematica	Sufficiente	3
Allievo 25	Italiano	Buono	2
Allievo 26	Scienze	Ottimo	6
Allievo 27	Educazione artistica	Buono	3

Consegna di svolgimento:

1. Per ciascun carattere riporta i dati in una tabella, indicando: frequenze assolute, relative e percentuali.
2. Rappresenta le tabelle prodotte utilizzando i grafici che ritieni più adatti allo scopo.
3. Ricava per i tre caratteri, quando ciò è possibile, moda, mediana e media aritmetica. Fornisci una tua interpretazione dei risultati.

Per i tuoi calcoli puoi usare la calcolatrice.

Livello scolare: 2^a-3^a media

Esempio relativo alle seguenti competenze specifiche:

ß Interpretare in termini probabilistici i risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali e virtuali (giochi, software,….)

ß Prevedere, in semplici contesti, i possibili risultati di un esperimento e le loro probabilità.

Testo della prova[1]

Lo spazio Campionario di un Esperimento Casuale è costituito da cinque eventi elementari S= [E_1, E_2, E_3, E_4, E_5,]. Quali delle seguenti distribuzioni di probabilità, espresse in alcuni casi in percentuali, in altri in frazioni, può essere relativa all'esperimento casuale S? Se una distribuzione non è possibile giustifica il perché.

a. Eventi	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Probabilità	0,09	0,32	0,21	0,25	0,13
b. Eventi	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Probabilità	0,82	0,03	0	0,02	0,03
c. Eventi	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Probabilità	0,67	-0,05	0,20	0,22	0,02
d. Eventi	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Probabilità	0,05	0,35	0,5	0,2	-0,3
e. Eventi	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Probabilità	1/3	1/4	1/6	1/8	1/10

E' opportuno ricordare che per risolvere questo esercizio, è necessario sapere che:

a) la misura di probabilità deve essere un numero maggiore o uguale a 0: non sono ammesse misure negative, quindi i casi c) e d) non possono rappresentare distribuzioni di probabilità;
b) la somma delle probabilità deve dare 1, quindi i casi b) ed e) non sono distribuzioni possibili.

[1] Da un'idea di M.P. Perelli in: Quaderno di aggiornamento n.1 del C.R.D. "U. Morin", 1991

NUCLEO: Argomentare e congetturare

Introduzione

Il nucleo di processo "argomentare e congetturare" *caratterizza le attività che preparano alla dimostrazione, ossia a una delle attività che contraddistinguono il pensiero matematico maturo, quale sarà acquisito negli anni successivi della scuola secondaria superiore*.
Si considerano perciò quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico; essi risultano da un intreccio dialettico tra rappresentazioni simboliche (i segni dell'aritmetica, le figure della geometria) e le attività discorsive su questi con cui il soggetto dà significato agli enunciati matematici, che sono sempre di tipo misto (segni specifici del linguaggio simbolico proprio della matematica e parole del linguaggio naturale; esempio: "un numero di tre cifre è certamente maggiore di un numero con due cifre").
Il significato dei segni matematici è analizzabile a due livelli:

- Quello diretto dei segni, per cui ad es. il segno 12 denota un numero ben preciso all'interno di un codice specifico (quello della rappresentazione posizionale decimale); il significato di tale numero è costruito dal bambino attraverso molteplici esperienze in cui le attività (ad es. di conteggio) interagiscono profondamente coi segni che tale numero rappresentano (dodici si ottiene da dieci oggetti aggiungendone due; 12 è una decina più due unità; 12 = 10+2; dodici è il doppio di sei; 12 è nella tabellina del 2, 3, 4, 6; ecc.). Analogamente per i segni delle operazioni.
- Quello del discorso in cui tali segni entrano. Un primo esempio si ha quando dico che la frase "12 è un numero pari" è vera, mentre "12 è un numero dispari" è falsa; il significato di tale frase esprime una relazione tra il significato di 12 è quello di "essere pari". Un secondo esempio è dato dalla frase "se il 7 febbraio è un mercoledì e l'anno non è bisestile anche il 7 marzo è un mercoledì", la cui verità dipende da una relazione tra il numero dei giorni di febbraio negli anni non bisestili (28) e il numero dei giorni della settimana (7): siccome 28 è un multiplo di 7 (cioè la divisione 28:7 dà resto 0) il primo giorno di febbraio e di marzo sono lo stesso, e così via per i successivi.

Il primo significato riguarda principalmente le definizioni dei concetti, il secondo quello delle relazioni tra queste. La matematica è costituita da enunciati in cui sono coinvolti continuamente i due aspetti. Comprendere la matematica significa possedere queste due funzioni del discorso. Le attività didattiche sono quindi finalizzate allo sviluppo di queste due funzioni, che affondano le loro radici nelle attività discorsive che il soggetto possiede in modo 'naturale' e che coinvolgono attività cognitive usuali. A livello maturo tali funzioni evolvono verso la dimostrazione matematica, che ha specificità proprie. E' obiettivo della scuola elementare e media coltivare tali funzioni e preparare gli allievi alla delicata evoluzione che li porterà appunto dall'argomentare al dimostrare.
Per questo in tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica. Per esempio prima di imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'aritmetica gli allievi dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (il calendario lineare per il tempo; monete per risolvere problemi di compravendita di beni….). Analogamente per le conoscenze legate allo spazio e alle figure sarà essenziale la loro esplorazione dinamica in contesti vari.
L'acquisizione del linguaggio rigoroso della matematica deve essere quindi un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono, col supporto dell'insegnante, a partire dalle loro concrete produzione verbali, quasi sempre imprecise ma ricche di significato per l'allievo: queste vanno messe a confronto e opportunamente discusse nella classe per giungere così a riconoscere, nell'uso di simboli e scritture formali, forme sintetiche di espressione del linguaggio naturale.

Le due funzioni sopra descritte si sviluppano con attività opportune in campi di esperienza, in cui l'osservazione delle cose e il cogliere relazioni tra queste costituisce il punto saliente dell'attività stessa. L'alunno metterà in moto tutte le facoltà che possiede naturalmente per tali attività e sarà cura dell'insegnante guidarlo per acquisire opportune forme di rappresentazione per esprimere i significati (delle cose e delle relazioni tra queste) così costruiti.

Molta attenzione dovrà essere dedicata alla verbalizzazione delle attività discorsive che gli alunni esplicano in tali occasioni: mai come in questo caso le funzioni del linguaggio sono essenziali per la costruzione dei significati matematici (nei due sensi detti sopra). In tal modo l'attività discorsiva diventa argomentazione matematica e successivamente dimostrazione.

E' opportuno osservare che molteplici sono le funzioni cognitive coinvolte in tali attività discorsive in cui gli alunni costruiscono (scoprono) significati nelle situazioni didattiche in cui operano, ovvero producono ipotesi sul mondo.
Si noti che la costruzione di un significato nuovo può essere più o meno cosciente; si può avere ad es. una classificazione fatta concretamente dagli alunni, senza che questo comporti necessariamente la produzione di un'ipotesi (una classificazione prodotta dall'allievo è comunque un'ipotesi fattuale su come è organizzabile il mondo, magari inconscia o sulla base di stereotipi) o la genesi di una condizionalità (rilevabile dall'uso di specifici marcatori linguistici del tipo: quando, mentre, se…allora, perché). Si parla comunque di ipotesi quando il processo di produzione di un significato nuovo è cosciente per l'allievo.

Le attività argomentative in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità sono riconducibili a due modalità principali, che opportunamente coltivate appaiono fondamentali per permettere la transizione nel lungo periodo al pensiero teorico proprio della matematica. Esse sono caratterizzate dal diverso modo con cui il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno.
La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di *congetture interpretative* di ciò che si vede (percepisce), ad es. al fine di organizzarlo.
La seconda è caratterizzata dalla produzione di *congetture previsionali* (ad es. ipotesi su una situazione futura).

Si può intendere in generale l'attività argomentativa come un discorso:
- che permette al soggetto di tornare su ciò che si è fatto, visto (ecc.), producendo interpretazioni, spiegazioni, risposte a domande del tipo "perché è così?"
- che permette al soggetto di anticipare fatti, situazioni, ecc., producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili, risposte a domande "come sarà?", "come potrebbe essere?"

Dietro alle due modalità del prevedere e interpretare ci sono anche le due modalità: dall'interno all'esterno e viceversa.

Le varie tipologie di argomentazione sono in vario modo riconducibili alle due modalità:
ß Classificare (le attività classificatorie possono essere interpretate come *congetture interpretative in atto* di cui il soggetto si serve per operare).
ß Generalizzare
ß Gerarchizzare
ß Progettare
ß Correlare, trovare connessioni, analogie, utilizzare metafore.
ß Confutare: sulla base del principio di autorità ….
su un base empirica (controesempio ostensivo)
su una base argomentativa

- Definire
- Utilizzare principi, convinzioni, assiomi non dimostrabili….. (es. il sole a mezzogiorno è forte e quindi produce ombre lunghe)
- Verificare ipotesi: può trattarsi di una verifica sperimentale o argomentativa. Esempio: quando si verificano le previsioni sul risultato dell'esperimento "va a fondo - sta a galla" (cfr. Nucleo Relazioni) oppure quando si verificano previsioni sul calendario, quando l'allievo comincia a fare esperimenti mentali (cfr. Nucleo Numero).

Occorre distinguere tra le modalità argomentative e le operazioni mentali che costituiscono il tessuto argomentativo.
Esempi:

- Confutare è una modalità argomentativa, generalizzare è una operazione mentale; nel confutare ci possono essere una modalità oppositiva oppure cooperativa.
- Il passaggio tra uso di un esempio e generalizzazione fanno tipicamente parte della tessitura dell'argomentazione: l'esempio è molto utilizzato dagli allievi nelle loro spiegazioni e può favorire generalizzazioni (quando da esempio specifico diventa esempio generico).

Corrispondentemente, si propone una griglia per registrare le competenze di questo nucleo che l'insegnante può osservare nell'allievo.

GRIGLIA PER LE VERIFICHE

La presente griglia contiene alcuni indicatori rilevanti per valutare le competenze relative al nucleo argomentare e congetturare. La lista non è ovviamente esaustiva. Il significato dei termini usati sarà compreso compiutamente leggendo gli esempi di verifiche sotto presentati, in cui gli indicatori generali della griglia sono specificati nel concreto delle verifiche descritte.

L'insegnante nelle attività matematiche che coinvolgono competenze del nucleo sarà particolarmente attento a registrare la natura dell'argomentazione (A) e a osservare la presenza / assenza degli indicatori (B).
Raccogliendo le osservazioni sui suoi allievi, nel corso del tempo, potrà individuare il loro stile cognitivo, relativo a tali competenze, e rilevarne le eventuali evoluzioni.
In classe deve crearsi un clima favorevole all'argomentazione.

L'argomentazione:

A. A1. Definisce
A2. Classifica
A3. Generalizza
A4. Gerarchizza
A5. Progetta
A6. Fornisce controesempi : sulla base del principio di autorità ….
su un base empirica (controesempio ostensivo)

A7. Verifica ipotesi: sperimentale
argomentativa

B. B1. è di tipo → locale
→ generale

B2. → torna su ciò che si è fatto
→ anticipa fatti, situazioni

B3. fa riferimenti di tipo → pragmatico
→ teorico (sapere matematico, modi di capire, teorie ingenue)

B4. è un falso ragionamento

B5. è tautologica (produce argomentazioni del tipo “è così perché è così”)

B6. giustifica / non giustifica la strategia adottata

B7. presenta / non presenta
indicatori linguistici → di generalità (sempre)
→ di condizionalità (se … allora, quando, mentre)

Indice delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti con altre discipline
1° e 2° elementare	Il significato di grado sul termometro	Misura della temperatura	Scienze
3° elementare	Ingranaggi e ruote	Ingranaggi	Lingua italiana Educazione all’immagine
4° elementare	Il problema del pacco	Percorso su modello	Lingua italiana
5° elementare	Come eravamo: il valore del denaro nel tempo	Denaro	Storia
1° media	L’investigatore geometrico	Figure geometriche	Lingua italiana Educazione tecnica
1° media	L’orario di classe	Accoglienza a scuola	
2° e 3° media	La bottiglia misteriosa	Probabilità	
3° media	Verifica empirica e argomentazione	Scienze fisiche	Scienze Lingua italiana Educazione tecnica Storia
3° media	Proprietà dei numeri razionali	Numeri	

SCUOLA ELEMENTARE

Il significato di grado sul termometro

Livello scolare: 1^a - 2^a elementare

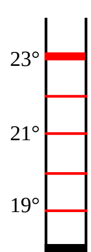
Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare e descrivere regolarità in semplici contesti concreti Produrre semplici congetture Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari	Numeri naturali Addizione e sottrazione tra numeri naturali	<u>Argomentare e congetturare</u> Misurare Numero	Educazione scientifica

Contesto

Come indicato nell'introduzione, lo sviluppo delle competenze argomentative ha bisogno di un clima favorevole all'elaborazione di ipotesi e alla successiva discussione. L'insegnante dovrà curare perciò attentamente le consegne, richiedendo sempre agli allievi di esprimere le motivazioni di ciò che hanno affermato affinché questo divenga abituale. Dovrà necessariamente assumere, nel fare questo, un atteggiamento non giudicante, utilizzando all'occorrenza le risorse del contesto per far riflettere il bambino se questi incontra difficoltà.
Un ambiente di apprendimento particolarmente ricco e stimolante per richiedere lo sviluppo di processi argomentativi è costituito dal "Calendario", un campo di esperienza che offre opportunità a diversi livelli nei primi due anni della scuola elementare. Verrà qui esemplificata una possibile attività riguardante l'uso del termometro. E' necessario tuttavia precisare che lo sviluppo di processi argomentativi fa riferimento alla metodologia seguita e al rapporto fra questa e gli aspetti disciplinari coinvolti. L'esempio riportato è perciò da leggere soprattutto dal punto di vista di ciò che favorisce e permette l'articolazione di ragionamenti e di argomentazioni a proposito del contenuto matematico specifico.

Descrizione dell'attività

Introducendo l'uso abituale del termometro in classe, per la misurazione e la registrazione delle temperature, si giungerà anche alla situazione didattica in cui si richiede agli allievi un confronto fra temperature diverse (ad esempio, le temperature di ore diverse, le temperature esterna ed interna, ecc.). Il confronto può essere espresso mediante la richiesta: *"Di quanti gradi è salita (scesa) la temperatura…?"*. Supponiamo che il confronto riguardi la temperatura esterna delle ore 9 (18 gradi) e delle ore 12 (23 gradi). Se i bambini sono abituati a rappresentare graficamente il loro ragionamento, in casi come questo è opportuno dar loro la possibilità di utilizzare un termometro di carta (opportunamente preparato dall'insegnante). E' possibile che i bambini contino in modo diverso, a seconda di come viene concepita l'azione riguardante il conteggio: alcuni allievi potrebbero dire che la temperatura è salita di 4 gradi (avendo contato le tacchette intermedie), di 5 gradi (avendo contato gli spazi intermedi o le tacchette da 19° a 23°), di 6 gradi (avendo contato le



tacchette da 18° a 23°).
E’ evidente che se l’insegnante ha, nella sua classe, questa situazione, è di fronte ad un problema di scelta: che cosa può fare ? Se “corregge” immediatamente gli allievi che hanno detto che la temperatura è aumentata di 4° o di 6° oppure se rivela lui la “giusta soluzione”, perde una importante occasione per affrontare un problema epistemologico: il significato della conta relativa ad una scala graduata e, quindi, il significato di “grado”. Se invece intende utilizzare questa come un’opportunità per approfondire questo problema, è bene che non assuma il ruolo di “depositario del sapere”, ma ricostruisca con gli allievi il processo di conta, sollecitando domande che permettano ai bambini di interpretare i risultati da loro forniti.
Utilizzando i termometri di carta, potrebbe ad esempio essere ripercorso (anche con il colore) ciò che fa il liquido nel tubicino quando la temperatura sale di un grado. Riflettere con i bambini su “*quando possiamo dire che la temperatura è salita di un grado”* dà modo di esplicitare le condizioni per cui ciò è possibile. Chi aveva contato esclusivamente le tacchette potrà riconsiderare il problema sulla base degli argomenti che altri compagni possono portare: *“è il liquido che deve salire e occupare* <u>tutto lo spazio</u> *di un quadretto”…” il liquido non salta da una lineetta all’altra!…” “Possiamo dire che è salita di un grado quando il liquido ha occupato tutto lo spazio fra le lineette del 18 e del 19”.*
Analogamente, proseguendo il conteggio, i bambini perverranno alla constatazione che era corretto dire che la temperatura fra le ore 9 e le ore 12 era aumentata di 5°. Questa constatazione avviene con la consapevolezza del significato di “*grado*” come “*spazio intercorrente fra due lineett*e”, sulla base dunque di *argomenti* che la discussione guidata dall’insegnante ha messo in evidenza. Essa può permettere, ad esempio, di comprendere che la strategia di contare le lineette a partire da quella successiva alla temperatura minore è corretta, a patto di essere consapevoli del fatto che “dire 1” significa dire che il liquido ha occupato tutto lo spazio fra le tacchette del 18 e del 19.
Nella conduzione dell’attività ovviamente è importante il ruolo mediatore ed agevolatore dell’insegnante, che deve intervenire affinché tutti i bambini comprendano ciò che altri compagni dicono e affinché il pensiero venga espresso in modo compiuto ed articolato.

Ingranaggi e ruote (*)

Livello scolare : 3ª elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l'osservazione. Produrre semplici congetture. Verificare le congetture prodotte, testandole su casi particolari. Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi.	Le prime figure del piano e dello spazio Numeri naturali Numeri pari e dispari Rappresentazione di relazioni	<u>Argomentare e congetturare</u> Lo spazio e le figure Il numero	Lingua italiana Educazione all'immagine

Contesto: ruote e ingranaggi

Gli ingranaggi si manipolano nella esperienza quotidiana fin dalla prima infanzia quindi rappresentano un contesto noto ai bambini. Esso è ricco di significati e consente di costruire concetti e abilità importanti in campo geometrico. All'inizio dell'attività il contesto è popolato da meccanismi con ingranaggi molto comuni nella vita quotidiana (strumenti da cucina come apriscatole, asciuga insalata, cavatappi, frullino, bicicletta, contachilometri, mulini, orologi e giocattoli vari). Essi hanno tutta una materialità fisica con vincoli e relazioni oggettive che ne determinano le possibili azioni. Fin dal primo biennio si possono sviluppare dinamiche esplorative, capacità argomentative e processi metacognitivi connessi con la descrizione, la rappresentazione, la previsione e l'interpretazione del funzionamento degli ingranaggi considerati.

Descrizione dell'attività e commenti

1. Dagli ingranaggi alle ruote

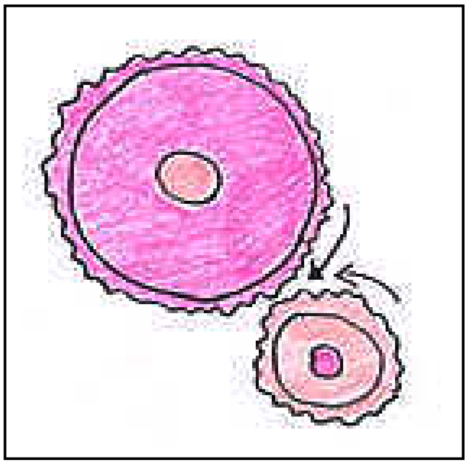
- Manipolare oggetti concreti che contengano ingranaggi costituiti da ruote dentate (giocattoli e /o oggetti della vita quotidiana come l'apriscatole, il frullino, il cavatappi..).
- Descrivere verbalmente il funzionamento di uno di questi oggetti opportunamente scelto dall'insegnante (ingranaggi con ruote dentate complanari). Un esempio potrebbe essere il temperino "a pistoni":

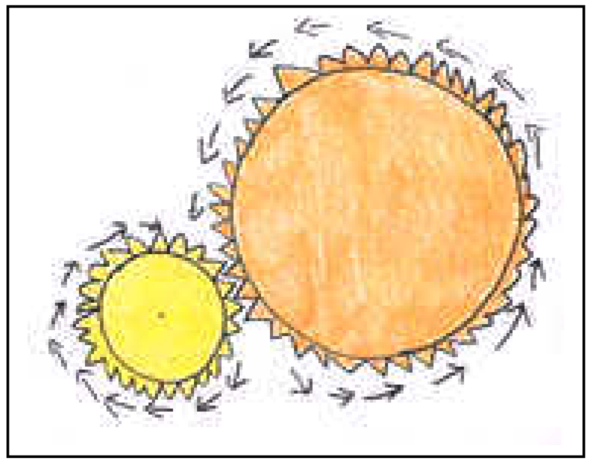
Si possono trovare molti altri oggetti sia presi dalla vita quotidiana sia da giochi posseduti dai bambini. La consegna che viene data focalizza l'attenzione sul funzionamento dell'oggetto " *Descrivi il funzionamento del temperino. Cosa succede quando tempero la matita? Come si muovono le ruote?….*"

- Costruzione, in discussione, di un testo collettivo che descriva in modo sufficientemente preciso il funzionamento dell'ingranaggio scelto.

Una attenzione particolare deve essere posta agli **aspetti linguistici** che si presentano nelle attività proposte. In particolare questo sembra essere un contesto significativo per un approccio precoce all'uso di connettivi linguistici. Il fatto che gli oggetti che si manipolano, descrivono e disegnano siano dinamici, rende possibile la messa in gioco di elementi del discorso importanti nell'attività argomentativa: ad esempio "***se*** *una ruota gira a destra* ***allora*** *l'altra..... (condizionalità); una ruota gira a destra,* ***perchè*** *l'altra gira a ... (causalità);* ***prima*** *una ruota gira a...,* ***poi*** *l'altra gira a.... poi... e poi... (temporalità);* ***mentre*** *una ruota gira a... l'altra....(contemporaneità)*".

- Disegnare il meccanismo dell'oggetto cercando un modo per dar l'idea del movimento.

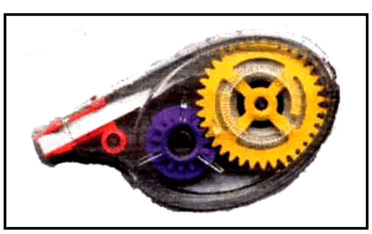




Il disegno di un meccanismo con ruote dentate complanari e la richiesta di dare l'idea del movimento porta alla luce l'uso di primi "simboli" da parte dei bambini. In alcuni casi il movimento può essere rappresentato da manine disegnate vicino ai denti delle ruote, in altri da frecce. L'insegnante deve prestare attenzione ai segni utilizzati dai bambini : passare dal disegno della mano alla freccia rappresenta un salto verso l'astrazione. Anche le frecce disegnate dai bambini possono avere significati diversi: tante frecce intorno alla ruota indicano una visione puntuale del movimento (i denti), una coppia di frecce sta ad indicare una visione globale del movimento (il verso di rotazione). Questi segni trovano una corrispondenza nel linguaggio: destra-sinistra, su-giù (visione puntuale), orario-antiorario (visione globale).

2. Il problema del correttore

- L'insegnante propone ai ragazzi una scheda con l'immagine del correttore a nastro e con la seguente consegna individuale



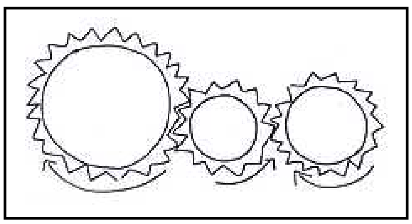
Descrivi come funziona il bianchetto. Come sono le ruote? Come girano? Puoi utilizzare schizzi e disegni.

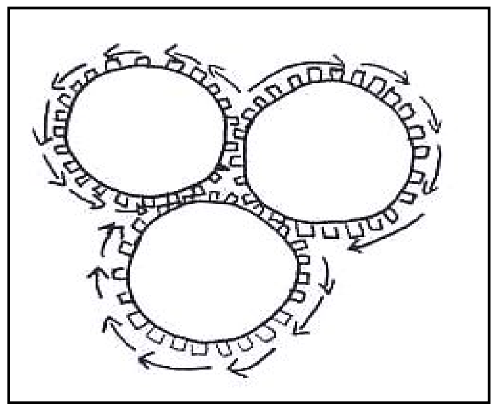
La caratteristica del correttore a nastro è data dalla presenza di due ruote complanari di grandezza diversa che ingranando fanno girare il nastro per cancellare.
L'attenzione è sulla individuazione del fatto che "*due ruote ingranate complanari girano in versi opposti*", che viene a costituire il " postulato fondamentale della teoria delle ruote che si va costruendo. Si può prevedere una attività di confronto sui modi diversi che i ragazzi hanno per descrivere questo fatto: "*Se una ruota gira a destra, l'altra va a sinistra; quando una ruota va in su anche l'altra va in su* (in questo caso l'attenzione è rivolta ai denti delle ruote); etc…".

3. Il problema delle tre ruote

Viene presentata la seguente situazione:
Sappiamo che due ruote ingranate girano in versi opposti . Cosa succede se le ruote sono tre?
Immagina le possibili situazioni e spiega con cura le tue ipotesi

Le possibili sono due: le tre ruote sono disposte in "fila" e allora "*la prima e l'ultima girano nello stesso verso*"; le ruote disposizioni possono essere messe "a collana", quando ognuna ingrana con le altre due, e allora " *il meccanismo non può funzionare e c'è il blocco*".





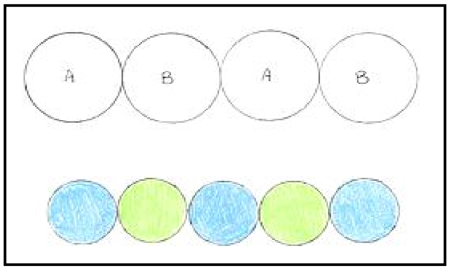
Le argomentazioni che spiegano il blocco sono complesse e in genere riguardano o la struttura fisica delle ruote dentate *(" se la prima ruota gira a destra, la seconda gira a sinistra allora la terza non sa dove andare perché i denti subiscono una spinta in due direzioni diverse e allora c'è il blocco*") o la struttura logica, e i bambini fanno riferimento al " postulato" scoperto precedentemente: (" *se la prima gira a destra e la seconda a sinistra, allora la terza non può girare perché dovrebbe avere lo stesso verso della seconda, ma noi sappiamo che due ruote ingranate girano in versi opposti quindi il meccanismo si blocca*").

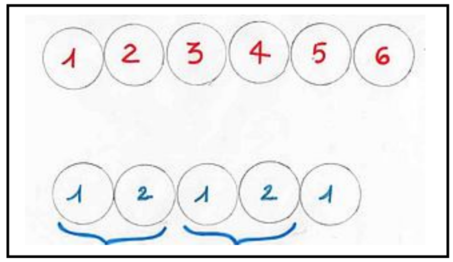
4.E se le ruote fossero più di tre?

- Si pone il problema di generalizzare il problema precedente con la seguente consegna:

" *Sappiamo cosa succede con tre ruote dentate. Cosa succederà se le ruote fossero 4? E se fossero5? E se ne avessimo un numero grande a piacere? Fai i disegni che vuoi e argomenta con cura le tue ipotesi.*"
I bambini cominciano con l'esplorare la situazione disegnando file e collane di ruote con 4, 5, 6 …ruote. Il problema si pone quando ne devono disegnare molte e allora cominciano ad utilizzare "simboli" per indicare il verso di rotazione. I simboli possono essere lettere uguali per indicare lo stesso verso, colori, o numeri. Quando vengono introdotti i numeri i bambini si accorgono della regolarità dei versi di rotazione legata al numero delle ruote e c'è il passaggio verso la generalizzazione:
" *In una fila, se le ruote sono pari allora la prima e l'ultima girano in versi opposti*"
" *In una fila, se le ruote sono dispari allora la prima e l'ultima girano nello stesso verso*"
" *Se una collana di ruote dentate ha un numero pari di ruote allora può girare*".

“*Se una collana di ruote dentate ha un numero dispari di ruote allora non può girare , perché la prima e l’ultima girano in versi uguali e noi sappiamo che due ruote ingranate girano in versi opposti*”.

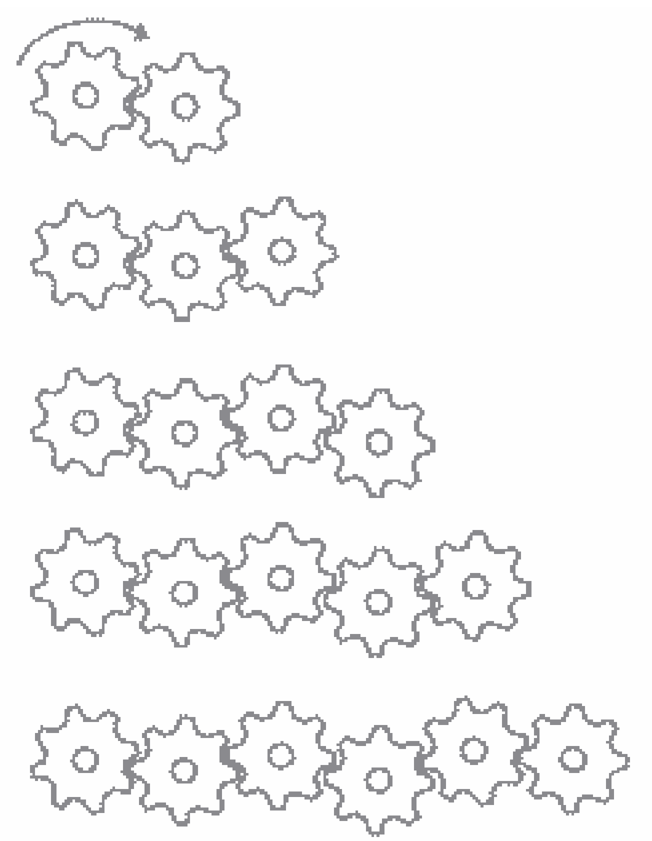




- Si passa poi alla istituzionalizzazione delle scoperte fatte attraverso la costruzione di un testo collettivo che raccogli le argomentazioni dei bambini.

Verifica

1.La prima ruota della prima fila gira a destra. Come gira la seconda?
2.Se la prima ruota delle altre file gira sempre a destra, come girano le altre ruote’ Metti le frecce in modo opportuno.
3. In quali file la prima ruota e l’ultima girano nello stesso verso? Spiega bene il perché.
4. In quali file la prima ruota e l’ultima girano in versi opposti? Spiega bene il perché.



Dimensione storica
Ci pare opportuno segnalare, per conoscenza dell'insegnante, che una possibile teoria di riferimento di questo contesto per quanto riguarda i problemi di funzionamento, si deve ad Erone che nel Libro 1 della sua Meccanica (I sec. d. C) afferma " *Due cerchi ingranati per mezzo di denti, ruotano in direzioni opposti, una ruota verso destra, l'altra verso sinistra.*

(*) Da un'idea elaborata nel NRD dell'Università di Modena, sez. scuola elementare.

Il problema del pacco

Livello scolare: 4ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Produrre semplici congetture Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi		Argomentare e congetturare	Lingua italiana
Usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica Individuare simmetrie in oggetti e figure date. Riconoscere figure uguali e descrivere le isometrie necessarie per portarle a coincidere. Riprodurre in scala. Risolvere problemi, applicando le proprietà geometriche delle figure.	I principali enti geometrici Simmetrie	Lo spazio e le figure	
Essere consapevole dell'obiettivo da raggiungere in una situazione problematica e del processo risolutivo seguito, con attenzione al controllo delle soluzioni prodotte.		Porsi e risolvere problemi	

Contesto: Percorsi su un modello

Descrizione dell'attività

Preparazione del modello: Il problema viene presentato utilizzando un piano, di legno o di cartone, costituito da alcuni pannelli quadrati avvicinati, che simulano un paese abitato dal Signor **O** e da altri personaggi che vi realizzano diversi percorsi. Uno di questi percorsi può essere quello presentato nel problema. Nel paese c'è una strada principale su cui passano le auto….

Fase 1

L’insegnante presenta il problema, verbalmente aiutandosi con i gesti: “*Il Signor **O** deve andare dal punto A al punto C. Un’auto sta passando sulla strada principale e deve consegnare un pacco al Signor **O**. Quest’auto può viaggiare solo sulla strada principale, e può fermarsi nel punto indicato dal Signor **O** per incontrarlo e consegnargli il pacco. Siccome il Signor **O** è molto pigro, vuole compiere il cammino più breve possibile dal punto A al punto C passando per il punto in cui gli sarà consegnato il pacco sulla strada principale. Qual è il punto in cui deve farsi consegnare il pacco il Signor **O** per compiere il cammino più breve possibile?*”

A turno i bambini danno avvio al processo risolutivo indicando sulla strada il punto che secondo loro minimizza il percorso e giustificano la loro scelta “dimostrando”, con opportune argomentazioni, che il punto indicato rappresenta realmente, per loro, la strada più breve per il Signor O. Ogni punto è rappresentato da un chiodino piantato dall’insegnante. Possono usare una macchinina, per far portare il pacco, e alcuni pupazzetti per mimare i percorsi. Tra le diverse soluzioni si ritrova quasi sempre quella corretta, perché è veicolata dalla simmetria della situazione (la linea tratteggiata verticale che funge da asse di simmetria è la linea di giunzione tra i pannelli di legno). Nel corso della discussione di soluzione, i bambini giungono gradualmente a capire che il punto di mezzo tra E1 ed E2 ha qualcosa di speciale.

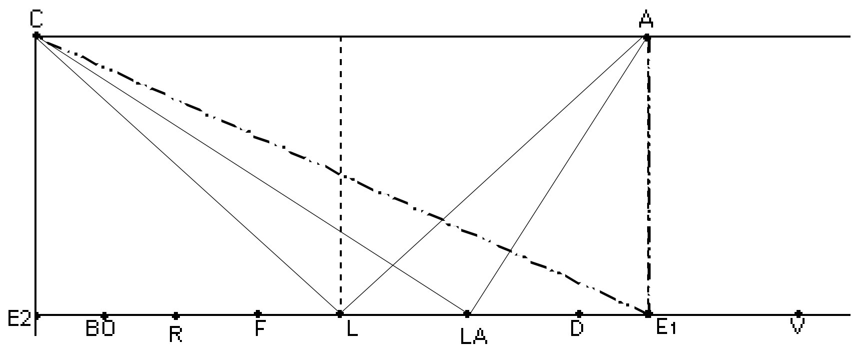


fig.1

Per comprendere meglio come si possano sviluppare le argomentazioni e possano evolvere nel corso della discussione, è interessante citare alcune frasi significative dette dai bambini. Ad esempio, dopo aver indicato in prima istanza il punto E1, Enrico si corregge e indica il punto E2 perché dice: “Da me deve fare un pezzo in più di cammino, invece <u>se</u> va subito qua ha già fatto un bel pezzo in più di cammino.” (fig. 1)

Poco dopo interviene Diego: “Secondo me sono quasi uguali ‘sti posti <u>perché</u> per fare la strada da lì a lì e da là alla C, <u>facendo</u> sempre quegli angoli fa sempre la stessa cosa … gli stessi centimetri”

Infine Lorenzo: “Io devo dire che dalla mia in giù sono più lunghi, dalla mia in su sono più corti <u>perché</u> si avvicinano sempre più alla C e si allontanano di più dalla A”

Già dalle prime fasi si può vedere come i bambini utilizzino un linguaggio abbastanza ricco e complesso, con uso del periodo ipotetico (se), del perché e del gerundio (facendo). Nelle argomentazioni si rivela fondamentale la gestualità veicolata dalla situazione e dagli strumenti usati.

Per provare la correttezza delle loro ipotesi i bambini possono usare una cordicella colorata, dei legnetti che rappresentano i passi del Signor O o il righello. L’uso della cordicella è in genere preferito perché più immediato e perché “con i fili sei proprio sicuro che siano diritti, invece con i legnetti può essere che vai storto”. I percorsi vengono visualizzati dalla cordicella che è più lunga del percorso, e che deve essere tesa fra i chiodini e libera di scorrere. Per misurare i bambini tendono la cordicella e tengono il segno con il dito, misurando il percorso successivo si accorgono che se è più lungo devono “mollare” la cordicella perché si deve allungare o viceversa che devono tirarla per farla accorciare.

Si crea una situazione dinamica che favorisce gli esperimenti mentali e conduce alla formulazione di argomentazioni più articolate. Spostando l'attenzione su ciò che succede alla cordicella, i bambini passano dall'argomentare pro o contro una soluzione alla generalizzazione, ipotizzando che cosa potrebbe succedere spostando il punto del pacco verso destra o verso sinistra. Negli interventi che seguono si evidenziano alcune capacità: confrontare insiemi di situazioni tra di loro, generalizzare, passando da affermazioni legate alla situazione specifica ad altre valide per più situazioni, trarre conclusioni concatenando i ragionamenti (uso del quindi):
Diego: "Se alla V non ci arriva il filo, non arriverà neanche qua (indica i punti E) perché sono i bordi a sinistra e a destra che non arriva, quindi più sono in centro più vanno bene, più sono corti"
Valentina: " LA e L sono quelli che i cordini ci arrivano meglio perché la E2, B, R, e F invece D, E, V sono più lunghi …" Laura: "Vince la L perché se non ci arriva alla R non ci arriverà neanche alla E1 e alla BO perché quelli lì sono più lontani, come qui: se LA ci andava e la V non ci andava forse questi due ci andavano perché avevi subito provato quelli là laggiù, invece noi provavamo subito questi, sapevi già che quelli non ci andavano perché erano più lontani." Lorenzo: "Io ho scelto il punto L perché io dicevo così: se faccio la metà di questi due grandi quadrati sono sicuro che arrivo prima perché taglio la strada e poi la ri-taglio"
Misurando dai punti estremi si vede bene che man mano ci si avvicina al centro le distanze diminuiscono e poi superato il centro si allungano, ma si vede anche l'equivalenza dei percorsi che passano per i due estremi. Ciò suggerisce che ci possano essere delle coppie di percorsi equivalenti come lunghezza, a sinistra e a destra, e comincia ad essere compresa la simmetricità della situazione. La parola "simmetrici" infatti compare poco dopo:
Laura: "…. questi fili qua mi sembrano paralleli, mi sembra che si specchiano" Ins. "Ti ricordi come si dice quando si specchiano?" Voce: "Simmetrici" Laura: "Sì perché lui (Lorenzo) ha visto che te hai messo un chiodo là A e un altro qui C e ha detto: se io mi metto qua questi due si specchiano e allora arrivo prima, taglio tutte le strade, perché lui ha contato nella sua mente, ha ragionato"
L'insegnante può stimolare la produzione di argomentazioni con domande del tipo: "Che cosa ti aspetti che succeda se misuri il tuo percorso che è dopo quello di Luana?" (fig. 2) Si possono ottenere queste risposte: Francesca: "Per me ne avanza ancora un po' di meno" Luana: "Io non sono d'accordo perché se F ha superato la metà per me è più lungo, perché secondo me dopo la metà viene più lungo e prima della metà è più corto …"

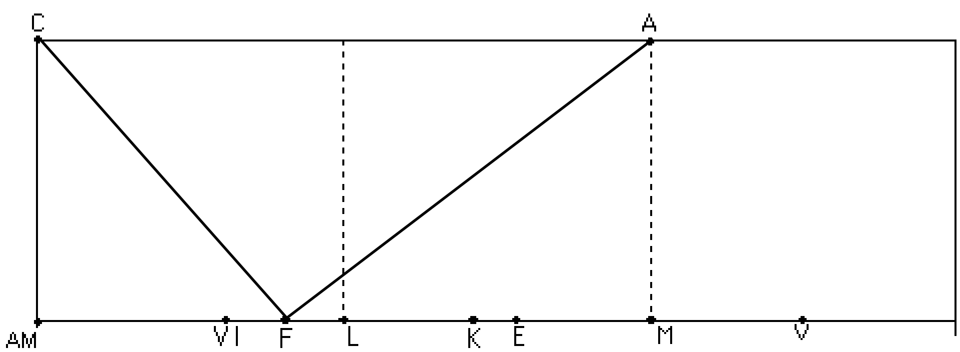


fig. 2

Un altro tipo di domanda che stimola ad argomentazioni è quella che chiede di giustificare una affermazione spiegando il "perché". Nella risposta precedente si vede che l'alunna fornisce la spiegazione: questo si ottiene spontaneamente se "argomentare" fa parte del contratto didattico esistente nella classe per cui nel momento della discussione ogni risposta data ed ogni affermazione fatta deve essere giustificata.
Nella discussione successiva a classe intera, durante la quale sono socializzate le soluzioni e si realizza una rappresentazione in scala sul quaderno delle stesse, confrontando le soluzioni, si fanno ulteriori considerazioni sulle simmetrie e sulle congruenze esistenti nella situazione: il punto A è simmetrico del punto C rispetto alla linea di divisione dei due pannelli (che può essere indicata con

una cordicella colorata), la distanza di A e di C dalla strada è uguale. I bambini giungono a concordare che il punto centrale, nella giunzione dei due pannelli, è proprio quello che minimizza il percorso. La soluzione si trova sulla base di argomentazioni che rendono superflua, anche per i bambini più scettici, la verifica sperimentale con il confronto diretto delle diverse distanze.

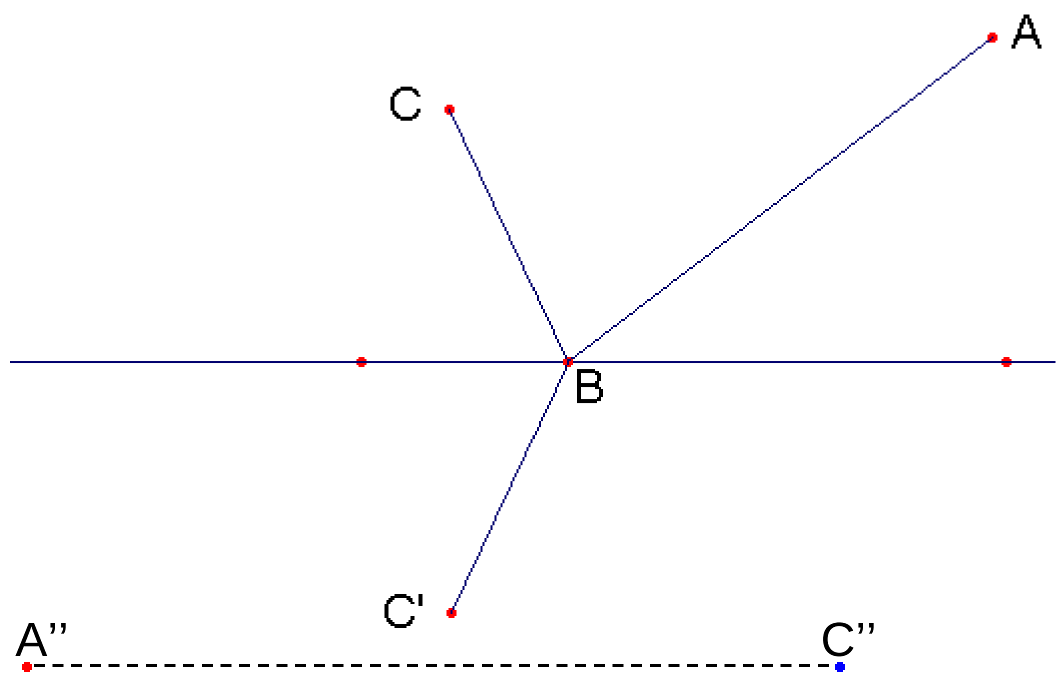
Fase 2

L'insegnante può continuare la storia dicendo: "*Il giorno successivo il Signor **O**, partendo sempre dal punto A, deve andare a trovare un altro amico che abita in questo punto* …" e intanto costruisce davanti agli occhi dei bambini, misurando, il punto C' simmetrico di C e nel punto C' pianta un chiodino. Infine pone la domanda: "*Qual è la strada più breve per andare da A a C'?*".
Per dimostrare che il punto che minimizza il percorso del Signor O da A a C è quello d'incrocio tra la retta congiungente A e C' e la "strada", è difficile che i bambini ricorrano spontaneamente alla costruzione di C', simmetrico di C, non lo farebbe nemmeno un adulto. Quindi l'insegnante deve proporre la costruzione del simmetrico di C come un dato di fatto. Questa fase fornisce ulteriori elementi di riflessione e soprattutto può far evolvere le argomentazioni verso modelli più complessi.
A questo punto i bambini si rendono conto che, in questa situazione, la distanza più corta è sicuramente rappresentata dal percorso rettilineo che congiunge A con C'. L'insegnante allora pone la seconda domanda: "*Oggi il Signor **O** fa più o meno strada rispetto al giorno precedente?*"
Da questa domanda nascono due modalità di verifica: quella che si basa sulla misura e poi sul confronto delle due lunghezze dei percorsi e quella che si basa sul ribaltamento della cordicella da C a C' tenendo fisso il punto L. Ponendo questo problema anche la gestualità legata alla situazione si arricchisce di nuove operazioni: la ricerca di congruenze mediante i ribaltamenti e la costruzione della linea retta congiungente A con C' tendendo la cordicella. Con queste due modalità la congruenza dei percorsi ALC e ALC' si può verificare e in genere tutti concordano nel dire che la misurazione è superflua. Per "dimostrare" che i percorsi dei due giorni sono uguali ci sono tutte le informazioni necessarie, si devono però collegare due affermazioni: il percorso ALC' è il più corto, il percorso ALC è lungo come il percorso ALC'. Non tutti i bambini sono in grado di formulare correttamente il ragionamento: utilizzano però gesti e costruzioni linguistiche che permettono all'insegnante di capire se sono in sintonia con la situazione. Laura: "Secondo me è uguale perché prima abbiamo misurato e abbiamo specchiato di là, abbiamo fatto lo specchio da C a C' allora se lo specchio è come se fosse da A a C' perché se te fai da C' e poi lo metti là vedi che non se ne toglie niente perché l'hai specchiato…" Katia: "Ho visto che il cordino verde era uguale, la stessa misura e visto che quello lì è sempre uguale a questo qui allora devono essere per forza uguali." Laura: "Io oltre a questo modo ne ho avuto un altro, che se noi mettiamo la A là di fianco ti viene come se là fosse ALC, ti viene questo specchiato."
L'argomentazione di Katia è la più completa, anche se il linguaggio naturale usato è molto "sporco", non si stacca dalla gestualità e non esce dal contesto specifico. In pratica, è come se Katia dicesse: "Se i due segmenti CL e C'L combaciano mediante il ribaltamento e il segmento AL coincide nei due percorsi, allora ALC e ALC' sono congruenti"; dalla verità delle due affermazioni di partenza si deduce la verità della conclusione.

Fase 3

La simmetria delle situazioni presentate finora potrebbe dare una visione troppo semplificata e statica del problema, quindi è opportuno variare la posizione dei punti A e C, facendo in modo che si trovino a diversa distanza dalla strada. Una fase ulteriore del lavoro, proponibile anche in classi successive, prevede quindi la soluzione di questo problema: "*Che cosa cambia se i punti A e C si trovano a diversa distanza dalla strada? Dove dobbiamo far posare il pacco? Quale sarà il percorso più breve per il Signor **O**?*"
Spostando i punti A e C, il modello risolutivo costruito con la situazione precedente non funziona più perché manca la simmetria dei punti A e C rispetto alla linea di giunzione dei pannelli: si tratta quindi di spostare

l’attenzione dei bambini sulla simmetria tra C e C’ che permette di trovare il punto di incrocio B sulla retta r in qualsiasi caso.
A questo punto la situazione “deve” essere decontestualizzata e si presta quindi anche alla modellizzazione con i software di geometria dinamica che possono facilitare la comprensione della soluzione geometrica. L’uso del software determina un cambiamento nel linguaggio perché i bambini debbono essere avviati ad una terminologia più scientifica. In questo caso il software facilita il processo d’astrazione verso gli enti geometrici pur mantenendo alcune immagini forti: le cordicelle diventano segmenti, i chiodini diventano punti, ma ciò che succede nel piano con le cordicelle è molto simile a ciò che si vede accadere sul computer.



Per risolvere il problema con Cabri si costruisce una retta che rappresenta la strada, due punti A e C che rappresentano i punti di partenza e d’arrivo, e, scegliendo in maniera casuale un punto B sulla retta, si costruiscono i segmenti AB e BC. Il percorso sarà individuato dalla somma dei due segmenti che viene riportata con il compasso nella parte bassa dello schermo. Il punto rosso e il punto blu sono gli estremi del segmento somma A’’C’’. Facendo scorrere il punto B sulla retta, i bambini si rendono conto che il punto blu scorre verso destra o verso sinistra, ma non scende mai sotto un punto limite che si raggiunge quando A B e C’ sono allineati.
In questo caso i bambini studiano le variazioni della situazione al variare della posizione di B e quindi il problema diventa: “*Trovare la posizione del punto B che minimizza la lunghezza del percorso ABC*”. Questo momento dell’attività può fungere da verifica della comprensione del problema.
In una classe superiore si potrebbe ipotizzare un approccio diretto al problema tramite il software, occorre però modificare le modalità didattiche in modo che siano i bambini a scoprire la posizione del punto B per approssimazione in modo da rendere minimo il segmento A’’C’’. In tal caso i bambini si trovano ad esaminare il grafico precedente ma senza il punto C’. Successivamente, utilizzando la macro Bottone di Cabri, si può far apparire il punto C’ simmetrico di C rispetto alla retta r e verificare che in corrispondenza del percorso minimo si ha l’allineamento dei punti ABC’.

Come eravamo: il valore del denaro nel tempo

Livello scolare: 5ª elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l'osservazione. Produrre semplici congetture. Verificare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo ad eventuali controesempi. Descrivere oggetti matematici anche in modo carente o sovrabbondante, con riferimento alle caratteristiche ed alle proprietà osservate. Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni.	Proprietà dei numeri. Il numero zero e il numero uno. Operazioni tra numeri decimali. Proprietà delle operazioni. Caratteri qualitativi e caratteri quantitativi. Diagrammi di vario tipo.	<u>Argomentare e congetturare</u> Il numero I dati e le previsioni	Storia

<u>Attività proposte</u>

Attività 1 Il contesto storico – sociale.
Attività 2 Progettazione e realizzazione di una "linea del tempo" dal 1946 ad oggi.
Attività 3 I grafici cartesiani tempo / prezzi.

Contesto

Il tema dell'attività presentata offre un esempio di come le argomentazioni degli allievi opportunamente stimolate ed orchestrate dall'insegnante e dalla situazione didattica stessa possano far evolvere le concezioni degli stessi da una fase pre-scientifica ed intuitiva ad una sistemazione in un linguaggio scientifico preciso, in cui le problematiche, intuite dapprima in modo confuso, si precisano in concetti rigorosi e definiti.
La situazione, opportunamente condotta dall'insegnante, genera un'evoluzione del linguaggio degli allievi corrispondentemente all'acquisizione di nuove nozioni scientificamente precise che sostituiscono quelle più vaghe e acritiche da cui sono partiti.
Nel processo di evoluzione cognitiva che ne risulta, giocano un ruolo fondamentale le rappresentazioni utilizzate (piano cartesiano e grafici di funzioni empiriche).
Tale processo corrisponde all'apprendimento da parte degli allievi di concetti matematici astratti molto delicati, per esempio la nozione di valore relativo di grandezze variabili nel tempo e la transizione da strutture di tipo additivo a strutture di tipo moltiplicativo.
Ciò corrisponde, rispetto al problema studiato, alla comprensione del concetto di valore del denaro in termini di potere d'acquisto:

> "Il potere d'acquisto, cioè il valore di una moneta, è rappresentato da ciò che quella moneta può comperare tra i beni ed i servizi disponibili sul mercato. Pertanto uno dei modi più semplici per misurare le variazioni del potere d'acquisto dell'anno A all'anno B è quello di vedere quante unità monetarie occorrono per comperare un certo "insieme" di beni e di servizi nell'anno A e quante unità occorrono per comperare un "insieme" equivalente di beni e servizi nell'anno B. (...) Supponiamo di avere il prezzo in monete corrente nell'anno 1955 di un insieme di beni e servizi che oggi la gente comunemente acquista, cioè, pane, carne, frutta,

vino, stoffe, alloggio, carbone, libri, luce elettrica, automobile, benzina, spettacoli cinematografici, radiotelevisivi e così via. Se vogliamo fare dei calcoli sulla variazione del potere d'acquisto della lira dal 1938 al 1955 basta indagare quanto costava nel 1938 lo stesso "insieme" di beni e servizi (in debite proporzioni) di cui conosciamo il prezzo nel 1955."

C. Cipolla, Le avventure della lira, 1975.

Si tratta di un tema certo non facile, anche se è piuttosto frequente per gli insegnanti, come per gli alunni e le loro famiglie, imbattersi in raffronti tra periodi di tempo a volte distanti pochi anni, a volte decine di anni, che come annota C. Cipolla "sono molto adatti per colpire la fantasia", ma certo non servono né a capire né a misurare il fenomeno stesso. In altre parole si tratta di campi di esperienza ricchi e stimolanti in cui la situazione didattica proposta può far emergere rilevanti concetti scientifici. Si osserva ancora che tali concetti riguardano tipicamente il rapporto tra matematica e società civile, in questo caso i prezzi e il valore del denaro

Nell'esposizione dell'attività si metteranno in luce soprattutto i momenti cruciali in cui le argomentazioni degli allievi diventano generatori di nuovi concetti, più astratti e più precisi. Distingueremo tre livelli a cui si situano le argomentazioni degli allievi:

a) le relazioni tra rappresentazioni e dati, ad esempio tra il grafico e i prezzi (in termini di aumento, diminuzione, …);
b) le relazioni tra i grafici e i "valori effettivi" dei prezzi nel tempo con la necessità conseguente di distinguere tra valori assoluti e relativi;
c) la significazione espressa dal grafico tempo/prezzi e la necessità di passare al grafico in cui si rappresentano gli incrementi relativi e non più i valori assoluti, al fine di descrivere e comprendere meglio il fenomeno.

Indicheremo in corsivo i momenti argomentativi nell'attività qui esemplificata.

Commenti

L'attività riguarda anche i seguenti punti problematici per l'apprendimento:

- i numeri naturali ostacolo per i numeri decimali;
- moltiplicazioni e divisioni con i numeri decimali.

Descrizione dell'attività.

<u>"Il contesto storico – sociale"</u>

Nel corso di una discussione preliminare l'insegnante invita gli alunni ad esporre le proprie opinioni sul valore del denaro nel tempo, ponendo alcune domande stimolo del tipo:

Qualcuno vi ha parlato di avvenimenti accaduti in questi anni?
Cosa vi ha raccontato?
Quali cambiamenti sono avvenuti?
Pensate che il denaro nel tempo abbia avuto sempre lo stesso valore?
I prezzi delle merci sono cambiati?
Perché?
Oggi con mille lire si può comprare quello che si poteva comprare dieci anni fa?
E venti anni fa?

Osservata la carenza, nei racconti degli alunni, di dati quantitativi necessari per comprendere il potere d'acquisto di una moneta ("Mia nonna ... mia mamma mi ha detto che una volta si stava meglio"; "Una volta, quando si viveva in campagna, si stava più a contatto con la natura e allora si viveva meglio"; ...), si può decidere di cercare notizie e informazioni su libri di storia, enciclopedie, raccolte di giornali, annuari I.S.T.A.T., ...

I genitori e i nonni si possono prestare a raccontare abitudini di vita quotidiana, fatti e avvenimenti di quegli anni, e a ricercare documenti dal dopoguerra ad oggi (giornali, libri, cartoline con francobolli, biglietti ferroviari, fotografie, documenti scolastici dei familiari, monete, prezzi e costi documentati di prodotti vari, ...).

Le brevi testimonianze di genitori e nonni riportate in classe dagli alunni, la visione di documentari televisivi e la lettura di schede storiche sono utili a cogliere il mutamento di abitudini e di stili di vita, i principali avvenimenti accaduti ed a collocarli correttamente nel tempo.
La lettura delle tabelle I.S.T.A.T. permette inoltre di riflettere su alcuni aspetti di carattere economico, quali prezzi al consumo e all'ingrosso.
Il materiale raccolto può essere selezionato in base al valore di testimonianza utile alla ricerca, catalogato e datato.
Questa fase può durare a lungo, perché la comprensione dei cambiamenti avvenuti nel periodo storico considerato è piuttosto complessa e ricca di problematiche.

Progettazione e realizzazione di una "linea del tempo" dal 1946 ad oggi.

L'insegnante propone agli alunni le seguenti attività:

Prepariamo un cartellone sul quale riportare le informazioni raccolte.
Come possiamo fare?
Potremmo progettare e realizzare una striscia del tempo dal 1946 ad oggi, suddivisa in fasce, dove registrare:
- gli avvenimenti storici, politici, sociali, culturali, sportivi, ...;
- le invenzioni e le scoperte scientifiche;
- gli avvenimenti della vita familiare;
- i prezzi di alcuni prodotti e le retribuzioni di un operaio e di un impiegato.

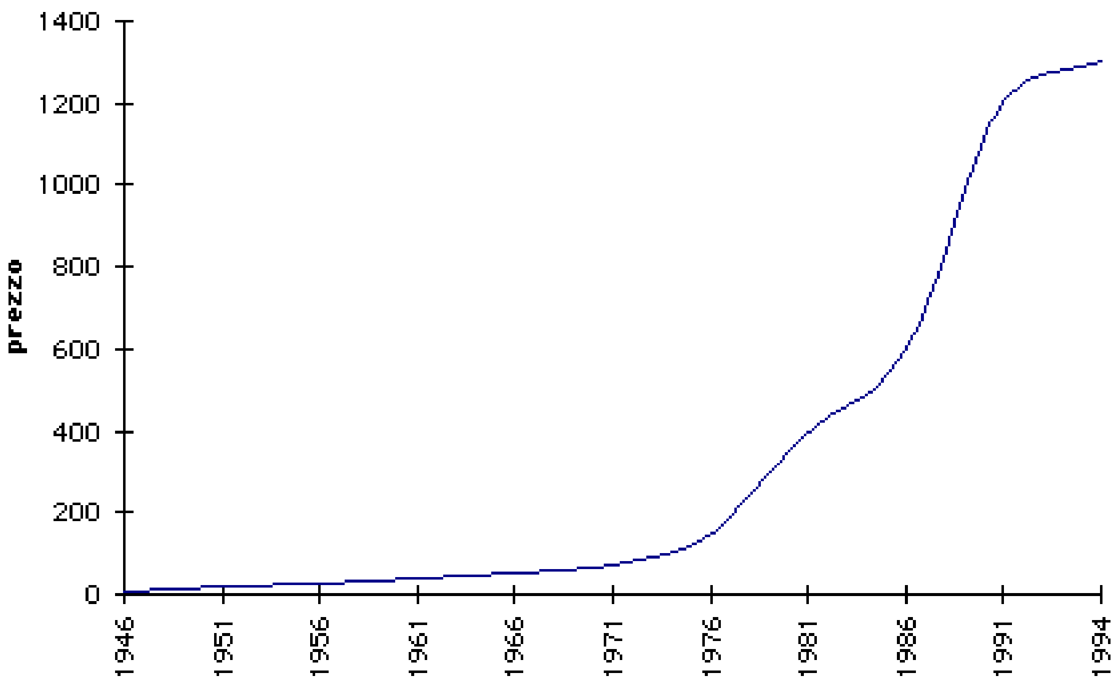
Propone inoltre di riservare parte del cartellone a grafici cartesiani, sui quali registrare i prezzi di alcuni prodotti (olio, pane, carne bovina, pasta, benzina, quotidiano, francobollo per cartolina, …) e alcune retribuzioni (ad esempio le retribuzioni mensili lorde di un operaio e di un impiegato di terza categoria del settore metalmeccanico), al fine di facilitare l'osservazione del loro andamento nel tempo.
Se per la realizzazione della linea del tempo si ha a disposizione un'intera parete dell'aula, si può suggerire agli alunni di misurarla, prima di procedere alla stesura del progetto.
Gli alunni hanno così modo di avanzare ipotesi, spiegare, commentare e valutare le procedure presentate, pervenendo alla definizione del progetto e alla sua esecuzione.
La discussione si concentrerà allora sulla scelta della strategia più economica e potrà concludersi con la richiesta da parte dell'insegnante di formulare una regola che consenta la costruzione di un cartellone di questo tipo, di dimensioni qualsiasi.

I grafici cartesiani.

Terminato il cartellone, *insieme si concordano le modalità per registrare i prezzi su un grafico cartesiano*: gli anni vengono posti in ascissa, conservando la divisione in quinquenni, e i prezzi in ordinata, stabilitane la lunghezza e la suddivisione.
L'insegnante inviterà gli alunni ad osservare il grafico ottenuto:

Quali osservazioni vi suggerisce il grafico?
Sapreste dire approssimativamente quanto costava questo prodotto nel 1954, nel 1968 e nel 1983?
Di quante volte è aumentato il prezzo di ogni prodotto?

Gli alunni confrontano ad esempio il grafico dei prezzi di un quotidiano e le due "catene" di numeri che esprimono rispettivamente l'aumento dei prezzi in senso additivo (di quante lire è aumentato il prezzo) e moltiplicativo (di quante volte è aumentato il prezzo):



	+16		5		15		10		20		80		250		200		600		100	
4		20		25		40		50		70		150		400		600		1200		1300
	x 5		1,25		1,6		1,25		1,4		2,14		2,66		1,5		2		1,08	

Gli alunni rilevano che il grafico cartesiano raffigura la catena additiva, mentre nelle loro attese si aspettavano la rappresentazione di quello moltiplicativo; giudicano questo fatto "un errore".
In particolare, colgono un'incongruenza tra gli aumenti relativi ai quinquenni '46/'51 e '56/'61: nel primo quinquennio, infatti, l'aumento di 16 lire determina il quintuplicare del prezzo, mentre nel secondo quinquennio un aumento quasi analogo, di 15 lire, moltiplica il prezzo solo di 1,6 volte. Analogamente, l'aumento di 600 lire relativo al quinquennio '86/'91, un'impennata sul grafico, raddoppia solo il prezzo.
La rappresentazione scelta, dunque, mette in crisi le aspettative degli alunni e problematizza ulteriormente la situazione.
La discussione intorno all'"errore", scoperto nei grafici e imputato al valore costante assegnato alla lira, fa sì che gli alunni si pongano un nuovo problema:

> *“Esiste davvero un grafico che rappresenta quante volte è aumentato il prezzo di una merce?”*

L'insegnante raccoglie questa domanda e chiede agli alunni come dovrebbe essere, secondo loro, questo grafico.
Un alunno propone:

> *"Manteniamo in ascissa gli anni e segniamo in ordinata le volte che aumenta la merce".*

Gli alunni immaginano che la linea del nuovo grafico possa salire, scendere, o mantenersi costante.

> *"Le salite indicano che l'aumento è in aumento, le discese indicano che l'aumento è in diminuzione, la linea parallela all'ascissa indica un aumento che si mantiene costante."*

Gli alunni si domandano come potrebbero essere i grafici dei prezzi che subiscono una diminuzione. Congetturano che dovrebbero scendere "sotto zero", come quelli della temperatura e suggeriscono di provare con un prezzo che da 500 passa a 250 lire: 500 x ? = 250.
La diminuzione corrisponde a un aumento di 0,5 volte e quindi il grafico non scende al di sotto dell'asse dell'ascissa.

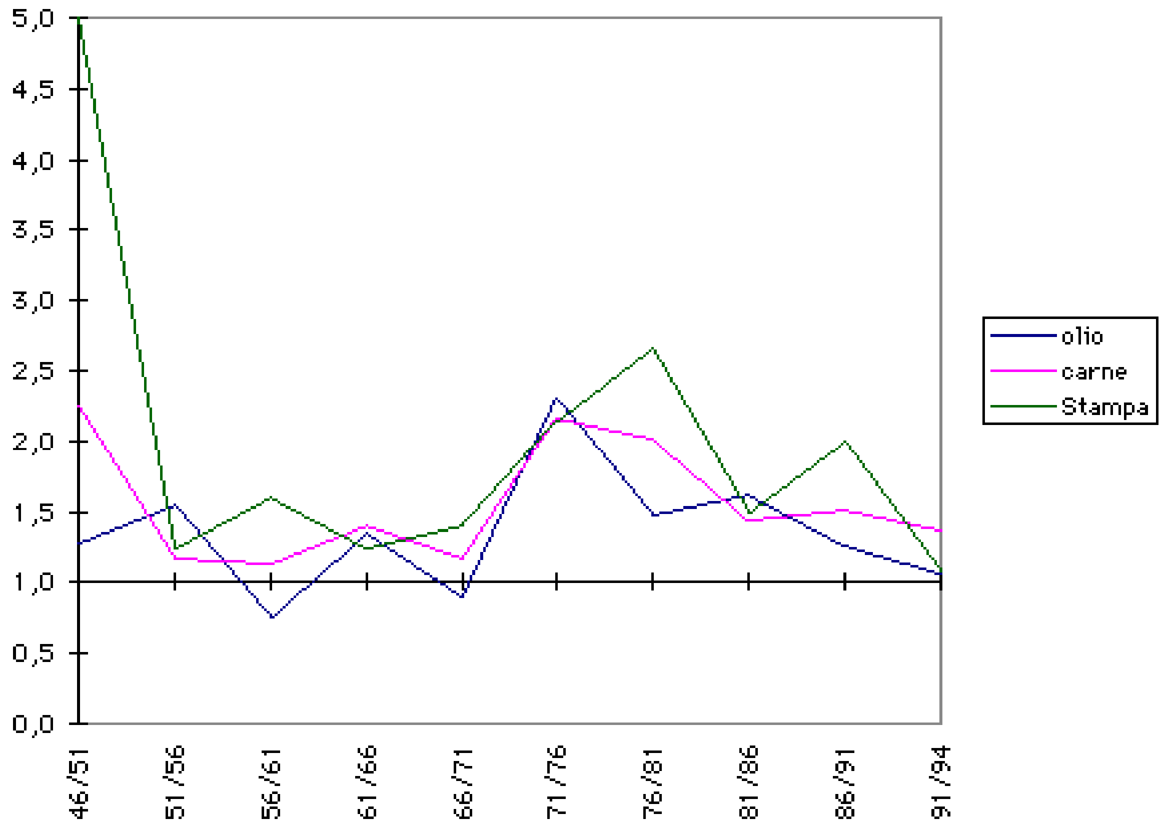
Un alunno ipotizza che il posto assegnato all'asse non sia appropriato e propone di "metterlo più in alto", ma non riesce a spiegare la sua intuizione.
Gli alunni discutono a lungo quest'ultima ipotesi: alcuni sono d'accordo, altri no.
C'è un momento di blocco, superato da questi interventi di due alunni:

"Nella moltiplicazione è l'uno, e non lo zero, che non cambia il risultato.
Infatti ... 500 x 2 = 1000 500 x 1 = 500 500 x 0,5 = 250"
Se l'aumento si mantiene costante vale 1, quindi l'ascissa deve coincidere con 1 e non con 0."

Questa conclusione è ben accolta da tutti, perché in questo modo la diminuzione di un prezzo è rappresentata da una linea che scende sotto l'asse x, proprio come avevano supposto:

"Mentre i grafici precedenti ubbidiscono alle regole dell'addizione, il nuovo grafico ubbidisce alle regole della moltiplicazione."

Si disegna il nuovo grafico, ad esempio quello che rappresenta gli aumenti dell'olio, della carne e di un quotidiano:



Nel corso di discussioni successive sui grafici si raffina la situazione problema:

Quanto vale il denaro?
Mille lire valgono di più oggi o valevano di più quaranta, ..., dieci anni fa?
Come si può stabilire?

Al fine di attribuire significato al valore del denaro in termini di potere d'acquisto, l'insegnante propone situazioni del tipo:

Con la somma di denaro che serviva nel 1946 per comprare un chilo di carne, quanto pane e/o pasta e/o olio si poteva comprare? E quanto se ne può comprare oggi?
Con la somma di denaro che serve oggi per comprare un chilo di carne, quanto pane e/o pasta e/o olio si può comprare? E quanto se ne poteva comprare nel 1946?
La carne era più cara nel 1946 o lo è di più oggi?
Per comprare un chilogrammo di carne, quante ore doveva lavorare un operaio o un impiegato nel 1946? Nel 1951? ... E oggi? E per comprare un litro di olio? Un chilogrammo di pane?
Immaginiamo una spesa settimanale di una famiglia di quattro persone.
Quante ore doveva lavorare un operaio o un impiegato nel ..... per mantenere la famiglia? Quante ore deve lavorare oggi?

Elementi di prove di verifica

Le competenze argomentative non possono essere verificate se non su contenuti tematici, poiché fanno riferimento al processo di pensiero che l'allievo elabora per risolvere determinate situazioni problematiche o per rispondere a particolari e mirate consegne, con riferimento a precisi contenuti matematici.
Nello stesso tempo, le competenze argomentative sono competenze specifiche e richiedono quindi una griglia di valutazione specifica.
Le prove di verifica riportate di seguito hanno perciò la caratteristica di poter essere utilizzate sia per la valutazione degli obiettivi tematici (sul *numero*, sullo *spazio* e sulle *figure*, ecc.), sia per la valutazione di obiettivi connessi all'argomentare e al congetturare. Qui verranno messe in evidenza alcune caratteristiche di questo secondo aspetto.

Una pagina del calendario

Livello scolare: 1ª elementare

<u>Descrizione della prova</u>
Si consegna ad ogni allievo un foglio su cui è stato fotocopiato il calendario di un mese di 30 giorni, senza dichiarare il mese (è bene che sia la fotocopia della pagina di un calendario vero).
Si dice ai bambini che il calendario è stato strappato (o rovinato) per cui sono rimaste visibili solo alcune parti: ad esempio, la parte iniziale fino a SABATO 7 e, in fondo, il numero 30. La parte centrale non è visibile.

Leggi con attenzione.

Piero, un bambino di un'altra classe, ha scritto che il giorno 30 sarà DOMENICA.

Ora rispondi.

1. Sei d'accordo con Piero?

____

2. Spiega perché sei d'accordo o perché non sei d'accordo.

____
____
____

3. Secondo te, che mese potrebbe essere? Perché?

____
____
____

<u>Analisi a priori delle risposte possibili</u>

- Procedura seguita dal bambino per rispondere a 1 (inferita dalla risposta2):
– non opera un controllo rispetto a ciò che ha scritto Piero:
  - dando una risposta casuale (che potrebbe anche essere quella corretta)

- appoggiandosi ad un controllo non pertinente (ad es. controllando sul calendario appeso in classe che giorno è il 30)

– opera un controllo rispetto a ciò che ha scritto Piero:
  - rifacendo la conta dei giorni (numero e denominazione) dal 7 al 30:
  - rappresentandola
    a mente
    utilizzando la scansione settimanale

(ad es. 7 $\xrightarrow[\text{sabato}]{+7}$ 14 $\xrightarrow[\text{sabato}]{+7}$ 21 $\xrightarrow[\text{sabato}]{+7}$ 28 $\xrightarrow[\text{lunedì}]{+2}$ 30)

[la non correttezza della procedura di calcolo non interferisce con il processo di pensiero]

q Procedura seguita dal bambino per rispondere a 3:

– sceglie un mese
  → casualmente
  → il mese in cui effettua la verifica

  e non è in grado di giustificare la previsione

– sceglie un mese adducendo un argomento
  - pertinente (un numero di giorni del mese)
  - non pertinente (es. osservando il mese in cui il 7 era sabato)

La collana rotta

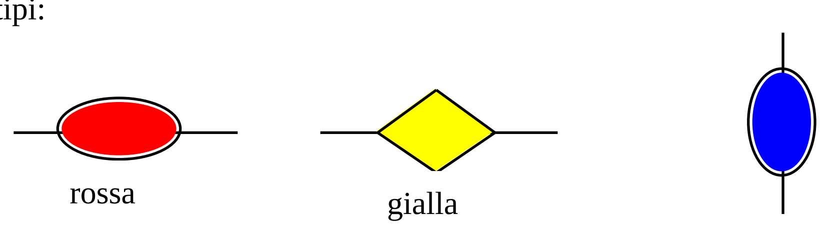
Livello scolare: 2ª elementare

<u>Descrizione della prova</u>

Si consegna ad ogni allievo la seguente scheda.

Leggi con attenzione.

La collana di Giulia si è rotta e tutte le perline si sono mescolate.
Giulia vuole ricostruirla e comincia a riordinare le perline.
Ne ha di 3 tipi:

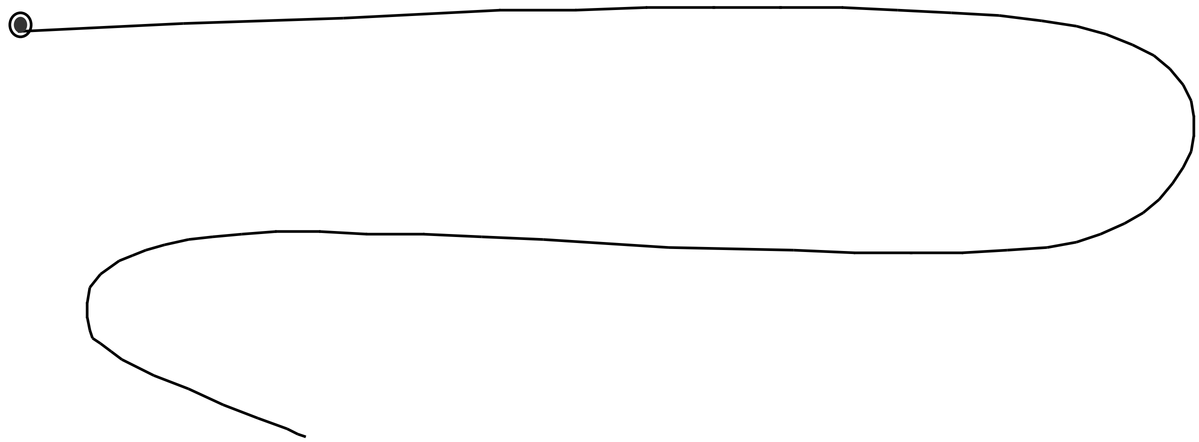


rossa gialla blu

Giulia ricorda che deve:
- infilare una perlina rossa
- infilare tre perline blu
- infilare una perlina gialla
- infilare tre perline blu

e ripetere per altre 4 volte questa sequenza.

Ora disegna la collana seguendo le indicazioni di Giulia.



<u>Analisi a priori</u>

Nella situazione il bambino deve coordinare i seguenti elementi:

A. ritmo della sequenza
- mantenendo il colore della perlina
- mantenendo la forma delle perline
- mantenendo l'orientamento della perlina rispetto al filo
- mantenendo il numero delle perline

B. iterazione della sequenza
- individuando l'inizio
- controllando quante volte va ripetuta

Si possono osservare:
- il controllo sul livello locale A
- il controllo sul livello globale B
- la presenza di entrambi i livelli di controllo
- la perdita del controllo sul livello locale procedendo nel disegno

La prova di verifica può essere semplificata eliminando 1 o 2 condizioni nel livello locale A (ad es. il colore delle perline e/o il numero diverso dei vari tipi di perline).

La regola misteriosa

Livello scolare: 2ª elementare

<u>Descrizione della prova</u>
Si consegna ad ogni allievo la seguente scheda.

Leggi e osserva con attenzione.

5	7	6	8	7	9	8	7	9

Carletto ha sistemato le carte con i numeri seguendo una regola.
Mariella osserva le carte e dice: “Hai sbagliato! Al posto di un 7 dovevi mettere 10”

Ora colora la carta che Mariella vuole cambiare.

Spiega perché.

____
____
____

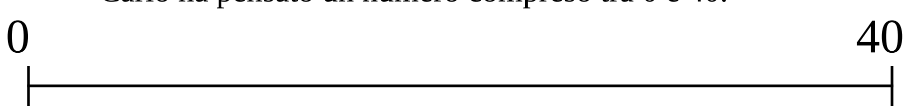
Indovina il numero

Livello scolare: 2ª elementare

<u>Descrizione della prova</u>
Si consegna ad ogni allievo la seguente scheda.

Leggi con attenzione.

Carlo e Anna giocano a “INDOVINA IL NUMERO”.
Carlo ha pensato un numero compreso tra 0 e 40.



Anna fa queste domande a Carlo:

- è maggiore di 20? NO
- è compreso tra 10 e 15? SI
- è minore di 13? NO

Anna indovina il numero.

Ora indica con una crocetta il numero che ha detto Anna.

☐12 ☐46 ☐17 ☐14

Spiega perché hai scelto quel numero.

____
____
____

Spiega perché non hai scelto gli altri numeri.

____
____
____

Secondo te c'era un'altra risposta esatta?
Se sì, quale?

____
____
____

Cifre e numeri

Livello scolare: 3ª elementare

Un bambino afferma:

"Nel numero 280 la cifra 8 vale di più della cifra 2: infatti se ho 8 biglie ne ho di più e se ne ho 2 ne ho di meno"

Sei d'accordo con questo bambino ?
(Spiega bene i motivi di ciò che pensi)

Competenze verificate:

- Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l'osservazione
- Produrre semplici congetture

Elementi per una griglia di valutazione :

- Osservare il livello locale o generale delle argomentazioni: per "livello locale" si può intendere se l'argomentazione è riferita al numero specifico, per "livello generale" si può intendere se l'argomentazione è riferita a tutti i numeri (B1)

- Osservare se viene richiamato il valore posizionale delle cifre, argomento cruciale in questo caso (B3)

- Osservare se vengono prodotti controesempi, cioè se si ammette che "può" esserci un'opinione diversa, ancorché errata, e se l'erroneità di questa idea viene utilizzata per sostenere l'esattezza della propria (A6)

Ombre in ordine

Livello scolare: 4ª elementare

Un bambino ha misurato le ombre di tre pali in giardino. Ecco le misure che ha riportato su un foglio : **1,25 m** **0,95 m** **1, 4 m** Sapresti metterle in ordine, dalla più lunga alla più corta ? Spiega con molta precisione perché secondo te vanno disposte in quell'ordine.

<u>Competenze verificate:</u>

- Produrre semplici congetture
- Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari

<u>Elementi per una griglia di valutazione</u>

Dal punto di vista disciplinare, gli allievi devono tenere conto dell'ostacolo epistemologico costituito dal rapporto fra il modello dei numeri interi e il modello dei decimali. Il processo argomentativo può consentire all'allievo di superare l'ostacolo. Nella griglia dunque, dal punto di vista dell'argomentazione, sarà importante osservare la qualità e la pertinenza degli argomenti prodotti a sostegno dell'ipotesi di ordinamento che l'allievo ha elaborato.

Gli argomenti possono far riferimento :

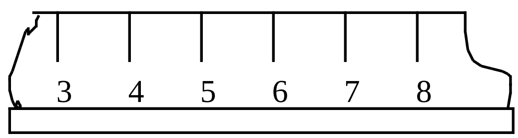
- (B3) ai significati della misura *(es.: 1 m vale più di 9 dm, quindi….)*
- (B3) al valore posizionale delle cifre *(es.: 1 è un'unità, 4 sono decimi, quindi…)*
- (B3) a principi *(es.: al principio di "livellamento": 1,4 è come se fosse 1,40, quindi è maggiore di …)*
- (B3) ad aspetti di natura pragmatica *(es.: perché ho trasformato le misure in strisce e ho visto che…)*
- (B4) ad argomenti logicamente strutturati, ma errati dal punti di vista matematico *(es.: se fossero numeri interi, sarebbero 125, 95 e 14 e allora…)*
- (B5) ad elementi tautologici *(es.: …perché secondo me così sono in ordine)*

Il righello spezzato

Livello scolare: 5ª elementare

A Giovanni è rimasto solo un frammento del suo righello…
Spiega come può fare per misurare la lunghezza del segmento disegnato qui sotto utilizzando il pezzo di righello che gli è rimasto.

“righello” di Giovanni



segmento

<u>Competenze verificate:</u>

- Produrre semplici congetture
- Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi

<u>Elementi per una griglia di valutazione</u>

Dal punto di vista disciplinare, la verifica consente di accertare la padronanza del significato “misura” del numero. Essa è accertabile sulla base del processo di pensiero che l’allievo produce per giungere alla misurazione del segmento.
La valutazione del processo argomentativo può tenere conto della qualità della progettazione (facendo riferimento ad A5 e agli indicatori B, in particolare a B6):

- esplicita / non esplicita l’origine della misura sul frammento di righello *(es.: metto il 3 all’inizio del segmento…)*
- esplicita / non esplicita il cambiamento virtuale del valore dell’origine *(es.: …il 3 diventa lo zero…)*
- esplicita / non esplicita il cambiamento virtuale di valore del punto di arrivo ogni volta che il frammento di righello viene utilizzato per misurare il segmento *(es.: e dove c’è scritto 8 dico che il segmento misura già 5 cm…)*
- esplicita / non esplicita il motivo per cui ogni volta che viene usato il righello si legge una determinata misura *(es.: dico 5 cm perché da 3 a 8 c’è lo spazio di 5 cm)*
- esplicita / non esplicita la necessità dell’iterazione del riporto del frammento del righello sul segmento *(es.: adesso devo mettere il “3” del righello dove prima c’era l’8 e ricomincio a misurare… vado avanti così fino alla fine del segmento)*

(Nota) Alcune delle verifiche riportate sono tratte da “BAMBINI, MAESTRI, REALTA’”, Rapporto Tecnico, Dipartimento di Matematica Università di Genova.

SCUOLA MEDIA

L'orario di classe

Livello scolare: 1ª media (primi giorni dell'anno scolastico)

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati		Argomentare e congetturare	Lingua italiana
Eseguire combinazioni diverse tra gli elementi di un insieme Usare tabelle per rappresentare relazioni	Rappresentazioni di relazioni con diagrammi di vario tipo	Le relazioni	
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere Individuare le risorse necessarie per raggiungere un obiettivo selezionando le informazioni ricavabili dal contesto Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere, concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri procedimenti		Porsi e risolvere problemi	

Contesto

Attività di accoglienza a scuola. Il passaggio dagli ambiti disciplinari alle discipline può creare alcuni problemi di disorientamento. Uno di essi è il riferimento ad un quadro orario settimanale molto più articolato di quello utilizzato negli anni precedenti.

Descrizione dell'attività con indicazioni didattiche

La classe viene suddivisa in gruppi di lavoro, col compito di elaborare l'orario settimanale delle lezioni.

Nella prima fase i gruppi di alunni vengono sollecitati dall'insegnante a costruire una tabella vuota opportuna (sul modello di quelle presenti sui diari scolastici in commercio). Quindi si passa all'analisi delle proposte. I modelli vuoti di tabella vengono mostrati all'intera classe che ne sceglie uno, in base a criteri di semplicità, leggibilità immediata,…

In un secondo momento i gruppi di alunni vengono sollecitati dall’insegnante a strutturare opportunamente domande da sottoporre all’insegnante stessa per acquisire le informazioni sufficienti alla compilazione (“quante ore di italiano in una settimana?”, …).
Le domande formulate dai vari gruppi vengono discusse collettivamente (“richiedono informazioni necessarie?”, “perché?”, “che motivazione ha indotto a formulare tale richiesta?”…).
Nella terza fase ogni gruppo elabora il suo orario delle lezioni “ideale”, che rispetti una serie di criteri, formulati dal gruppo stesso (“ed. fisica al lunedì, perché la domenica non si ha il tempo di fare i compiti”,…) e lo riporta in uno schema sufficientemente grande da poter essere esaminato da tutti.
Le proposte vengono presentate dai vari gruppi che ne illustrano i criteri di formulazione, motivandone la scelta.
Ne consegue la formulazione di un orario “ideale” condiviso.
La quarta fase prevede il confronto di quanto elaborato dagli alunni con la proposta ufficiale, in cui si evidenziano le differenze e si cerca di individuare i vincoli di cui gli alunni non hanno tenuto conto, che le hanno determinate.
Infine, si passa ad un confronto con uno dei docenti compilatori dell’orario delle lezioni per verificare la correttezza delle proprie ipotesi.
L’attività si conclude con una riflessione sulla relazione esistente tra il numero di informazioni possedute e la capacità di formulare ipotesi più aderenti alla situazione reale.

Commenti
L’attività offre uno spunto per riflettere sul rapporto tra situazione problematica, richiesta di informazioni per risolverla e selezione delle informazioni possedute e sul rapporto tra le soluzioni di una situazione problematica ed i vincoli (“accettabilità” di una soluzione).

L’investigatore geometrico[1]

Livello scolare: 1ª media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l’importanza delle definizioni che le descrivono. Giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni. Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati. Produrre congetture. Comprendere il ruolo delle definizioni in matematica. Dare definizioni di semplici oggetti matematici.		<u>Argomentare e congetturare</u>	Italiano Educazione tecnica
Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure anche ricorrendo a opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria dinamica, …).	Le principali figure del piano.	Lo spazio e le figure	
In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze. Eseguire combinazioni diverse tra gli elementi di un insieme.		Relazioni	
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato individuando l’obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall’insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere.		Risolvere e porsi problemi	

[1] Attività prodotta dal Nucleo C.N.R. di Roma (G.Ri.S.I.M.M. 1984) diretto da M. Barra

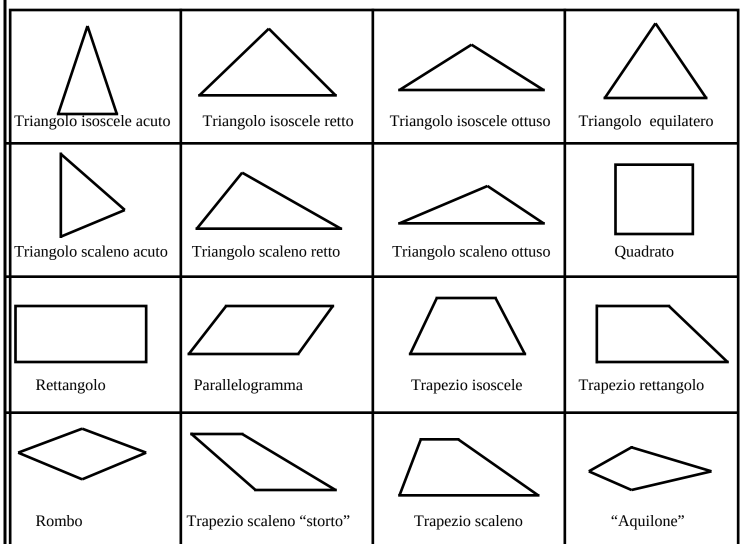
Contesto: geometrico

Commento

L’attività si propone di aiutare gli alunni ad affinare le proprie capacità argomentative.
Si utilizza un’attività ludica che contribuisce a creare un clima favorevole all’apprendimento e si fa riferimento a contenuti già noti agli allievi, in modo da focalizzare l’attenzione più sulle procedure che sui risultati.

Descrizione dell’attività

La descrizione delle fasi dell’attività è integrata da alcuni suggerimenti metodologico-operativi. Ogni docente potrà utilizzare tali suggerimenti, adattando l’azione didattica alla situazione in cui si trova ad operare

Fasi dell’attività didattica	**Indicazioni metodologico-operative**
Prima FASE: Preparazione del materiale In collaborazione con l’insegnante di Educazione Tecnica, viene preparato un pannello di polistirolo (o compensato) foderato di cartoncino suddiviso in 16 rettangoli. Vengono inoltre costruite 16 figure geometriche di cartoncino di un solo colore, che vengono fissate al pannello tramite uno spillo posizionato nel loro baricentro in modo che, potendo girare, non assumano posizioni “privilegiate”.	Il pannello è costruito in modo tale da poter, con opportuna domanda, escludere ogni volta metà delle figure rimaste. 
Seconda FASE:Il gioco (parte prima) Un bambino esce dall’aula e gli altri scelgono una delle 16 figure del “pannello geometrico”; “l’investigatore” rientra e fa delle domande ai compagni per individuare la forma scelta. Le domande possono far riferimento unicamente alle caratteristiche geometriche della figura scelta, e per esempio non si può chiedere dove è posizionata oppure tirare ad indovinare. Alle domande poste dall’investigatore si può rispondere solo con un SI oppure con un NO.	Inizialmente il gioco è libero, non viene posto limite al numero delle domande. E’ in questa fase che l’insegnante può intervenire per correggere o precisare eventuali termini utilizzati in modo improprio nella caratterizzazione della figura scelta. E’ bene che tutti a turno svolgano il ruolo di “investigatore”.. Dopo una prima fase collettiva si può anche giocare a coppie.
Terza FASE: Il gioco (parte seconda) Il gioco si svolge come prima, ma questa volta “l’investigatore” deve cercare di porre il minor numero possibile di domande. Qual è dunque la strategia da seguire per poter raggiungere lo scopo?	Sarà cura dell’insegnante far emergere la necessità di porre domande che, sia in caso di risposta affermativa, che in caso di risposta negativa, permettano di escludere il maggior numero di figure. Naturalmente la domanda ben posta è quella che permette di escludere ogni volta la metà delle figure che sono rimaste. In questa terza fase agli alunni viene chiesto di giustificare le scelte effettuate ponendo l’attenzione sulla strategia utilizzata.

<table>
<tr>
<td>Quarta FASE: Variante del gioco:
Si torna ad osservare il tabellone e l’insegnante pone domande del tipo:
Qual è l’intruso nella …… colonna? Perché?
Quante figure hanno almeno due lati uguali?
Quante figure hanno le diagonali diverse e tali che una divide a metà l’altra?
Quante figure elimino se considero la proprietà: “……………..” ? Perché ?
Qual è la figura che:
⇒ Non ha due lati paralleli.
⇒ Non ha tre angoli diversi
⇒ Ha tre angoli acuti.
⇒ Non ha tre lati uguali.
• ………………</td>
<td>Attraverso le domande, l’insegnante stimolerà gli allievi a riflettere sul linguaggio e a controllare la coerenza delle proprie affermazioni, in relazione alla richiesta posta.</td>
</tr>
</table>

La bottiglia misteriosa[2]

Livello scolare: 2ª-3ª media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni. Produrre congetture Giustificare affermazioni e congetture durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati		Argomentare e congetturare	Italiano
Scegliere in modo casuale un elemento da un collettivo Prevedere, in semplici contesti, i possibili risultati di un esperimento e le loro probabilità. Interpretare in termini probabilistici i risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali e virtuali (giochi, software,…)	Calcolo di frequenze relative e percentuali, e loro confronti Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di semplici eventi.	Dati e previsioni	
Comprendere i significati delle frazioni come rapporto e come quoziente di numeri interi. Riconoscere ed usare scritture diverse per lo stesso numero razionale (decimale, frazionaria, percentuale).		Il numero	
Usare modelli dati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni.		Relazioni	
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato individuando l’obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall’insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere.		Risolvere e porsi problemi	

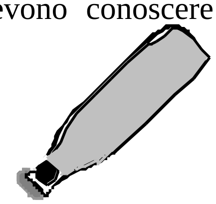
[2] Tratto da: a cura di C. Bernardi, L. Cannizzaro, N. Lanciano, P. Mentrasti LOGICA. INFORMATICA. PROBALITÀ E STATISTICA – LA NUOVA ITALIA, 1991

Contesto probabilistico

Commento
Con questa attività si vuole utilizzare una delle applicazioni della legge empirica del caso, quella che ci permette di usare la frequenza relativa come misura approssimata della probabilità nel caso di un elevato numero di prove, per far congetturare i ragazzi ed esplicitare le osservazioni che conducono a certe ipotesi piuttosto che ad altre, sfruttando un momento ludico.

Punti di attenzione
A) Gestione della discussione rispetto alle ipotesi
B) Esplicitazione delle relazioni tra fatti osservati e ipotesi formulate

Descrizione dell'attività
La descrizione delle fasi dell'attività è integrata da alcuni suggerimenti metodologico-operativi.
Ogni docente potrà utilizzare tali suggerimenti, adattando l'azione didattica alla situazione in cui si trova ad operare.

<table>
<tr><th><u>Fasi dell’attivita’ didattica</u></th><th>Indicazioni metodologico-operative</th></tr>
<tr><td>
Prima FASE: il problema e la discussione iniziale
L’insegnante pone il problema alla classe e invita gli alunni a discutere liberamente e a formulare ipotesi:
“Facciamo un esperimento.
Oggi vi ho portato queste bottiglie che come vedete sono state rese opache con della vernice, solo l’ultima parte del collo è trasparente.
Esse contengono delle palline colorate. Tutte le bottiglie hanno la stessa composizione.
Sareste in grado di indovinare il contenuto delle bottiglie?
Come si potrebbe procedere?
Quante prove sarà necessario effettuare secondo voi?“
</td><td>
Dopo aver posto il problema ed aver ragionato insieme, la classe sarà suddivisa in gruppi di 4 o 5 allievi, a ciascun gruppo verrà consegnata una bottiglia e una scheda contenente le indicazioni da seguire.
La bottiglia, possibilmente di plastica trasparente, è stata verniciata, all’interno, fino ad una certa altezza in modo da renderla opaca.
All’interno della bottiglia sono state introdotte delle palline colorate in quantità e rapporti stabiliti. Naturalmente i ragazzi non devono conoscere il contenuto della bottiglia.

</td></tr>
<tr><td>
Seconda FASE: l’esperimento - parte prima

La classe viene divisa in gruppi, ciascuno dei quali effettua quaranta estrazioni con reimbussolamento.
A ciascun gruppo viene fornita una scheda che dovrà essere riempita nel corso dell’esperimento.
</td><td>
L’estrazione con reimbussolamento avviene senza la rimozione del tappo, ma rovesciando la bottiglia; la pallina si fa vedere attraverso il collo della bottiglia rimasto trasparente.

Sulla scheda sarà presente la seguente tabella:
<table>
<tr><td>Colori</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td></tr>
<tr><td>Frequenza assoluta</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>….</td><td>…..</td></tr>
<tr><td>Frequenza relativa</td><td>$\frac{......}{40}$</td><td>$\frac{......}{40}$</td><td>$\frac{......}{40}$</td><td>$\frac{......}{40}$</td><td>$\frac{......}{40}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>
Terza FASE: prima discussione dei risultati
Vengono poste domande del tipo:

In quali rapporti pensate siano distribuiti i colori delle palline nella vostra bottiglia? Perché?
E’ possibile conoscere il numero delle palline senza aprire la bottiglia? Perché?
Potete dire con sicurezza qual è il numero dei colori presenti? Perché?

</td><td>
Al termine della prima parte dell’attività prevista, si avvierà una prima discussione nella quale ciascun gruppo dovrà formulare e giustificare le proprie ipotesi rispetto al contenuto della bottiglia e confrontarle con quelle degli altri gruppi.
</td></tr>
<tr><td>
Quarta FASE: l’esperimento - parte seconda
Ciascun gruppo effettua altre sessanta estrazioni con reimbussolamento e procede come nella prima parte, annotando le uscite e calcolando la frequenza relativa di ciascun colore.
</td><td>
Sulla scheda sarà presente la seguente tabella:
<table>
<tr><td>Colori</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>….</td><td>…..</td></tr>
<tr><td>Frequenza assoluta</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>….</td><td>…..</td></tr>
<tr><td>Frequenza relativa</td><td>$\frac{......}{60}$</td><td>$\frac{......}{60}$</td><td>$\frac{......}{60}$</td><td>$\frac{......}{60}$</td><td>$\frac{......}{60}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Quinta FASE: seconda discussione dei risultati Ciascun gruppo, in base agli ulteriori risultati ottenuti potrà confermare o riformulare l'ipotesi precedentemente fatta.	In questa fase l'insegnante, dopo aver ascoltato tutti i gruppi, potrà comunicare ai ragazzi l'esatta composizione della bottiglia, ma solo in termini di colori ed invitare i ragazzi a formulare nuove ipotesi. Si porrà l'attenzione sul fatto che nuove informazioni permettono di modificare o rafforzare la congettura precedentemente formulata
Sesta FASE: approfondimento numerico Si uniscono i risultati dei due esperimenti, si richiedono le seguenti riflessioni: q Il colore ………… si è presentato ………… volte nelle prime 40 prove e ………… volte nelle altre 60 prove. q Quale dei due metodi è corretto per calcolare la frequenza relativa del colore ………… nelle 40 + 60 prove: Frequenza relativa del colore ……… $\frac{\ldots\ldots}{40}+\frac{\ldots\ldots}{60}= \boxed{A}$ $\frac{\ldots\ldots+\ldots\ldots}{100}= \boxed{B}$	Si pone l'attenzione sul metodo più corretto per calcolare la frequenza relativa di ogni singolo colore sulla totalità delle estrazioni effettuate. Si può approfittare di questa attività per riflettere sull'addizione tra due frazioni. Perché in questo caso non ha senso calcolare il minimo comune denominatore? Gli studenti dovranno argomentare e giustificare le loro affermazioni.
Settima FASE: discussione finale *Ad ogni studente viene consegnata una seconda scheda, dove poter registrare i risultati complessivi ottenuti da tutti i gruppi.* *Si chiede poi di calcolare la frequenza relativa con cui si sono presentati i diversi colori delle palline.* Utilizzando questi dati, ciascun studente viene invitato a rispondere a domande del tipo: a) Quante sono le palline dei 3 colori? Potete rispondere? Perché? b) Se le palline all'interno della bottiglia sono in totale 10, quante saranno le palline dei diversi colori? Perché? c) Potete essere veramente certi della risposta data al punto precedente? Perché? d) Se le palline rosse fossero 6, secondo quanto osservato prima, sareste in grado di calcolare il numero complessivo delle palline presenti nella bottiglia? Perché?	La conoscenza dei risultati ottenuti da tutti i gruppi costituisce una nuova informazione che consente di rivalutare le proprie ipotesi ed eventualmente modificarle. Si fanno riflettere i ragazzi sul fatto che ancora una volta stanno facendo una stima e non hanno la certezza che ciò corrisponde esattamente alla realtà. Dunque , conoscendo la frequenza relativa con cui si presenta un certo evento, si possono fare delle previsioni che tendono ad essere sempre più probabilmente vicine alla realtà.

Verifica empirica e argomentazione (*)

Livello scolare: 3ª media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari Validare le congetture prodotte sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati	Modellizzazione matematica di fenomeni fisici	<u>Argomentare e congetturare</u> Le relazioni Le figure e lo spazio	Scienze Lingua Italiana Educazione tecnica Storia

Contesto: allungamento di due e rotazione di due ruote ingranate

Descrizione delle attività

1. Il problema della molla di lunghezza doppia

- L'antefatto: i ragazzi hanno già fatto l'esperienza sull'allungamento di una molla e individuato la legge matematica che la regola: L= H+K*N dove L è la lunghezza finale, H la lunghezza iniziale, K il coefficiente di allungamento e N il numero di pesi (es. graffette) attaccati. Hanno inoltre rappresentato graficamente la legge e analizzato le variabili e i parametri in gioco**.**
- Viene posto il seguente problema " *Immagina di avere due molle dello stesso materiale, delle stesso diametro delle spire, ma di lunghezza iniziale diversa: una è il doppio dell'altra. Come sarà l'allungamento della molla doppia quando si attacca un'unica graffetta? Perché? Argomenta la tua ipotesi nel modo più completo possibile.*"

Le possibili ipotesi sono tre:

a) Le molle si allungano nello stesso modo, quindi l'allungamento è lo stesso. Le rette sono parallele perchè il K è lo stesso, quindi la pendenza sarà identica;

b) La molla più lunga si allunga meno, della metà, nel grafico ci sarà un punto di incontro, dopo il quale la molla più corta supererà la più lunga;

c) La molla più lunga si allungherà di più, del doppio, i due grafici non si incontreranno mai.

Nella fase di discussione successiva vengono socializzate e rappresentate graficamente le tre ipotesi. La grande maggioranza degli allievi è per prima o per la terza ipotesi.

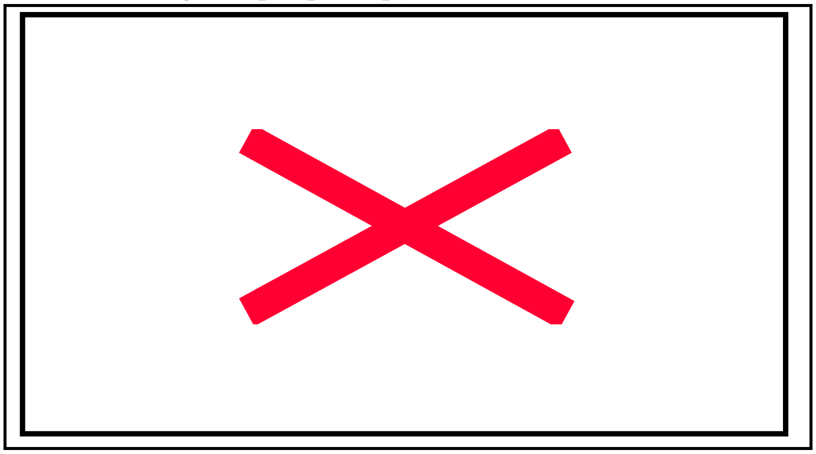
- Argomentazione delle ipotesi

Si chiede ai ragazzi di argomentare con cura le loro ipotesi con lo scopo di trovare argomenti forti per l'una o l'altra ipotesi.

Riportiamo alcuni esempi di argomentazioni prodotte dai ragazzi:

a) allungamento uguale

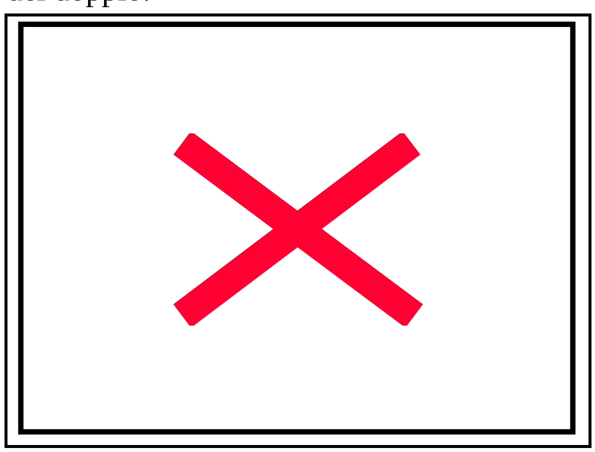
“ *le due molle sono fatte dello stesso materiale, hanno lo stesso diametro di spire, e anche se la lunghezza iniziale è doppia, l'allungamento sarà lo stesso, perchè il K della formula dipende dal materiale . Il K rappresenta la pendenza delle rette, quindi le rette saranno parallele*” .(il modello matematico é forte e l’allievo ragiona per principi);



b) allungamento maggiore (doppio)

"Immaginando l'esperimento: due molle di diversa lunghezza ma uguali come materiale, mi è venuta in mente una domanda: la molla più lunga in ogni sua spira deve sopportare lo stesso peso che sopportano le spire della molla più corta? Se sì, allora le due molle non si allungano nello stesso modo, perchè una ha il doppio di spire dell'altra. Se no, l'allungamento è uguale." (il problema è posto dal punto di vista fisico).

Qualche allievo, in genere, arriva a produrre esperimenti mentali immaginando di tagliare la molla a metà e quindi è come se avessimo due molle, ognuna delle quali si allunga di un tot, pertanto la molla doppia si allungherà del doppio.



- **L’esperimento**

Si utilizza una molla dello stesso materiale e diametro di spire della prima molla utilizzata (di cui i ragazzi hanno già i dati sperimentali e la formula), ma di lunghezza maggiore (più del doppio) e si verifica che l’allungamento della molla doppia risulta circa il doppio della prima molla, esattamente come il rapporto fra le lunghezze iniziali.

2. Il problema delle due ruote

- “ *Abbiamo due ruote ingranate: una con 150 denti e l’altra con 50. Quante volte vedi girare la ruota piccola su se stessa quando questa gira intorno alla grande che sta ferma*?” (Il problema può essere posto anche con due monete uguali).

Ai ragazzi il problema sembra di immediata soluzione: rettificano le due circonferenze e fanno il rapporto fra 150 e 50. In genere rispondono tutti: “ *Facile , la ruota piccola fa tre giri*!”.

- A questo punto si procede alla verifica empirica dell’ipotesi dei ragazzi , e con grande meraviglia si osserva che la ruota piccola fa 4 giri (uno in più del rapporto fra le lunghezze delle due circonferenze). Il problema a questo punto è l’interpretazione del fatto sperimentale; il movimento della ruota piccola è composto da due moti: uno di rotazione attorno al centro e uno di rotazione attorno ai successivi punti di tangenza.
- Se immaginassimo di collegare rigidamente i centri delle due ruote con una sbarretta, s’impedirebbe il movimento di rotazione della ruota piccola su se stessa: in tal caso l’ipotesi iniziale dei ragazzi sarebbe corretta.

3. Voce di Galileo (Discorsi intorno a due nuove scienze, 1638)

Si potrebbero portare in classe alcuni stralci del dialogo di Galileo, in particolare dove si discute del ruolo dell’esperimento e Salviati convince Simplicio attraverso un esperimento mentale. In questo caso il brano di Galileo rappresenta una voce storica che “riproduce” la dialettica fra verifica empirica e argomentazione attraverso un esperimento mentale.
L’argomento di questo stralcio è quello della caduta dei gravi; si possono trovare esempi di questo tipo anche a proposito del galleggiamento.

Simplicio: Si vede pur dalle sue parole ch’ei mostra d’averlo sperimentato, perché ei dice: veggiamo il più grave; or quel “vedersi” accenna l’averne fatta esperienza.
Sagredo: Ma io, sig. Simplicio, che n’ho fatto la prova vi assicuro che una palla d’artiglieria, che pesi cento, dugento e anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l’arrivo in terra della palla d’un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall’altezza di dugento braccia.
Salviati: Ma, senz’altre esperienze, con breve concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare, non esser vero che un mobile più grave si muova più velocemente d’un altro men grave….
[…]
A questo punto Salviati propone un esperimento mentale:
Salviati : Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità de i quali fussero ineguali, è manifesto che se noi congiugnessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, e il tardo in parte velocitato dall’altro più veloce. Non concorrete voi meco in quest’opinione?
Simplicio: Parmi che così debba indubitabilmente seguire.
Salviati: Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muova, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque, congiugnendole amendue insieme, il composto di loro si moverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità: adunque questa maggiora si muove men velocemente che la minore; che è contro alla vostra supposizione.

Vedete dunque come dal suppor che 'l mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo, il più grave muoversi men velocemente.
Simplicio: Io mi trovo avviluppato…

Commento
L'importanza di queste attività sta nella dialettica fra verifica sperimentale e argomentazione.
Nel primo caso, problema della molla doppia, la verifica empirica viene ritardata per permettere un'opportuna argomentazione delle ipotesi formulate dai ragazzi, nel secondo caso, problema delle due ruote, la verifica empirica immediata costringe i ragazzi a cercare argomentazioni per l'interpretazione del dato sperimentale.
Per quanto riguarda il processo di verifica le due modalità ipotizzabili a priori, verifica empirica e argomentazione, possono risultare più o meno facilmente praticabili a seconda del fenomeno e della preparazione degli studenti.
Possiamo osservare che sia la verifica empirica sia l'argomentazione presentano aspetti positivi e negativi:

- per la verifica empirica gli aspetti positivi sono dati dallo stabilire un rapporto diretto con i dati sperimentali e dal produrre in alcuni casi una risposta chiara sulla validità o meno delle ipotesi formulate; gli aspetti negativi sono rappresentati dal fatto che a volte la verifica empirica comporta l'analisi di dati non facilmente interpretabili o affetti da grossi errori sperimentali ,…
- per l'argomentazione gli aspetti positivi sono legati alla necessità di interpretare il fenomeno, mentre in alcuni casi l'argomentazione può non approdare ad una interpretazione sufficientemente sicura e univoca, e quindi la verifica empirica può comunque rendersi necessaria.

E' bene quindi mantenere aperta la dialettica fra verifica empirica e argomentazione: se nell'attività sulle molle si fosse fatto subito l'esperimento sarebbe venuta meno la motivazione ad argomentare, mentre nell'attività sulle ruote, poiché l'esperimento contraddice le attese dei ragazzi, motiva la ricerca di argomentazioni.

(*) Da un'idea elaborata nel NRD, sez. scuola media, dell'Università di Genova.

Proprietà dei numeri razionali (*)

Livello scolare: 3ª media

Competenze interessate	Contenuti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Comprendere i significati delle frazioni come rapporto e come quoziente di numeri interi Confrontare numeri razionali rappresentandoli sulla retta Alcune relazioni significative (essere maggiore o minore di …) Osservare, individuare e descrivere regolarità Produrre congetture, testarle, validare le congetture prodotte Riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l'importanza delle definizioni che le descrivono Giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni	Numeri razionali.	Argomentare e congetturare Numeri Relazioni	

(*) Da idee elaborate nel NRD dell'Università di Genova e nell'Istituto per la Matematica Applicata del CNR

Contesto
Il contesto è di argomentazione e di approccio alla dimostrazione in campo matematico.
Il dominio di riferimento per l'attività argomentativa e dimostrativa è l'insieme dei razionali assoluti che gli alunni, in terza media, già conoscono.
Nel corso dell'attività viene utilizzato uno strumento di tipo geometrico, il cui funzionamento è basato sul teorema di Talete. In alcune sperimentazioni questo strumento è stato usato già nella classe prima per avvicinare gli alunni al concetto di numero razionale, esplorando proprietà del nuovo insieme numerico oggetto di studio e inquadrando queste ultime da un punto di vista teorico.
In questa attività ci limiteremo a prendere in considerazione solo alcune potenzialità offerte dallo strumento geometrico con lo scopo di:

- consentire agli alunni di esplorare alcune proprietà dei razionali
- scrivere enunciati relativi a tali proprietà, prima in linguaggio naturale e poi in linguaggio algebrico
- giustificare tali proprietà prima utilizzando lo strumento geometrico e poi dimostrandole all'interno di un quadro teorico che si costruisce nell'ambito stesso dell'attività

Per coloro che sono interessati ad analizzare ulteriori sviluppi dell'attività si rimanda alla bibliografia finale

Descrizione dell'attività
Prima di descrivere nello specifico l'attività che può essere condotta in classe con gli alunni è importante mettere in evidenza le potenzialità sul piano esplorativo e didattico offerte dallo strumento geometrico usato.

Analisi a priori delle potenzialità offerte dallo strumento geometrico per lo sviluppo dell'attività.

In figura 1 è riportato lo strumento geometrico che è stato proposto agli alunni per lo sviluppo dell'attività.

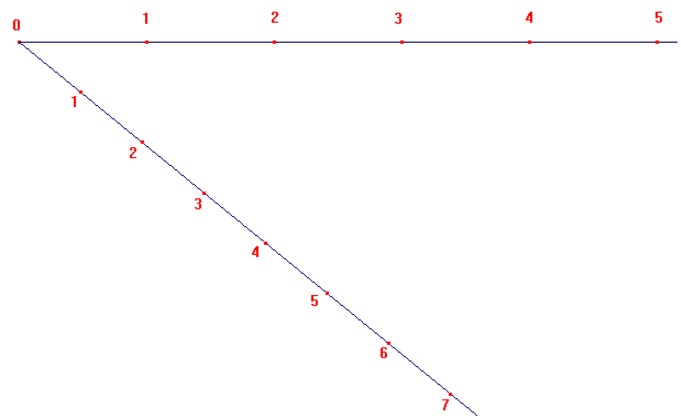


Fig. 1

E’ costituito da due semirette che hanno origine comune, ciascuna caratterizzata da una scala; una semiretta serve per rappresentare i numeri naturali e successivamente anche i numeri razionali; la seconda semiretta, chiamata ripartitrice, permette di realizzare metodi operativi di partizione di lunghezze individuate sulla prima semiretta. All’inizio questo strumento viene presentato agli alunni come uno strumento operativo per compiere ripartizioni di lunghezze, prescindendo da aspetti di misura (metodo del falegname); in figura 2 viene riportato il metodo operativo usato dagli alunni per ripartire in 6 parti una lunghezza assegnata.

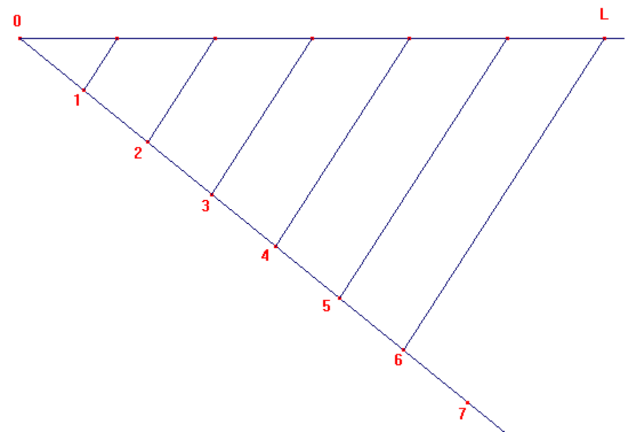


Fig 2

Osserviamo come lo strumento incorpori un concetto di partizione, controllabile sul piano percettivo attraverso la costruzione del segmento generatore della ripartizione (congiungendo l’estremo della lunghezza da ripartire con il punto sulla retta ripartitrice che indica il numero di partizioni da effettuare) e tracciando successivamente i segmenti ad esso parallelo passanti per i punti da 1 a 5 sulla retta ripartitrice.

Una prima esplorazione relativa alle proprietà delle frazioni realizzata in classe attraverso l’uso di questo strumento riguarda la relazione d’ordine tra le frazioni con numeratore unitario. Nella figura 3 lo strumento viene utilizzato per rappresentare sulla semiretta dei numeri frazioni con numeratore unitario.

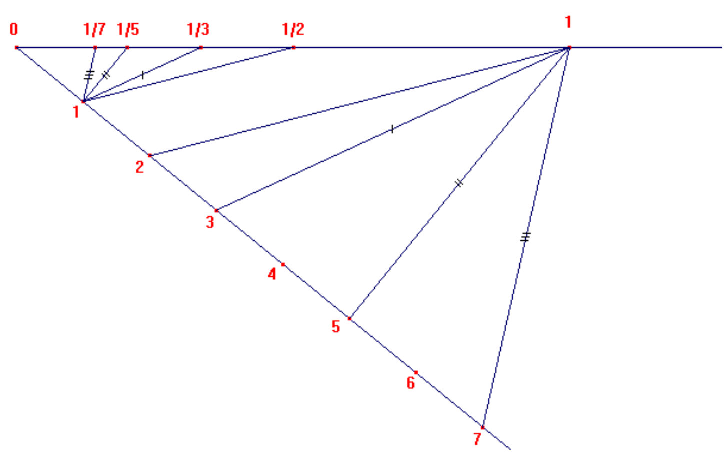


Fig 3

Notiamo come l’attività con lo strumento consenta di esplorare e di mettere in evidenza che 1/2 è la frazione maggiore tra tutte quelle che hanno numeratore unitario e che le frazioni tendono ad addensarsi man mano che ci si avvicina allo 0. Lo strumento permette inoltre di esplorare e mettere in evidenza la proprietà che regola l’ordinamento di frazioni con numeratore unitario consentendo di giungere alla seguente formalizzazione **1/a>1/(a+1)**. Inoltre, partendo dalla rappresentazione di una frazione con numeratore unitario (per esempio dalla rappresentazione della frazione 1/3 di Fig. 4) e utilizzando la semiretta ripartitrice come semiretta moltiplicatrice, lo strumento consente di riportare la frazione 1/3 sulla semiretta dei numeri, permettendo di evidenziare nuovi punti su di essa che possono essere di volta in volta facilmente interpretati attraverso un'espressione di tipo moltiplicativo quale **a*1/b**.

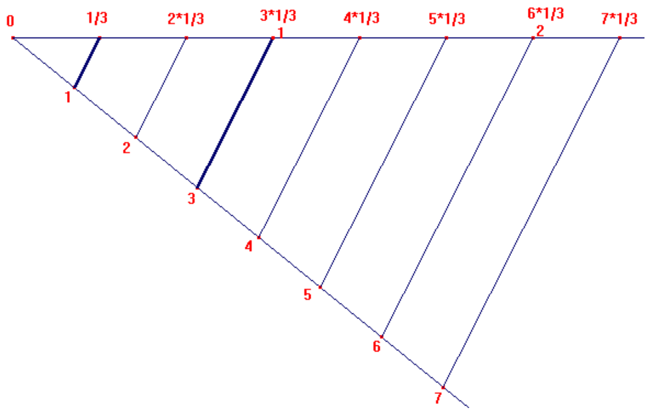


Fig 4

La seconda esplorazione consentita dallo strumento riguarda la relazione tra le frazioni con numeratore unitario e quelle con numeratore non unitario. La figura 5 mette in evidenza l'equivalenza di due metodi operativi che possono essere impiegati per rappresentare con lo strumento una stessa frazione con numeratore non unitario.

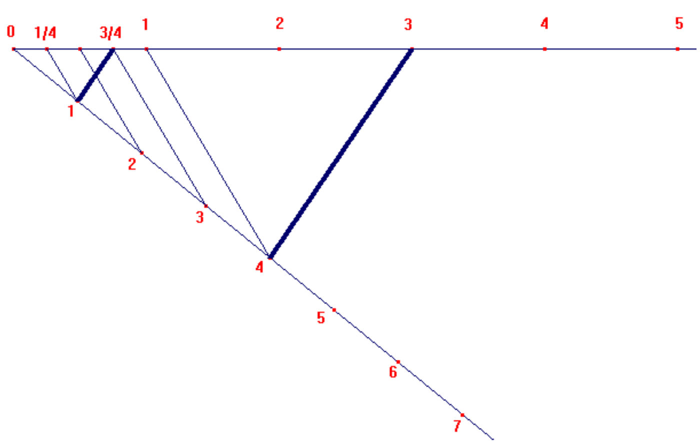


Fig 5

Attraverso il primo metodo la frazione 3/4 viene rappresentata riportando tre volte la frazione 1/4. Il secondo metodo permette di rappresentare la frazione 3/4 attraverso una partizione in 4 parti della lunghezza 3. L'uso integrato dei due metodi consente di mettere in evidenza una relazione tra le frazioni con numeratore unitario e quelle con numeratore non unitario espressa dalla seguente espressione **a/b=a*1/b**.

L’attività

Prima consegna: Usa lo strumento grafico per rappresentare le frazioni 1/10, 1/3, 1/8, 1/4, 1/20, 1/15 e 1/2, descrivi cosa osservi in relazione all’ordinamento

Potrà succedere che anche se gli alunni hanno già compiuto esperienze con le frazioni, possano scoprire proprietà a loro ignote, per esempio:

- *Più il denominatore è alto e più la distanza è vicina allo zero. Perciò più esso è alto e più la frazione è piccola. Le frazioni indicate sono tutte intorno allo zero.*
- *1/2 è la frazione più grande che abbiamo rappresentato …. E ho notato che tutte le frazioni sono ammucchiate alla sua sinistra e alla sua destra non c'è nessun'altra*
- C'è un'enorme concentrazione di frazioni all'inizio della retta. 1/2, 1/3, 1/4 sono più staccate rispetto alle frazioni 1/20, 1/15, 1/10 che sono più lontane.

Attraverso il confronto in classe diretto dall’insegnante le “scoperte” vengono socializzate tra gli alunni

Seconda consegna: Scrivi un <u>enunciato</u> che esprima, in generale, il criterio di ordinamento delle frazioni con numeratore unitario

Gli enunciati prodotti dagli alunni potranno essere profondamente diversi tra loro:
- in alcuni casi potranno mancare di generalità, ed essere specifici del contesto numerico della consegna
- in altri casi potranno essere carenti o sovrabbondanti di informazioni
- in altri casi ancora potranno essere poco accurati o imprecisi

Attraverso il confronto in classe viene perseguito l’affinamento degli enunciati e la costruzione di un enunciato condiviso dalla classe. (es: *Aumentando di una unità il denominatore di una frazione con numeratore unitario, la frazione ottenuta risulta minore della precedente*)

Terza consegna: Traduci in linguaggio algebrico l’enunciato

Questa attività deve essere gestita in modo attento dall’insegnante con il fine di arrivare alla scrittura di un enunciato in linguaggio algebrico condiviso attraverso attività di confronto e di critica comune delle produzioni degli alunni. Questo primo enunciato viene assunto come assioma del quadro teorico che viene costruito nell’ambito dell’attività (A1: $1/a > 1/(a+1)$.Ciò apre la strada alla possibilità di affrontare il primo teorema con la relativa dimostrazione (T1: se $a < b$, $1/a > 1/b$).
Possiamo osservare che le lettere nella costruzione del primo assioma non rappresenteranno solo la sostituzione di numeri particolari letti sullo strumento geometrico, ma rappresenteranno la successione dei numeri interi, anche quelli che non si vedono sul sistema grafico (lettera come

variabile), e nello stesso tempo rappresenteranno la sintesi di tutti questi numeri (lettera come generalizzazione).

Quarta consegna
Utilizzando l'assioma $1/a>1/(a+1)$, dimostra che $1/a<1/b$ se $a>b$

Si tratta della prima occasione in cui gli alunni si trovano a dover dimostrare un teorema all'interno di una teoria che ha come elemento fondamentale di riferimento il primo assioma, costruito in classe e che poggia sull'evidenza della rappresentazione geometrica. L'interpretazione in linguaggio verbale del primo teorema e la sua giustificazione mediante l'uso dello strumento geometrico costituiscono il fuoco dell'attività iniziale comune con la classe. Obiettivo dell'intera attività è far cogliere il valore della dimostrazione, ciò che la caratterizza e la differenzia da una argomentazione pertinente basata sull'uso dello strumento geometrico.
Diventa pertanto necessario dare un "copione" di dimostrazione accertandosi che ogni passaggio sia motivato e ben compreso: si procede allora ad una costruzione nella quale l'insegnante interagisce con la classe ponendo via via le domande che conducono e giustificano i vari passaggi.

Quinta consegna
Utilizzando l'assioma $1/a>1/(a+1)$, dimostra che $1/a > 1/(a*n)$ con $n > 1$

Nella dimostrazione del secondo teorema l'insegnante dovrà verificare se gli alunni sono in grado di utilizzare la struttura dimostrativa in questa nuova situazione; molti di loro avranno bisogno di ritornarci sopra con l'aiuto dell'insegnante.

Possibili prosecuzioni dell'itinerario didattico

L'itinerario didattico prosegue alternando momenti di appropriazione di modelli dimostrativi e momenti di sviluppo di nuovi elementi della teoria che si va costruendo. Per il primo aspetto vengono proposte consegne che permettano agli alunni di fare eco alle voci di dimostrazione costruite interagendo con l'insegnante; per il secondo aspetto è l'insegnante che sceglie i nuovi elementi guidando alla identificazione di nuovi postulati e alla dimostrazione di nuovi teoremi

- A1: $1/a > 1/(a+1)$
- T1: se $a < b$, $1/a > 1/b$
- T2: $1/a > 1/(a*n)$ con $n > 1$
- A2: $a/b = a*1/b$
- T3: $1/(a*n)>1/(a*m)$ se $n < m$
- T4: $a/b < (a+1)/b$
- T5: $a/b > a/(b+1)$
- ……..

Per consentire a tutti gli alunni di entrare nel gioco dimostrativo, parallelamente vengono assegnate consegne sia in classe che a casa che impegnano gli alunni ad applicare procedure e proprietà in situazioni specifiche.

Esempi:

Utilizzando il <u>teorema 2</u> dimostra che 1/12 < 1/3

<u>Esempio di soluzione</u>

*T2: 1/a > 1/(n*a) con n > 1*

Devo dimostrare che 1/12 < 1/3

*1/12 = 1/(3*4)*

*1/3 > 1/(3*4) con n = 4 > 1*

Utilizzando <u>il teorema 2</u> dimostra che 1/(12*7) < 1/6

<u>Esempio di soluzione</u>

*T2: 1/a > 1/(n*a) con n > 1*

*Devo dimostrare che 1/(12*7) < 1/6*

*1/(12*7) = 1/(6*2*7) = 1/(6*14)*

*1/6 > 1/(6*14) con n = 14 > 1*

Un esempio di attività in cui si integrano tutti gli "strumenti" introdotti

Riportiamo un esempio tratto dalla sperimentazione effettuata nel quale emerge come i diversi strumenti disponibili per l'attività possano venire utilizzati in modo integrato tra loro e come ciascuno di essi possa contribuire a costruire specifici significati nell'ambito dell'attività.

L'insegnante chiede agli alunni di utilizzare lo strumento geometrico per esplorare cosa succede se il numeratore o il denominatore di una generica frazione a/b viene incrementato di una unità.

Il protocollo sotto riportato evidenzia come uno studente abbia utilizzato lo strumento geometrico per costruire una congettura in riferimento alla richiesta dell'insegnante. Alla fase di esplorazione individuale con lo strumento geometrico segue il confronto delle congetture realizzate nella classe. In questa fase ciascun alunno, illustra il modo in cui ha utilizzato lo strumento e la congettura a cui è pervenuto. Il confronto porta alla costruzione in classe di un enunciato condiviso della congettura che viene convertita in linguaggio algebrico ed espressa come teorema di cui si vuole trovare la dimostrazione : *dimostrare che a/b<(a+1)/b ; a/b>a/(b+1)*

La dimostrazione viene realizzata nel registro algebrico, utilizzando gli assiomi e i teoremi precedentemente dimostrati. Per la realizzazione della dimostrazione, gli alunni lavorano prima individualmente potendo contare sull'assistenza fornita a ciascuno di loro dall'insegnante che passa tra i banchi.

Quando l'insegnante ritiene che tutti gli alunni abbiano potuto esprimere le loro potenzialità sul piano individuale, passa al confronto collettivo delle produzioni realizzate, avendo cura di coinvolgere nell'interazione anche gli alunni che hanno presentato maggiori difficoltà nella costruzione della dimostrazione.

L'esempio sotto riportato (Fig 6), tratto dalla sperimentazione effettuata, mette in luce come i diversi strumenti disponibili per l'attività possano venire utilizzati in modo integrato tra loro e come ciascuno di essi possa contribuire a costruire specifici significati nell'ambito del lavoro.

Osserviamo che l'uso dei postulati e delle proprietà dell'uguaglianza (transitiva) e delle operazioni (distributiva e commutativa) appositamente introdotte nell'ambito dell'attività di dimostrazione, evidenziano in un contesto significativo e motivante, la funzione di trasformazione del linguaggio algebrico: si passa da una espressione ad un'altra espressione attraverso l'applicazione di proprietà ed ogni passaggio ha un significato, in quanto giustificato da un assioma o da una proprietà nell'ambito della teoria assunta come riferimento.

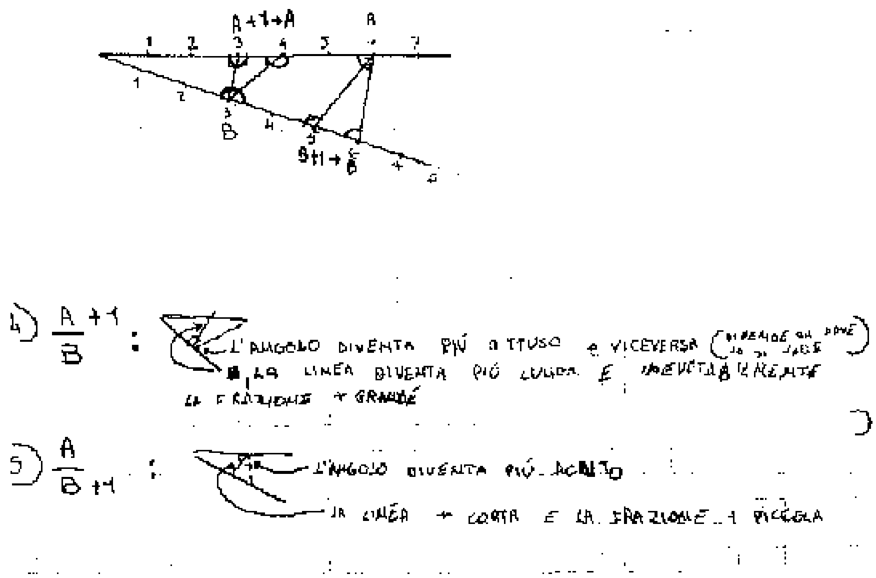


Fig 6

Elementi di prove di verifica

Livello scolare: 1^a media

“ Qualunque numero pari, maggiore di 2, si può sempre scrivere come somma di due numeri dispari diversi fra loro”   Spiega con cura perché questo enunciato è vero. Puoi fare tutte le prove che vuoi, ma la spiegazione deve essere generale e valere per tutti i numeri naturali pari maggiori di 2.

Commento

- I ragazzi non conoscono il calcolo letterale, pertanto non sono in grado di fare una dimostrazione algebrica del tipo 2n= 2n-1 +1; lo scopo della verifica è quello di ottenere argomentazioni logicamente concatenate espresse nel linguaggio naturale.
- La consegna spinge verso prove numeriche che possono essere:

a) casuali: ad esempio 4=3+1; 10= 7+3, 10=9+1; 20=19+1, 20=17+3, 20=11+9;……

b) sistematiche: 4= 3+1; 6=5+1; 8=5+3, 8=7+1; 10=…..

- Alcuni ragazzi dopo un primo esempio si rendono conto che il numero pari può essere scritto come il precedente dispari più 1.

- Le possibili giustificazioni sono espresse in linguaggio naturale:

  “ *L’enunciato è vero perché un numero pari lo posso pensare come il precedente più 1. Io so che il precedente di un pari è <u>sempre</u> dispari perché la catena dei numeri è alternata pari e dispari, e 1 è <u>sempre</u> dispari*”.

  “ *<u>Quando</u> un numero è pari <u>allora</u> il precedente è per forza dispari, e se aggiungo 1, che è dispari, ottengo il pari di partenza*”.

  In questo gli indicatori linguistici sono

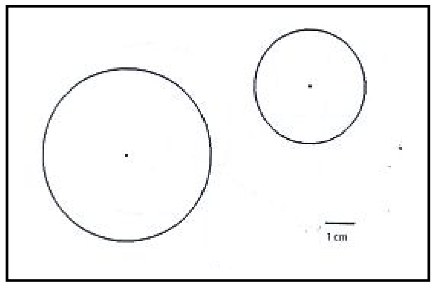
  - il *sempre* che indica una generalizzazione: è valido per tutti i numeri;
  - il *quando…allora* indica un elemento di condizionalità che potrà diventare una vera e propria implicazione del tipo *se…allora*.

- Molto spesso si trovano ragazzi che invertono ipotesi con tesi e giustificano l’enunciato in questo modo: “*è sempre vero perché dispari più dispari fa pari*” confondendo l’implicazione diretta con quella inversa.

Per la valutazione si fa riferimento ai seguenti punti della griglia:
A3, A6; B1, B4, B7

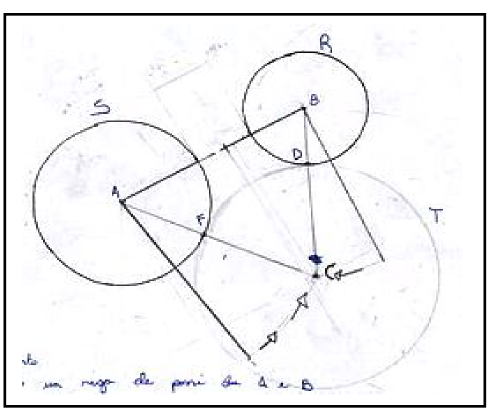
Livello scolare: 3° media (*)

"Disegna un cerchio di raggio 4 cm tangente ai cerchi dati [sono disegnati due cerchi di raggi 2 cm e 3 cm, con distanza tra i centri di 7 cm].
Spiega chiaramente il metodo che usi in modo che altri possano usarlo.
Spiega con cura perché il metodo funziona".



Commento
Si tratta di un problema di costruzione nel quale bisogna disegnare un cerchio tangente a due cerchi dati. Dal punto di vista adulto il problema corrisponde alla costruzione col compasso di un triangolo di cui sono assegnati i lati. Lo scopo della verifica è quello di arrivare ad un metodo di costruzione generale e di fornire argomentazioni di tipo teorico sulla validità del metodo.

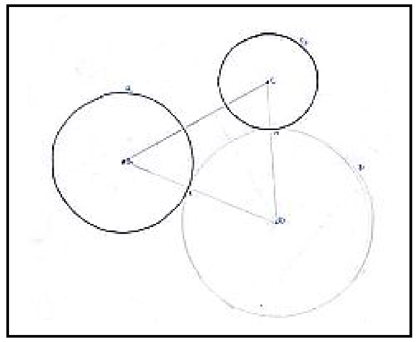
- I ragazzi conoscono le condizioni di tangenza di due cerchi. Può succedere che essi abbiano già esperienza della costruzione col compasso di un triangolo, ma difficilmente riconoscono nella verifica proposta quel problema di costruzione.
- Le possibili strategie dei ragazzi sono:
  a) procedere per tentativi, in modo da trovare un punto che abbia la stessa distanza dalle due circonferenze. In questo caso il metodo di costruzione non ha nessun riferimento al sapere matematico in gioco e la giustificazione si basa sull'evidenza visiva: "*Apri il compasso di 4 cm e avvicinati finché il cerchio non tocca gli altri due. Sono sicuro che funziona perché viene bene*".
  b) procedere per tentativi, ma con un riferimento alla condizione di tangenza di due cerchi, la giustificazione è di tipo teorico:



" *Io so che due cerchi sono tangenti quando la distanza fra i centri è uguale alla somma dei raggi, allora partendo dai centri dei due cerchi dati costruisco due segmenti uguali alla somma dei raggi. Poi devo dare la giusta inclinazione in modo che si incontrino in un punto che sia a distanza uguale dai due cerchi*".

c) procedere sulla base di considerazioni teoriche e anche la giustificazione del metodo si basa su queste:

“Io so che due cerchi sono tangenti se la distanza fra i loro centri è uguale alla somma dei raggi, allora apro il compasso della somma dei primi due raggi e traccio un cerchio, faccio lo stesso con la somma degli altri due raggi e trovo nel punto d’incontro il centro del cerchio tangente. Sono sicura che va bene perché ho rispettato le condizioni di tangenza.



- Alcuni ragazzi si accorgono anche della soluzione simmetrica.
- L’attenzione dell’insegnante in questa verifica deve essere rivolta all’esplicitazione di un metodo generale di costruzione e alla sua giustificazione basata su considerazioni di tipo teorico.

Per la valutazione si fa riferimento ai seguenti punti della griglia:
A1, A3, A5; B1, B3, B5, B7

(*) Da un’idea elaborata nel NRD, sez. elementare, dell’Università di Modena

NUCLEO: Misurare

Introduzione

La misura ha profonde connessioni con importanti aree della matematica quali la geometria, i numeri, la statistica e con aree esterne alla matematica quali la fisica, le scienze, le scienze sociali, l'arte, la lingua. In queste aree la misura offre conoscenze, strumenti e metodi per affrontare e risolvere problemi e contribuisce alla costruzione di concetti che sono specifici di tali aree (si pensi per esempio all'importanza della misura nella costruzione del numero decimale o nella costruzione di concetti della fisica, della geografia, delle scienze sociali). Le competenze coinvolte nell'affrontare il nucleo grandezze e misura hanno pertanto una valenza trasversale; esse possono essere proficuamente mobilitate nello sviluppo di attività sia disciplinari che interdisciplinari, dove possono arricchirsi di significati che sono specifici dei diversi contesti i in cui vengono applicate e usate.

Il nucleo fondante "Misurare" è un nucleo di processo perché persegue obiettivi e competenze in comune con i nuclei tematici, a partire dall'osservazione di fatti e fenomeni fino ad arrivare alla modellizzazione, passando per tutte le attività di misura vera e propria.

Nella scuola elementare e media l'insegnamento della misura ha come fine lo sviluppo della capacità di riconoscere le caratteristiche misurabili di un oggetto o di un fenomeno e di utilizzare unità, sistemi, strumenti, tecniche e processi per attribuire un valore numerico alle grandezze individuate. Nei primi anni della scuola elementare è specifico dell'area scientifica, mentre negli anni successivi si sviluppa secondo peculiarità che sono tipiche delle discipline sperimentali da una parte, e della matematica dall'altra, con particolari legami con i nuclei dei numeri e delle relazioni.

Nella sua prima fase, all'inizio della scuola elementare, il nucleo si configura in continuità con il campo di esperienza della scuola dell'infanzia "Lo spazio, l'ordine e la misura" e si sviluppa con attività comuni a tutti i nuclei tematici, quali l'osservazione di fatti e fenomeni per cogliere grandezze e successivamente quantificarle, dopo averle confrontate e ordinate.

Il passaggio alla quantificazione della grandezza avviene in due principali fasi: la prima, che raggruppa oggetti per caratteristiche uguali o simili, e li conta; la seconda, che quantifica oggetti secondo confronti con un oggetto di riferimento, che funge da unità di misura.

Una effettiva comprensione del significato di misura è perseguibile solo attraverso una ricca base sperimentale all'interno di contesti esperienziali e problematici significativi. Solo attraverso una pratica didattica di questo tipo gli alunni possono giungere ad appropriarsi della misura diretta come riporto di una unità di misura e comprendere che, scelta una unità di misura, il riporto dell'unità lascia un residuo che può essere misurato con una sotto unità, sino a produrre un risultato numerico che costituisce sempre un'approssimazione della grandezza in esame.

Già nei primi anni del ciclo è opportuno pertanto introdurre l'esperienza con la misura sia in attività significative volte a quantificare aspetti della realtà fisica direttamente esperibile (lunghezze, tempi, pesi capacità, temperature, ...) sia aspetti della realtà economico e sociale (produzione, migrazione, variabilità delle crescite…). Lo scopo ultimo di tutte queste attività è portare gli alunni a considerare il "misurare" come uno strumento conoscitivo che aumenta la possibilità di comprendere fatti e fenomeni perché consente di analizzarli e studiarli attraverso un approccio quantitativo basato sul confronto e l'elaborazione delle grandezze che li caratterizzano. Si consiglia di sviluppare l'attività di misura all'interno di progetti didattici di medio-lungo periodo, in cui la costruzione delle capacità operative sia strettamente connessa alla necessità di interpretare e giustificare sia fatti matematici, sia fenomeni fisici e sociali della vita reale. I tempi medio-lunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti i bambini di compiere il consolidamento tecnico e l'approfondimento operativo necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze coinvolte nella misura. L'insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, limitando la proposta di esercizi ripetitivi che nel passato hanno caratterizzato una certa tradizione didattica (ad esempio

calcolo di superfici e volumi di solidi sovrapposti, equivalenze…). I contesti di applicazione dovranno essere scelti in base alla loro potenzialità di consentire la costruzione di competenze e conoscenze importanti per la formazione del futuro cittadino.
L'utilizzazione delle tecnologie è una competenza di carattere trasversale, da svilupparsi nel tempo e sempre in contesti problematici, in cui l'uso della tecnologia viene integrato con l'attività matematica.
Lo sviluppo in continuità del nucleo misurare coinvolge diversi aspetti, che sono integrati tra loro, e che devono essere evidenziati dall'insegnante nel corso delle attività. Il primo è l'aspetto strumentale, che viene messo in gioco nei procedimenti di misura, quando si rende necessario identificare le grandezze misurabili, le unità di misura, il processo di misura, la scrittura della misura. E' opportuno che l'insegnante sottolinei, in questa fase, il grado di affidabilità dello strumento, qualunque esso sia, (dal centimetro da sarta al calibro al software), onde evitare, da parte degli allievi, errori di utilizzo, di interpretazione o di scrittura della misura.
Un altro aspetto è quello operativo, che viene messo in gioco nella gestione dei dati di misura, quando si rende necessario scrivere la misura tenendo conto dell'incertezza, strumentale o calcolata, oppure nelle stime di misura.
Ultimo, ma non meno importante, è l'aspetto teorico del nucleo, che viene messo in gioco in attività di costruzione del significato della misura di una grandezza, fondato sui numeri reali per quanto riguarda la matematica (misura come funzione che associa un numero reale a una grandezza) e sui numeri decimali finiti per quanto riguarda le scienze sperimentali.
E' opportuno tenere presente che alcuni degli argomenti tradizionali, sviluppati a volte in modo sovrabbondante, andrebbero ridimensionati, per esempio i calcoli pedanti su perimetri, aree e volumi di grandezze geometriche, spesso semplici pretesti per fare eseguire operazioni di una certa complessità, non indirizzati verso la costruzione di significati, ma unicamente verso i meccanismi del calcolo.

Nodi epistemologici
Per scendere a un dettaglio maggiore, i nodi epistemologici legati al nucleo misurare sono identificabili nei seguenti:

1. il passaggio da una percezione soggettiva della grandezza in esame a una sua valutazione oggettiva (si pensi per esempio alla sensazione di caldo o freddo, alle percezioni di lungo o corto, di pesante o leggero, in contrapposizione alla misura di temperature, lunghezze, masse);
2. il discreto e il continuo: per esempio, se si individuano tra un gruppo di palline, tutte quelle rosse, si tratta di effettuare un conteggio delle palline rosse, che costituisce una misura di una grandezza discreta. Invece, se si contano le piastrelle del pavimento che coprono una distanza, si effettua un'operazione di misura di una grandezza continua: la lunghezza, tramite un'unità di misura ad essa omogenea, la lunghezza di una piastrella;
3. l'assegnazione di un numero a una grandezza come risultato di un'operazione di misura comporta sia la scelta di una unità di misura convenzionale (metro, centimetro cubo, …) o non convenzionale (passi, tazze, …), sia l'espressione della grandezza con un numero seguito dall'unità di misura utilizzata (bisognerebbe evitare, a qualunque età scolare, di proporre agli allievi frasi come: "il peso specifico dell'acqua è 1", che non hanno alcun significato, se non è specificata l'unità di misura);
4. il passaggio da un'unità di misura non convenzionale a una convenzionale. Per esempio si consideri l'utilizzo di parti del corpo o gesti tipo: mani, piedi, altezza, passi, spanne, …) per esprimere lunghezze, per poi passare a unità di misura ancora non convenzionali come per esempio il lato della piastrella, ma condivisibili e oggettive all'interno di un gruppo classe, per giungere infine alle unità di misura condivisibili all'esterno del gruppo-classe, come il metro o il grado. Non è indispensabile, nei primi anni di scuola elementare, utilizzare solo unità di misura convenzionali, ma è molto più importante curare i passaggi descritti, nel senso di far sorgere

l’esigenza, negli allievi, di poter comunicare all’esterno della classe i risultati delle loro misure. Se si affiancano unità di misura non convenzionali ad altre convenzionali, è utile sempre che gli allievi abbiano coscienza della loro differenza. Un altro problema che potrebbe sorgere nel trattare un contesto, è quello di esprimere grandezze con unità di misura di altri tipi di grandezze, come per esempio esprimere uno spazio in termini di tempo: “Un percorso in montagna è di due ore di cammino.”, oppure “La distanza da casa a scuola è di 10 minuti in automobile e di 30 minuti a piedi.”;
5. la distinzione tra intervallo di misura e misura è un nodo epistemologico di fondamentale importanza, che va fondato nei primi anni della scuola elementare e sviluppato, nel tempo e ancora nella scuola media, fino alla scuola superiore, attraverso una didattica lunga, che vi ritorna più volte, a livelli di approfondimento diverso. Questo nodo è fondamentale perché porta gli allievi, per esempio, a distinguere tra un intervallo di tempo e un istante, oppure tra una distanza e una posizione spaziale rispetto a un punto di riferimento, o ancora tra una temperatura e una variazione di temperatura. Coinvolge la comprensione del ruolo dello zero in una scala graduata, il fatto che, per esempio, contando 5 tacche gli intervalli contati sono 4, e mette in gioco le varie distinzioni tra il discreto (tacche, punti) e il continuo (intervalli, distanze tra tacche sullo strumento di misura). E’ il nodo che, se sciolto, insegna ai bambini a passare dalla misura per conteggio alla misura nel continuo, con tutte le implicazioni, da affrontare nel tempo, come per esempio il passaggio a sottomultipli dell’unità di misura, l’utilizzo di numeri decimali, l’espressione della misura accompagnata da un’incertezza, ecc. Uno strumento che offre grandi opportunità di mediazione per affrontare questo nodo è il termometro, perché i bambini possono sperimentare essi stessi tenendolo in mano le variazioni che subisce la temperatura, determinare temperature e calcolare intervalli. Tale strumento risulta essere più semplice del metro nell’affrontare per la prima volta questa problematica;
6. individuare le grandezze che godono della proprietà di additività, ossia del fatto che la grandezza che rappresenta entrambe ha come misura la somma delle misure delle due grandezze di partenza. Se per molte grandezze con cui il bambino ha a che fare fin dai primi anni della scuola per l’infanzia tale proprietà viene soddisfatta (pensiamo per esempio alla lunghezza, all’area o al volume, alla massa o al tempo), non è così per la temperatura, che non gode della proprietà di additività. Infatti, due corpi messi insieme non hanno una temperatura totale che è la somma delle temperature dei due corpi. In questo fenomeno fisico, due corpi messi a contatto e che hanno inizialmente due temperature diverse, si stabilizzano dopo un certo intervallo di tempo a una temperatura che è compresa fra le due temperature iniziali.

Costituiscono nodi epistemologici di fondamentale importanza, da svilupparsi con continuità anche tra la fine della scuola media e la scuola superiore, i seguenti, che sono tipici della misura nelle scienze sperimentali:
1. la scrittura della misura di una grandezza come numero, seguito da un'unità di misura e da un intervallo di incertezza, che ci dà indicazione su quando affidabile sia la misura;
2. l'identificazione dell'intervallo di incertezza, che potrebbe basarsi semplicemente sulla sensibilità dello strumento di misura, oppure su calcoli;

e i seguenti, che sono tipici della matematica:
3. le proprietà della misura (positività, additività, …).

Competenze coinvolte

La fase iniziale dello sviluppo del nucleo consiste nell’osservare, toccare, manipolare «cose» da parte degli allievi, il più possibile variegate, perché acquisiscano l’abitudine di individuare diverse caratteristiche delle «cose» che osservano, e successivamente distinguano quelle importanti per il misurare, come la lunghezza o la massa, da quelle che non si possono esprimere con numeri riferiti ad unità di misura e rilevabili con uno strumento, come la bellezza o il colore. Il primo livello di terminologia introdotta riguarda le caratteristiche che si possono misurare, ossia le grandezze, e il secondo livello coinvolge il confronto tra queste grandezze.

Tale confronto permette di giungere a espressioni del tipo: “Questo è più lungo di quello.”, “Questo è più pesante di quello.”, oppure “Questo è il più basso di tutti.” … e quindi di poter ordinare gli oggetti. L’atto stesso del confronto, dunque, a un primo passo sarà diretto, mentre successivamente può diventare indiretto se si confrontano rappresentazioni degli stessi oggetti (in scala o meno, ma che ne mantengano l’ordinamento). Quando si associano agli oggetti dei numeri, quindi si passa da un ordinamento qualitativo a un ordinamento quantitativo, allora si sfruttano le misure per confrontare gli oggetti (confronto indiretto). In questa fase dovrebbe emergere non solo il confronto per scoprire quale oggetto viene prima o dopo di un altro, ma anche quali oggetti sono uguali. Per i bambini il cogliere, in un ordinamento, l’uguaglianza fra oggetti, non è spontaneo; va stimolato con attività che coinvolgano oggetti diversi tra cui compaiono coppie di oggetti uguali. E similmente queste abilità vanno controllate nelle verifiche.
Le operazioni matematiche connesse con le precedenti attività sono il confronto e l’ordinamento tra numeri, nonché la somma, se per esempio si mettono in fila due aste che sono state precedentemente misurate e si chiede ai bambini di determinare la lunghezza totale delle aste messe in fila. Ad un livello successivo è possibile sfruttare le operazioni di prodotto e divisione se, anziché due aste, se ne mettono in fila più di due e si lavora sulla lunghezza totale a partire dalla lunghezza di un’asta, o, viceversa, sulla lunghezza di un’asta a partire da quella totale. Queste operazioni sulla misura sono rese possibili dalla proprietà di additività.

L’introduzione dei numeri come misura è il primo passo dell’attività del misurare, ed è reso possibile in qualunque contesto o in qualunque occasione, fin dall’inizio del primo anno di scuola elementare. I numeri associati a una misura sono i numeri naturali, compreso lo zero, per i motivi descritti precedentemente. La prima attività del misurare è la misura per conteggio: contare gli oggetti di più collezioni per decidere dove ce ne sono di più o di meno; contare le caramelle di un sacchetto per vedere se tutti i bambini della classe potranno mangiarne almeno una; contare i quadretti della pagina del quaderno; contare le merendine che coprono completamente il banco o le piastrelle che occupano il pavimento della classe ... Cioè si parte da esperienze della quotidianità del bambino. Per parlare di lunghezze, per esempio si può misurare la cattedra con la spanna: ogni bambino la misura, e si scopre così che il risultato potrebbe essere diverso in termini numerici, perché non tutti i bambini hanno la spanna lunga uguale. In queste esperienze iniziali, occorre che l’insegnante gestisca l’attività suddividendola in diverse fasi: l’esperienza, fatta da ogni bambino della classe, la raccolta dati (quante spanne per ogni bambino), la registrazione dei dati sulla lavagna e sul quaderno, il confronto dei dati e la discussione collettiva gestita dall’insegnante, che faccia emergere le peculiarità dell’esperienza, insieme con esperienze di vita vissuta che i bambini riportano, avendo partecipato a casa ad attività di misura con i genitori o altri membri della famiglia. L’obiettivo finale è quello di far emergere la necessità di pervenire a un metodo di misura che minimizzi l’errore del riportare più volta l’unità di misura, da una parte, e dall’altra di utilizzare un’unità di misura convenzionale che rappresenti la misura della cattedra in modo inequivocabile. L’insegnante interverrà con frasi del tipo: “Ma se scegliamo come unità di misura la spanna di Andrea, che è la più lunga di tutte, e una mattina vogliamo misurare la lunghezza del davanzale ma Andrea è assente, come facciamo?” In modo che i bambini scelgano un oggetto (o anche subito uno strumento) facilmente reperibile nella classe in ogni momento.

L’aspetto del misurare mette in gioco relazioni che vanno da uno a molti o da molti a uno. Per esempio, se si misura lo stesso oggetto con unità di misura diverse, la scrittura è costituita da diverse misure dello stesso oggetto, ovvero da diversi numeri, tutti seguiti da una opportuna unità di misura. Anche qui una riflessione è opportuna, perché potrebbe nascere l’esigenza, negli allievi di averne uno più vero degli altri. L’insegnante dovrà costruire, insieme agli allievi, un significato di misura che non comporta la verità o meno di una misura rispetto a un’altra, ma l’opportunità di utilizzare una unità di misura piuttosto che un’altra a seconda della grandezza che si vuole misurare. In termini di unità di misura convenzionale, per esempio occorre utilizzare un metro per misurare la lunghezza del cortile, la cui misura si esprimerà in metri, mentre è sufficiente un righello per misurare un lato del libro, la cui misura si esprimerà in centimetri. L'altro tipo di relazione, da molti a uno, nasce dall'osservazione che, se si misura la lunghezza del lato delle piastrelle del pavimento, è molto facile ottenere misure uguali di piastrelle diverse. Le considerazioni opportune, appoggiate anche dalla sensazione visiva, riguardano il fatto che le piastrelle sono tutte uguali, dunque hanno la stessa misura. Nel caso in cui vi fossero misure diverse, occorre riflettere sull'atto del misurare e sullo strumento di misura, che potrebbero entrambi introdurre "errori" (meglio chiamarli incertezze) nella misurazione.

Il passaggio dal numero sotteso all'atto della misura (numero naturale), al numero decimale, è un salto epistemologico di fondamentale importanza del nucleo numeri, collegato con il nucleo misurare. Si presenta quando l'unità di misura scelta non è contenuta un numero intero di volte nella grandezza che si misura, e quindi avanza un pezzettino. In questo caso occorre far riflettere gli allievi sull'opportunità o meno di misurare il pezzettino, e sul come farlo. Il primo passo dovrebbe consistere nell'approssimazione: si osserva a quale tacca è più vicino il pezzettino, e dunque si approssima per difetto o per eccesso la misura. Questo passaggio è fondamentale, perché insegna ai bambini che, se non hanno sottomultipli dell'unità di misura, NON possono inventarli, ed è molto meglio approssimarli che tirare a caso o indovinare. Successivamente, bisogna utilizzare per esempio unità di misura più piccole per misurare il pezzettino, anche non sottomultipli dell'unità di partenza, o anche non sottomultipli in base dieci. Per fare un esempio, se uso la larghezza del pugno per misurare la lunghezza del banco, posso, per la parte che avanza, utilizzare le dita: in questo caso 4 dita fanno un pugno, ma introduco comunque un sottomultiplo.

L'altro aspetto connaturato con la misura di grandezze è la loro stima, cioè la determinazione di una misura approssimata della grandezza, nell'impossibilità di misurarla direttamente o indirettamente. La stima comporta l'espressione della grandezza con una misura che spesso è costituita da un ordine di grandezza, nel senso che è sufficiente dire in quale potenza del dieci è contenuta la sua misura. Bisogna che i bambini abbiano prima fatto esperienza con misure di base. Per esempio, se hanno misurato la distanza tra un banco e l'altro in classe, e la lunghezza di un banco, sulla base di questi dati e con alcune considerazioni di tipo aritmetico oppure a occhio, possono dire quanto è approssimativamente la lunghezza dell'aula. Oppure, se hanno misurato la massa d'acqua contenuta in un bicchiere, possono stimare quanta massa d'acqua contiene una bottiglia. Stimare significa utilizzare qualche grandezza o procedimento per eseguire la stima e quindi bisogna far riferimento a qualcos'altro, di cui si è fatta esperienza.
Il significato profondo di stima è, infatti, utilizzare qualche cosa di noto, cioè una qualche misura nota, attraverso la quale determinare, per mezzo di una procedura specifica, la misura di una grandezza non nota. La determinazione dell'altezza di un palazzo di 8 piani può essere stimata conoscendo l'altezza approssimata di un piano. Nella stima entrano quindi in gioco due capacità: la capacità di richiamare alla mente una misura nota e la capacità di usare una qualche procedura per agire sulla misura conosciuta al fine di determinare la misura sconosciuta. Nello sviluppo della capacità nella stima di misure entrano in gioco aspetti legati a comportamenti del tipo: "affrontare questo problema è come se...", che sono tra i più difficili da sviluppare con gli alunni.
Pensiamo che sia fondamentale che il bambino acquisisca l'abitudine mentale a stimare grandezze, perché come cittadino di domani, ha bisogno di questa competenza per la vita di tutti i giorni. Anche nel suo percorso scolastico, il bambino deve sviluppare la capacità della stima di grandezze, per poter dominare i risultati ottenuti (a mano o con la calcolatrice) a seguito di calcoli che fanno riferimento a situazioni concrete.

Indice delle attività
Nucleo Misurare

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamento con altre discipline
1 elementare	Il tempo di una fiaba	Tempo	Lingua italiana Educ. all'immagine Storia
1 elementare	Quanto è grande 100	Le collezioni	Lingua italiana
2 elementare	La scatola delle sorprese	Progettare e costruire	Lingua italiana
3-4 elementare	I telai delle finestre	Progettare e costruire	Scienze, lingua italiana
3-4 elementare	L'orologio	Tempo	Scienze, lingua italiana
3-4 elementare	Come misurare il volume?	Misurazione dello spazio	Scienze
4 elementare	La regina di cuori	Fiaba	Lingua italiana, educazione all'immagine
4-5 elementare	La bicicletta	Ruote e ingranaggi	Scienze, lingua italiana
5 elementare	La superficie del Portogallo	Aree	Geografia, Lingua italiana
5 elementare	I chicchi di riso	Fiaba	Scienze, lingua italiana, storia, geografia, studi sociali
1 media	Buon appetito	Educazione alimentare	Scienze, educazione tecnica
2 media	La foto	Rappresentazione dello spazio	Educazione tecnica, geografia
2 media	Progettiamo lo spazio intorno a noi	Progettare e costruire	Educazione tecnica
2 media	Mettiamo in equilibrio	Macchine	Fisica
3 media	Il cammello	Movimento nello spazio	Fisica

SCUOLA ELEMENTARE

Il tempo di una fiaba

Livello scolare: 1ª elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Osservare oggetti e fenomeni individuando in essi alcune grandezze misurabili; compiere confronti diretti e indiretti in relazione alle grandezze individuate; ordinare grandezze Effettuare misure per conteggio di grandezze discrete (ad es: conteggio di elementi di classificazioni prodotte, valori monetari, …) Effettuare misure di grandezze continue con oggetti e strumenti (ad es: una tazza, un bastoncino, il metro, la bilancia, l'orologio, …) Esprimere le misure effettuate utilizzando le unità di misura scelte e rappresentarle adeguatamente	Numeri naturali Addizione e sottrazione tra numeri naturali	<u>Misurare</u> Il numero	Lingua italiana Educ. all'immagine Storia

Contesto

Il tempo è una dimensione fondamentale del nostro modo di conoscere la realtà: si configura come una struttura ordinatrice che si affina progressivamente attraverso un lento processo. L'obiettivo è quello di arrivare a percepire il tempo come successione ordinata di eventi, misurabili e comparabili tra loro.
Alcuni obiettivi delle attività incentrate sul tempo sono di tipo trasversale e interessano discipline diverse, come la storia, le scienze e la lingua italiana.
Gli obiettivi in campo matematico fanno riferimento a:

- aspetti ordinali e ricorsivi del numero;
- premisura e misura (unità convenzionali di misura e loro successive divisioni);
- rappresentazione di durate, di eventi, di sequenze mediante linee del tempo, diagrammi circolari e diagrammi di flusso;
- costruzione di algoritmi.

L'attività ha la finalità di costruire una linea del tempo che, pur rimanendo ancora fortemente contestualizzata, è anche la prima rappresentazione della retta dei numeri naturali da 0 a 7.
La linea del tempo è la raffigurazione simbolica di una settimana, ha l'origine in corrispondenza del punto 0 ed è costituita da segmenti uguali che rappresentano durate uguali, cioè i giorni della settimana. I numeri indicano la successione e la progressione dei giorni.
Questo modello di retta dei numeri rappresenta la modellizzazione di una grandezza continua (tempo), ma i giorni vengono conteggiati come grandezze discrete.

Descrizione dell'attività

Prima fase - L’attività prende lo spunto dalla lettura del testo della storia “I tre porcellini”. La fiaba deve essere adattata: è necessario che si sviluppi nell’arco della settimana (dal lunedì alla domenica) e nel testo devono essere inseriti alcuni riferimenti temporali: il nome di alcuni giorni della settimana oltre a locuzioni del tipo “*il giorno dopo*”, “*la mattina successiva*”, “*durante il pomeriggio*” ecc …
Una possibile sequenza della fiaba può essere la seguente:

- il lunedì la mamma invita i porcellini ad andarsene da casa;
- il martedì il primo porcellino costruisce in poche ore la casa di paglia;
- il mercoledì il secondo porcellino costruisce in un pomeriggio la casa di legno;
- durante la giornata del giovedì il terzo porcellino costruisce la casa di mattoni;
- il venerdì il lupo distrugge le case di paglia e di legno;
- il sabato il lupo tenta di distruggere la casa di mattoni e cade nel camino;
- la domenica i porcellini festeggiano tutti insieme la morte del lupo.

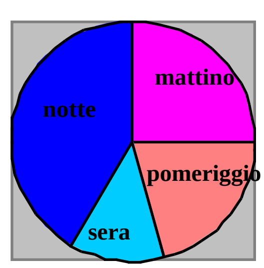
Dopo la lettura collettiva, e dopo le necessarie osservazioni su personaggi, luoghi ed avvenimenti della storia, i bambini devono essere invitati a riflettere sui tempi della fiaba, attraverso domande del tipo:

- *Quanto dura secondo voi questa fiaba?*
- *Quanto tempo passa da quando la mamma allontana i porcellini da casa a quando si ritrovano tutti per fare la festa?*
- *Quanto tempo ci mette il primo porcellino a costruire la casa di paglia?*
- *Quanto tempo ci mette il secondo porcellino a costruire la casa di legno?*
- *Quanto tempo ci mette il terzo porcellino a costruire la casa di pietra?*
- *Quali sono le parole che ve lo fanno capire?*

È probabile che qualche alunno confonda la durata della vicenda raccontata dalla fiaba (una settimana) con la durata della narrazione (alcuni minuti), in ogni caso, poiché è possibile che il dubbio esista pur non venendo espresso, è bene far chiarezza su questo aspetto, misurando quanto dura effettivamente la lettura della fiaba con l’aiuto di un orologio digitale.

La sequenza della fiaba può essere riprodotta su schede: ogni segmento della sequenza coincide con un giorno della settimana. Ciò consente la rilettura e un’ulteriore riflessione sulla storia, sia per individuare gli avvenimenti caratterizzanti ogni giornata, da rappresentare poi con un disegno, sia per ricercare nel testo le parole del tempo.

Seconda fase – Il successivo incontro ha l’obiettivo di far esplicitare agli alunni, all’interno di una discussione collettiva, le conoscenze che hanno riguardo la durata di una giornata e la sua misura.
Occorre esplicitare prima di tutto che il termine “giornata” viene usato per non fare confusione con il giorno, che generalmente nel linguaggio corrente si fa coincidere con le ore di luce. Con giornata si intende invece il succedersi di un periodo di luce e di un periodo di buio.
Altro motivo di possibile confusione può essere la diversa durata dei periodi di luce e di buio nelle stagioni dell’anno.
È importante far riflettere gli alunni sul succedersi ciclico delle giornate, sull’alternanza tra luce e buio e sulla sequenza mattino, pomeriggio, sera e notte.
Per ciascuna delle quattro parti in cui si suddivide la giornata è possibile individuare alcuni eventi caratterizzanti, che i bambini possono illustrare. La



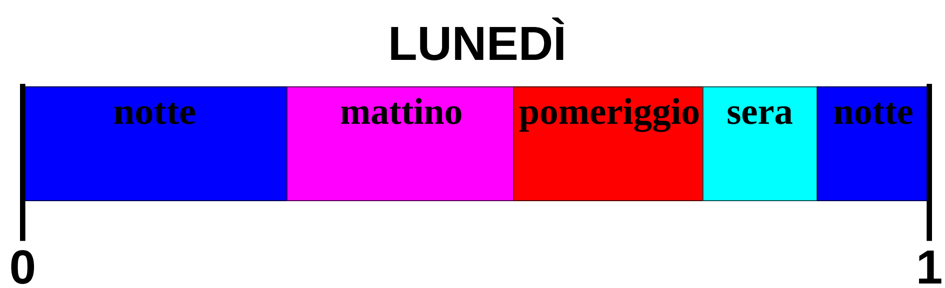
sequenza degli eventi caratteristici potrà costituire la storia della loro giornata[1].
La ciclicità di questi eventi può essere ben rappresentata con la "ruota della giornata": un cerchio suddiviso in 4 settori di ampiezza diversa, relativi a mattina (ad esempio dalle ore 7 alle ore 13), pomeriggio (ad esempio dalle ore 13 alle ore 18), sera (ad esempio dalle ore 18 alle ore 21), notte (ad esempio dalle ore 21 alle ore 7), contraddistinti con 4 colori diversi.

L'attività relativa alla giornata può iniziare con una discussione sollecitata dalla domanda:

> *"Le giornata durano tutte lo stesso tempo, oppure ci sono giornate più lunghe e giornate più brevi?*
> *Quale strumento usiamo per contare quanto è lunga una giornata?"*

La riflessione sull'orologio (è bene mettere a confronto orologi analogici e digitali), come strumento (contatore) che misura la durata di una giornata si deve limitare alle ore. Occorre giungere a stabilire che in una giornata intera la lancetta delle ore fa esattamente 2 giri completi dell'orologio, corrispondenti a 24 ore. Per rendere l'idea della durata delle varie parti del giorno si può far muovere velocemente la lancetta delle ore facendo mimare dai bambini le azioni che quotidianamente compiono durante la giornata.
Un'altra questione determinante per determinare la misura della giornata è stabilire:
"Quando finisce un giorno e ne inizia un altro?
Voi vi accorgete che è finito un giorno? Come ve ne accorgete?
Cosa state facendo in quel momento?"
Per rendere esplicito quanto avviene allo scadere di un giorno, si può utilizzare una sveglia digitale sincronizzandola sugli ultimi minuti della ventitreesima ora e osservando come al suo scadere tutti i numeri si azzerano: quello è il momento in cui un giorno finisce e ne comincia un altro.
Per evidenziare questo momento, alla ruota della giornata viene aggiunto un nastro colorato in corrispondenza delle ore 24.

Terza fase - A questo punto la fiaba può essere rappresentata con una striscia (linea del tempo) suddivisa in 7 parti uguali, una per ogni giorno della settimana.
Per realizzare le strisce relative ad ognuna delle sette giornate della fiaba, si utilizza la ruota della giornata. La ruota viene posizionata all'inizio di una striscia di carta in corrispondenza del nastro che indica l'inizio del giorno. Facendo ruotare progressivamente la ruota, si segnano sulla striscia di carta le tacche che individuano l'inizio e la fine delle diverse parti della giornata: notte, mattina, pomeriggio, sera, notte, fino a ritornare al nastrino colorato. Ciò consente di passare da una rappresentazione ciclica ad una lineare del tempo.



[1] La storia della giornata può diventare uno dei primi libri di lettura realizzati dai bambini.

La striscia, di grandi dimensioni, viene esposta su una parete della classe; ogni giornata può essere caratterizzata con frasi o disegni relativi agli avvenimenti della fiaba. L'origine della striscia è indicata con uno 0, che rappresenta l'inizio del primo giorno della storia, cioè del lunedì. Il numero dei giorni non indica la data, ma l'ordine in cui si susseguono i giorni e coincide con la "tacca" (immagine del nastrino colorato) posta tra un giorno e l'altro.
Quindi: alla fine del lunedì è trascorso il primo giorno; alla fine del martedì è trascorso il secondo giorno; alla fine del mercoledì è trascorso il terzo giorno; ... alla fine della domenica è trascorso il settimo giorno.

È bene accertarsi che tutti abbiano compreso la rappresentazione scorrendo la striscia verso destra e facendo domande del tipo:

- *Dove c'è il numero 0 quanti giorni sono passati? Quanti ne restano per arrivare alla fine della settimana?*
- *Dove c'è il numero 1 quanti giorni sono passati? Quanti ne restano per arrivare alla fine della settimana?…*

Usando la linea del tempo così fabbricata si possono inventare molti "giochi" che avviano ad una lettura della linea del tempo tenendo ancora presente il contesto del tempo, ma focalizzando già l'attenzione sui numeri e sui loro rapporti.
È molto importante la lettura nei due sensi, collegata al significato del "più" e del "meno".
Scoperte significative sono:

- il + fa andare avanti;
- il - fa andare indietro;
- + 0 e - 0 fanno stare fermi.

Esempi di situazioni inventate dai bambini e/o proposte dall'insegnante:

- *Partiamo da 0 e raccontiamo cosa succede con il +1.*
- *Partiamo da 7 e raccontiamo cosa succede con il -1.*
- *Da 2 a 5 passano 3 giorni.*
- *Sono al 3, se passano 4 giorni arrivo al 7.*
- *Sono al 6, 2 giorni fa ero al 4.*
- *Da lunedì a giovedì passano 3 giorni.*
- *Sono al martedì, se passano 4 giorni arrivo a sabato.*
- *Sono al venerdì, 2 giorni fa ero al mercoledì.*

Riferimenti

COMETTO Attilia - *Resoconto di un'attività per il Nucleo di Ricerca Didattica di Torino*

Quanto è grande il cento?

Livello scolare: 1ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**

Osservare oggetti e fenomeni individuando in essi alcune grandezze misurabili; compiere confronti diretti e indiretti in relazione alle grandezze individuate; ordinare grandezze Effettuare misure per conteggio di grandezze discrete (ad es: conteggio di elementi di classificazioni prodotte, valori monetari, …) Esprimere le misure effettuate utilizzando le unità di misura scelte e rappresentarle adeguatamente Contare sia in senso progressivo che regressivo Confrontare e ordinare numeri, sviluppando il senso della loro grandezza relativa; collocare numeri sulla retta	Numeri naturali Addizione e sottrazione tra numeri naturali	<u>Misurare</u> Il numero	Lingua italiana

Contesto: Collezioni

Il saper contare è certamente una delle prime competenze richieste quando si fa matematica, ma anche nelle loro esperienze extrascolastiche, spontaneamente, i bambini provano piacere a contare le cose vere che incontrano nel mondo reale, anzi il piacere aumenta all'aumentare della complessità del conteggio (ovviamente in caso di successo).

Il contesto proposto per operare i primi conteggi è rappresentato dalle "collezioni di oggetti" posseduti dai bambini o individuati dall'insegnante tra quelli utilizzati in classe per le attività inerenti ai diversi ambiti (i mattoncini delle costruzioni, i semi da interrare, le finestre della facciata della scuola, le piastrelle del pavimento, ecc.). Le collezioni sono da intendersi come insiemi di oggetti (o di rappresentazioni di oggetti) omogenei o non omogenei, più o meno organizzati spazialmente in una struttura.

Per effettuare correttamente l'azione di conteggio di una collezione, il bambino deve prima saper controllare il sistema oggetto di conteggio. In pratica, il bambino esplora e "misura" in senso spaziale la collezione e in questo modo perviene ad individuare una struttura[2] che gli consente di effettuare correttamente il conteggio e di evitare di incorrere in errori, tralasciando elementi o conteggiandoli più di una volta.

Il confronto tra strutture diverse introduce l'uso della partizione, intesa come rappresentazione e come strumento finalizzati al calcolo.

L'azione di conteggio, e quindi la determinazione del cardinale da associare all'insieme degli elementi della collezione, è da considerarsi come la "misura" della quantità della collezione stessa.

In questo caso specifico viene richiesto di "misurare" con il numero cento, associando ad esso una collezione conosciuta, affinché i bambini, che fino a quel momento hanno operato con numeri più piccoli, comincino ad acquisire coscienza del nuovo ordine di grandezza. Per scegliere le collezioni da associare al numero 100 i bambini devono prima compiere stime e poi procedere al conteggio vero e proprio per verificare la stima.

Descrizione dell'attività didattica

Prima fase - L'attività richiede di conteggiare gli elementi di 3 diverse collezioni di oggetti, disposti spazialmente in modo diverso (ad esempio sparsi, riuniti in gruppi di numerosità diversa, disposti per file e colonne), ciascuna delle quali riporta una collezione di circa 50 elementi (ad

[2] Si veda in proposito: Briand, *La numerazione nella misurazione delle collezioni*, Bordeaux, 1993.

esempio 45, 52, 59 elementi). La numerosità e la disposizione degli elementi richiede l'utilizzo di strategie di conteggio e la conoscenza dei numeri almeno entro il 60.

1° consegna:

> "Quante sono, secondo voi, gli oggetti disegnati sulle schede: più o meno di 100?".

Le ipotesi dei bambini vengono raccolte e trascritte alla lavagna.

2ª consegna:

> "Per saperlo esattamente ognuno di voi dovrà contare una collezione per volta. Decidete voi quale collezione cominciare a contare per prima. Ricordate, però, che vi conviene trovare un modo veloce e sicuro che vi permetta di contare in fretta e bene, per non dimenticare oggetti e per non contarli due volte. Potete scrivere sul foglio tutto quello che vi serve per contare".

Gli alunni vengono invitati a lavorare individualmente. Al termine dell'attività l'insegnante raccoglie le schede e si accerta che sia comprensibile la strategia utilizzata per il conteggio, in caso contrario richiede spiegazioni ai singoli alunni.

L'attività serve per verificare le abilità di conteggio dei bambini e soprattutto le procedure utilizzate (segnature oppure numeri, conteggio uno per uno oppure raggruppamenti, somme, somme progressive, ecc …)

In un secondo momento l'insegnante dopo aver raccolto su un cartellone le schede con le diverse tipologie di conteggio, può orchestrare una discussione durante la quale i bambini vengono invitati a:

- riconoscere le strategie utilizzate per contare le collezioni;
- raccontare e confrontarsi sulle strategie di conteggio;
- esplicitare le difficoltà incontrate (non conoscenza dei numeri, collezioni troppo numerose, ecc.);
- riflettere sul fatto che il conteggio "1 per 1", nel caso di collezioni così numerose, non è né più veloce né più sicuro;
- prendere coscienza che si possono conteggiare le stesse collezioni utilizzando strategie diverse;
- istituzionalizzare eventualmente strategie di conteggio e procedure di calcolo condivise. Ad esempio:

  "Ho fatto gruppi da 10 e poi ho contato come fa il contatore con le decine. È facile: decido che 1 dito vale 10 e allora conto 10, 20, 30 …"

  > *" Io ho fatto così: se si scrive 10+10+10+10+10 … il 10 cinque volte … si può scrivere 10x5 … è uguale!"*

Seconda fase - L'insegnante introduce l'attività:

> "Vi ricordate quando avete contato le bandierine o le campanelle (attività precedente)? Sembravano tante! Qualcuno aveva detto che erano 100 e invece quando le avete contate vi siete accorti che non arrivavano a 100: erano meno di 60.
>
> *Provate a immaginare 100 cose tutte insieme. Cosa vi viene in mente?"*

Gli alunni parlano liberamente portando diversi esempi che l'insegnante annota alla lavagna. Alcuni sono immediatamente contestati dai compagni perché non sono pertinenti (es.: "*sono 100 gli aghi del pino che si vede dalla finestra*", non è accettato perché "*gli aghi sono molto più di 100*").

Ci si accorge ben presto che la maggioranza degli esempi è però difficile da valutare, ad esempio: come si può dire se è vero o falso che "*gli alberi del bosco del Castello sono 100*", se non si possono contare?

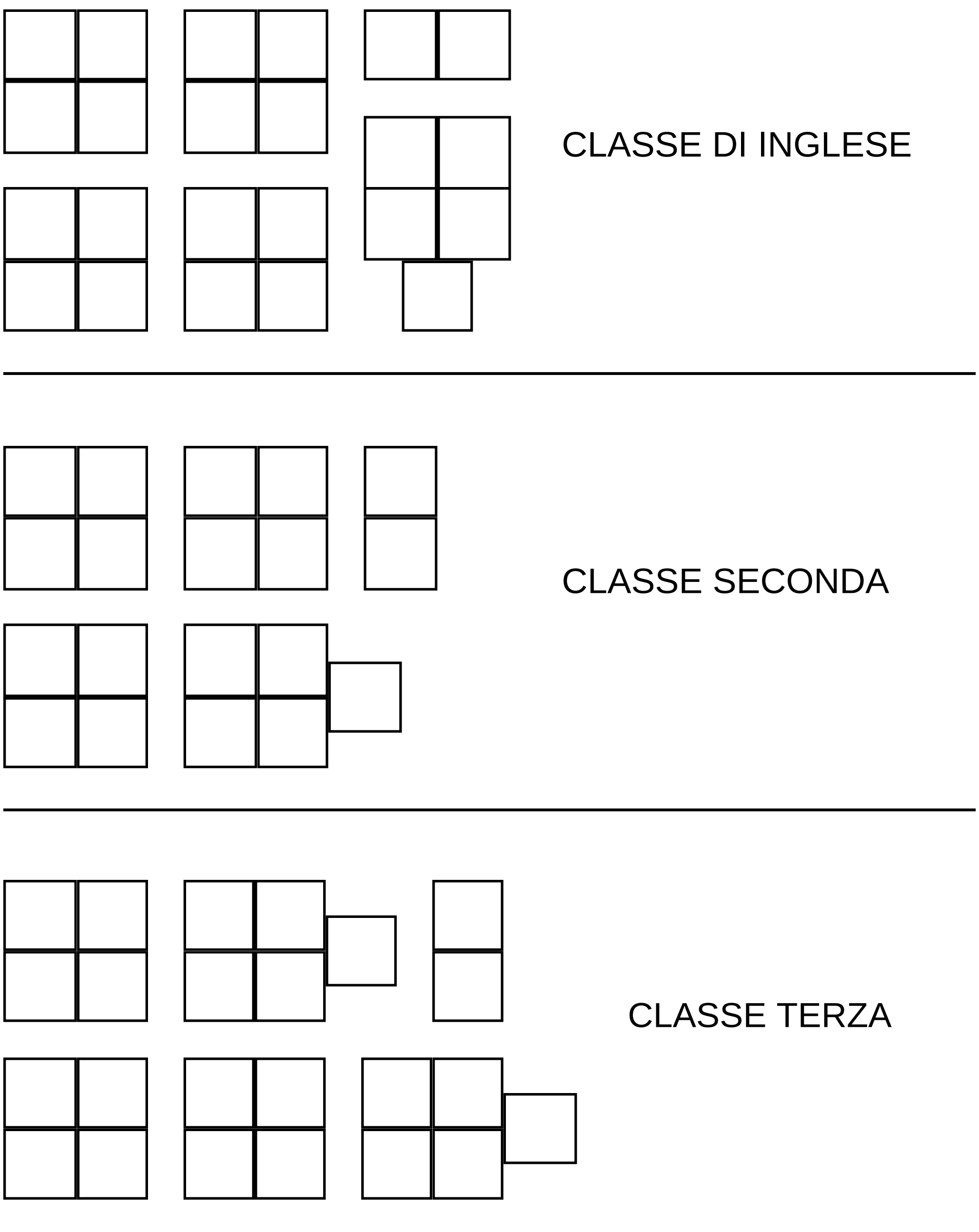
La classe viene suddivisa in gruppi di 3/4 bambini, quindi l'insegnante propone:

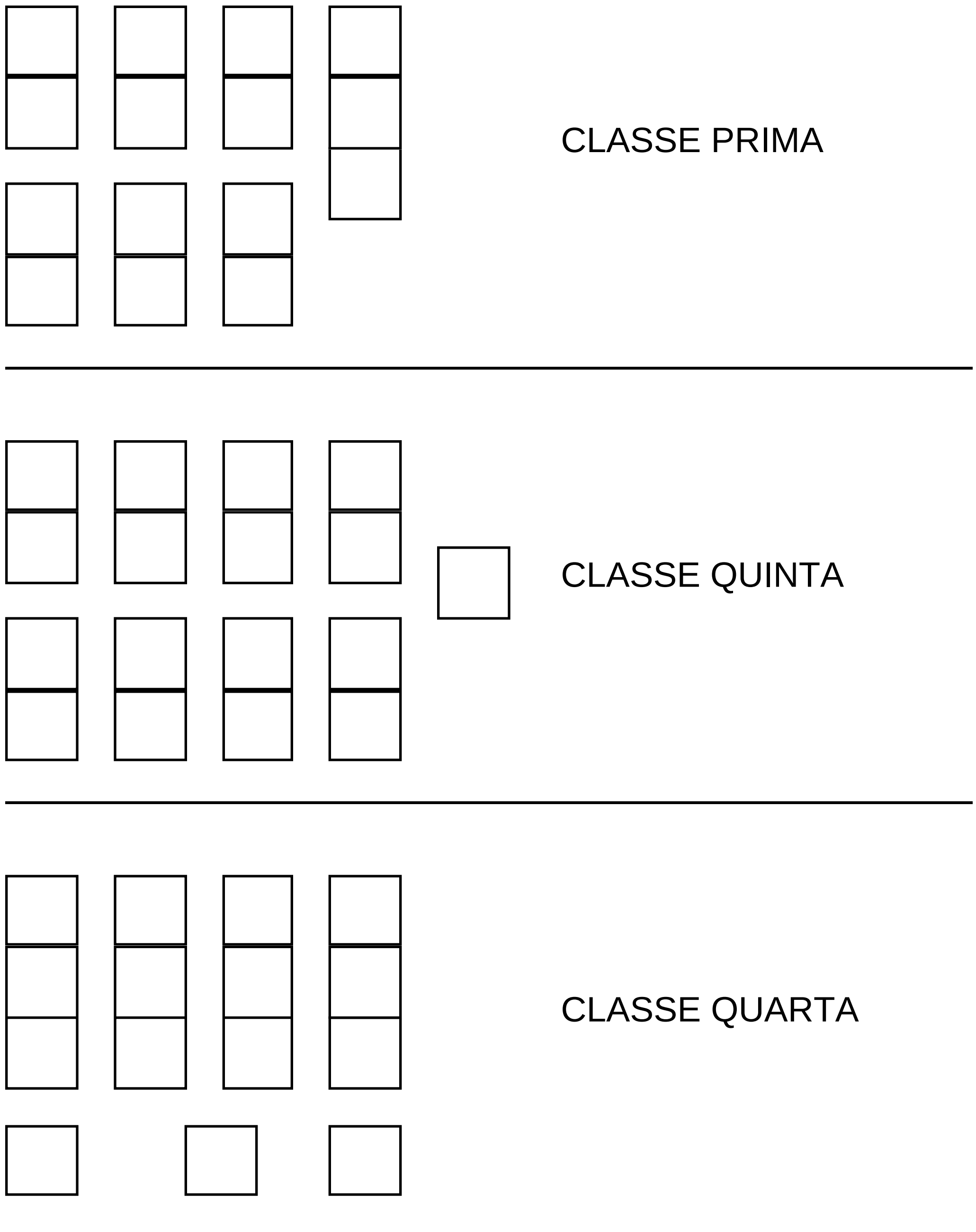
“Provate a pensare ad una situazione dove si possono contare 100 cose, attenzione, però, devono essere cose che si possono contare veramente, cioè che conosciamo o sono vicine a noi, altrimenti non possiamo fare la verifica. Poi fate vedere come fareste voi a contare.”

I bambini vengono invitati a discutere le proposte all’interno del gruppo e a trovare un accordo. Durante l’attività, l’insegnante osserva, ascolta ed esprime pareri sulle proposte dei diversi gruppi, interviene quando i bambini non riescono a trovare un accordo o quando la situazione proposta non si può verificare con un conteggio; aiuta ad elaborare un testo comprensibile con la situazione da proporre ai compagni.

Esempi di situazioni proposte dai bambini:

<u>Siamo andati in tutte le classi e abbiamo contato i banchi. Erano messi così:</u>





Quanti sono i banchi di tutte le classi?

Nell’atrio le finestre sono messe così:

- 3 gruppi da 5,
- 3 gruppi da 8,
- 10 gruppi da 4.

Quante sono le finestre dell’atrio?
Nella scuola ci sono 6 classi. In ogni classe ci sono 2 gruppi da 8 finestre.
Quante sono tutte le finestre delle classi?
Quante sono tutte le finestre dell’atrio e quelle delle classi messe insieme?

Nella nostra scuola ci sono 5 classi:

- in prima ci sono 13 bambini;
- in seconda ci sono 18 bambini;
- in terza ci sono 22 bambini;
- in quarta ci sono 14 bambini;
- in quinta ci sono 15 bambini.

Quanti sono tutti i bambini della scuola?

Infine l'insegnante raccoglie i protocolli e riporta le situazione trovate dai diversi gruppi su una scheda da distribuire in un incontro successivo per verificare collettivamente i conteggi.

Riferimenti

COMETTO Attilia, *Resoconto di un'attività per il Nucleo di Ricerca Didattica di Torino*
BRIAND, *La numerazione nella misurazione delle collezioni*, Bordeaux, 1993.

La scatola delle sorprese

Livello scolare: 2ª elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Osservare oggetti e fenomeni individuando in essi alcune grandezze misurabili; compiere confronti diretti e indiretti in relazione alle grandezze individuate; ordinare grandezze Effettuare misure di grandezze continue con oggetti e strumenti (ad es: una tazza, un bastoncino, il metro, la bilancia, l'orologio, …)	Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo,...........) Equivalenza di figure	<u>Misurare</u> Argomentare e congetturare Lo spazio e le figure Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana

Contesto

Progettare e costruire.

L'attività proposta consente un primo approccio al significato di misura, intesa come confronto tra grandezze. Per costruire la propria scatola, infatti, ogni alunno deve scomporre e ricomporre mentalmente la scatola dell'insegnante in una o più figure piane aventi le stesse dimensioni del campione, senza avere ancora familiarità con gli strumenti e le unità di misura convenzionali. Inoltre è necessario che ogni bambino trovi un metodo per decidere quanti fogli di cartoncino servono per costruire la propria scatola. Il fatto che la scatola potrà essere utilizzata, ad esempio, per contenere i biscotti che i bambini prepareranno a scuola e regaleranno ai genitori per Natale, può offrire una motivazione affettiva per impegnarsi nel lavoro.

Descrizione dell'attività

Sul tavolo l'insegnante mette una scatola chiusa di forma cubica con il lato di 15 centimetri, che i bambini possono guardare e toccare, ma non aprire, e un foglio di cartoncino bristol le cui dimensioni siano 50 x 70 centimetri.

Prima situazione problematica

L'insegnante dà la seguente consegna:

"Scrivi come pensi di costruire una scatola uguale a quella della maestra, usando il cartoncino colorato" e invita i bambini ad elaborare un progetto individuale, spiegando bene la procedura che intendono seguire.

Le tipologie di progetto più frequenti sono:

1. Appoggio tutti i «lati» della scatola, uno per volta, sul cartoncino e li disegno; poi taglio e incollo i pezzi.
2. Appoggio un «lato» della scatola sul cartoncino e lo disegno, poi faccio rotolare la scatola e disegno l'altro lato attaccato, e così li faccio tutti, poi taglio, piego e attacco le parti staccate.
3. Prendo il righello e misuro tutti i lati e disegno tante facce, poi le taglio e le incollo.

4. “*Sfascio*” la scatola della maestra, la faccio diventare bella piatta, poi l’appoggio sul cartoncino e la disegno, poi la taglio e la monto.
5. Prendo un foglio di carta, fascio la scatola e faccio bene le pieghe, poi apro la carta, taglio la forma della scatola e la disegno sul cartoncino.

Il terzo progetto può sembrare matematicamente più evoluto, in quanto prevede l’uso di uno strumento e la scelta di un’unità di misura convenzionale; in realtà si rivela poi una strategia non funzionale, in quanto i bambini non hanno ancora familiarità con l’uso del righello nel disegno geometrico, per cui le facce che disegnano non sono né rettangoli né quadrati.
Il quarto è un modo per ottenere lo sviluppo della scatola, però è molto difficile da gestire nella realtà, perché le pieghe che si devono effettuare sono molteplici, spesso sovrapposte e all’apertura del foglio generano confusione.
L’ipotesi che convince di più i bambini di solito è la quarta; verso questa scelta vengono guidati anche dall’insegnante, che rilancia e mette in evidenza gli argomenti di chi la sostiene, per l’opportunità che offre di un primo approccio allo sviluppo del solido.

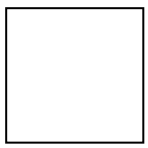
Seconda situazione problematica
Si tratta ora di decidere quanti fogli di cartoncino dobbiamo comprare perché tutti possano costruirsi una scatola senza sprecare materiale.
Il nodo concettuale sotteso a questa situazione è quello della divisione di contenenza applicata alle superfici; si comincia a costruire un significato che dovrà trovare sistematizzazione e ampliamento nel tempo in altre situazioni.
La successiva consegna:
“*Aiuta la maestra a decidere quanti fogli comprare, in modo che ognuno possa costruire la propria scatola senza sprechi*”
porta i bambini a cercare delle strategie per rappresentarsi mentalmente la situazione e le loro azioni durante le varie fasi.
Anche questa volta al lavoro individuale segue la discussione, per socializzare i diversi progetti e scegliere quello o quelli da realizzare.
Le tipologie di progetto più frequenti sono:
1. Un foglio di cartoncino per ciascun bambino
2. Sul cartoncino disegno la forma di una scatola, poi un’altra… e vedo quanti bambini si possono fare la scatola con un foglio, poi se non basta ne compro un altro e poi un altro…
3. Sul cartoncino disegno la forma di una scatola ben attaccata ai bordi, poi cerco di incastrarne un’altra ben attaccata alla prima e vado avanti così, ne incastro più che posso e vedo quante scatole posso fare con un cartoncino e decido quanti me ne servono per tutti.

In discussione si decide che il metodo 3 è quello che meglio risponde alla consegna data (non sprecare); poi, suddivisi in gruppi, i bambini cercano di ottimizzare l’utilizzo del cartoncino.
Ogni gruppo ha un foglio di cartoncino e lo sviluppo della scatola, unico modello a T, ottenuto sfasciando la scatola della maestra, e deve tentare di ricoprire con esso tutto lo spazio del cartoncino; vince il gruppo che spreca meno cartoncino.
Quasi sempre in questa attività alcuni bambini chiedono di poter modificare il modello proposto, spostando una o entrambe, le facce laterali.
A questo punto all’insegnante si presentano due possibili varianti del percorso:
1. Non dà il permesso di modificare il suo modello e gli alunni procedono ad un lavoro di ricerca di tutti gli incastri possibili per scegliere la soluzione più economica.

2. Dà il permesso di modificare il modello, consapevole però del fatto che dovrà ampliare il discorso, perché i bambini potrebbero proporre anche modelli che non permettono di costruire il cubo.

In base ai risultati del lavoro dei gruppi, si acquistano i fogli necessari e si costruiscono le scatole che ogni bambino personalizza secondo il suo gusto con disegni, intagli, collage, ecc.
Nel percorso proposto non si fa riferimento alla possibilità che lo sviluppo preveda «linguelle» per incollare le facce non direttamente collegate; ogni insegnante può scegliere se inserirle o se utilizzare scotch sugli spigoli.

Elementi di prove di verifica
Per abbellire la nostra scatola utilizzeremo quadrati, come quello in figura



Ogni bambino ne userà 10. Spiega come fai a decidere quanti fogli di carta dorata come quella che è sul tavolo dell'insegnante servono per tutta la classe.

Riferimenti
Idea elaborata nel NDR Scuola elementare dell'Università di Genova.

Elementi di prove di verifica
Livello scolare 1^{a}-2^{a} elementare

Testo da completare

Competenze: - individuare grandezze misurabili
- compiere confronti di grandezze
- cogliere relazioni

Consegna: *Leggi il testo.*
Scegli le parole che mancano tra quelle elencate sotto. Trascrivile al posto dei puntini.

Lino va in campagna. Vede un ciliegio con tante ciliegie mature e sente l'acquolina in bocca.
Va sotto il ramo più ……………………… carico di ciliegie.
Fa un salto per arrivare a prenderle, ma non arriva perché il ramo è molto più ………………….. di lui.
Chiede al papà di aiutarlo e il papà lo fa salire sulle sue spalle.
Lino però è ancora troppo ……………………… dal ramo.
Allora Lino e il suo papà cercano una scala abbastanza ……………………… per raggiungere il ramo. Finalmente ora riesce a prendere …………………. ciliegie.

Parole da inserire:
LUNGA **CORTA** **POCHE** **TANTE** **LONTANO** **BASSO** **ALTO**

Mappa da completare

Competenze: - cogliere relazioni
- compiere confronti tra grandezze

Consegna: *Leggi con attenzione il racconto.*
Disegna sulla mappa la casa del lupo e le tre case dei porcellini.*

La casa del lupo è dentro al bosco. La casa del porcellino Jimmy è la più lontana dalla casa del lupo; quella di Tommy, il secondo porcellino, è vicina al fiume, quella del terzo porcellino Timmy, è poco lontana da quella di Gimmy.

* <u>Nota per l'insegnante</u>: nella mappa da consegnare agli alunni, sono già presenti il bosco e il fiume, che costituiscono i riferimenti per le case da disegnare. Volendo, l'insegnante può elevare il livello della verifica e chiedendo di disegnare anche il bosco e il fiume.

Percorso da rappresentare

Competenze: - cogliere relazioni spaziali
- compiere confronti tra lunghezze
- descrivere verbalmente percorsi

Consegna: *Segna con un colore il percorso più breve tra la casa di Carolina e la gelateria.*
Descrivi il percorso di Carolina per andare da casa sua alla gelateria.

(disegno della mappa)

Regina Reginella

Competenze: - confrontare distanze da un punto di vista qualitativo e quantitativo
- misurare lunghezze con misura per conteggio e unità di misure diverse

Una delle versioni della filastrocca, facente parte della tradizione ludica italiana, è la seguente:
Regina, Reginella, quanti passi devo fare per arrivare al tuo castello bello bello con la piuma e con l'anello?
Consegna: *Quanti passi da formica si devono fare per arrivare al castello?*
Quanti da leone?
Quanti da elefante?
Indicazioni didattiche: la prova può essere proposta a due livelli: in quello più basso, la distanza scelta è un multiplo di 6, in modo che le tre unità di misura siano contenute esattamente nella distanza; in quello più alto, la distanza non è multiplo di 6, in modo che i bambini possano anche fornire misure approssimate (es. 5 passi e un pezzo) oppure esatte, combinando opportunamente le unità di misura (es. 5 passi da elefante e 1 da formica).
(schema del campo di gioco su foglio quadrettato e legenda:
1 quadretto = un passo da formica; 2 quadretti = un passo da leone, 3 quadretti = un passo da elefante).

I passi di Pippo

Competenze: - compiere confronti di grandezze

- stimare misure

Consegna: *Pippo è nel parco con la mamma e sta giocando con i suoi amici, mentre la mamma è seduta sulla panchina.*
Osserva quanto è lungo il passo di Pippo, valuta. Segna con una crocetta quanti passi deve fare per raggiungere la mamma.

5 passi o
10 passi o
14 passi o
20 passi o

Spiega come hai fatto a dare la tua risposta.
(Ad ogni alunno va consegnato il disegno della situazione su foglio non quadrettato, con legenda che riporta la lunghezza di 1 passo di Pippo.)

Bicchieri e caraffa

Competenze: - compiere confronti di grandezze
- stimare misure

Consegna: *Secondo te quanti bicchieri si possono riempire con il latte contenuto in una bottiglia?*

2 bicchieri circa o
15 bicchieri circa o
5 bicchieri circa o
11 bicchieri circa o

Segna con una crocetta la risposta che ritieni corretta.
Spiega come hai fatto a dare la tua risposta.

Il termometro

Competenze: misurare con strumenti elementari
(disegno del termometro che segna 13 gradi)
Guardando il termometro Matteo dice: "Oggi ci sono 12 gradi".
Lucia dice: "Oggi ci sono 13 gradi". Chi ha letto correttamente la temperatura? …………
Chi ha sbagliato può:

o **aver saltato uno spazio**
o **aver contato lo zero come se fosse 1**
o **aver contato uno spazio in più**

Consegna: *Segna con una crocetta la risposta che ritieni possibile.*

Il mese

Competenze: - valutare durate temporali
Pierino parte il primo giorno di agosto per andare a casa della nonna, dive resterà tutto il mese di agosto. Pierino resterà a casa della nonna

o **quattro settimane**
o **poco di più di 4 settimane**
o **meno di 4 settimane**
o **non si può sapere**

Consegna: *segna con una crocetta **X** la risposta che ritieni corretta.*

Monete

Competenze: - individuare la metà di una somma di denaro

Marco ha 26 euro. Suo fratello Gianni ne ha la metà.
Gianni ha

- **12 euro**
- **13 euro**
- **26 euro**
- **20 euro**

Consegna: *segna con una crocetta **X** la risposta che ritieni corretta*.

Macchinine

Competenze: - individuare un terzo di una collezione di oggetti

Marco ha 12 macchinine. Il suo amico Vittorio ne ha un terzo.
Vittorio ha

- **6 macchinine**
- **3 macchinine**
- **4 macchinine**
- **5 macchinine**

Consegna: *Segna con una crocetta **X** la risposta che ritieni corretta*.

Stelle e quadretti

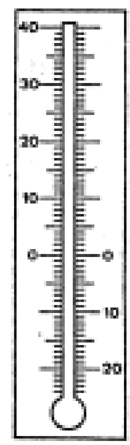
Competenze: - conteggiare una collezione
Consegna: *Conta tutte le ≠ e tutti i ®.*

≠	≠	≠	≠	≠	®	®	®	®	®	®	®	®	®	®
≠	≠	≠	≠	≠	®	®	®	®	®	®	®	®	®	®
≠	≠	≠	≠	≠	®	®	®	®	®	®	®	®	®	®
≠	≠	≠	≠	≠	®	®	®	®	®	®	®	®	®	®
≠	≠	≠	≠	≠	®	®	®	®	®	®	®	®	®	®
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠
®	®	®	®	®	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠	≠

Termometro

Competenze: - riportare una misura data su uno strumento di misura

Consegna: Segna sul termometro la temperatura di 12 gradi.



Termometro

Competenze: - leggere una misura su uno strumento di misura
- scrivere una misura letta

Consegna: scrivi la temperatura che segna il termometro.
Consegnare agli alunni il disegno di un termometro con la colonnina del mercurio che arriva a 21 gradi.

Calendario

Competenze: - orientarsi in un calendario dato
- individuare l'informazione su un calendario
- completare un dato mancante in una sequenza

Consegna: scrivi il nome del giorno 14.

Spiega come hai fatto per capirlo.

sabato	**dome-nica**	**Lunedì**	**martedì**				**sabato**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**

SCUOLA ELEMENTARE

I telai delle finestre

Livello scolare: 3^a-4^a elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Stimare misure in semplici casi, anche attraverso strategie di calcolo mentale e di calcolo approssimato Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misure convenzionali Passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere ed usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza Risolvere problemi di calcolo con le misure	Le principali figure del piano e dello spazio Equivalenza di figure Uguaglianza tra figure Unità di misura di lunghezze Numeri decimali	<u>Misurare</u> Lo spazio e le figure Il numero Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana, Scienze (modalità dei processi tecnologici e produttivi)

Contesto

Progettare e costruire

Le costruzioni in classe offrono occasioni per attività in cui sono coinvolti diversi ambiti disciplinari:

- l'ambito della lingua italiana, per quanto riguarda la produzione e la comprensione di testi che rappresentano la complessità e l'articolazione logica dei processi analizzati;
- l'ambito della matematica, per quanto riguarda i problemi aritmetici dei tipi più diversi, in particolare quelli connessi all'approccio significativo alla misura;
- l'ambito delle scienze per quanto riguarda l'approccio allo studio sistematico dei materiali e dei fenomeni.

Fin dalla classe prima si possono intraprendere costruzioni di diversa complessità ad esempio di giochi come la girandola o l'aquilone, tenendo conto che queste attività si presentano motivanti e attraenti. L'interesse per le varie operazioni e, soprattutto, per il risultato finale esige però un attento orientamento e un'articolazione precisa per evitare che il tutto si trasformi in un puro divertimento o che, come spesso accade, gli alunni non riescano a distinguere le varie operazioni via via compiute. Sarebbe opportuno svolgere un percorso strutturato per quattro/cinque produzioni nel corso dell'anno. Le attività previste sono strettamente integrate tra loro, il percorso che segue mette in evidenza una attività strettamente connessa al misurare.

Descrizione dell'attività

Situazione-problema

Questa proposta didattica nasce dall'esigenza reale della classe di effettuare la proiezione di diapositive mentre l'aula non è dotata di dispositivi che ne permettano l'oscuramento.

La domanda che ci si pone è, quindi: *come fare per oscurare l'aula?*

Situazione didattica di progettazione: prima della discussione in classe, si possono registrare le diverse proposte di un progetto individuale scritto o di un testo collettivo. In questo modo ogni bambino si sente protagonista dell'attività e diviene man mano disponibile a farsi carico dei problemi che via via emergeranno.
Si procede quindi alla discussione collettiva.
La classe propone, aiutata dall'insegnante, la costruzione di telai in legno su cui attaccare del cartoncino nero; i telai, posizionati sulle finestre, permetteranno l'oscuramento dell'aula.
Si tratta di progettare la costruzione dei telai: *quali materiali occorreranno?*
La classe proporrà l'acquisto di listelli di legno e cartoncino.
L'insegnante farà emergere dalla discussione la necessità di lavorare collettivamente ad un progetto per procedere in modo economico all'acquisto del materiale necessario e
predisporrà i seguenti materiali:

- metri a nastro e snodabili;
- righe e squadre di grandi dimensioni;
- pennarelli;
- fogli di carta da pacchi, su cui tracciare il disegno del progetto (scala 1 : 1);
- listello di abete nelle misure standard;
- foglio di cartoncino nero nelle dimensioni standard.

Per la realizzazione del progetto gli alunni, suddivisi in gruppi (uno per ciascuna finestra) dovranno rappresentare su fogli di carta da pacchi incollati insieme, i telai che si intendono realizzare.
Per fare ciò gli alunni dovranno misurare le finestre usando le strategie opportune e riportare le misure così ottenute sulla carta onde ottenerne una rappresentazione in scala 1:1. che mostri i listelli che costituiscono la cornice, evidenziando le giunture angolari, e la superficie da ricoprire con il cartoncino.
Ultimata la realizzazione del disegno l'insegnante dirigerà l'attenzione degli alunni sul fatto che i materiali necessari alla realizzazione del progetto vengono venduti in misure standard (1 – 2 – 4 metri lineari per i listelli di abete di dimensione 50 per 25 millimetri; 70 per 100 centimetri per il cartoncino bristol).
La domanda che ci si pone ora sarà: *quanti listelli e quanto cartoncino sarà necessario acquistare?*
I ragazzi sanno, naturalmente, che debbono utilizzare al meglio i materiali riducendo il più possibile gli sprechi.
Attraverso il confronto tra il disegno e i materiali in formato standard, gli alunni ipotizzeranno quanto materiale sarà necessario acquistare.
L'insegnante curerà che questa fase avvenga attraverso la discussione in gruppo e che ogni alunno espliciti le strategie di calcolo sia pratico che teorico che mette in atto.
La scelta dei listelli risulterà relativamente facile; il calcolo del cartoncino necessario comporterà, invece, maggiore difficoltà.
Due snodi didattici importanti:

- nel progettare i telai gli alunni dovranno scoprire che nel taglio dei listelli le misure lineari rilevate sulle finestre e riportate nel disegno devono essere ridotte in funzione dello spessore dei listelli stessi;
- gli alunni per calcolare quanti fogli di cartoncino saranno necessari utilizzano le misure lineari anche in un contesto di superfici.

Si procederà all'acquisto del materiale necessario e utilizzando seghetto, angolari in ferro, colla, chiodi, martello, forbici, nastro adesivo, puntine si costruiranno i telai progettati.

Evidentemente la fase della costruzione è di per se stessa una verifica finale del lavoro svolto, ma in precedenza verifiche intermedie sono state il confronto tra i risultati raggiunti dai diversi gruppi (uno per finestra) e le discussioni collettive.

L'orologio

Livello scolare: 3ª-4ª elementare

Competenze	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misure convenzionali. Mettere in relazione misure di due grandezze (ad esempio, statura e lunghezza dei piedi).	Numeri decimali, frazioni Simmetrie, traslazioni, rotazioni Gli angoli e la loro ampiezza	<u>Misurare</u> Il numero Lo spazio e le figure Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Scienze Lingua italiana

Contesto
Misura del tempo

Descrizione dell'attività
Prima situazione problema: la posizione delle lancette.

> *"Qui sotto sono rappresentati due orologi che indicano apparentemente la stessa ora ma solo uno dei due funziona correttamente. Quale? Perché?"*

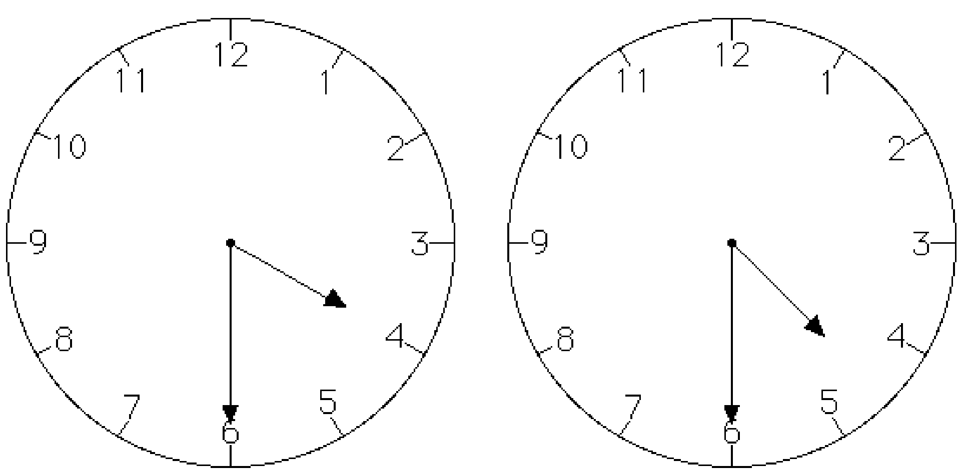


fig.1

Le risposte degli alunni alle domande poste dal problema iniziale, permettono di individuare alcune categorie di risposte e la successiva discussione matematica forza i bambini all'utilizzo di spiegazioni in cui viene messo a fuoco il concetto di angolo partendo dalle relazioni esistenti fra angoli e rotazione delle lancette dell'orologio. Una tipica argomentazione è la seguente:

> *"l'orologio a sinistra è sbagliato perché, se segna le 4 e mezza, la lancetta delle ore dovrebbe essere a metà tra il 4 e il 5"*

oppure:

> *"alle 4 in punto quella corta è sul 4 e quella lunga sul 12, invece per le 4 e mezza, mezz'ora è la metà di un'ora e quindi quella corta deve stare a metà tra il 4 e il 5".*

I ragionamenti sono molto complessi e richiedono un linguaggio molto articolato, ricco di connettivi logici e di subordinate.
Un concetto correlato, che compare nella situazione, è quello di velocità: esso interviene nel momento in cui i bambini provano a giustificare che una lancetta percorre più strada dell'altra nello stesso tempo, ad es.:

> *"Mentre la lancetta dei minuti fa tutto il giro quella delle ore va solo tra il 4 e il 5, quindi va più veloce quella dei minuti perché fa più percorso"*

Dopo la risoluzione individuale e la discussione collettiva, i bambini devono essere invitati a riflettere più volte su ciò che succede nell'orologio, sia partendo dalla situazione del problema sia ampliando il discorso ad altre situazioni osservabili.

Alcuni esempi di domande possono essere:

> "*Osserva la lancetta lunga: dopo quanto tempo ritorna nella posizione di partenza? Nello stesso tempo, di quanto si muove la lancetta corta delle ore? Che cosa succede sull'orologio dalle 4 alle 4 e mezza? Nella mezz'ora successiva la lancetta lunga ruota fino a raggiungere il numero 6. Anche la lancetta corta ruota, ma di quanto? Perché? Come si spostano le lancette sull'orologio col passare del tempo? In un'ora che rotazione compie la lancetta dei minuti? In mezz'ora, 30 minuti, che angolo compie la lancetta dei minuti? E in 15, 20, 10, 5 minuti? E in 1 minuto?"*

Successivamente si possono impostare tabelle di conversione da minuti ad angoli, misurati in parti di giro (in collegamento con lo studio delle frazioni) e da minuti in gradi partendo dall'angolo giro di 360°. Per suddivisioni successive si arriva al minuto che rappresenta la rotazione di 1/60 di giro e quindi di 360° : 60 = 6°

> *"Un angolo di 6° è già molto piccolo, ma come sarà piccolo un angolo di 1 grado?"*

Seconda situazione problema: **costruzione dell'angolo di 1°**
La visualizzazione dell'angolo di 1° è un passaggio molto importante. Il problema della sua costruzione obbliga i bambini ad affrontare un grosso ostacolo epistemologico: quello della comprensione che l'ampiezza dell'angolo non varia al variare della lunghezza dei lati. Gli aspetti figurali e concettuali s'intersecano e creano difficoltà. Ad esempio cogliere l'angolo come figura aperta è molto difficile: i bambini tendono a chiuderla considerando angolo la parte di piano limitata dai due raggi e dall'arco di circonferenza relativo ai due raggi, che nel caso specifico coincide con il contorno dell'orologio.
L'unico modo per superare un ostacolo è affrontarlo: l'insegnante quindi deve organizzare un'esperienza durante la quale i bambini possano sperimentare direttamente che arco e ampiezza angolare sono due cose differenti, anche se collegate tra loro.

Sono sintomatiche le risposte date da alcuni bambini alle domande poste durante una discussione intermedia tra le due esperienze. Alle domande

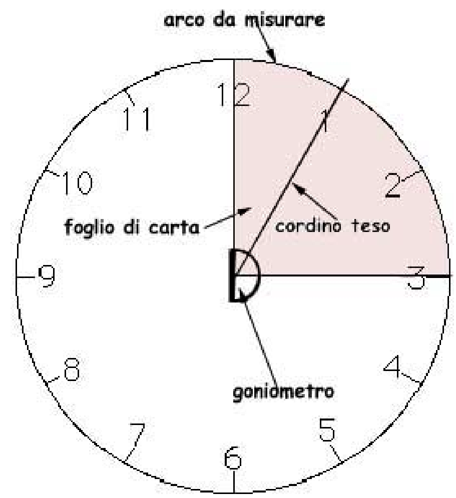
> *"Che cosa è un grado? A che cosa serve?"*

i bambini rispondono inizialmente partendo da idee ancora legate alle situazioni concrete sperimentate, ad es.:

> *"I gradi sono il contorno di un tondo, 360° è tutto il contorno, 180° la metà."*

Oppure:

> *"I gradi sono come la misura di un gir,o perché, per esempi,o c'è il righello che ha 1 cm 2 cm 3 cm, i gradi lo fanno in rotondo, servono per vedere di quanto si apre l'angolo di un triangolo, di un rettangolo"*



Sono significative anche le risposte date alla domanda:

> *"Un grado che forma ha?*
> *"… una riga, … un microscopico pezzo di goniometro, … uno degli spazietti del goniometro, … una fetta piccolissima, … un angolo piccolissimo"*

Accanto ad idee molto rudimentali compaiono già quella di "fetta" e quella di "angolo piccolissimo", su cui bisognerà far leva per giungere ad un'idea condivisa.
Per l'interiorizzazione del concetto di ampiezza angolare, e per superare l'ostacolo cui si accennava prima, il passaggio dal micro al macro è fondamentale. Ecco quindi che può essere d'aiuto passare alla seconda esperienza che prevede la costruzione di un orologio gigante in palestra. Il problema apre anche la strada alla definizione degli elementi fondamentali del cerchio: raggio, circonferenza, arco, diametro.
Per rappresentare le ore si fanno sedere i bambini come se si trovassero sul bordo di un grande orologio, e, per trovare la posizione corretta, i bambini stessi devono misurare ogni volta 30° con il goniometro da lavagna posto al centro del cerchio e tirare un cordino dal centro al bordo tenendolo ben teso. Per facilitare le operazioni di misura e renderle più chiare è bene preparare uno settore circolare di 90°, col raggio di 3 metri, costruito con un grande foglio di carta, in modo da poter segnare con la matita le tacche dei primi tre numeri.
Per giungere alla costruzione dell'angolo di un grado, bisogna usare un metro a nastro (o ancora il cordino). Il metro segue la rotondità dell'arco di cerchio che si trova tra un'ora e l'altra e ne misura quindi la lunghezza in centimetri con una certa precisione: circa 156 cm. Dividendo l'arco per 30, si trova 5,2 cm. Si fa una tacca sul bordo dell'orologio e si unisce con il centro del cerchio: lo "spicchio" rappresenta l'angolo di 1°.
Da questa situazione possono scaturire nuovi problemi da risolvere col ragionamento e alcuni semplici calcoli mentali:

> *"Che cosa cambia se immaginiamo di fare un orologio con il raggio di 6 metri? E di 1 metro? E di 10 metri?"*

Ragionando sulla proporzionalità delle misure coinvolte, i bambini si divertono a prevedere le nuove misure dell'arco e contemporaneamente capiscono che, mentre l'arco cambia sempre la sua misura, l'ampiezza dell'angolo non cambia mai, perché rimane invariata la direzione delle due semirette che lo determinano; esse, infatti, possono essere allungate all'infinito. A questo punto può essere utile l'utilizzo del software di geometria dinamica Cabri, con il quale è possibile verificare che comunque "allunghiamo" i lati dell'angolo o facciamo variare la posizione dell'arco, la misura dell'angolo non cambia.

Strumenti

Spazi: aula e palestra
Occorrente: cordino lungo 3 metri con un gesso da lavagna attaccato in punta, foglio bianco di 3 m X 3 m a forma di quarto di giro, goniometro da lavagna o campione in cartoncino di angolo da 30°, un listello lungo 3 m per tracciare delle linee, un metro a nastro.

Riferimenti
Maria G. Bartolini Bussi, Mara Boni, Franca Ferri, *"Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica"*, Centro Documentazione Educativa, Comune di Modena, 1995.
Donatella Merlo**,** *"Gli angoli in quarta elementare"*, Resoconto di un'attività per il Nucleo di Ricerca Didattica di Torino – A.S. 1996/97 – S. E. Collodi di Pinerolo.

Si può misurare il volume?

Livello scolare: 3ª-4ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Analizzare oggetti e fenomeni individuando in essi grandezze misurabili Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misura convenzionali Stimare misure in semplici casi, anche attraverso strategie di calcolo mentale e di calcolo approssimato Rappresentare graficamente misure di grandezze	Volume di semplici solidi	Misurare Lo spazio e le figure Porsi e risolvere problemi Argomentare e congetturare	Scienze

Il contesto
Il contesto di riferimento è il campo di esperienza della misurazione dello spazio, con competenze relative alle grandezze (volume) e misura.
Il bambino, fin dai primi mesi di vita, tocca, sposta, solleva, ecc. oggetti che trova intorno a sé. Queste attività sono occasioni per esplorare l'ambiente che lo circonda, rilevandone invarianti, proprietà, caratteristiche, al fine di agire nello spazio. Queste occasioni di sperimentare il dentro e il fuori, il vuoto e il pieno, il sopra e sotto, lo spazio occupato da un oggetto, sono in sostanza ciò che induce la conoscenza intuitiva della grandezza-volume sulla quale dovrà basarsi successivamente il concetto scientifico di volume.
Il volume entra nella formazione di molti concetti matematici e fisici importanti, in particolare di concetti legati alle proprietà dello spazio e della materia. Il volume è una grandezza che ha molte caratteristiche che la rendono fondamentale nella formazione dell'allievo, come per esempio: si

conserva (nei solidi e nei liquidi), è misurabile in modo diretto o indiretto, costituisce un oggetto di calcolo a partire da misure di lunghezza e area, …
Vogliamo sottolineare che nell'attività occorre far rilevare che il volume non ha significati o accezioni diverse dal punto di vista fisico o geometrico. Inoltre, occorre chiarire agli allievi che la capacità non è altro che il volume, misurato con diversa unità di misura. A tal proposito, occorre affrontare le misure di capacità e di volume in parallelo. Dunque, è opportuno introdurre il concetto di volume prima di arrivare in quinta elementare.

Descrizione dell'attività
Gli obiettivi di questa attività sono:

- Comprendere che con il termine volume si intende lo spazio occupato da un corpo e passare a misure dirette di volume
- Comprendere che anche i liquidi hanno un volume e che la capacità corrisponde al volume interno del contenitore e passare alla misura diretta di capacità
- Tarare uno strumento di misura
- Utilizzare lo strumento tarato per effettuare misure dirette di volume, al fine di ordinare oggetti in base al loro volume
- Misurare il volume di oggetti in modo indiretto
- Scrivere misure di volume con unità di misura convenzionali (S.I.)
- Comprendere che le unità di misura di capacità sono equivalenti alle unità di misura di volume: 1 litro equivale a 1 dm^3, ecc.

L'insegnante propone la situazione problematica alla classe, lasciando alcuni minuti di tempo per la riflessione singola degli allievi, prima di cominciare una discussione di classe.

Prima situazione-problema
Avete a disposizione una serie di scatole tutte uguali.
Costruite le case di un paese immaginario. Compilate la tabella seguente, colorando le caselle in numero pari a quelle utilizzate per le varie case.

Casa rossa	*stazione*	*scuola*	*piscina*	*bar*	*Casa verde*

I bambini lavorano come gruppo-classe. In seguito, viene avviata una discussione guidata dall'insegnante, al fine di riflettere sull'attività. L'insegnante fa emergere le considerazioni relative allo spazio occupato dalle varie costruzioni, legandolo al numero di scatole utilizzate.
Successivamente, si organizza la classe in gruppi di 4-5 alunni ciascuno, e ad ogni gruppo vengono distribuite 16 scatole tutte uguali per forma e volume.

Seconda situazione-problema
Costruite una torre con 8 scatole, sovrapponendo una scatola all'altra. Con le scatole rimanenti, costruite un muretto, accostando una scatola all'altra.
Confrontate le due costruzioni e rispondete alle seguenti domande:
- *La torre e il muretto occupano una stessa quantità di spazio, hanno cioè lo stesso volume o no?*
- *Perché?*

L'insegnante raccoglie le risposte dei bambini, scrivendole alla lavagna, e avvia una discussione volta a mettere in evidenza l'invarianza spaziale delle due costruzioni.

L'insegnante predispone recipienti trasparenti uguali che, non pieni, siano stati riempiti tutti con la stessa quantità d'acqua e oggetti di volumi diversi (biglie, tappi, sassi, monete, ecc.).

Terza situazione-problema
Avete a disposizione diversi oggetti sul banco e dei recipienti contenenti acqua.
Immergete nell'acqua di ogni recipiente uno degli oggetti. Descrivete cosa succede quando immergete l'oggetto.
L'insegnante discuterà assieme ai ragazzi le loro osservazioni, puntando l'attenzione sull'innalzamento del livello dell'acqua, al cambiare dell'oggetto. I bambini saranno guidati a riflettere sulla quantità di spazio occupata dagli oggetti e sullo spostamento di acqua corrispondente.
Successivamente, l'insegnante guida la discussione in modo da ordinare gli oggetti in base all'innalzamento di acqua, quindi in base al loro volume. Il concetto di volume viene così introdotto, a partire da un contesto esperienziale.
Osservata la potenzialità dello strumento "barattolo con acqua" per valutare il volume degli oggetti, l'insegnante può far scaturire dalla discussione la possibilità di costruirsi uno strumento di misura dei volumi, tarando un recipiente.
L'insegnante suddivide la classe in gruppi e predispone, per ogni gruppo, un barattolo trasparente a forma di cilindro e un recipiente più piccolo, come un bicchierino di palstica. Ogni barattolo ha incollata in verticale una striscia di carta bianca. Tutti i barattoli sono uguali e tutti i recipienti più piccoli sono uguali.

Quarta situazione-problema
Dovete tarare il barattolo, per utilizzarlo nella misura del volume degli oggetti. Proponete una strategia e discutetela nel gruppo. Poi tarate il barattolo.
Successivamente, l'insegnante guida una discussione collettiva con il gruppo-classe, per mettere a confronto le strategie utilizzate dai bambini e le loro tarature. Si perverrà alla conclusione che, per tarare il barattolo, occorre aggiungere acqua con il misurino sempre riempito allo stesso livello, quindi segnare sulla striscia di carta il livello raggiunto con ogni misurino.
A questo punto, tutti i gruppi in classe hanno lo stesso strumento di misura, e si può procedere alla misura di oggetti vari, registrando le misure in una tabella e scrivendole come numero di tacche.

L’insegnante suggerirà ai bambini, se non l’hanno già osservato loro, che, per fare una lettura precisa, occorre mettere gli occhi allo stesso livello dell’acqua, onde evitare errori di parallasse.
La fase successiva è quella di orientare i bambini sulla risoluzione di problematiche apparentemente impossibili, ma risolubili sfruttando la proprietà di additività delle misure di volume. L’insegnante fornisce ai gruppi oggetti articolati in due o più pezzi, staccabili, come per esempio un trattore con carro al seguito. Tali oggetti devono essere scelti in modo che non entrino completamente nel barattolo, ma entrino uno per volta se vengono staccati.

Quinta situazione-problema
E’ possibile misurare con il barattolo tarato il volume di questo oggetto? Fate le vostre ipotesi, discutetele in gruppo, realizzate le strategie che avete scelto.
L’insegnante raccoglie le proposte dei gruppi, discutendole in una discussione collettiva. Porrà particolare cura nella fase finale di istituzionalizzazione, a sottolineare che, per determinare il volume di oggetti composti, è possibile determinare i volumi degli oggetti componenti e sommarli. Contestualmente, farà notare che la misura di una grandezza è soggetta a incertezza di misura, che dipende dalla sensibilità dello strumento. Inoltre, quando si misurano due volumi e li somma, anche le incertezze vanno sommate.

Nodi cruciali:
- Volume come grandezza misurabile
- Strumento di misura per il volume
- Incertezza di misura
- Additività della misura

Riferimenti
AAVV: 1989, Piano Pluriennale di Aggiornamento sui Nuovi Programmi per la Scuola Elementare, Scienze, Dossier, IRRSAE Piemonte, SEI, Torino.

La regina di cuori

Livello scolare: 4ª elementare

Competenze	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**

Analizzare oggetti e fenomeni individuando in essi grandezze misurabili Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misura convenzionali Passare da una misura espressa in una data unità ad un’altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere e usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es, 250 g = _ di kg) Rappresentare graficamente misure di grandezze Risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative)	Equivalenza, ordinamenti	<u>Misurare</u> Il numero Le relazioni Porsi e risolvere problemi	Lingua italiana Educazione all’immagine

Contesto
Fiaba.
L’insegnamento/apprendimento del concetto di “frazione e di numero razionale” comporta molto spesso notevoli difficoltà, anche a livello di scuola superiore ed oltre. Tali difficoltà sono essenzialmente di natura epistemologica, dal momento che si legano alla molteplicità di significati coinvolti nel concetto stesso. I numeri razionali sono infatti utilizzati con diversi significati: frazioni, numeri decimali, classi di equivalenza di frazioni, rapporti, operatori moltiplicativi, elementi di un campo quoziente infinito ordinato, misure. Nella maggior parte delle proposte didattiche a livello di scuola elementare si fa riferimento alla frazione come relazione parte-tutto (operazioni di taglio, di coloritura, di piegatura di fogli, ecc……); ciò è certamente riduttivo rispetto alla complessità del concetto di cui bisognerebbe cogliere l’ampio ventaglio di aspetti, tra cui quello relativo alla frazione come misura di riferimento.
Occorre pertanto creare situazioni di apprendimento che non solo siano fortemente motivanti e contestualizzate, ma che offrano anche l’opportunità ai bambini di costruire i vari significati del concetto. Queste considerazioni generali e metodologiche hanno portato alla formulazione di una proposta didattica costituita da un percorso “fantastico” che consente ai bambini di scoprire le frazioni improprie e le frazioni equivalenti. I protagonisti della fiaba devono risolvere un difficile problema, se vogliono avere “salva la testa!!!”. I bambini, lavorando come se fossero i protagonisti, scoprono che per trovare la soluzione del problema bisogna conoscere le frazioni. Questo è uno degli argomenti per il quale gli insegnanti sono alla continua ricerca di metodologie adeguate da un lato ad assolvere il raggiungimento degli obiettivi dei programmi della scuola elementare, dall’altro per superare la difficoltà a trovare situazioni didattiche motivanti e un linguaggio adatto. L’attività proposta ha l’obiettivo di aiutare gli alunni a costruire i significati legati alla frazione e in particolare quello di “frazioni equivalenti”, separandolo completamente, in questa fase, dalle operazioni di calcolo. La costruzione di frazione e frazione equivalente nella scuola elementare, fondato sull’attività di misura, diventa la base sulla quale costruire successivamente il calcolo con le frazioni. Seguendo questo itinerario ripercorriamo per così dire il cammino che l’uomo ha fatto in campo numerico, infatti, così come i numeri interi nascono come astrazione del processo del contare insiemi finiti di oggetti, così i numeri razionali nascono per rispondere all’esigenza di misurare delle quantità, come lunghezze, aree, ecc.

Faranno da guida all'intero percorso le unità frazionarie e il significato delle parole numeratore e denominatore.
La proposta suggerisce l'introduzione della frazione mediante una situazione problematica fantastica. Tale scelta può aiutare a creare una situazione di apprendimento che tenga conto del soggetto che apprende, delle sue caratteristiche, delle sue paure e che riesca a sostituirle tramite una dinamica costruttiva che lo aiuti a superare gli ostacoli. La fiaba offre l'occasione di costruire situazioni problematiche concrete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo: reale non è in contrapposizione con fantastico ma con astratto, cioè con l'uso di formalismi e definizioni lontani dal bambino.

Descrizione dell'attività
La fiaba è stata scritta utilizzando i personaggi della versione cinematografica del celebre libro di L. Carroll "Alice nel paese delle meraviglie". La situazione problematica fantastica che si propone è di tipo interattivo. La fiaba è interattiva perché è accompagnata da 18 schede operative, appositamente predisposte, che richiedono interventi di coloritura, di costruzione di sagome, di completamento. E' un racconto fantastico in cui i due protagonisti, un falegname e un muratore, riescono a superare una prova, imposta da una regina prepotente e permalosa, grazie ad un mezzo "magico" fornito da un aiutante, l'astronomo-matematico di corte.
Il racconto, introdotto inizialmente dall'immersione in un mondo in cui misurare è un problema perché non ci sono campioni di misura uguali per tutti, viene più volte interrotto attraverso schede che richiedono interventi operativi da parte degli alunni.
Le schede operative, richiedono l'esplicitazione di ciò che di volta in volta si sta facendo, contribuiscono a rendere gli alunni consapevoli delle procedure messe in atto e favoriscono un adeguato controllo/verifica delle proprie esecuzioni.
Le discussioni che sorgono intorno alle varie possibilità di risoluzione delle richieste delle schede, mentre contribuiscono a consolidare la consuetudine alla verbalizzazione in ambito matematico, favoriscono confronti tra gli alunni e collegamenti interdisciplinari.
Il mondo fantastico è così introdotto:
"Nel Paese delle Meraviglie vive la Regina di Cuori. La ricordate? Brutta, grassa e un po'... bassotta, oltre che vanitosa, prepotente e molto ... intonata. Chi può, in tutta sincerità, affermare di non aver mai udito il suo ormai famoso: <<Tagliatele la testaaaaa ...!!>>?. Ella non ha dubbi. Ogniqualvolta si presenta un problema, questa è la soluzione.
Dovete sapere che un tempo la vita a palazzo si svolgeva serena, ed i problemi si risolvevano con giustizia. Il Re e la Regina usavano lo stesso metro di misura per tutti. Metro di misura: le ultime parole famose !!!.
La salita al trono della Regina di Cuori sconvolse l'equilibrio del piccolo regno. Misurare, confrontare, giudicare erano parole il cui significato dipendeva dalla Regina. Tutto ciò che fino ad allora era stato fatto in base a delle scelte uguali per tutti, per quelli alti e per quelli bassi, quelli larghi e quelli stretti, ora non andava più bene. Le sedie, i tavoli, i letti, gli scalini, i davanzali delle finestre, le mensole, gli, specchi, le porte ecc. ecc. tutto era troppo alto o troppo stretto. Tutto era sbagliato.
Questi problemi, in generale, rispetto a quelli della giustizia sono meno importanti, in generale ... Ma provate a chiederlo ai falegnami, ai muratori, alle sarte, ai cuochi, ai giardinieri e a tutti quelli che allora lavoravano a Palazzo.
Ogni errore, lo sapete bene, era punito con il taglio della testa."

Prima situazione problema
Le prime schede impegnano gli alunni in un lavoro individuale sulla sagoma della regina.

La prima richiesta è quella di colorare ogni striscia con un colore diverso:

e poi di cercare le relazione tra l'altezza delle singole strisce e tra ogni striscia e l'intera sagoma.

In base ai risultati ottenuti sapresti dire:

- di quante volte la parte rossa è più alta della parte verde?

- di quante volte la parte rosa è più alta della striscia su cui compare sia il colore viola che quello giallo?

- di quante volte la parte viola è più alta della parte blu?

- di quali sono le parti di uguale altezza? Elencale

Successivamente con un'altra scheda si verifica quanto le relazione parte-tutto siano state interiorizzate dagli alunni, invitandoli a riprodurre in tutte le sue parti la sagoma della regina.

Osservando il disegno della Regina,, che ormai non ha più segreti per te, sapresti dire:

- quante strisce alte 1 quadratino sono necessarie per ottenere l'altezza totale della Regina ?

- quante strisce alte 3 quadratini sono necessarie per ottenere l'altezza totale della Regina?

- è possibile esprimere l'altezza totale della Regina in strisce alte 6 quadratini?

- quante strisce alte 9 quadratini sono necessarie per ottenere l'altezza totale della Regina ?

Adesso prova anche tu a costruire una sagoma della Regina di Cuori. Ti consiglio di utilizzare un foglio di carta con i quadretti alti 1cm e dei fermacampione.

La situazione problematica precedente permette di introdurre l'unità di misura 1/9 e 1/27, che i bambini possono utilizzare successivamente.

Seconda situazione-problema

Il secondo gruppo di schede viene preceduto dalla lettura di un altro brano della fiaba. Il nuovo problema richiede di costruire due finestre adatte alle dimensione della Regina. Gli alunni lavorano in gruppi di 4/5 bambini che si suddividono tra falegnami o muratori. La consegna è uguale per tutti:

Determina le altezze delle finestre e del davanzale richiesti dalla regina di cuori, utilizzando come unità di misura 1/27 (falegnami), oppure 1/9 (muratori).
La prima finestra deve essere alta quanto la regina con il braccio alzato più ancora una volta la lunghezza del braccio;
La seconda finestra deve essere alta quanto la regina con il braccio alzato più tre volte la lunghezza del braccio;
il davanzale deve essere ad una altezza tale che la regina possa appoggiarvi le mani.
Poi realizza le costruzioni.

Gli alunni che interpretano il ruolo del muratore hanno il compito di costruire la finestra utilizzando come unità di misura 1/9 di regina, mentre i falegnami utilizzano come unità di misura 1/27 di regina.

La progettazione e la costruzione di vano (muratori) e telaio (falegnami) di ogni finestra prevede l'uso di uno strumento di misura non convenzionale: i muratori si costruiscono un righello di cartone in cui ogni spazio è 1/9 di regina, i falegnami uno in cui ogni spazio vale 1/27 di regina. I gruppi disegnano e ritagliano, poi insieme verificano, attraverso il perfetto combaciare delle forme, la correttezza delle misure effettuate.

Terza situazione-problema

Le schede successive servono per passare dal campo esperienziale al formalismo matematico, perché chiedono ai bambini di argomentare sull'equivalenza delle frazioni utilizzate.

Confronta le misure usate da falegnami e muratori per costruire finestre che si incastrano
23/9 e 69/27 *4/9 e 12/27*
e fai le tue considerazioni.

I bambini devono arrivare a capire che:
15 volte 1/9, cioè 15/9 equivale a 45 volte 1/27, cioè a 45/27
23 volte 1/9, cioè 23/9 equivale a 69 volte 1/27, cioè 69/27

I continui confronti tra la finestra costruita e la sagoma disegnata aiutano i bambini a percepire il rapporto tra le frazione trovate nella costruzione della finestra e quelle relative alla sagoma della regina.

Elementi di prove di verifica

a) Spiega perchè le seguenti frazioni sono equivalenti:
3/4 = 6/8
1/2 = 6/12

b)1/2 è equivalente a
4/2
4/8
2/2
1/4

c) Descrivi con parole tue come puoi ottenere una frazione equivalente a 1/5

Riferimenti

Virginia Vaccaio, UN MONDO FANTASTICO PER LE FRAZIONI, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.*

La bicicletta

Livello scolare: 4ª - 5 ª elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare oggetti e fenomeni individuando in essi grandezze misurabili Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misura convenzionali Rappresentare graficamente misure di grandezze Risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative) Mettere in relazione misure di due grandezze (ad es. statura e lunghezza dei piedi)	I principali enti geometrici: la circonferenza Rapporto tra grandezze	<u>Misurare</u> Risolvere e porsi problemi Argomentare e congetturare Lo spazio e le figure	Lingua italiana Scienze

Contesto

Ruote e ingranaggi

Il campo di esperienza è costituito da oggetti quotidiani e di gioco, che contengono ruote e ingranaggi, presenti nella esperienza scolastica ed extrascolastica dei bambini. Esso favorisce l'esplorazione dinamica delle situazioni problematiche proposte e la produzione di ipotesi progettuali e interpretative: l'attività su referenti concreti (gli ingranaggi e i meccanismi) introduce la dimensione tattile visiva, che riveste un'importanza particolare nella conquista di strategie esplorative fondamentali per lo sviluppo di abilità di tipo argomentativo.

Descrizione dell'attività

Prima situazione - problema

«Per percorrere 200 metri fa più giri completi una ruota con il raggio di 18 centimetri o una ruota con il raggio di 40 centimetri? Spiega bene il tuo ragionamento.»

Scopo di questo primo problema è indurre gli alunni ad esplicitare, basandosi su concetti quotidiani espressi con un linguaggio comune, il rapporto esistente tra raggio e circonferenza e a porsi il problema di come calcolare la circonferenza conoscendo il raggio.

L'insegnante sceglie tra le soluzioni proposte quella di un bambino che parla in modo esplicito del rapporto fra raggio e circonferenza, ne fa una fotocopia per ciascun alunno e dà una consegna simile alla seguente.

Seconda situazione - problema

«Il testo parla di un rapporto fra raggio e circonferenza: aumentando l'uno, aumenta l'altra e viceversa. Tu pensi che questo rapporto (quante volte il raggio è contenuto nella circonferenza)

cambi a seconda della grandezza del cerchio, oppure sia sempre uguale?»

Segue una discussione fra i bambini suddivisi in due gruppi, in base all'ipotesi contenuta nel precedente testo: un gruppo sostiene che il rapporto è fisso, mentre l'altro che il rapporto varia con il variare della circonferenza.

L'insegnante avvia la discussione dicendo: «Cercate di convincere i vostri compagni con argomenti che facciano loro cambiare idea. Io registrerò alla lavagna gli argomenti favorevoli all'una e all'altra ipotesi.»

Scopo di questa situazione-problema è far nascere l'esigenza di una verifica sperimentale, che i bambini devono progettare.

Terza situazione - problema

«Progetta uno o più modi per verificare l'ipotesi precedente»

Segue una breve discussione per vagliare i metodi proposti e scegliere quali realizzare.

Viene attuata la verifica sperimentale, con richiesta ai bambini di registrare fedelmente, scrivendo sul loro quaderno e utilizzando le rappresentazioni grafiche che ritengono opportune, le attività e le rilevazioni relative a ciascuno dei metodi utilizzati. E' importante che ogni bambino pensi e registri in silenzio le sue osservazioni, perché non ci siano sovrapposizioni di processi mentali diversi.

La riflessione individuale conseguente all'attività svolta ha come consegna:

«Rileggi con attenzione tutto ciò che hai scritto durante la verifica, poi scrivi quale delle due ipotesi si è verificata, spiegando bene il tuo ragionamento e quali conclusioni puoi trarre».

Segue una discussione collettiva per socializzare il fatto che il rapporto tra raggio e circonferenza nella verifica effettuata sembra essere un rapporto costante: «sei volte e un pochino». Qualcuno di solito sostiene che è proprio quel «pochino» a variare, ed effettivamente nelle loro misurazioni poco precise ci sono differenze nella parte decimale.

E' necessario discutere sull'importanza di quel «pochino», per rispondere ad un'esigenza sentita dai ragazzi.

Quarta situazione - problema

«Abbiamo verificato che il rapporto tra raggio e circonferenza è 6 e un pochino, ma quel pochino potrebbe essere variabile o costante. Possiamo far finta che «quel pochino» non ci sia o dobbiamo tenerne conto?

Confronta il tuo testo con le seguenti informazioni, tratte da «PI GRECO: storia e curiosità di un numero affascinante» (http://www.museoinformatica.it/pigreco.htm)

> Secondo il Papiro di Rhind, la documentazione più antica lasciata da uno scriba egizio di nome Ahmes intorno al 1650 a.C., il rapporto della circonferenza al diametro è pari a 3,16049… Il risultato cui era giunto Ahmes non ebbe diffusione; Egizi e Babilonesi ritennero che fosse sufficiente per l'edilizia e per la misura dei terreni usare il valore 3.
> Secoli dopo, intorno al 250 a.C., Archimede scriveva: "La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro, più una parte minore di un settimo del diametro e maggiore di dieci settantunesimi"; facendo una media fra i due valori si ottiene 3,14….

Cerca analogie e differenze tra le notizie sul rapporto tra raggio e circonferenza scritte qui sopra e quelle emerse nella vostra discussione.»

Segue una breve discussione di bilancio e testo collettivo di sintesi su ciò che i bambini hanno imparato in quest'attività.

Elementi di prove di verifica

Alcuni di voi nel risolvere il problema dei 200 m da far percorrere a due ruote di grandezza diversa e quindi con raggio diverso, avrebbero voluto sapere o saper calcolare la circonferenza

delle ruote. Ora tu sapresti aiutare questi tuoi compagni a calcolare la circonferenza conoscendo la lunghezza del raggio?
Si verifica la capacità di risolvere una situazione problematica a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli.

Riferimenti
Idea elaborata nel NRD sezione elementare dell'Università di Genova e dal NRD sezione elementare dell'Università di Modena.

La superficie del Portogallo

Livello scolare: 5ª elementare

Competenze interessate	**Contenuti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misura convenzionali Passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere ed usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es, 250 g = 1/4 di kg) Risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative)	Operazioni tra numeri decimali Scomposizione e ricomposizione di poligoni Equivalenza di figure Unità di misure di lunghezze, aree e volumi Area di semplici poligoni	<u>Misurare</u> Il numero Lo spazio e le figure Risolvere e porsi problemi Argomentare e congetturare	Lingua italiana Geografia

Contesto
Aree di superfici irregolari e regolari.
Lo scopo generale di questa attività è abituare gli allievi a ragionare e a risolvere problemi, utilizzando strategie personali di risoluzione, che vengono gradualmente modificate attraverso il confronto con i metodi usati dai compagni fino a convergere sulla strategia più economica .
Gli obiettivi disciplinari specifici riguardano la maturazione del concetto di area come estensione di superfici piane non riconducibili alle figure geometriche conosciute, rettangolo e triangolo, attraverso il reinvestimento di queste ultime; il consolidamento della padronanza del calcolo delle aree di figure geometriche conosciute.

Descrizione dell'attività
L'attività comprende alcune situazioni didattiche in cui l'insegnante chiede agli allievi di calcolare ogni volta, in modo approssimato, procedendo per ipotesi euristiche, la superficie di una zona

geografica definita, riportata su scheda, e di confrontare successivamente sia il risultato ottenuto con il dato reale, rilevando la percentuale di errore, sia la propria strategia risolutiva con quelle dei compagni per valutarne l'adeguatezza in termini di precisione ed economia.
Per procedere al calcolo delle superfici irregolari, è necessario che gli allievi abbiano svolto in precedenza attività riguardanti:

- il significato di perimetro e area;
- il calcolo della superficie di quadrato, rettangolo, triangolo;
- la moltiplicazioni con i decimali;
- il significato di riduzione in scala.

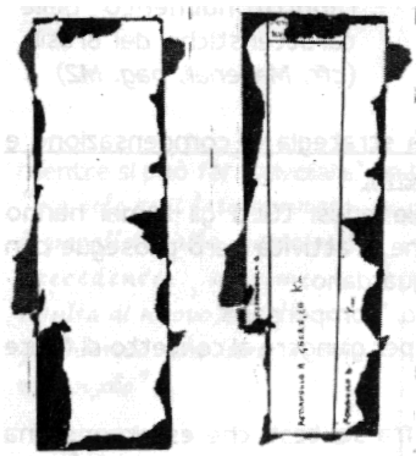
Prima situazione-problema:
Inizialmente l'insegnante dà ad ogni alunno la fotocopia della cartina di una zona geografica (Stato o Regione europea per non incorrere in errori dovuti al tipo di proiezioni usate per la costruzione delle nostre cartine) di forma abbastanza regolare, ad esempio il Portogallo, con la seguente consegna:
«Determina la superficie del Portogallo basandoti sulla cartina fotocopiata. Ricordati di:

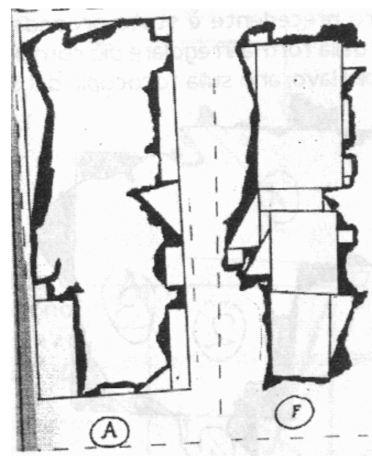
- *considerare prima di tutto la scala,*
- *avvicinarti il più possibile alla superficie reale, utilizzando le figure geometriche che conosci;*
- *curare la precisione del disegno, delle misure e dei calcoli.*

Spiega bene come ragioni.
Infine confronta il risultato ottenuto con la misura della superficie riportata sull'atlante e scrivi un tuo commento».
L'insegnante può permettere l'uso della calcolatrice, perché in questo contesto ciò che interessa è il processo di risoluzione e l'esplicitazione chiara dei ragionamenti che lo determinano.

Quando tutti i ragazzi hanno determinato la superficie del Portogallo, viene loro proposto un confronto fra le strategie attuate in classe (una per tipo).
L'insegnante consegna a ciascun alunno la fotocopia delle strategie risolutive prodotte e i relativi disegni, senza abbinarli. In questo modo ogni alunno è obbligato a costruirsi, partendo da ciascuno dei testi, una mappa mentale da confrontare con le diverse rappresentazioni grafiche; ciò consente di comprendere a fondo le diverse strategie e di riconoscere in una di esse analogie con la propria.
Alla fine di quest'attività individuale è opportuna una riflessione collettiva che, attraverso l'analisi di vantaggi e svantaggi di ciascuna strategia, permetta di costruire delle generalizzazioni riguardanti le modalità operative di esecuzione.
Solitamente nelle classi si producono i seguenti tipi di strategia:

- disegno di un'unica figura geometrica che comprende tutto lo Stato;
- disegno di più figure geometriche che complessivamente contengono tutto lo Stato;
- disegno di una figura cornice, che comprende tutto lo Stato, da cui successivamente vengono sottratte aree di figure geometriche che includono spazi esterni al territorio di quello Stato;
- disegno di molte figure geometriche nel tentativo di ricoprire il più possibile la superficie dello Stato;
- disegno di più figure geometriche in cui viene attuata una compensazione tra la superficie dello Stato esclusa e la superficie non appartenente allo Stato inclusa nelle figure;
- disegno di un'unica figura in cui viene attuata la compensazione tra parti escluse e parti incluse.





Altro aspetto di quest’attività su cui è necessario riflettere è l’uso della scala di riduzione, che solitamente viene usata nella classe in due modi diversi:
- alcuni ragazzi trasformano le misure lineari rilevate sulla cartina in misure reali, prima di calcolare l’area, e ciò permette loro di ottenere una buona approssimazione alla superficie reale riportata sull’atlante;
- altri calcolano l’area della cartina, poi usano la scala sull’area, perciò fanno il calcolo sulle misure al quadrato come se si trattasse di misure lineari, incorrendo in errori molto «grandi».

E’ ovvio che il nodo concettuale sotteso a quest’attività non può essere affrontato nella scuola elementare, però in questa situazione è possibile un primo approccio favorito dal contesto, in quanto il confronto fra il risultato ottenuto e il dato corretto, rende evidente che l’errore rilevante è nell’ordine di grandezza del numero ottenuto. Per questo motivo i ragazzi scoprono prima che dividendo un’altra volta per la scala, il loro risultato diventa accettabile, poi ne cercano la giustificazione: *«Io sto usando il quadrato! Lato per lato! Allora devo dividerli tutti e due!»*

L’attività successiva è la determinazione dell’area di uno Stato di forma irregolare più complessa, come ad esempio l’Austria, in cui i ragazzi possono reinvestire le conoscenze acquisite.

Seconda situazione-problema:

«Determina la superficie dell’Austria basandoti sulla cartina fotocopiata. Ricordati di:

- *considerare prima di tutto la scala,*
- *avvicinarti il più possibile alla superficie reale, utilizzando le figure geometriche che conosci;*
- *curare la precisione del disegno, delle misure e dei calcoli.*

Spiega bene come ragioni.

Infine confronta il risultato ottenuto con la misura della superficie riportata sull’atlante e scrivi un tuo commento».

Di solito tutti o quasi tutti gli allievi adottano la strategia della compensazione, che si è rivelata nell’attività precedente quella più economica e con un margine di errore più basso. Alla fine del lavoro individuale è perciò opportuno approfondire il significato della strategia di compensazione per conquistare il concetto di figure equivalenti.

A questo scopo l’insegnante propone il confronto fra tre testi che esprimono una strategia di compensazione, con la consegna di sottolineare le parole che la esprimono, e di riflettere su essi, per scoprire quelli che solo in apparenza esprimono tale modalità (ci sono sempre alcuni bambini che pensano di compensare lasciando fuori «un po’ di terra» oppure includendo «un po’ di mare»).

Questa volta l’insegnante può consegnare solo le verbalizzazioni delle strategie e chiedere agli allievi di rappresentarne con schizzi ciascuna, per ottenere una precisa comprensione del pensiero espresso nei testi.
Emerge così il significato geometrico di «compensare», come ricerca di un equilibrio, un’equivalenza tra le «zone lasciate fuori» e «quelle prese dentro».

L’insegnante poi espone in classe tre cartine ricoperte dalle figure geometriche scelte dagli autori per compensare e apre una discussione in cui l’attenzione viene portata su «COME» i tre compagni hanno compensato, per giungere a capire che è più economico utilizzare una o poche figure geometriche e che spesso è più funzionale il triangolo del rettangolo, perché è una figura più elastica e scompone tutte le figure.
La determinazione della superficie di un’altra zona geografica complessa permette agli alunni di sperimentare la strategia costruita insieme nelle attività precedenti e di istituzionalizzare poi, in un testo collettivo, il significato di ciò che cercano di ottenere attraverso la compensazione, cioè l’equivalenza fra figure.

Terza situazione-problema:
Utilizza una strategia diversa da quelle che hai utilizzato finora per determinare la superficie di un’area geografica a tua scelta, poi confronta le due strategie evidenziando i vantaggi di una rispetto all’altra.

La scioltezza acquisita nella gestione delle superfici di zone geografiche e l’assimilazione profonda del significato dell’area e delle sue proprietà (in particolare quella additiva), possono essere reinvestite per il lavoro teorico sulle figure geometriche tradizionali (trapezio, rombo, parallelogramma…), per ciascuna delle quali i ragazzi stessi possono arrivare a costruirsi la formula.

Elementidi prove di verifica

Servendoti della cartina d’Italia riportata sulla scheda, scopri quale regione può essere inclusa secondo la regola della compensazione nel rettangolo (o triangolo) tracciato sulla carta da lucido.
Potresti scoprire la scala di riduzione di questa cartina? Se sì, di quali dati avresti bisogno e come li utilizzeresti?
Spiega bene il tuo ragionamento.

I chicchi di riso

Livello scolare: 5ª elementare

Competenze	Contenuti	Nuclei	Collegamenti esterni
Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misure convenzionali Passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere e usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es. 250 g = _ di kg) Stimare misure in semplici casi, anche attraverso strategie di calcolo mentale e col calcolo approssimato	Relazioni e loro rappresentazioni (tabelle, frecce, piano cartesiano) Moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali	<u>Misurare</u> Le relazioni Argomentare congetturare Il numero Risolvere e porsi problemi	Scienze Lingua italiana Storia Geografia Studi sociali

Contesto
Mondo fantastico

Descrizione dell'attività

- L'attività prende lo spunto da un'antica novella indiana[3]: un bramino, dopo aver fatto dono del gioco degli scacchi al suo re, chiede in cambio tanto riso quanto basta per:

" *… mettere 1 chicco sulla prima casella, 2 chicchi sulla seconda, 4 sulla terza, 8 sulla quarta, … e così via, fino alla 64° casella …".*

Il problema può essere posto in questi termini:

" *Può bastare 1 kg di riso per accontentare il bramino[4]? Fate le vostre previsioni."*

Per verificare le previsioni è necessario sapere, prima di tutto, quanti chicchi di riso sono necessari per accontentare il bramino. Quindi occorre conteggiare il numero dei chicchi di riso corrispondenti ad ognuna delle 64 caselle e poi sommare i chicchi di tutte le caselle.
Una rappresentazione delle prime caselle della scacchiera può servire per introdurre la notazione esponenziale al posto delle moltiplicazioni con fattori tutti uguali.

1	2x1 = 2	2x2 = 2^2	2x2x2 = 2^3	2x2x2x2 = 2^4

Il calcolo dei chicchi corrispondenti ad ogni casella, consente di scoprire come le potenze facciano "ingrandire" i numeri. Il conteggio, piuttosto lungo, può essere, almeno all'inizio, supportato dall'uso della calcolatrice tascabile, ma ben presto ci si dovrà accorgere che la memoria limitata non consente di andare oltre un certo numero di cifre. Ecco dunque un'altra scoperta: la mente è in grado di superare la calcolatrice!
Oltre ad effettuare tutto il calcolo raddoppiando per 63 volte il numero dei chicchi, si può procedere per approssimazione utilizzando le potenze del dieci, sicuramente più familiari ai bambini:

potenze del 2	*corrisponde all'incirca a*	*potenze del 10*

[3] La novella è riportata dal libro: *L'uomo che sapeva contare*, di Malba Tahan, ed. SALANI. Nella storia originale si parla di grano, è preferibile però sostituirlo con il riso per la più facile reperibilità.
[4] È necessario avere materialmente a disposizione un pacchetto contente 1 kg di riso.

2 alla decima	Ë	10 alla terza	=	mille
2 alla ventesima	Ë	10 alla sesta	=	1 milione
2 alla trentesima	Ë	10 alla nona	=	1 miliardo
2 alla quarantesima	Ë	10 alla dodicesima	=	mille miliardi
2 alla cinquantesima	Ë	10 alla quindicesima	=	1 milione di miliardi
2 alla sessantesima	Ë	10 alla diciottesima	=	1 miliardo di miliardi
2 alla sessantunesima	Ë	(10 alla diciottesima) x 2	=	2 miliardi di miliardi
2 alla sessantaduesima	Ë	(10 alla diciottesima) x 4	=	4 miliardi di miliardi
2 alla sessantatreesima	Ë	(10 alla diciottesima) x 8	=	8 miliardi di miliardi

Occorre però far osservare che l'approssimazione produce errori. All'inizio del conteggio l'errore è poco significativo (solo 24 chicchi), ma poi, quando l'errore si aggiunge all'errore precedente, lo scarto diventa sempre più "grande": alla 64° casella la differenza tra la quantità esatta e quella approssimata è di circa 1 miliardo di miliardi di chicchi.
A questo punto si possono invitare gli alunni a ricercare una "regola" che consenta di sommare velocemente tutti i chicchi di riso. Per facilitare il problema si può suggerire di immaginare una scacchiera più piccola, ad esempio di 8 o 9 caselle. Si arriverà così a stabilire che la somma di tutti i chicchi di riso equivale al doppio dei chicchi dell'ultima casella meno 1 (circa 18 miliardi di miliardi di chicchi).

- Per verificare se il chilogrammo di riso è sufficiente ad accontentare il bramino, oltre ad aver calcolato il numero dei chicchi è necessario conoscere il peso di un chicco di riso. Ecco dunque il nuovo problema da porre:

  "Come si fa a pesare un chicco di riso?"

Per trovare una risposta, gli alunni dovranno prendere in considerazione due aspetti importanti:

- nella scuola non c'è sicuramente a disposizione uno strumento in grado di pesare un solo chicco di riso, quindi il peso di un chicco può essere calcolato solo in modo indiretto;
- i chicchi di riso contenuti in una confezione sono tutti diversi, dunque anche il loro peso è diverso, quindi la misura da determinare deve necessariamente corrispondere al peso medio dei chicchi contenuti nella confezione.

A questo punto è possibile valutare le strategie più efficaci per stabilire il peso di un chicco di riso (ad esempio: fare diversi mucchietti composti da 100/200 chicchi, pesarli e calcolare la media delle pesate; oppure: contare quanti chicchi corrispondono ad un certo peso, ad esempio 5/10 g, compiere diverse pesate e calcolare il numero medio di chicchi di ogni gruppetto; oppure ….), infine effettuare materialmente la misura con gli strumenti a disposizione.

- A questo punto è ormai dimostrato che il chilogrammo di riso ipotizzato all'inizio è assolutamente insufficiente, allora ci si può chiedere:

  "Quanto pesa tutto il riso necessario ad accontentare il bramino? A quale parte dell'intera produzione mondiale corrisponde?"

E ancora:

  "Quanto dovrebbe essere lungo un treno capace di trasportare tutto quel riso?"

Poniamo il caso che 10 g corrispondano a 400 chicchi di riso e che un vagone lungo 24 m abbia una portata di 25 t[5], i conteggi possono essere registrati su una tabella di questo tipo:

Peso	*chicchi*	*lunghezza del treno*
1 dg	4	
1 g	40	
1dag	400	
1 kg	40 000	
1 t	40 000 000	
25 t	1 miliardo	24 m
25 000 t	1 000 miliardi	24 km
25 milioni t	1 milione di miliardi	24 000 km
25 miliardi t	1 miliardo di miliardi	24 milioni di km
450 miliardi t	18 miliardi di miliardi	432 milioni di km

La ricchezza della situazione proposta consiste nel fatto che si parte da un piccolo chicco di riso per giungere a dimensioni … astronomiche. Saranno i bambini stessi a proporre innumerevoli confronti (e quindi nuovi problemi) tra la lunghezza del treno e la lunghezza dell'equatore, oppure la distanza tra la Terra e la Luna, la Terra e il Sole, la Terra e gli altri pianeti del Sistema Solare.

Riferimenti

Cometto Attilia**,** *"La scacchiera del Califfo"*, Resoconto di un'attività per il Nucleo di Ricerca Didattica di Torino.

Elementi di prove di verifica

Livello scolare 3ª-4 ª-5 ª elementare

Le piastrelle

Livello scolare: Terzo, quarto anno di scuola elementare

Dobbiamo piastrellare un'aula di forma rettangolare che misura 4 metri di lunghezza e 3 metri di larghezza con piastrelle di forma quadrata il cui lato misura 25 centimetri.
Quante piastrelle utilizzerò?

Competenze interessate:

- Risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative)
- Passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere e usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es, 250 g = _ di kg)

Snodo didattico: Si opera con misure di lunghezza in un contesto che è quello tipico delle misure di superficie

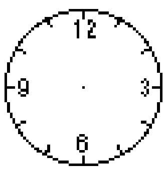
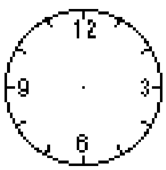
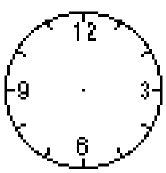
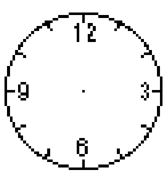
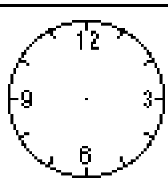
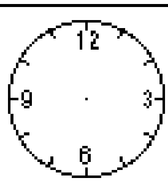
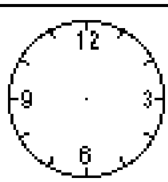
Orologio

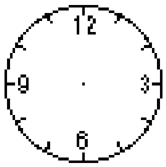
Livello scolare: 4ª elementare

[5] Quelli proposti sono dati indicativi: per avere dati precisi e corretti è bene chiedere informazioni alle Ferrovie dello Stato.

Competenze: Usare in maniera operativa, in contesti diversi, il concetto di angolo. Mettere in relazione misure di due grandezze. Esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali

Disegna le lancette al posto giusto nell'orologio. Completa la tabella scrivendo la frazione di giro percorsa dalla lancetta dei minuti e calcolando il valore in gradi dell'angolo.

OROLOGIO	MINUTI	GIRI della lancetta dei minuti	CALCOLO	GRADI
	60'	1	-----------	360°
	30'			
	20'			
	15'			
	10'			
	5'			
	25'			

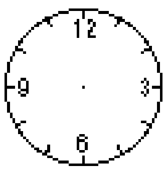
	40’			

Il tempo

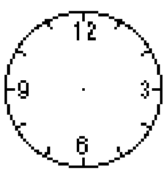
Livello scolare: 4^a elementare
Competenze: Usare in maniera operativa, in contesti diversi, il concetto di angolo. Mettere in relazione misure di due grandezze. Effettuare misure dirette e indirette di grandezze ed esprimerle secondo unità di misure convenzionali.

Rispondi alle domande dopo aver disegnato la lancetta sull’orologio. Poi disegna gli stessi angoli usando il goniometro.

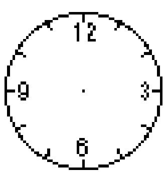
Di quanti gradi ruota la lancetta dei minuti se si sposta:



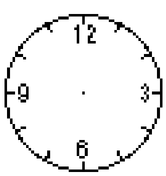
da 1 a 3 ....



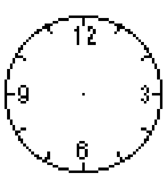
da 7 a 11 ....



da 4 a 10 ....



da 2 a 7 ....



da 8 a 9 ....

L’età

Livello scolare: 5^a elementare

Competenze: Passare da una misura espressa in una data unità ad un’altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere e usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es, 250 g = _ di kg); risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative).

Se qualcuno ti chiede quanti anni hai sai rispondere facilmente.
Quali calcoli devi fare per sapere quanti secondi hai?

La nonna

Livello scolare: 5ª elementare
Competenze: Passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo; riconoscere e usare espressioni equivalenti delle misure di una stessa grandezza (ad es, 250 g = _ di kg); risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative).Mettere in relazione misure di due grandezze (ad es. statura e lunghezza dei piedi).

Indica con una crocetta la risposta che ritieni corretta, poi spiega come hai calcolato.
Mario e Piero vanno trovare la nonna che abita a 60 km da casa loro.
Mario usa la bicicletta e Piero il motorino.
Il motorino viaggia a 45 km all'ora e la sua velocità è tripla rispetto alla bicicletta.
Quanto tempo impiega Piero per arrivare dalla nonna con il motorino?

q 2 ore

q 1 ora e mezza

q 1 ora e 20 minuti

q 1 ora

Perché? ….

Quanto tempo impiega Mario per arrivare dalla nonna in bicicletta?

- 4 ore
- 3 ore
- 1 ora
- 1 ora e mezza

Perché? …..

La medicina

Livello scolare: 5ª elementare
Competenze: Risolvere problemi di calcolo con le misure (scelta delle grandezze da misurare, unità di misura, strategie operative).
Indica con una crocetta la risposta che ritieni corretta, poi spiega come hai calcolato.
20 gocce di una certa medicina corrispondono a 1 ml.
Quanti millilitri misura una goccia?

- q 20 ml
- q 0,05 ml
- q 0,1 ml

- q 0,2 ml

Perché? …

La torta

Livello scolare: 5ª elementare
Nel ricopiare la ricetta per 6 persone della torta al cioccolato, la mamma ha sbagliato la misura di tre ingredienti.
Trova i tre ingredienti e circondali di rosso.

Farina	5	g
Zucchero	2	hg
Cioccolato	2,5	hg
Uova	25	n°
Burro	2	hg
Latte	1	hl

<u>Competenze interessate:</u>

- Stimare misure in semplici casi, anche attraverso strategie di calcolo mentale e di calcolo approssimato

SCUOLA MEDIA

Buon appetito!

Livello scolare: 1ª media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre, agli errori	Operazioni con i numeri interi Rapporti, percentuali e proporzioni Calcolo approssimato ed errore Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a….)	<u>Misurare</u> Numero Le relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Scienze Educazione tecnica

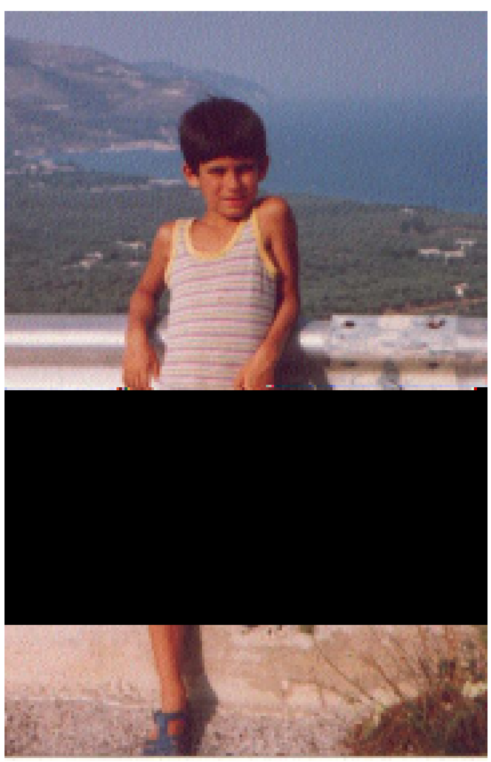
Contesto
Questa proposta didattica si colloca nel 1° quadrimestre della prima. L'Attività può scaturire dall'idea di realizzare una festa a conclusione dell'anno scolastico e si può collegare a riflessioni relative alla educazione alimentare.
I prerequisiti richiesti sono le conoscenze elementari relative alla misura delle lunghezze.

Descrizione dell'attività didattica
L'attività ha lo scopo di migliorare la capacità degli alunni di cercare soluzioni operative, procedurali e di calcolo, consolidando le competenze nell'uso di strumenti e nell'elaborazione di dati ricavati da osservazioni e misurazioni. L'esperienza del misurare, inoltre, collegata all'attività della stima, dell'approssimazione e della conversione tra misure, potenzia negli allievi la percezione delle grandezze peso e capacità.

FASI DELL'ATTIVITA' DIDATTICA	INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE
Fase 1: Prima situazione problema Si propone agli alunni di effettuare una ricerca di ricette appartenenti alla tradizione familiare personale degli alunni o ad essi particolarmente gradite.	L'attività può essere svolta per gruppi di lavoro: ciascun alunno fornisce una ricetta al gruppo. Il gruppo ne discute e opera delle scelte.
Fase2: Seconda situazione problema *"A quale quantità corrispondono le espressioni: "una tazza", "un cucchiaio da tè", "forno medio o caldo", "1 cucchiaio da tavola" ……."*	Il linguaggio usato con particolare riguardo alle quantità può essere fonte di conversazioni e può avviare ad una prima analisi di unità di misura non convenzionali o della necessità di convertire tra loro sistemi per misurare e unità.
Fase3: esperienze di misurazione con contenitori graduati e bilance o di calcolo, per costruire tabelle di conversione del tipo: 1 cucchiaio da tavola = circa 16 ml 1 tazzina da caffè = circa 35 g Forno medio = 180° …………… ……………	L'attività si svolge in laboratorio scientifico perché richiede l'uso di contenitori graduati e bilance. E utile fare in modo che i ragazzi possano sperimentare, misurare e confrontare tra loro procedimenti di misurazione diversi. L'esperienza può essere organizzata in piccoli gruppi e deve essere seguita da momenti di confronto e di scambio fra i vari gruppi.
Fase 4: esecuzione di alcune ricette e… organizzazione della festa.	Laboratorio di cucina

La foto

Livello scolare: 2ª media



Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre, agli errori Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti	Grandezze direttamente e inversamente proporzionali Rapporto tra grandezze Omotetie, similitudini	<u>Misurare</u> Lo spazio e le figure Le relazioni Porsi e risolvere problemi Argomentare e congetturare	Educazione tecnica, Geografia

Il contesto
Il contesto di riferimento è il campo di esperienza della rappresentazione dello spazio, con competenze relative alla misura di grandezze collocate nello spazio.

Descrizione dell'attività
L'attività si propone di offrire agli allievi l'opportunità di utilizzare il concetto di rapporto nella soluzione di un problema concreto.
L'insegnante propone alla classe una situazione problematica, lasciando alcuni minuti di tempo per la riflessione individuale degli allievi, prima di cominciare la discussione di classe.

Prima situazione-problema
Luca guardando una sua vecchia foto di quando aveva 5 anni dice a Piero: " Guarda come ero piccolo! Quanto sono cresciuto in questi anni!"
Piero: "Sarebbe carino sapere quanto sei cresciuto."
Luca:" Ma come si fa, non so quanto ero alto quando avevo cinque anni. E nemmeno la mamma se lo ricorda."
L'insegnante: *"Come potete fare per aiutare Luca e Piero a determinare la statura di Luca quando aveva cinque anni e di quanto è cresciuto da allora a oggi?"*

L'insegnante avvia la discussione, invitando gli alunni a formulare ipotesi sulla strategia da adottare per risolvere il problema.
Gli alunni faranno vari tipi di proposte, alcune delle quali di tipo affettivo e qualitativo (ad esempio, basarsi sui ricordi di Luca o di membri della sua famiglia), altre di tipo quantitativo che implicano l'utilizzazione di modelli lineari applicati a varie grandezze, quali il tempo, la statura ecc.
Ad esempio, Gabriele potrebbe proporre: "Misuriamo l'altezza di Luca, la dividiamo per il numero dei suoi anni e moltiplichiamo per 5."
L'insegnante raccoglie tutte le proposte sulla lavagna o su un cartellone (senza esprimere alcuna valutazione) e fa discutere gli allievi, guidandoli a rilevare che le strategie adatte a risolvere il problema devono essere di tipo quantitativo.

Si prova a questo punto a verificare l'adeguatezza delle proposta, ad esempio, di Gabriele, con calcoli opportuni: se l'altezza di Luca oggi è di 140 cm, dividiamo per 12 (anni di Luca) e moltiplichiamo per 5; otteniamo 58 cm, ma questa non può certo essere la statura di una bambino di 5 anni.
L'insegnante, utilizzando ad esempio una domanda-stimolo del tipo: "Di quali dati hanno bisogno Piero e Luca per risolvere il problema?", induce sia la riflessione individuale che la discussione di gruppo.
Gli alunni faranno anche questa volta diverse proposte:

- usiamo la statura della mamma di Luca come confronto;
- utilizziamo l'altezza di un oggetto presente;
- ……

Si raccolgono nuovamente le proposte alla lavagna e, discutendo, si potrebbe giungere a scegliere di utilizzare l'altezza di un oggetto contenuto nella foto che deve però essere disponibile per la misura ancora oggi.
Dalla discussione emerge il fatto che l'oggetto nella foto deve avere le seguenti caratteristiche:

- essere in posizione verticale;
- essere allineato di fianco ad Luca.

Si passa così a definire meglio la strategia di risoluzione. Gli allievi discutono insieme e propongono di misurare l'altezza dell'oggetto sia nella foto che nella realtà, trovando così il fattore di scala della foto.
Tale fattore di scala, moltiplicato per l'altezza di Luca nella foto, ci dirà quanto era alta Luca all'età di cinque anni.
L'attività potrebbe continuare chiedendo agli allievi di portare una foto di quando erano piccoli, con le caratteristiche opportune, in modo che ognuno possa calcolare quanto era alto.

Nodi cruciali:

- Rapporto tra realtà e rappresentazione
- La grandezza da misurare non ha un andamento lineare nel tempo
- Il tempo in questa attività non è una variabile quantitativa pertinente.

Strumenti:

- Foto
- Righello
- Metro

Progettiamo lo spazio intorno a noi

Livello scolare: 2ª media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre, agli errori Rappresentare graficamente misure di grandezze per individuare regolarità, andamenti, relazioni Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli	Operazioni con i numeri interi Rapporti, percentuali e proporzioni Calcolo approssimato ed errore Rappresentazione piana di figure solide Rapporto tra grandezze Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a, …)	<u>Misurare</u> Numero Lo spazio e le figure Le relazioni Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	Educazione tecnica

Contesto

Questa proposta didattica si colloca nel 1° quadrimestre della seconda media. I prerequisiti richiesti sono le conoscenze di base relative alle figure geometriche piane e alla misura delle lunghezze. Il contesto di riferimento è il campo di esperienza del “Progettare e costruire”.

Descrizione dell’attività

L’attività ha la finalità di migliorare la capacità di formulare ipotesi e di cercare soluzioni operative, procedurali e di calcolo, consolidando le competenze nell’uso di strumenti, nel calcolo e nell’approssimazione di dati ricavati da osservazioni e misurazioni. L’esperienza del misurare, inoltre, collegata all’attività della stima e dell’approssimazione, potenzia negli allievi la percezione della grandezze: lunghezza e superficie.

La metodologia di tipo cooperativo (lavoro in piccoli gruppi), favorisce l’attività di argomentazione di tutte le esperienze e le procedure usate. Nelle varie fasi di lavoro ai momenti di produzione individuale segue il confronto e la relazione critica del percorso. Domande come “Perché avete scelto tale procedura?” “Perché avete fatto questa scelta?” costituiscono l’innesco al meccanismo di analisi e migliorano la consapevolezza delle procedure seguite.

FASI	*INDICAZIONI METODOLOGICO-OPERATIVE*
Fase 1: ***Prima situazione problematica*** *"Abbiamo spesso notato che la nostra aula è poco adatta allo svolgimento di alcune attività. Proviamo allora a progettare un aula più rispondente alle nostre esigenze."*	Il problema scaturisce da una conversazione di classe sulla necessità di organizzare lo spazio dell'aula scolastica in modo da renderlo funzionale allo svolgimento delle attività didattiche.
Fase 2: formulazione di ipotesi mediante disegni approssimativi. Analisi e confronto di prodotti sotto forma di bozze.	L'attività può essere svolta per gruppi di lavoro: ciascun alunno produce una bozza della pianta dell'aula, la propone al proprio gruppo, per giungere ad una proposta condivisa.
Fase 3: socializzazione delle proposte dei gruppi; discussione sulle procedure possibili per realizzare il progetto (uso di fogli quadrettati o carta millimetrata, scale di riduzione, strumenti e modalità per misurare).	Le forma, la dimensione, la disposizione degli arredi può avviare una prima analisi circa l'organizzazione dello spazio in base a specifiche esigenze.
Fase 4: ***Seconda situazione problematica*** *"Organizziamo ora l'attività di laboratorio per la realizzazione dei vostri progetti."*	La conversazione all'interno dei gruppi ha il fine di prendere decisioni in merito all'individuazione delle grandezze da misurare, alla scelta degli strumenti di misura e alla ricerca delle procedure di riduzione in scala delle grandezze misurate (dimensioni del pavimento, delle pareti, dei vari arredi ecc.)
Fase 5: Realizzazione dei progetti dei vari gruppi. Gli alunni utilizzano strumenti per misurare le lunghezze di vario tipo, fogli di carta millimetrata, calcolatore tascabile, strumenti per il disegno.	Essa è fonte di esperienze su errori di misura, arrotondamenti e approssimazioni, calcolo di aree, equivalenze nel piano. I ragazzi inoltre analizzano e confrontano tra loro procedimenti di misurazione diversi. Ciascuna esperienza deve essere seguita da momenti di confronto e di scambio fra i vari gruppi.
Possibili sviluppi: • Progettazione di altri spazi (la mia stanza; il mio giardino; la mia casa, la palestra della scuola…….) • Previsione di spesa, ad esempio, per i materiali della pavimentazione o di rivestimento delle pareti…..	

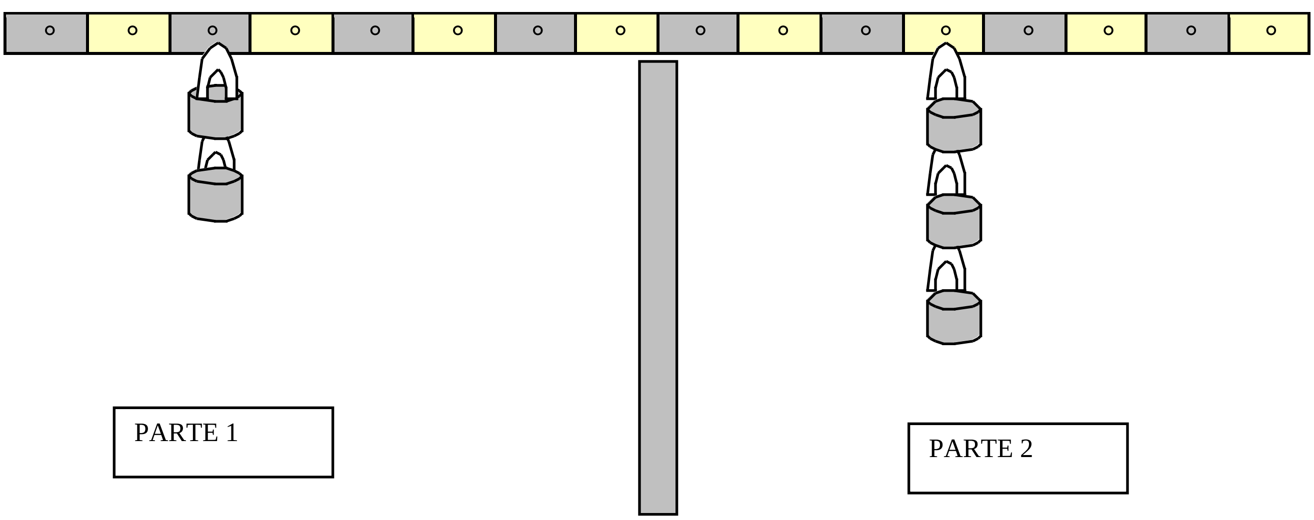
Mettiamo in equilibrio

Livello scolare: 2ª media

Competenze	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto Rappresentare graficamente misure di grandezze per individuare regolarità, andamenti, relazioni Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli	Grandezze direttamente e inversamente proporzionali Funzioni: tabulazioni e grafici Funzioni del tipo y=a/x e loro rappresentazione grafica Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche. La leva di primo genere	Misurare Le relazioni Porsi e risolvere problemi Argomentare e congetturare	Fisica

Il contesto

Questa proposta didattica si colloca alla fine del secondo quadrimestre del settimo anno della scuola di base (seconda media). E' necessario che i ragazzi, in una fase preliminare abbiano acquisito alcune conoscenze relative alla proporzionalità diretta e inversa e alla costruzione dei grafici. Il contesto di riferimento è il campo di esperienza delle "macchine" con competenze relative alla forma collegata alla funzione e alla relazione tra numeri. L'insegnante coordina e guida le discussioni che portano gli alunni allo sviluppo di modi di soluzione della situazione problematica.



Descrizione dell'attività

Si presuppone di aver già affrontato in classe lo studio delle macchine semplici e anche, a livello matematico, di aver parlato di grafici e di proporzionalità diretta e inversa. La seguente esperienza si può effettuare utilizzando del materiale semplice nel laboratorio scientifico.

La leva di primo genere può essere rappresentata da un'asta come quella in figura, sospesa nel suo punto centrale (fulcro) e libera di oscillare.

L’obiettivo è quello di studiarne le varie condizioni di equilibrio e con i dati ottenuti, di tracciarne un grafico nel riferimento cartesiano.
Per semplicità chiamiamo “parte1” quella a sinistra e “parte2” quella a destra del fulcro. Inoltre, per fare in modo che i ragazzi non siano in difficoltà con le misure dei pesi e di lunghezze, riferiamoci alle “tacche” che si possono contare mano a mano che ci si allontana dal fulcro (sia verso sinistra che verso destra).

Decidiamo con gli alunni quanti pesini appendere alla parte1 e a quale tacca. Nel caso in figura è stato scelto di appendere due pesini alla sesta tacca della parte1. Tale situazione si terrà fissa e non si potrà modificare fino a che l’esperienza non si conclude. (Naturalmente 2 pesini alla sesta tacca è una situazione ottimale perché offre molte combinazioni di coppie moltiplicative).

Prima situazione-problema

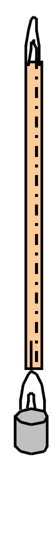
Quanti pesini dobbiamo appendere alla parte 2 affinchè la leva sia in equilibrio?

Il lavoro si svolge coinvolgendo il gruppo – classe. La discussione viene guidata dall’insegnante. A questo punto cominciamo a studiare la situazione e riportiamo i dati in una tabella.

Parte 2	
tacche	**pesini**
1	**12**
2	**6**
3	**4**
4	**3**
5	**--**
6	**2**
7	**--**
8	**--**

Tabella 1

Eseguendo le varie prove si nota che non sempre si trova una soluzione al problema e i ragazzi si accorgono che “bisognerebbe aggiungere… o togliere qualcosa ai pesini” per far sì che la leva sia in equilibrio. Qualcuno comincia ad accorgersi anche del fatto che c’è una certa regolarità nel fatto che più mi allontano dal fulcro e meno pesini ci vogliono per bilanciare la parte1. A questo punto ci si domanda qual è la misura di quei pesini. Se ne appende uno al dinamometro e si legge il peso: es. 20 g[1].



[1] Nota: il dinamometro a disposizione della classe è tarato al grammo-peso. L’insegnante che realizza l’attività si regoli per l’unità di misura dei pesini a seconda dello strumento a disposizione.

Seconda situazione-problema
Determiniamo i pesi da appendere nella quinta tacca, che è rimasta vuota (tabella 2).

Parte 2	
tacche	**grammi**
1	**240**
2	**120**
3	**80**
4	**60**
5	**--**
6	**40**
7	**--**
8	**--**

Tabella 2
Gli allievi, che nell'attività precedente sono riusciti a trovare le situazioni di equilibrio con i pesini in certe tacche, rimangono con il problema irrisolto in alcuni casi, quelli in cui il pesino che occorre per avere l'equilibrio non è un multiplo di 20g [2]. Hanno determinato, nella tabella prima attività, i valori in grammi dei pesini e rimangono loro da determinare i valori in grammi delle tacche rimaste vuote.
Per determinare il peso da mettere nella casella vuota, si usa un piccolo recipiente in alluminio (o comunque di materiale molto leggero) e si riempie piano piano di limatura di ferro fino a che la leva non si trova in equilibrio. Il recipiente con la zavorra viene pesato con il dinamometro e il risultato viene riportato nella tabella. Nel caso della quinta tacca si troverà 48 g.
La tabella ottenuta è la seguente (tabella 3)

Parte 2	
tacche	**grammi**
1	**240**
2	**120**
3	**80**
4	**60**
5	***48***
6	**40**
7	
8	

Tabella 3

Terza situazione-problema
Esiste una legge che ci permette di calcolare il peso da mettere nelle caselle rimaste ancora vuote?
Qualche alunno propone la legge e dice che "peso X tacca = 240".
Non resta che calcolare (con una piccola approssimazione) i valori mancanti e verificare se la congettura funziona.
La tabella finale è questa (tabella 4):

[2] La situazione può essere adattata alla leva disponibile e ai pesini disponibili nelle varie scuole.

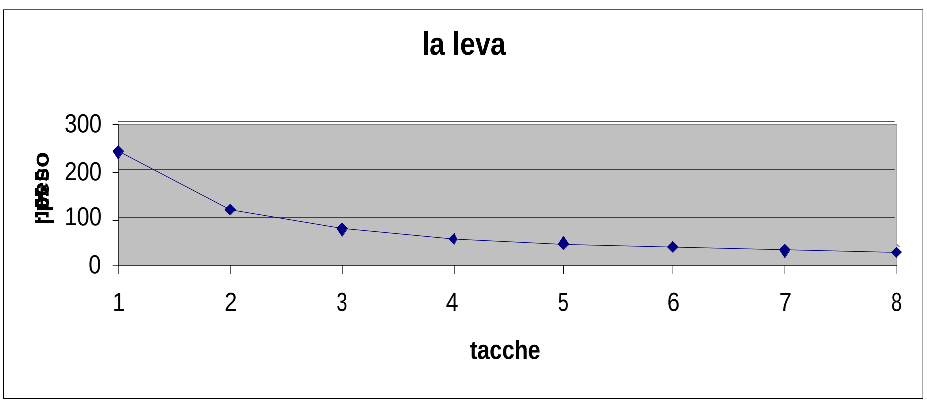
Parte 2	
tacche	**grammi**
1	**240**
2	**120**
3	**80**
4	**60**
5	**48**
6	**40**
7	***34***
8	***30***

Tabella 4

Quarta situazione-problema

Rappresenta i dati della tabella 4 in un grafico, mettendo sull'asse delle x le tacche e sull'asse delle y i pesi. Osserva il grafico e rispondi alle domande:

- *All'aumentare del numero delle tacche, come cambia il valore del peso (aumenta, diminuisce, rimane sempre uguale)?*
- *Se il numero di tacche raddoppia, come cambia il valore del peso?*
- *Se il numero di tacche si dimezza, come cambia il valore del peso?*
- *Riconosci nel grafico che hai rappresentato una legge che hai studiato?*
- *Quale peso bisognerebbe appendere nella tacca 9, se la leva fosse più lunga?*
- *Quale tacca corrisponderebbe al peso di 12g?*



- *Se indichiamo con p il valore del peso e con t il numero di tacche, esprimi con una formula la relazione tra p e t.*

Questa situazione problema viene proposta ad ogni alunno come scheda di lavoro individuale. Dalla correzione – discussione emergono le conclusioni didattiche.

Gli alunni riconoscono nel grafico ottenuto un ramo di iperbole, simile a quelli già studiati ma ottenuti in modo teorico. L'analisi del grafico e della situazione sperimentale offre notevoli spunti di approfondimento.

Nodi cruciali:

- Costruire grafici in modo corretto
- Comprendere il problema della proporzionalità inversa
- Collegare le conoscenze matematiche con quelle fisiche

Strumenti:

Una leva di primo genere (come indicato nella figura), pesini, dinamometro, un secchiellino da appendere con la zavorra, zavorra (pallini di piombo o limatura di ferro), righelli, carta quadrettata.

Il cammello

Livello scolare: 3ª media

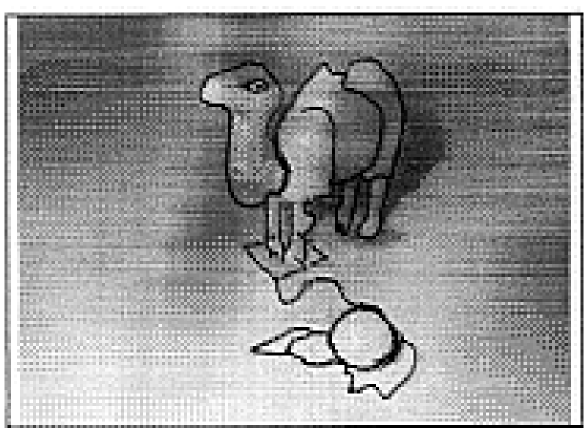
Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative Rappresentare graficamente misure di grandezze per individuare regolarità, andamenti, relazioni Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli	Funzioni: tabulazioni e grafici Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche	Misurare Le relazioni Porsi e risolvere problemi	Fisica

Contesto

Il contesto di riferimento è il campo di esperienza del movimento nello spazio, con competenze relative alla misura di grandezze che variano in funzione del tempo.

Descrizione dell'attività

L'obiettivo di questa attività è quello di descrivere il moto di un cammello giocattolo, trascinato su un tavolo da un peso a cui è collegato tramite un filo (il peso scende al di fuori del tavolo).
L'insegnante propone la situazione problematica alla classe, lasciando alcuni minuti di tempo per la riflessione singola degli allievi, prima di cominciare una discussione collettiva. Nel porre la situazione-problema, l'insegnante mette in moto il cammello sulla cattedra, in modo che percorra un tratto abbastanza lungo e arrivi al bordo della cattedra. Gli allievi osservano il suo movimento.
Per stimolare una riflessione individuale sul fenomeno osservato, l'insegnante distribuisce alcune schede in cui gli alunni dovranno rispondere a quesiti relativi alla situazione problema.



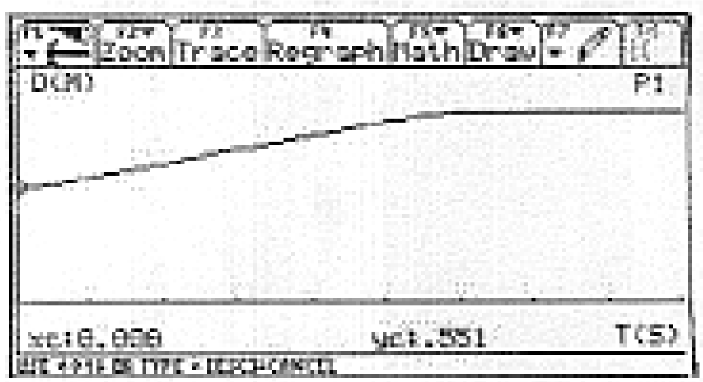
Situazione-problema

Avete osservato il moto del cammello. Ora compilate la scheda rispettando le seguenti tre consegne:

- *Descrivete tale moto, dal punto di partenza fino a quando arriva al bordo della cattedra.*

- *Tracciate un grafico sulla carta quadrettata, che rappresenti lo spazio percorso dal cammello al passare del tempo.*
- *Spiegate il ragionamento fatto per rappresentare il moto con il grafico.*

L’insegnante raccoglie le schede. Successivamente elenca alla lavagna le descrizioni del moto fatte dagli allievi, suddivise per tipologie. Quindi, avvia la discussione, coinvolgendo il gruppo–classe. Alcuni allievi potranno scrivere che il moto prima è ad andatura costante, poi si arresta, altri che il cammello prima accelera, poi rallenta fino a fermarsi, e così via. Le tipologie descrittive vengono sottoposte al vaglio, ripetendo più volte l’esperienza, fino a che la classe converge sulla descrizione esatta, cioè di una breve accelerazione iniziale e quindi di un moto uniforme, fino al bordo, quando il cammello si arresta. I momenti di accelerazione iniziale e di decelerazione finale sono molto brevi.
Quindi l’insegnante raccoglie alla lavagna le varie tipologie di grafico che descrivono il moto, e le sottopone all’analisi della classe. Qui saranno certamente presenti varie tipologie, dalla retta inclinata a quella orizzontale, dalla curva crescente a quella descrescente, ecc.
Per decidere quale grafico sia quello corretto, viene collegato un sensore (CBR) a una calcolatrice (TI83), ponendo il sensore sul tavolo subito dietro al cammello, rivolto verso la sua direzione di moto. Viene rilevato il moto del cammello con il sensore e, contemporaneamente, il grafico viene proiettato su uno schermo tramite un proiettore collegato alla calcolatrice, in modo che gli allievi possano vedere il grafico del moto mentre si genera contemporaneamente al moto stesso.
In questo modo, gli allievi possono confrontare i loro grafici con quello che si è prodotto sullo schermo, giustificando analogie e differenze nella discussione.



Occorre che il gruppo-classe, dopo aver osservato il grafico sullo schermo, ne ricostruisca il significato, in stretta connessione con il moto del cammello. L’insegnante, a tale proposito, porgerà domande-guida del tipo: “Questo tratto obliquo, a quale moto corrisponde?”, “Questo tratto orizzontale, cosa significa?”, “In questo punto, com’era il moto del cammello?” e così via.
In seguito, l’insegnante porrà domande che orientano gli studenti su una lettura quantitativa del grafico, come per esempio: “Dopo 1 secondo, quanti metri ha percorso il cammello? E dopo 2 secondi, 3 secondi?”, oppure: “Quando il cammello si ferma, quanto tempo è passato dall’inizio del moto? Quale distanza ha percorso?” e così via.
Particolarmente delicata, per gli allievi, è l’interpretazione del tratto orizzontale del grafico, in quanto è difficile per loro avere consapevolezza che una variabile (lo spazio) possa non cambiare al variare dell’altra (il tempo).
Eventualmente, il lavoro può proseguire nella direzione di determinare il coefficiente angolare della retta obliqua che corrisponde al moto uniforme, e di ottenere l’equazione della retta di tale moto.
E’ anche possibile procedere nello studio dell’esperienza, indagando la variazione della velocità nel tempo.
Ulteriori aperture possono essere effettuate verso lo studio del moto di altri oggetti e giocattoli di uso quotidiano.

Nodi cruciali:

- La differenza tra legge oraria, cioè descrizione della variazione dello spazio in funzione del tempo, e traiettoria, cioè percorso effettuato dal cammello
- Lettura del grafico in termini globali, cioè di "forma" e locali, cioè di intervalli o punti
- Realzione tra spazio percorso e velocità
- Intepretazione del grafico disegnato sullo schermo della calcolatrice in termiini di unità di misura e misura delle due grandezze coinvolte: spazio e tempo.

Strumenti:
- Cammello o altro giocattolo analogo, legato a un peso
- Calcolatrice simbolico-grafica
- Sensore di moto
- Proiettore collegato alla calcolatrice

Riferimenti:
Foà, O. & Hausermann, G., Apprendere la fisica giocando e … misurando, 2° Congresso ADT, Montesilvano, 20-22 ottobre 2000.

Elementi di prove di verifica

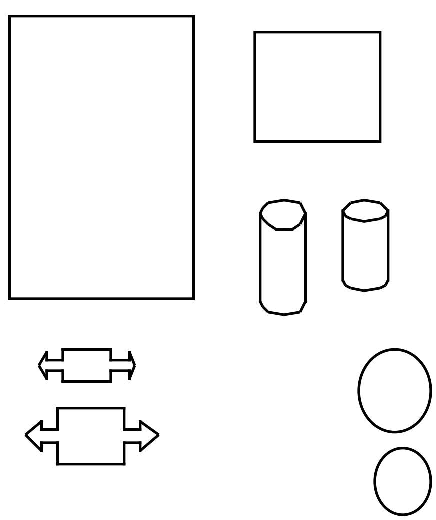
Livello scolare: 1° 2° 3° media

Eppur son simili!

Livello scolare: 2° classe

Competenze
- Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici
- In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze
- Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti
- Riprodurre in scala

Osserva le seguenti coppie di disegni: per ognuna stabilisci se il disegno piccolo è una riduzione in scala di quello grande. Motiva in ogni caso la tua risposta e trova anche il fattore di scala quando la tua risposta è affermativa



Alla scoperta della legge

Competenze

- In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze
- Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti

Individua, tra quelle elencate, le grandezze direttamente proporzionali (D) e quelle inversamente proporzionali (I) segnando la casella corrispondente:

base e altezza di un insieme di rettangoli equivalenti	D	I
lato e perimetro di un quadrato	D	I
lunghezza di un percorso e tempo impiegato a percorrerlo, mantenendo una velocità costante	D	I
numero di bottiglie necessarie per contenere una certa quantità di liquido e loro capacità	D	I
Peso specifico e peso di un insieme di oggetti di materiali diversi ma aventi tutti lo stesso volume	D	I

Orientiamoci

Livello scolare: 1° 2° classe
Competenze:

- Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto
- Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre, agli errori
- Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli

1. Su una pianta di una città , in scala 1:13000 è indicata una piazza rettangolare con queste dimensioni 9mm x 1,1 cm.. Al centro della piazza c'è un monumento circondato da una aiuola quadrata di lato 10 m nella realtà. Disegna la piazza come nella carta e prova a disegnare la sagoma dell'aiuola. Quale difficoltà hai incontrato?

2. Volendo fare una piantina in scala della tua classe che sia piuttosto piccola, ma in modo tale che vi si possono disegnare i banchi (sempre in scala), quale delle 3 scale sotto riportate sceglieresti?

   1:1000
   1:200
   1:500
   Motiva la tua risposta e trova eventualmente un'altra scala che ritieni ancora più adatta.

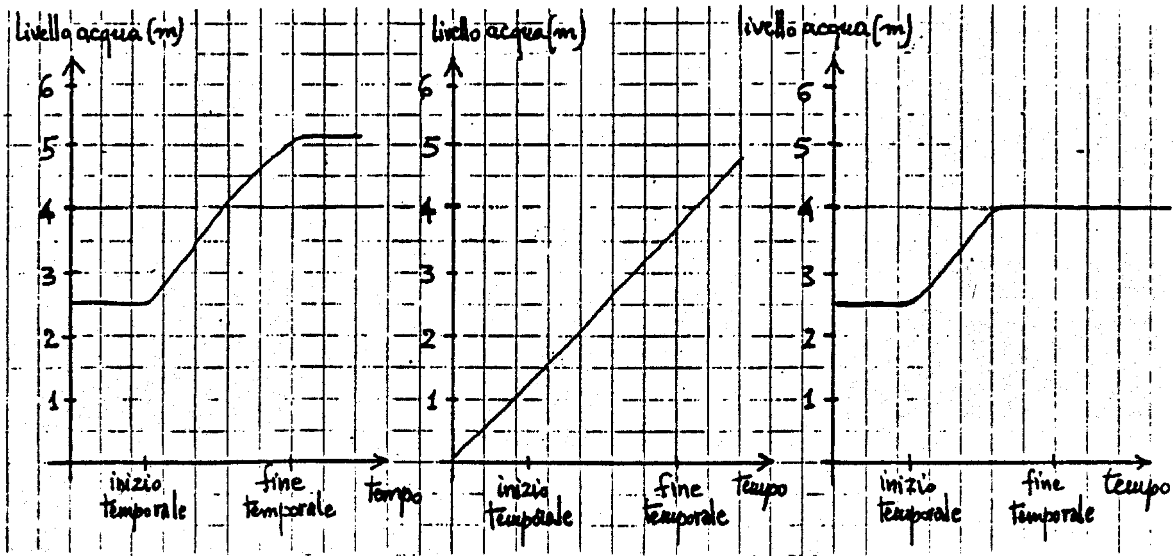
3. Su una carta troviamo questa indicazioni:

   Determina la scala.

Temporale

Livello scolare: 3° classe
Un serbatoio cilindrico alto 4 m raccoglie l'acqua che cade sul tetto di una casa.
Il serbatoio ha un rubinetto in basso, chiuso.
Quando l'acqua raggiunge il bordo superiore, defluisce attraverso un tubo di scarico.

Quale tra i seguenti grafici esprime meglio come varia il livello dell’acqua nel serbatoio prima, durante e dopo un violento temporale? Per quale motivo? Spiega perché escludi gli altri grafici.



NUCLEO: Porsi e risolvere problemi

Introduzione

Secondo il Dizionario della lingua italiana G.Devoto-G.C.Oli, un problema è un
"*quesito che attende una soluzione (in matematica un quesito che richiede la determinazione o la costruzione di una o più entità che soddisfano a date condizioni fissate in precedenza)*"
e, secondo The American Heritage Dictionary, "
a question put forward for consideration, discussion or solution; a question that exercices the mind". (Un quesito da prendere in considerazione, da discutere o da risolvere; un quesito che esercita la mente).

Nel documento di studio dell'Unione Matematica Italiana (Parte prima di questo volume) si puo' leggere che:
In diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a contesti scolastici ed extrascolastici porsi e risolvere problemi vuol significare:

- *riconoscere situazioni problematiche e rappresentarle;*
- *avviare, discutere e comunicare strategie risolutive;*
- *risolvere problemi posti da altri;*
- *porsi e risolvere (nuovi) problemi.*

Possiamo, da qui, subito asserire che porsi e risolvere problemi vuol dire non solo imparare le cose della Matematica ma collocarsi già essenzialmente fra coloro che avranno assimilato l'abitudine di pensare (con metodo) anche al di fuori dell'ambiente scolastico.
Porsi e risolvere un problema offrirà la possibilità di individuare il significato di una proposizione, di riconoscere approcci e percorsi risolutivi diversi, di attivare autonomamente processi di verifica del percorso seguito, di scegliere, eventualmente ottimizzando, fra soluzioni diverse.
Porsi e risolvere problemi si colloca in modo naturale trasversalmente rispetto alle tematiche matematiche fondanti ed anche rispetto agli altri ambiti disciplinari.

Le *competenze* richieste per il nucleo di processo "Porsi e risolvere problemi" per la *SCUOLA ELEMENTARE* sono:

- partendo da situazioni concrete note all'allievo o proposte dall'insegnante, individuare gli elementi essenziali di un problema;
- selezionare le informazioni utili e prospettare una soluzione del problema;
- riflettere sul procedimento risolutivo seguito e confrontarsi con altre possibili soluzioni.
- individuare le informazioni necessarie per raggiungere un obiettivo in una situazione problematica (selezionando i dati forniti dal testo e quelli ricavabili dal contesto);
- individuare in un problema eventuali dati mancanti o sovrabbondanti o contraddittori;
- essere consapevole dell'obiettivo da raggiungere in una situazione problematica e del processo risolutivo seguito, con attenzione al controllo delle soluzioni prodotte;
- formalizzare il procedimento risolutivo seguito;
- stabilire la possibilità di applicare i procedimenti utilizzati in altre situazioni.

Nel seguito porremo l'attenzione su esempi di attività collegate strettamente ai quattro nuclei tematici (Il Numero, Lo Spazio e le Figure, Le Relazioni, I Dati e Le Previsioni); tali esempi di attività possono serenamente essere collocati nell'ambito matematico-scientifico, nei contesti interdisciplinari ed anche in contesti esterni alla scuola.

Quali sono le caratteristiche del "Porsi e risolvere problemi?"

Seguendo già l'accezione semantica, possiamo dire che *porsi e risolvere problemi* significa impegnarsi in un compito per il quale la "soluzione" non è nota in precedenza (per chi si trova di fronte alla situazione problematica). Soluzione di un problema deve essere naturalmente intesa in senso lato ovvero sia come una risposta al quesito sia come un percorso risolutivo che a tale risposta conduce.
Porsi un problema vorrà dire comprendere la situazione descritta, esplorare le cause e la sorgente degli eventi interessati, assimilare i dati e le conoscenze ad essi associate, chiedersi quali siano le "conseguenze" della situazione, così come è descritta ed in caso di modifiche, sia aggiuntive sia solo interpretative, individuare gli elementi significativi.
Per risolvere un problema si dovrà dar fondo alle proprie risorse, cimentarsi in campo aperto, esplorando fra le conoscenze possedute alla ricerca di quelle utili allo scopo del momento, sviluppare nuove conoscenze, variare i modi di utilizzare le conoscenze, compenetrare le conoscenze, arricchite, nel problema, discernere fra dati significativi (alla strategia risolutiva) e dati ridondanti, individuare eventuali dati mancanti e necessari al lavoro, controllare il processo risolutivo in riferimento all'obiettivo da raggiungere ed alla validità del prodotto ottenibile.

Nell'ambito di Porsi e Risolvere problemi il concetto stesso di *errore* cessa di avere la valenza usualmente negativa, acquisendo la sostanza di strumento concettuale atto al miglioramento, strategico e di calcolo, delle capacità risolutive dell'alunno.

Per porsi e risolvere problemi occorrono:

- conoscenze a priori, dati e/o fatti,
- conoscenze prodotte dai dati e/o fatti,
- processi di risoluzione, metodi e procedure condivise di ricerca (e acquisizione) di soluzioni;
- abilità intuitive che permettano di affrontare situazioni non familiari;
- abilità intuitive che aiutino a formulare metodi non di routine,
- capacità di pianificare il lavoro che suggeriscano anche i momenti più efficaci per una verifica del percorso scelto.

Porsi e risolvere problemi implica imparare a produrre congetture, prima semplici e magari non funzionanti, poi semplici ed adatte allo scopo ed infine congetture con sfaccettature sempre più elaborate e complesse, che possono dare inizio a capire la ricchezza, pratica e concettuale, degli avvicinamenti graduali e successivi alla soluzione. Un tale percorso "teorico e di lavoro" permette di accettare o rifiutare le ipotesi (sia tattiche sia strategiche), che possono via via presentarsi e permette di affinare le congetture prodotte, sempre in vista di un accostamento graduale al prodotto finale. Se da un problema nascono, come deve essere, nuovi problemi strettamente collegati al problema iniziale, sarà necessario, da parte dell'insegnante, creare il contesto adatto perché il bambino o la bambina, il ragazzo o la ragazza, non solo non si senta disorientato se posto di fronte ad un nuovo momento di crescita ma riesca a cogliere in pieno l'arricchimento conoscitivo che risolvere il problema, con aspetti non consueti e con necessità di "scorribande" trasversali fra i vari ambiti disciplinari, gli può inaspettatamente offrire.
Da un punto di vista meramente disciplinare (o d'ambito disciplinare) è altresì importante il "serbatoio" di conoscenze e strategie che si riesce ad avere a disposizione al momento di iniziare l'approccio al problema. In tale serbatoio dovranno essere presenti capacità grafiche e figurative, scelta di simboli e di notazioni, uso di diagrammi e di grafici, ragionamenti di tipo *feedback* (ovvero di tipo interattivo e retroattivo), capacità di riformulare il problema, pratica di schemi usuali di lavoro, conoscenza di comuni procedure algoritmiche, azioni metacognitive.

Per proporre il porsi e risolvere problemi in modo ottimale, l'insegnante dovrebbe interagire (non solo dialetticamente) con lo studente. La risposta "*Va bene*" può tranquillizzare lo studente emotivo e tale risposta, in certi casi, dipendenti dall'atmosfera della classe, può essere pienamente giustificata: comunque, generalmente, è bene, sia nel caso di risposta esatta, sia nel caso di risposta errata, anche nel caso di parziale indicazione del percorso risolutivo, chiedere la motivazione della risposta, la ragione della scelta di quel percorso o, anche, cosa succede alla soluzione ed al percorso risolutivo se tolgo una delle ipotesi, se altero leggermente uno dei dati, se introduco un nuovo elemento (sia superfluo, sia perturbatore). In questo modo lo studente può iniziare a comprendere che un errore non è la fine del mondo, qualcosa di cui (ora e in seguito) avere vergogna ma addirittura una possibile risorsa di apprendimento, uno stadio di crescita che lo fa avvicinare alla disciplina. L'insegnante dovrà far comprendere che non ci sono procedure valide per ogni evenienza, che capire che essere in un percorso risolutivo vicini (o distanti ?) rispetto alla soluzione, non e' un errore ma una conquista.
(Queste attenzioni oltre che rendere fruttuoso al meglio l'approccio al porsi e risolvere problemi, avranno anche un forte impatto positivo allorché lo strumento tecnologico, vieppiù sofisticato, dovrà inserirsi *consapevolmente* nel campo delle procedure risolutive fruibili dallo studente.)
Porsi e risolvere problemi implica una riflessione attenta sul percorso seguito, favorendo la possibilità di eventuali altre "soluzioni". Questo potrà permettere di acquisire il primo stadio di una capacità "decisionale" che, al termine del percorso scolastico ed al momento dell'entrata nel mondo della vita di ogni giorno, renderà consapevole -- lo studente di ieri ed il cittadino d'oggi -- che essere di fronte a più soluzioni, qualora ve ne siano, non è un impaccio, non deve creargli dubbi, ma, anzi, gli può far scegliere la meno costosa, la più rapida, la più consona all'ambiente, ecc..

Indice delle attività

Nucleo: Porsi e Risolvere Problemi

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamenti con altre discipline
1^a e 2^a elementare	Banchi "su misura"	Aspetti del proprio vissuto	Lingua italiana Educazione tecnica
1^a e 2^a elementare	Trova la strada	Percorsi	Lingua italiana Geografia
1^a e 2^a elementare	Guardo giù	Percorsi	Lingua italiana Geografia Educazione motoria
1^a e 2^a elementare	La tartaruga Ghina	Percorsi	Lingua italiana Geografia Educazione motoria
1^a e 2^a elementare	Attento a ciò che vedi	Rappresentazione dello spazio visibile	Lingua italiana Geografia Educazione all'immagine
1^a e 2^a elementare	Viva la maestra	Rappresentazione spazio figure piane e solide	Lingua italiana Scienze

3^a e 4^a elementare	Le ricette e la produzione	Numero Compravendita	Lingua italiana Antropologia
3^a, 4^a e 5^a elementare	Compleanni di stagione	Aspetti del vissuto quotidiano	Linguaitaliana Demografia
4^a e 5^a elementare	Al centro dell'attenzione	Rappresentazione dello spazio visibile	Lingua italiana Educazione all'immagine
4^a e 5^a elementare	Il postino di Acquafredda	Relazioni della vita reale	Lingua italiana Antropologia

1^a media	Quanti siamo in casa	Ambito famiglia	Lingua italiana Demografia Antropologia
1^a e 2^a media	La distributrice dei chicchi di grano	Relazioni della vita reale	Lingua italiana Tecnologia
1^a e 2^a media	Il bersaglio	Relazioni nel gioco	Educazione tecnica Educazione fisica
1^a e 2^a media	La casetta	Relazioni nel gioco	Lingua italiana Educazione tecnica
3^a media	I cerchi tangenti	Figure geometriche come oggetti matematici	Lingua italiana Educazione tecnica

SCUOLA ELEMENTARE

Banchi “su misura”

Livello scolare: 1^a - 2^a elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare l'obiettivo da raggiungere sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere Individuare e collegare le informazioni utili alla soluzione, ricavandole dal testo o dal contesto della situazione problematica	Il collettivo statistico e suoi elementi Semplici tabelle di frequenze Semplici rappresentazioni grafiche Confronti di frequenze	Dati e previsioni	

Contesto: aspetti del proprio vissuto

Commento
Questa attività presuppone che gli alunni si siano già cimentati con le procedure di rilevazione proprie della statistica

Descrizione dell’attività:
In questa attività viene sottolineata l’importanza che ogni indagine di tipo statistico scaturisca da una problematica.
Il comune ha chiesto la nostra collaborazione per decidere quanti banchi e di quale misura dovrà fornirci il prossimo anno. Per fare ciò ha indicato una altezza standard al di sotto della quale corrisponde un banco più piccolo e al di sopra della quale corrisponde un banco più grande.
L’insegnante traccia sulla parete, ad esempio con del nastro adesivo, una linea che corrisponde all’altezza standard ed invita i bambini/e ad uno ad uno a confrontarsi con tale misura. Ogni confronto viene registrato in una tabella:

bambini che stanno al di sotto della linea (banchi piccoli)	
bambini che stanno al di sopra della linea (banchi grandi)	
bambini che stanno sulla linea	

Nel caso si verifichi che uno o più bambini siano alti tanto quanto il segno sulla parete si avvierà una discussione per vedere che se sia più conveniente far corrispondere a questa situazione un banco più piccolo o un banco più grande.

Infine potrà essere utile richiamare l’attenzione alla richiesta iniziale, chiedendo agli alunni di formulare alcune risposte che saranno, successivamente, vagliate dalla classe al fine di poter dare una risposta all’Amministrazione Comunale.

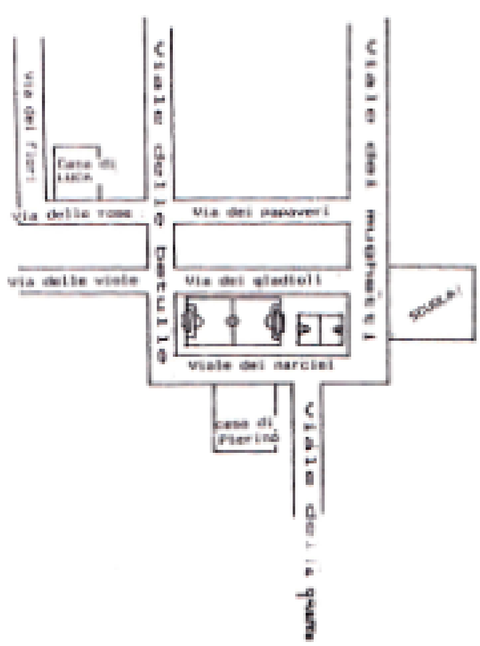
Trova la strada

Livello scolare: 1° - 2° elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori,…) Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa.	Collocazione di oggetti in un ambiente. Mappe, piantine ed orientamento	Porsi e risolvere problemi. Lo spazio e le figure Argomentare e congetturare	Geografia Lingua italiana

Il contesto
Percorsi

Descrizione dell’attività
Consegna
- Segna con un colore un percorso che può fare Pierino partendo da casa sua per andare a trovare Luca
- Descrivi a parole tale percorso



Per la soluzione del problema è necessario individuare il punto di partenza ed il punto di arrivo; essere in grado di raccogliere informazioni interpretando la piantina e di sapersi orientare su di essa; essere in grado di ricostruire un percorso. Occorre, inoltre, saper verbalizzare le procedure risolutive utilizzate.
Questa è una situazione problematica a soluzione multipla in quanto i bambini possono seguire percorsi diversi.

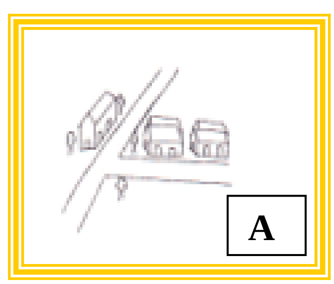
Guarda giù

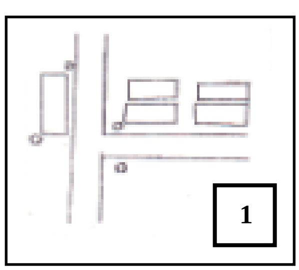
Livello scolare: 1° - 2° elementare

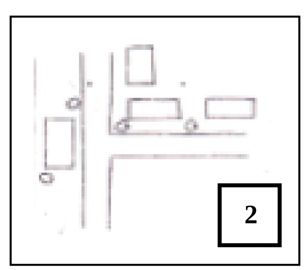
Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori,…) Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma ed uso.	Collocazione di oggetti in un ambiente. Mappe, piantine ed orientamento	Porsi e risolvere problemi. Lo spazio e le figure	Geografia Lingua italiana

Il contesto
Percorsi

Descrizione dell'attività
Consegna
- Segna la cartina che rappresenta il disegno A
- Considera l'altra cartina: segna gli errori







Per la soluzione del problema è necessario individuare gli elementi del disegno “A” ed i rispettivi simboli nella piantina, saper cogliere le corrispondenze tra gli elementi e i simboli individuati. Questa situazione problematica ha una sola soluzione.

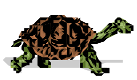
La tartaruga Ghina

Livello scolare: 1° - 2° elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori,…) Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno e viceversa.	Mappe, piantine ed orientamento	Porsi e risolvere problemi Lo spazio e le figure Numeri	Geografia Lingua italiana

Il contesto
Percorsi

Descrizione dell’attività
Consegna: Ghina la tartarughina cammina lungo questo viale con le piastrelle numerate



1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

- Parte dalla casella $\boxed{12}$ e segue il percorso indicato dalle frecce.
  - Che numero ha la casella di arrivo?

$\boxed{12}$ → → → ↑ → → ↓ $\boxed{?}$

- Partendo da una casella e seguendo il percorso sotto indicato Ghina arriva alla casella $\boxed{17}$

- Da quale casella è partita?

$\boxed{?}$ → → ↓ ↓ → ↑ $\boxed{17}$

- Ghina parte dalla casella $\boxed{17}$ e arriva alla casella $\boxed{29}$

- Sai inventare un percorso?

- Per passare dalla casella $\boxed{23}$ alla casella $\boxed{19}$ Ghina segue questo percorso

$\boxed{23}$ → → → ↑ → → → $\boxed{19}$

sai inventare altri due percorsi per passare dalla casella $\boxed{23}$ alla casella $\boxed{19}$?

- Con quale dei percorsi fa il minor numero di passi?

Osservazioni

Potrebbe essere consigliabile fermare il percorso alla casella 50.

Può risultare difficile per i bambini l'interpretazione dell'indicazione implicita nelle frecce per il fatto che si trovano allineate nello stesso rigo, in questo caso apportare ad ogni percorso delle variazioni. Ad esempio il primo percorso può essere così modificato:

$\boxed{12}$ → → → ↑ → → ↓ $\boxed{?}$

Per la soluzione di questo problema è necessario individuare l'ambiente in cui la tartaruga si muove, conoscere il linguaggio delle frecce ed interpretare correttamente i simboli. I bambini dovranno essere in grado, anche, di seguire i percorsi proposti sia in avanti che a ritroso per individuare il punto di partenza o di arrivo. Dovranno, inoltre, saper inventare percorsi usando simboli adeguati.

Un ulteriore competenza che viene attivata da questa situazione problematica consiste nella capacità di saper scegliere il percorso ottimale al fine di rendere minimo il numero dei passi.

Attento a ciò che vedi !

Livello scolare: 1° - 2° elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere e descrivere alcune delle principali relazioni spaziali (sopra/sotto, davanti/dietro, dentro/fuori,…) Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma ed uso.	Collocazione di oggetti in un ambiente Mappe, piantine ed orientamento	Porsi e risolvere problemi. Lo spazio e le figure	Geografia Lingua italiana

Il contesto
Rappresentazione dello spazio visibile: il punto di vista

Descrizione dell'attività
Consegna
- Leggi con attenzione poi colora. Spiega le tue scelte.

Questa è una situazione a soluzione unica .

Il bambino deve saper cogliere gli elementi essenziali nei diversi disegni per individuare le differenti posizioni. E’, anche, importante che sappia giustificare e verbalizzare le procedure risolutive scelte.

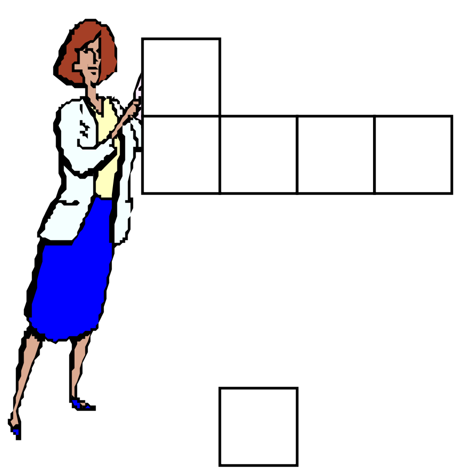
Viva la maestra

Livello scolare: 1° - 2° elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno, alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma ed uso. Progettare e costruire oggetti con forme semplici	Le prime figure del piano e dello spazio (triangolo, quadrato, cubo, …)	Porsi e risolvere problemi. Lo spazio e le figure	Educazione all’immagine

Il contesto
Rappresentazione dello spazio: figure solide e piane.

Descrizione dell’attività
Consegna
La maestra vuole costruire un cubo. Ha già unito con lo scotch 5 quadrati uguali di cartoncino ed ha ottenuto questa figura:



Deve attaccare il sesto quadratino.
Sai aiutarla a sistemarlo in modo che chiudendo la figura ottenuta si abbia un cubo?
Disegna il nuovo sviluppo.
Sapresti attaccare il sesto quadratino ad un altro lato della figura in modo da poter chiudere ancora il cubo?

………………………………

Per la soluzione del problema è necessario che si conosca il numero delle facce del cubo e si sappia che lo sviluppo del cubo deve chiudersi, Il problema è a soluzione multipla. Una delle maggiori difficoltà consiste nel riuscire ad individuare uno dei lati della figura a cui è opportuno attaccare il sesto quadratino in modo che il cubo possa chiudersi senza piegare il foglio e quindi senza verificare di volta in volta l'ipotesi avanzata. In questa attività il ragazzo deve ripercorrere la esperienze già vissute nello stesso contesto, ricostruendo mentalmente il piegamento dei quadratini lungo i lati in modo da chiudere il cubo.

SCUOLA ELEMENTARE

Compleanni di stagione

Livello scolare: 4^a - 5^a elementare

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere Individuare le risorse necessarie per raggiungere l' obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema	Dati e previsioni Caratteri qualitativi Diagrammi di vario tipo Moda, mediana, Evento certo, possibile, impossibile Valutazione di probabilità in casi elementari	Porsi e risolvere problemi Argomentare e congetturare Dati e previsioni	Lingua italiana

Contesto: aspetti del vissuto quotidiano

Commento:
L'attività diviene più significativa se sono già state affrontate le tematiche riguardanti la riflessione linguistica nella probabilità.

Descrizione dell'attività:
Il carattere problematico dell'attività consiste nel rispondere ad una domanda in modo ragionevole e opportuno, descrivendo due situazioni che si differenziano per quantità di informazioni.

Si può chiedere alla classe di avviare una ricerca di tipo statistico sulle date di compleanno riferite alla stagione.
I dati raccolti potrebbero essere organizzati in una tabella del tipo:

STAGIONE DI NASCITA	FREQUENZE
inverno	
primavera	
estate	
autunno	

Ottenuta la tabella

ß si invita in aula un alunno di un'altra classe e…
ß si chiede agli alunni "in quale stagione è nato quel bambino"**:** gli alunni non possono rispondere perché non sono in possesso di nessuna informazione oppure potrebbero dare una risposta certa dovuta alla conoscenza personale del nuovo arrivato
ß successivamente l'insegnante indica un bambino della classe e chiede al nuovo arrivato di esprimere una previsione ragionevole, sulla base delle informazioni fornite dalla tabella, rispetto alla stagione di nascita del bambino indicato. Tale previsione può essere espressa:
ß attraverso una frase che esplicita l'incertezza, del tipo: "probabilmente…"
ß attraverso una frase che qualifica l'incertezza, del tipo: "molto probabilmente…"
ß il confronto tra le due situazioni che si sono verificate potrebbe essere sottolineato dalla facoltà o meno di poter esprimere un enunciato che risponda alla domanda: "in quale stagione è nato quel bambino?"

Il possibile sviluppo successivo potrebbe essere quello di esprimere una previsione rispetto ad una nuova situazione laddove il collettivo statistico risulti più significativo
attraverso un calcolo che quantifichi l'incertezza

<u>Verifica interna</u>

Proporre situazioni che si differenziano per quantità di informazioni e chiedere all'alunno di descriverle attraverso enunciati

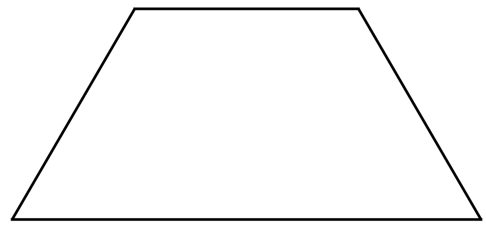
Al centro dell'attenzione

Livello scolare: 5° elementare

Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Riconoscere, nel mondo circostante e nel disegno alcune delle principali forme geometriche del piano e dello spazio, riflettendo sulle relazioni tra forma ed uso. Costruire e disegnare con strumenti vari le principali figure geometriche. Individuare gli elementi significativi di una figura. Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche	Le principali figure del piano e dello spazio. I principali enti geometrici. Rette incidenti, parallele, perpendicolari. Uguaglianza tra figure	Porsi e risolvere problemi Lo spazio e le figure Argomentare e congetturare.	Educazione linguistico-espressiva Educazione all'immagine Scienze

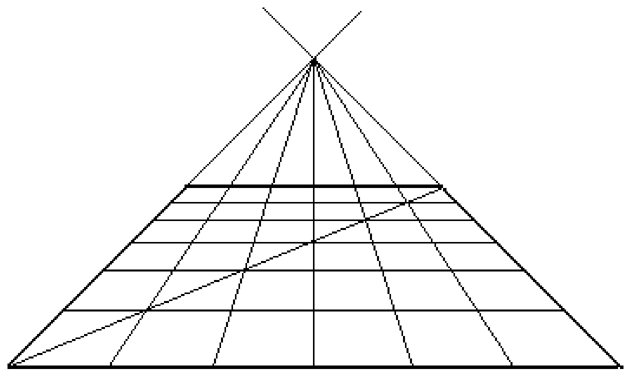
Contesto
Rappresentazione dello spazio visibile

Descrizione dell'attività
Consegna
Su questo pavimento, visto in prospettiva, vanno posati, verticalmente, dei listoni rettangolari:
Disegna i listoni posati e spiega il tuo ragionamento.



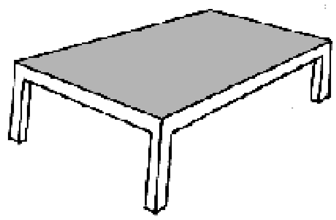
Per la soluzione del problema è necessario capire che si deve disegnare in modo prospettico, intuire dalla forma del pavimento che i listoni rettangolari non saranno rappresentati in tale forma, individuare il punto di fuga.
Questo è una situazione problematica a soluzione multipla, in quanto ogni bambino deve stabilire con quanti listoni ricoprirà il suo pavimento.
Un possibile ampliamento di questa situazione si può realizzare proponendo ai bambini di disegnare una copertura del pavimento a piastrelle rettangolari, invece che a listoni. In tal modo si inserisce una nuova variante grafico-concettuale: tracciare, in modo prospettico, le linee orizzontali parallele alla base del pavimento. In una situazione del genere il bambino si trova, ad un tempo, ad applicare conoscenze pregresse, tracciare le linee verticali con il punto di fuga centrale usando il metodo di Piero della Francesca, e ad affrontare una situazione nuova, tracciare le linee orizzontali in modo prospettico. Dopo un momento di produzione libera ed individuale, dovrebbe seguire una discussione collettiva dalla quale potranno emergere le difficoltà incontrate nel tracciare le linee orizzontali.

A questo punto l'insegnante può introdurre le strategie adeguate per risolvere queste difficoltà fornendo, dapprima senza spiegazione, una rappresentazione analoga al disegno sottostante ottenuto applicando il metodo J. Pelerin
.



Successivamente attraverso una discussione collettiva si andranno ad individuare le strategia corrette per applicare il metodo Pelerin. Si può effettuare la verifica della acquisizione degli apprendimenti proposti offrendo ad ogni bambino questa situazione problematica:

Consegna: disegna la quadrettatura del piano di questo tavolo:



Per questo problema si confrontino le indicazioni didattiche date nell'attività *"La rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva"* relativa al Nucleo **Lo spazio e le figure geometriche**.

Ricette e produzioni

Livello scolare: 3° - 4° elementare

Attività 1 – Situazione didattica di calcolo della spesa
Attività 2 – Situazione didattica di calcolo del costo reale della produzione realizzata
Attività 3 – Situazione di confronto di prezzi
Attività 4 – Situazioni problematiche senza dati numerici
Attività 5 - Situazioni problematiche di progettazione

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente	Moltiplicazione e divisione tra numeri naturali Proprietà dei numeri. Il numero zero e il numero uno. Numeri decimali, frazioni. Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali. Operazioni tra numeri decimali. Proprietà delle operazioni.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Numero Relazioni Dati e previsioni Misurare Argomentare	Lingua italiana Educazione scientifica Storia, geografia, studi sociali

le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, …) , concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all'obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti. Esplorare situazioni problematiche che richiedono moltiplicazioni e divisioni tra numeri naturali Verbalizzare le strategie scelte per la risoluzione dei problemi e usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle Calcolare il risultato di semplici moltiplicazioni e divisioni Eseguire semplici calcoli mentali con moltiplicazioni e divisioni, utilizzando le tabelline e le proprietà delle operazioni Riconoscere e costruire relazioni tra numeri naturali (multipli, divisori) Comprendere i significati delle frazioni (parti di un tutto unità, parti di una collezione, operatori tra grandezze) Riconoscere scritture diverse (frazione decimale, numero decimale) dello stesso numero, dando particolare rilievo alla notazione con la virgola Comprendere il significato e l'uso dello zero e della virgola Comprendere il significato del valore posizionale delle cifre nel numero naturale e nel numero decimale	Equivalenze, ordinamenti Caratteri qualitativi e caratteri quantitativi		

Contesto
Il contesto di apprendimento costituito dalle “ricette” (o dalle istruzioni d’uso) che permettono la “produzione” di alimenti (e non) in classe, risulta stimolante perché offre la possibilità all’insegnante di strutturare una diversità di approcci alle situazioni problematiche oggetto di lavoro con i bambini (avente lo scopo di raggiungere o sviluppare aspetti diversi del numero e delle operazioni aritmetiche) e nello stesso tempo di ritornare più volte, in situazioni didattiche diverse, su aspetti cruciali della padronanza del numero.
<u>Ogni “produzione” si può configurare come una situazione problematica complessa, il cui obiettivo finale è la realizzazione della produzione stessa. La scelta del tipo di “produzione” è legata (oltre a motivi di organizzazione scolastica) agli obiettivi di apprendimento che l’insegnante, in quel particolare momento, intende sollecitare. E’ raccomandabile, tuttavia, aumentare progressivamente la complessità delle produzioni realizzate.</u>
E’ necessario che il lavoro sulle produzioni si configuri come un’autentica situazione reale, dove i bambini si devono confrontare con i vincoli e le caratteristiche del contesto in cui operano. Questo significa che per gli alunni deve essere “reale” non solo la realizzazione della produzione, ma anche il <u>processo</u> che consente di raggiungere l’obiettivo. Le ricette costituiscono un ambiente ricco da più punti di vista:

- contengono, a volte in forma implicita, informazioni a più livelli (gli ingredienti; gli strumenti; le fasi di lavorazione; le modalità di esecuzione; ecc.);
- le informazioni normalmente devono essere rielaborate e, dal punto di vista matematico, possono richiedere operazioni di scelta (ad esempio, relativamente al tipo di confezioni degli ingredienti da acquistare) o di adattamento alle esigenze (ad esempio, le dosi della ricetta possono essere raddoppiate, triplicate, oppure dimezzate, con la conservazione della proporzione fra gli ingredienti);
- abituano il bambino a ricercare il senso dei dati numerici contenuti nel testo del problema;
- possono favorire lo sviluppo di situazioni di *problem posing*, quando si ragiona sul costo reale della produzione realizzata.

Le situazioni di questo tipo sollecitano anche l’approccio alle prime riflessioni su concetti di natura economica: concetto di “convenienza”; la formazione del prezzo di un bene frutto di una lavorazione; la distinzione fra elementi diversi che partecipano alla realizzazione di una produzione: componenti che si “consumano” (gli ingredienti) e componenti che si possono riutilizzare (attrezzi, strumenti e macchine) e le diverse conseguenze che ciò ha relativamente al calcolo dei costi.

Commento
Il contesto delle “produzioni” non deve divenire un terreno di lavoro ripetitivo, dove si ripropongono le medesime situazioni problematiche e dove si abitua il bambino a seguire un determinato copione di problemi da risolvere. Ad esempio, può essere utile variare l’approccio alla produzione: si può partire dalla ricetta oppure vedere la ricetta un passaggio intermedio. E’ però importante notare come per il bambino debbano divenire abituali certi “comportamenti” intellettuali: ad esempio, la trattazione consapevole del numero, in stretto collegamento con il ragionamento effettuato per raggiungere l’obiettivo, oppure l’aderenza del pensiero alla situazione problematica. Ciò è possibile se le situazioni problematiche sono situate in un contesto reale, connesso con il “fare”: esse assumono un significato che permette al bambino di riconoscere anche il senso delle proprie scelte.
E’ importante che l’insegnante osservi il comportamento degli allievi per poter dialogare con le rappresentazioni mentali dei bambini della classe, cogliendo sia le opportunità da valorizzare sia gli elementi di difficoltà manifestati. E’ opportuno perciò che la metodologia di lavoro intrecci i necessari momenti di lavoro individuale con i momenti di discussione collettiva, connessi dalle

attività di confronto (di strategie risolutive, di procedure di calcolo, di ipotesi, ecc.) predisposte dall'insegnante.

Descrizione delle attività

Ogni produzione, dal punto di vista matematico, può essere utilizzata per il calcolo della spesa che comporta la sua realizzazione **(attività 1)**: se si producono in classe i biscotti, sorge l'esigenza di stabilire "quanto si spende", magari per sapere se sono sufficienti i soldi della cassa della classe…, oppure per suddividere poi la spesa fra i bambini….
Si può facilmente intuire che se si avvia il lavoro a partire da una ricetta, questo richiede una serie di passaggi: individuazione degli ingredienti necessari; individuazione del tipo di confezioni da acquistare, per ciascun ingrediente, in relazione alla quantità occorrente; ricerca del costo; calcolo della spesa totale. Ora, questi passaggi normalmente (nella proposizione di un problema nella forma scolastica standard) sono effettuati dall'insegnante: a carico degli allievi rimane il calcolo finale. Il contesto delle produzioni offre la possibilità di esplorare le situazioni problematiche abituando i bambini alla ricerca dei dati e alla loro pertinenza rispetto all'obiettivo. In altre parole, è possibile sviluppare le competenze attinenti la progettazione della risoluzione come processo che non si limita (e non si esaurisce) ad eseguire "operazioni", ma che costruisce il senso del lavoro con i numeri. In ogni produzione, a partire dalla ricetta, possono essere curati uno o più degli aspetti indicati: in tal modo il calcolo della spesa effettuata non diviene routine.

Gradualmente l'insegnante può cogliere l'opportunità di far riflettere i bambini sul fatto che non si è consumato tutto ciò che si è acquistato **(attività 2)**. Ciò pone un problema nuovo: (ad esempio) "*quanto costeranno i biscotti che abbiamo preparato ?*". Se è stata acquistata una confezione da un chilo di zucchero e ne sono stati utilizzati 5 etti, l'obiettivo può divenire il calcolo del costo reale dello zucchero utilizzato. Porre il problema in questi termini significa abituare i bambini ad operare su numeri apparentemente immodificabili (come quelli che esprimono i prezzi), a ricercare strategie personali per risolvere i problemi mettendo in relazione e coordinando le conoscenze in via di acquisizione (nell'esempio: la conoscenza delle misure di peso è indispensabile per comprendere che la quantità utilizzata è la metà della quantità acquistata), a comprendere il senso delle operazioni (nell'esempio: la divisione a metà del prezzo costituisce una avvio al ragionamento di proporzionalità, per cui se uso la metà della quantità acquistata, il suo costo sarà la metà della quantità intera).
Il problema del calcolo del costo reale della produzione realizzata può essere posto a diversi gradi di complessità: può riguardare un particolare ingrediente oppure il costo dell'intera produzione. Naturalmente occorre prestare attenzione alla complessità delle situazioni problematiche.

Fra i problemi che naturalmente ci si può porre, relativamente alla necessità di procurarsi gli ingredienti necessari a realizzare una certa produzione, c'è anche il problema del confronto fra i prezzi di confezioni diverse di uno stesso ingrediente **(attività 3)***: "Se per preparare i biscotti si ha bisogno di 200 g di burro, quali confezioni fra quelle in commercio, è meglio acquistare ? Quale soluzione è più conveniente ?"* Oltre a sollecitare interessanti questioni matematiche, situazioni di questo tipo abituano i bambini a tener conto di più variabili nella scelta (peso e costo, ad esempio).

Mentre le attività 1-3 propongono un approccio al numero e alle operazioni con i numeri che richiama soprattutto una relazione di *comprensione, riflessione* e *scelta operativa*, le **attività 4 e 5** sollecitano maggiormente l'attivazione di processi di pensiero attinenti la *progettualità*.
Nel contesto "Ricette e Produzioni" l'insegnante, rispetto alla proposizione di problemi, può formulare agli allievi richieste di tipo diverso.
Innanzitutto quella che chiameremo <u>"formulazione scolastica standard del problema"</u>*:* un testo sintetico, che contiene enunciati attinenti una determinata situazione problematica, che forniscono al bambino un certo numero di informazioni date con le parole e i numeri, in genere sufficienti a raggiungere l'obiettivo richiesto dal quesito contenuto nel testo. E' il problema scolastico nella sua

forma tradizionale (come quello trattato nell'attività 1): la sua risoluzione può richiedere la scelta di una operazione oppure può richiedere la pianificazione di un progetto che individui i passi intermedi necessari a raggiungere l'obiettivo.
Ad esempio, una consegna di questo tipo potrebbe essere: *"La maestra ha comprato gli ingredienti per fare la torta di mele: la farina che costa 0,55 euro, lo zucchero che costa 0,90 euro, il burro a 1,50 euro, 4 uova che costano 0,15 euro l'una, due chili di mele a 1 euro il chilo, il lievito che costa 0,40 euro. Quanto ha speso in tutto la maestra ?"*
Che cosa deve fare il bambino per risolvere il problema ? Deve innanzitutto comprendere il testo, attribuendo un significato ai termini linguistici e connettendo i dati numerici al loro referente semantico. Questo deve permettere al bambino di capire che, ad esempio, nel caso delle uova il prezzo si riferisce ad un uovo e che per preparare la torta ci vogliono 4 uova. Nella comprensione del testo un supporto importante (soprattutto per i bambini più deboli) può essere dato dal fatto che il testo del problema si riferisca ad una situazione concretamente sperimentata, anziché ad una situazione totalmente fittizia. Si può aggiungere che il bambino, per produrre una strategia risolutiva corretta, deve individuare le relazioni fra i dati presenti nel testo del problema, riconoscendo congruenti certe operazioni e non altre. All'interno dell'operazione individuata deve riconoscere gli elementi da prendere in considerazione (ad esempio: non 0,55 + 0,90 + 1,50 + 4 + 0,15 + … !), individuando le operazioni propedeutiche. Si può comprendere che le operazioni mentali richieste al bambino siano notevoli: si tratta di progettare una risoluzione partendo da informazioni che altri selezionano e forniscono, operando processi di scelta consapevoli che tengano conto dell'obiettivo da raggiungere.
Un'altra possibile consegna che l'insegnante può utilizzare è la seguente **(situazione 4)**: *"Per fare la torta di mele dobbiamo comprare questi ingredienti: una confezione di farina, una di zucchero, quattro uova, una confezione di burro, due chili di mele, una bustina di lievito. Spiega come faresti a calcolare quanto dovrà spendere la maestra oggi pomeriggio per comprare questi ingredienti"*.
La consegna ha la particolarità di "non contenere dati numerici" e di non richiedere al bambino una soluzione numerica, ma la esplicitazione del processo risolutivo. Come la precedente, anche questa consegna richiede la comprensione del testo e l'individuazione delle relazioni fra le variabili del problema. L'assenza dei dati numerici rappresenta un elemento di complessità. Infatti, il progetto di una strategia risolutiva, in assenza della particolarizzazione numerica che consente il collegamento diretto con l'oggetto presente nella situazione problematica, risulta molto complesso in quanto presuppone un distacco dal calcolo, ma contemporaneamente richiede la denominazione delle operazioni fra gli "elementi" del problema. Si può qui osservare che dire "0,15 euro" e dire "il costo di un uovo" non hanno lo stesso grado di astrazione. Inoltre, questo tipo di consegna forza i bambini all'uso del linguaggio verbale come registro per rappresentare il ragionamento, con i problemi di congruenza sottostanti. Ad esempio, dire: *"Aggiungo il prezzo della farina a quello dello zucchero"* può essere accettabile dal punto di vista dell'individuazione della strategia risolutiva globale, mentre dire: *"il prezzo delle uova"* può nascondere una mancata discriminazione semantica (il prezzo di un uovo ? di 4 uova ? di una confezione ?).

Una terza possibile consegna **(situazione 5)** è quella data in "forma aperta", dove è espressa la situazione problematica e l'obiettivo da raggiungere, senza fornire dati numerici o selezionare preventivamente le informazioni pertinenti.
Ad esempio la consegna: *"Abbiamo deciso di preparare una torta di mele seguendo la ricetta che vi ho dato. Come possiamo fare per sapere se i soldi che abbiamo nella cassa della classe ci basteranno per acquistare gli ingredienti ?"* mette il bambino nella condizione di dover compiere quelle operazioni di selezione e di anticipazione che usualmente sono effettuate dall'insegnante. Il problema formulato in questo modo consente lo sviluppo di competenze necessarie per affrontare i problemi con dati numerici e senza dati numerici.
Innanzitutto il bambino deve individuare i dati e, come per il problema senza dati numerici, si pone la questione di una denominazione semanticamente congruente. Il bambino, attraverso l'interazione

scritta, ha la possibilità di reperire i dati numerici, richiedendoli, ad esempio, all'insegnante. L'insegnante ha, dal canto suo, la possibilità di intervenire per ricondurre il bambino al significato della sua richiesta, sottolineando la differenza fra espressioni del tipo: "*Quanto costa lo zucchero?*" e espressioni del tipo:*"Che confezioni di zucchero si possono comprare ?* … *Quanto costa una confezione di zucchero da un chilo ?*

Inoltre, una costruzione "dall'interno" del problema permette di indirizzare il bambino verso un atteggiamento intellettuale che connette il reperimento dei dati con il loro utilizzo prefigurato: questo consente di curare la costruzione della strategia risolutiva come costruzione progettuale. La ricerca dei dati, infatti, sembra favorire processi di anticipazione, in quanto il bambino si abitua a porsi domande circa l'utilizzo del dato individuato. Infine, consegne di questo tipo possono favorire nel bambino il distacco dal "gioco con i numeri", entrando nel merito di difficoltà nella risoluzione di problemi ben conosciute dagli insegnanti (ad esempio, l'eccessiva importanza data al calcolo e al "risultato", la combinazione casuale dei numeri in un'operazione qualsiasi, i fenomeni di blocco, ecc).

Occorre precisare che le tre tipologie di "problema" non sono da intendersi in successione: si tratta di alternare le modalità di proposizione di problemi, in modo da non creare abitudini troppo rigide.

La consegna 5 così è formulata (ma il discorso è estendibile anche alle consegne precedenti) richiede una breve nota riguardante il contratto didattico. Deve essere chiaro, sia all'insegnante che all'alunno, che un problema può ammettere più possibilità di risoluzione e che il bambino non deve essere indotto all'adesione ad un *unico* procedimento risolutivo. Le strategie elaborate dai bambini devono essere oggetto di confronto e di discussione in classe e queste devono essere attività mirate all'evoluzione delle competenze individuali. E' altresì importante che l'insegnante tenga conto che consegne come quella riportate nelle situazioni 4 e 5 possono mettere a disagio i bambini che hanno difficoltà ad attivarsi autonomamente nei processi di tipo progettuale e che tendono piuttosto a ricercare modelli convergenti. Per le ragioni espresse precedentemente, è importante che proprio questi bambini esplorino le situazioni problematiche senza dati numerici e le situazioni problematiche "aperte", ma è altrettanto importante che trovino un adeguato sostegno da parte dell'insegnante.

Il postino delle frazioni di Acquafredda.

Livello scolare: 5° elementare

Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare relazioni tra dati numerici. Usare coordinate cartesiane, diagrammi e tabelle per rappresentare le relazioni. Produrre e verificare soluzioni e congetture.	Relazioni e loro rappresentazioni. Diagrammi di vario tipo.	Le relazioni. Risolvere problemi. Argomentare e congetturare.	

Contesto

La proposta didattica si inserisce nel contesto della riflessione sui fenomeni ricorsivi e sulla loro matematizzazione.

La struttura portante è l'individuazione del ciclo costante, in un intervallo di tempo, a partire dal quale è possibile effettuare numerose operazioni, in vista della risoluzione di diversi problemi.

.

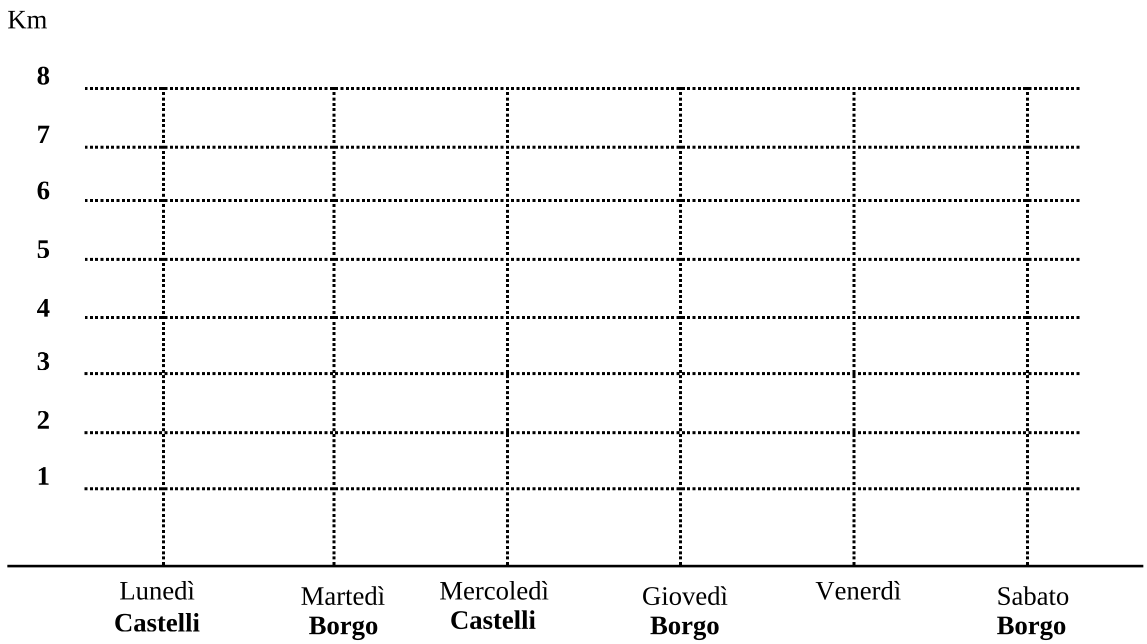
Descrizione dell'attività con indicazioni didattiche

Prima fase

L'insegnante presenta la seguente situazione problema:

> *Al signor Borrelli, postino di Castelli e di Borgo, due frazioni del Comune di Acquafredda, è stato affidato il compito di consegnare la posta almeno tre giorni alla settimana in ognuna delle due frazioni. La frazione di Borgo dista dall'ufficio postale due chilometri in più della frazione di Castelli. Gli abitanti delle due frazioni hanno chiesto ed ottenuto il servizio di consegna della posta a giorni alterni.*
> *Il postino, per non sbagliare nella consegna della posta, ha elaborato una tabella settimanale che gli permette di avere sotto controllo il servizio prestato e il conteggio dei chilometri, per i quali riceve una indennità di L. 580 per ogni chilometro percorso. Il postino consegna la posta per due settimane, percorrendo in tutto 60 chilometri. Quale tabella ha elaborato il postino e quanto dista ogni frazione dall'Ufficio postale di Acquafredda?*

L’insegnante invita gli alunni a rappresentare graficamente la consegna della posta nelle due frazioni, sulla base dei giorni lavorativi e delle distanze chilometriche percorse dal postino.



Seconda fase

L’insegnante, dopo aver visionato le rappresentazioni grafiche degli alunni, ripercorre il processo di costruzione della tabella, creando una situazione di lezione interattiva e invitando gli alunni a costruire, passo dopo passo, i grafici, fino alla soluzione del problema.

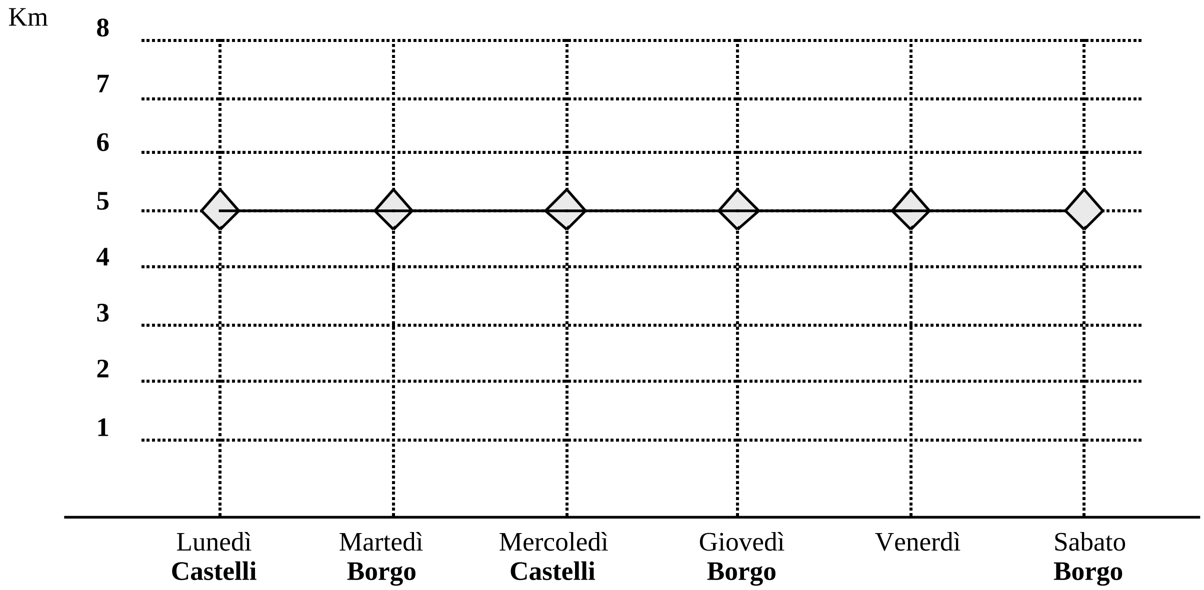
Per aiutare gli alunni a leggere e ad operare con i dati forniti dalla situazione problema, l’insegnante potrebbe invitare a considerare il periodo di una settimana lavorativa (dal lunedì al sabato) e quindi un totale di 30 chilometri.

Domanda stimolo:

Se le due frazioni avessero la stessa distanza dall’ufficio postale, quanti chilometri percorrerebbe al giorno il postino?

___

Come apparirebbe, in questo caso, la linea sul piano cartesiano?
Apparirebbe in questo modo: (L’insegnante disegna alla lavagna il grafico relativo)



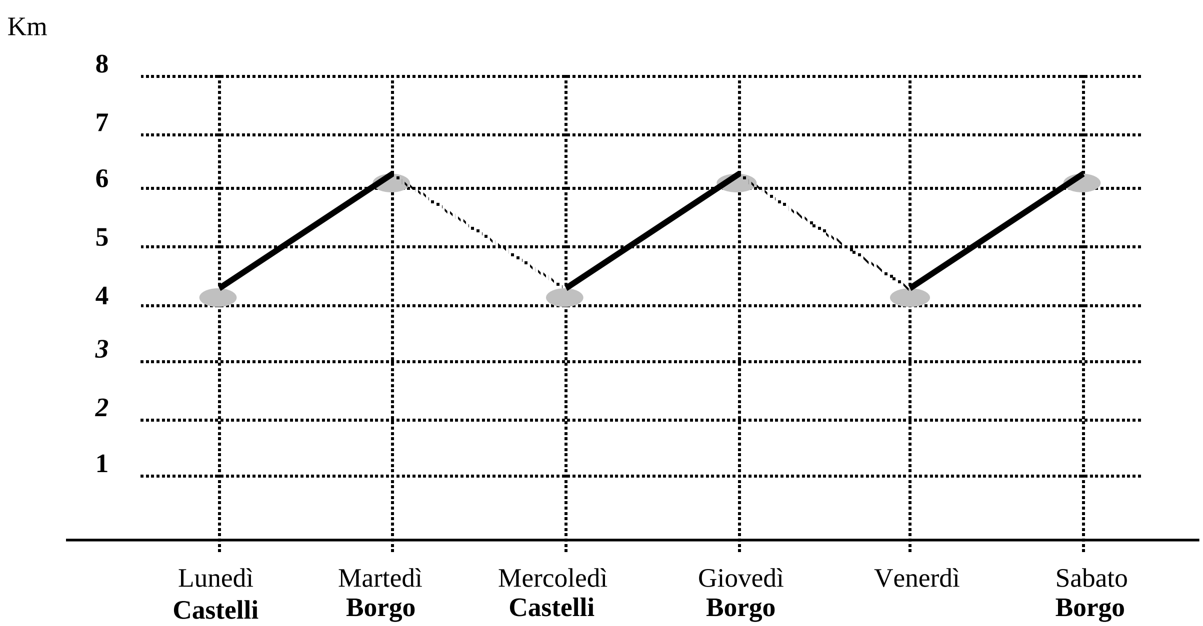
Questa rappresentazione non corrisponde alla realtà, perché sappiamo che una frazione dista due chilometri più dell’altra.

Terza fase
Domanda stimolo:
Prendiamo in considerazione due giorni consecutivi (es: lunedì-martedì): quanti chilometri percorre il postino?

Se in una settimana il postino percorre_____ chilometri, quanti chilometri percorre nei due giorni considerati?

Distribuiamo i chilometri percorsi nei due giorni secondo le indicazioni del problema:
Borgo dista 2 chilometri in più di Castelli.

Gli alunni cercano la soluzione e poi rappresentano, mediante un grafico, il percorso chilometrico settimanale del postino.



L'insegnante invita gli alunni ad osservare il grafico e ad esporre le loro osservazioni.

Facilmente gli alunni dovrebbero osservare che il modulo 4 e 4+2 si ripete ciclicamente nell'arco della settimana.

I 30 chilometri percorsi dal postino si sviluppano 3 volte secondo la funzione del 4 e tre volte secondo la funzione del 6.

Quarta fase

L'insegnante potrebbe invitare gli alunni a risolvere il problema del postino anche ricorrendo alle equazioni.
Assegnando ad x la misura di una delle distanze che non conosciamo (ad esempio alla distanza della frazione **Castelli**) e a x+2 la distanza dell'altra frazione avremo che:

$30= x +(x + 2)+ x +(x + 2)+ x +(x + 2)$
$30=6x + 6$
$30-6=6x$
$24=6x \quad x=4$

Quinta fase

L'insegnante potrebbe invitare gli alunni a calcolare l'indennità chilometrica percepita dal postino dopo un determinato numero di settimane lavorative

.

SCUOLA MEDIA

La macchina distributrice di chicchi di grano

Livello scolare: 1[a] media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze: (Descrivere le funzioni all'interno di un ciclo ricorsivo). Usare coordinate cartesiane, diagrammi, tabelle per rappresenta re relazioni e funzioni:	Alcune relazioni significative(le funzioni all'interno di un ciclo ricorsivo) Funzioni, tabulazioni e grafici.	Le relazioni. Il numero. I dati e le previsioni. Argomentare e congetturare. Risolvere i problemi.	Nuove tecnologie.

Contesto
La proposta si inserisce nel contesto della riflessione sui fenomeni ricorsivi e sulla loro matematizzazione.
La struttura portante è l'individuazione del ciclo costante, in un intervallo di tempo, a partire dal quale è possibile effettuare numerose operazioni, in vista della risoluzione di diversi problemi.

Descrizione dell'attività con indicazioni didattiche
Prima fase
L'insegnante presenta la seguente situazione problema:

In un piccolo allevamento di pulcini c'è una macchina automatica distributrice di chicchi di grano.
Il braccio distributore di chicchi è controllato da un computer e da una telecamera, che dopo aver registrato il numero dei pulcini presenti nelle gabbie, inviano il segnale per la distribuzione di un certo numero di chicchi. Un giro completo del braccio distributore, davanti alle quattro gabbie presenti nell'allevamento, avviene ogni due minuti.
Dopo 30 minuti la macchina ha distribuito 780 chicchi di grano nel seguente modo:
- prima gabbia: 4 chicchi in più della terza
- seconda gabbia : 5 chicchi in più della terza
- terza gabbia: 4 in meno della prima
- quarta gabbia: 3 chicchi in più della terza

Si tratta di invitare gli alunni a comprendere il funzionamento ciclico di questa macchina.
Per aiutare gli alunni ad operare con i dati forniti dalla situazione problema, l'insegnante potrebbe orientare la loro attenzione sul ciclo di distribuzione che si chiude ogni due minuti.

Se la macchina chiude il ciclo di distribuzione ogni due minuti, quanti cicli compie la macchina in 30 minuti?_____________

Se la macchina distribuisce 780 chicchi di grano in trenta minuti, quanti chicchi distribuisce in ogni ciclo?

Calcola

Totale chicchi di grano in trenta minuti: 780

Totale cicli in 30 minuti:________________________

Chicchi di grano distribuiti in ogni ciclo: ___________

Seconda fase
Successivamente, per scoprire quanti chicchi la macchina lascia davanti ad ogni gabbia durante ogni ciclo di distribuzione, l'insegnante potrebbe invitare gli alunni a costruire un grafico sul quale evidenziare l'andamento ciclico della distribuzione dei chicchi.

L'insegnante distribuisce una scheda di lavoro, con le indicazioni operative:

Completa la seguente tabella, inserendo nelle celle, davanti alle gabbie, i chicchi di grano.
Disegna i chicchi (uno in ogni cella, dal basso verso l' alto), rispettando le regole di funzionamento della macchina distributrice, che sono:

- prima gabbia: **4** chicchi **in più** della terza
- seconda gabbia : **5** chicchi **in più** della terza
- terza gabbia: **4 in meno** della prima
- quarta gabbia: **3** chicchi **in più** della terza

Tieni presente il numero di chicchi di grano distribuiti dalla macchina in ogni ciclo e

Primo ciclo di funzionamento				*Secondo ciclo di funzionamento*			
1ª *gabbia*	2ª *gabbia*	3ª *gabbia*	4ª *gabbia*	1ª *gabbia*	2ª *gabbia*	3ª *gabbia*	4ª *gabbia*

Completa la tabella considerando 2 cicli di funzionamento.

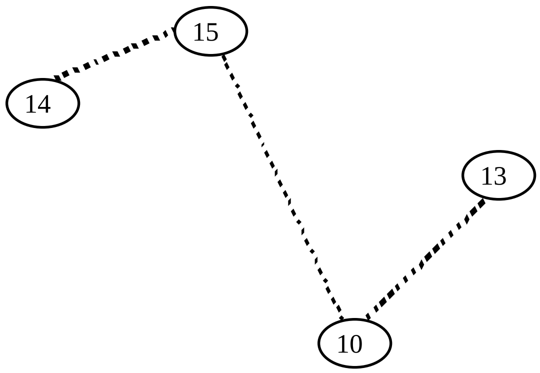
Terza fase

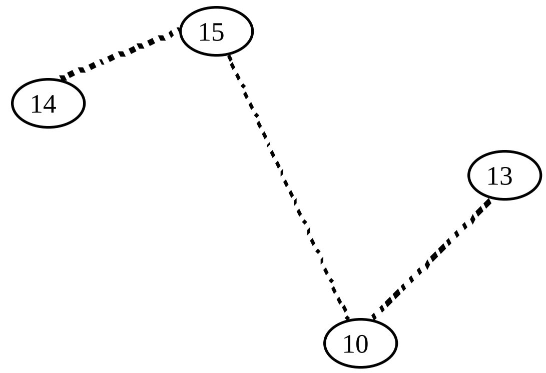
Dopo che gli alunni avranno sistemato i chicchi davanti alle gabbie, l'insegnante li invita a mettere i numeri al posto dei chicchi (partendo dal primo chicco in basso), in un'altra tabella simile alla precedente.

Primo ciclo di funzionamento				Secondo ciclo di funzionamento			
1	1	1	1	1	1	1	1
1°gabbia	2°gabbia	3°gabbia	4°gabbia	1°gabbia	2°gabbia	3°gabbia	4°gabbia

Successivamente, si cerchieranno i numeri corrispondenti ai chicchi di grano distribuiti esattamente dalla macchina davanti ad ogni gabbia.

L'insegnante inviterà gli alunni a unire con delle linee i numeri cerchiati. Si otterrà *l'onda ciclica.*





Quarta fase
L’insegnante potrebbe suggerire di calcolare quanti chicchi di grano saranno distribuiti dalla macchina ogni ora di funzionamento, ogni 12 ore di funzionamento e così via.

Inoltre, aggiungendo altri dati relativi al peso medio di ogni chicco e al costo di ogni chilogrammo di grano per l’allevatore, si potrebbero formulare altri tipi di problemi che avrebbero come base di riferimento la ricorsività del funzionamento della macchina distributrice.

Cambiando i dati relativi al ciclo di funzionamento (la quantità distribuita davanti ad ogni gabbia), potrebbero essere scoperte altre regolarità.

La proposta didattica si presta ad essere utilizzata anche per lo studio delle equazioni di primo grado.

Quanti siamo in casa

Livello scolare: 1^{a} media

Competenze interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l’obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere Individuare le risorse necessarie per raggiungere l’obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema Collegare le risorse all'obiettivo da	<u>Dati e previsioni</u> Caratteri derivanti da misurazioni Classificazione di dati con intervalli di ampiezza uguale o diversa L'istogramma di frequenze Campione estratto da una popolazione: esempi di campioni rappresentativi e non	<u>Porsi e risolvere problemi</u> Argomentare e congetturare Dati e previsioni	Lingua italiana

raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,…), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad es. passando dal problema considerato ad una classe di problemi	rappresentativi Media aritmetica		

Contesto: aspetti della realtà di tipo socio-demografico

Commento

L'indagine statistica può essere considerata come fase irrinunciabile di un processo di ricerca di strategie risolutive, in special modo se consideriamo problematiche di ordine sociale, commerciale, ecc… La statistica, infatti, pone l'attenzione ad un momento particolarmente significativo, quale è la raccolta di informazioni rispetto alla situazione problematica al fine di giungere ad una strategia risolutiva il più possibile efficace.
L'attività diviene significativa solo se sono già state affrontate le tematiche riguardanti le procedure e le modalità di rilevazione statistica.

Descrizione dell'attività

Con questa attività si vuole sottolineare l'importanza di leggere e confrontare una tabella e quindi di rilevarne le informazioni utili

Con la conclusione del Censimento Nazionale 2001, si potrebbe proporre una rilevazione statistica relativa a "FAMIGLIE PER NUMERO DI COMPONENTI" da svolgere all'interno della classe. Ogni alunno viene invitato a fornire il numero dei componenti del proprio nucleo familiare, incluso se stesso.
Può essere opportuno sostituire la richiesta di informazione prima espressa con la seguente domanda: "quante persone vivono in casa tua, te compreso"; convenendo di chiamare nucleo familiare l'insieme di persone che vivono abitualmente nella stessa casa.
Questa indagine a carattere quantitativo permette di:

- avviare una discussione su quale potrebbe essere la motivazione all'indagine
- raccogliere i dati secondo procedure e modalità proprie della statistica
- organizzare e rappresentare i dati con tabelle o grafici
- individuare e calcolare i valori sintetici di moda, mediana e media aritmetica e analizzarli criticamente
- prendere in considerazione i dati di fonte ISTAT e metterli a confronto con i dati della classe
- avviare una discussione critica dalla quale possa emergere come l'indagine svolta in classe non è generalizzabile, difatti, il nucleo familiare degli alunni è costituito da almeno 2 persone (il bambino e un adulto) mentre nella realtà sociale esistono nuclei familiari anche di un solo componente.

Verifica
Proporre tabelle di rilevazioni demografiche dalle quali ricavare dati (che possono dar adito anche a riflessioni di tipo storico-geografico).

Il bersaglio

Livello scolare: 1^a - 2^a media

Competenze interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei tematici e di processo interessati	Collegamenti esterni
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere		Risolvere e porsi problemi	Educazione tecnica Educazione fisica
	Operazioni con i numeri interi	Numero	
Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema	Omotetie, similitudini Lunghezza della circonferenza e area del cerchio Rapporto tra grandezze	Geometria	
Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema	Caratteri derivanti da misurazioni	Misura	
Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le	Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o	Relazioni	

azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,…), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all'obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate	perpendicolare a, …) Funzioni: tabulazioni e grafici Semplici questioni di tipo combinatorio Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di semplici eventi	Dati e Previsioni Argomentare	

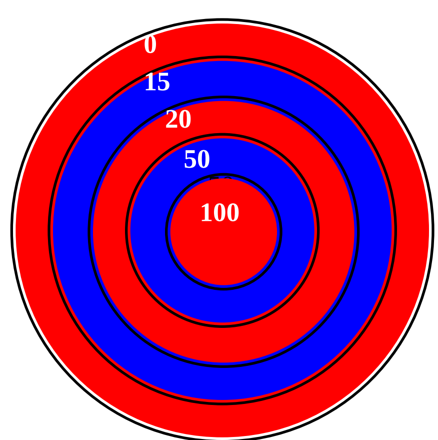
Contesto
Si tratta di una tipica attività nella quale l'insegnante suggerisce l'idea di un gioco non strutturato e concorda con gli alunni le modalità operative e le regole. Il percorso didattico si sviluppa sia nella fase operativa che in quella di vero e proprio gioco ambiti nei quali l'esperienza diretta costruisce conoscenza e competenze.
Vengono proposte alla fine due prove di verifica.

Descrizione dell'attività
1ª fase:. costruzione dei bersagli, scelta dei parametri importanti per stabilire regole e primi giochi

I bersagli possono essere preparati dagli alunni stessi disegnando cerchi concentrici sui cartelloni. Inizialmente ogni gruppo (4/5 alunni) potrà costruire liberamente il proprio bersaglio, poi il confronto tra le diverse produzioni effettuate potrà fornire l'occasione di affrontare in forma problematica numerose questioni.
Possibili questioni da discutere:
- quali punteggi assegnare ad ogni freccetta che cade su una corona circolare del bersaglio.
- mettiamo lo stesso punteggio per ogni corona circolare? Sono tutte ugualmente raggiungibili?
- è più facile colpire, in uno stesso bersaglio, la corona circolare più esterna o quella più interna? o il cerchietto centrale? Perché?
- assegniamo lo stesso punteggio ad un bersaglio con corone circolari grandi e ad uno con corone circolari più piccole? Se sì perché? Se no perché?
- Quali regole concordare per fare un torneo? E' importante valutare anche la distanza dal bersaglio? Perché? Deve essere uguale per tutti? ecc..

- 2ª fase: piccolo torneo di "tiro al bersaglio" in classe.

Scelta di un unico bersaglio per fare il torneo
- Definizione di regole come: la distanza del giocatore dal bersaglio, 3 freccette per ogni alunno, ogni giocatore ha a disposizione 3 lanci consecutivi (serie) ottenendo un certo punteggio, ogni partita è costituita da un numero fissato di serie, vince la partita chi ottiene il punteggio maggiore sommando quelli totalizzati nelle singole serie, ecc.



- Suddivisione della classe in piccoli gruppi di 4 alunni, per ogni gruppo si assegnano dei ruoli, intercambiabili alla fine di ogni partita: 2 giocatori, un contatore dei rispettivi punteggi per serie e per partita, un arbitro per dirimere le eventuali divergenze di valutazione. Alla fine della prima partita ci si scambiano i ruoli. Ogni gruppo gioca tre partite (se si gioca ad eliminazione diretta).
- Il vincitore di ogni gruppo da 4 alunni gareggerà poi con gli altri vincitori fino ad eleggere per eliminazione il vincitore del torneo.

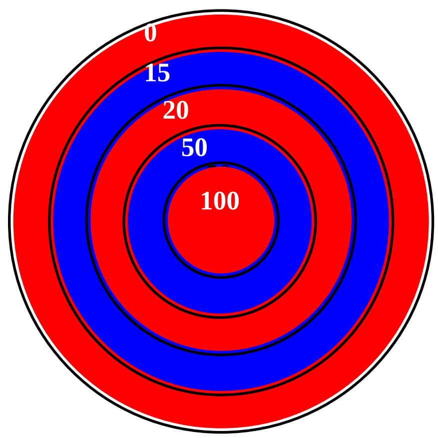
<u>Commento</u>

La prima fase di costruzione dei bersagli sarà finalizzata a rendere equo il gioco.
Ciò verrà fatto confrontando sia aree, possibilità, eventi ma soprattutto, prendendo coscienza che alcuni parametri (grandezza dei cerchi, la distanza di tiro, ecc..) sono facilmente misurabili ed è possibile sceglierli uguali per tutti; altri invece (il coordinamento mani/occhio, la forza di tiro, la traiettoria scelta) non sono facilmente misurabili, dipendono dalle caratteristiche individuali e saranno quelle che determineranno il vincitore.
Nella seconda fase prevale una componente organizzativa che richiede la pianificazione degli incontri, della raccolta dei risultati di ogni partita, della gestione dei tempi, dello scambio dei ruoli all'interno dei gruppi.
Il gioco vero e proprio darà l'occasione di rispettare regole regole condivise e di……. Divertirsi.

Elementi di prove di verifica (il bersaglio)

1. *Sandro ha giocato con Mara una partita formata da sei serie di tre tiri totalizzando, per ogni serie, i seguenti punteggi: 150,135,100,90, 65, 55.*
   Quanti punti ha ottenuto in ogni tiro di ciascuna serie?
   Quanti punti deve realizzare in tutto Mara per vincere Sandro? Motiva la tua risposta

2. Tu e il tuo più caro amico avete partecipato a due differenti tornei di tiro al bersaglio e siete arrivati entrambi quarti. Quali domande gli rivolgeresti per capire chi dei due è stato più bravo in questo gioco?
   Esplicita il motivo che ti spinge a fare ciascuna domanda e spiega le tue conclusioni finali.



Da un'idea tratta da :
Il numero e le abilità numeriche. Problemi
A cura di C. Bernardi, L.Cannizzaro, N. Lanciano, P. Mentrasti
La Nuova Italia

Gioco della casetta

Livello scolare: 1^a media

Competenze Interessate	Contenuti dei nuclei tematici coinvolti	Nuclei tematici e di processo interessati	Collegamenti esterni
Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori; Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,…), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica,	Operazioni con i numeri interi Numeri primi Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a, …) Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di semplici eventi	Risolvere e porsi problemi Numero Le relazioni Dati e previsioni Argomentare e congetturare	Lingua italiana

all'obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti Valutare i procedimenti esaminati con riferimento alla economia di pensiero, alla semplicità di calcolo, e alla possibilità di applicarli in altre situazioni			

Contesto
Il gioco come ambito nel quale gli alunni sono naturalmente portati a rispettare regole, valutare situazioni di incertezza, prendere decisioni, acquisire la capacità di prendere decisioni rispetto a strategie diverse, riaggiornare i progetti già formulati ecc...

Descrizione dell'attività
Un gruppo di ragazzi giocano nel giardino del Re di Bratellonia. Il giardino è quadrato ed è costituito da 25 casette numerate, come nel disegno. Obiettivo del gioco è arrivare per primi, entrando nella casetta N. 1, la prima in alto a sinistra ad arrivare alla casa del Re, cioè alla casetta N. 25, l'ultima in basso a destra.. A chi entra vengono dati 4 cioccolatini ma il suo paniere può aumentare o diminuire durante il corso del gioco.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**

Per passare, **senza saltare**, da una casetta all'altra ci sono però le seguenti regole da ricordare:

- Per entrare in una casetta col numero Pari si paga un Cioccolatino;
- Le casette con un numero primo (diverso da 2) regalano un cioccolatino
- Le casette con i numeri della Tabellina del 5 regalano ciascuna 2 cioccolatini;
- Per entrare nella casetta 17 si pagano 2 Cioccolatini;
- La casetta 21 regala 6 cioccolatini;

- La casetta 13 è un Pozzo da cui, se si entra, non si esce più
- Se si rimane senza cioccolatini si resta fermi nella casetta dove siamo arrivati;

La prima fase dell'attività si svolge in gruppi di alunni (da 2 a 4) che si impegnano nel gioco, in varie partite trascrivendo le scelte operate durante il percorso.

Dopo che gli alunni avranno preso confidenza con il gioco si può proporre il seguente quesito:

Andrea, Beppe, Carla e Daniela hanno anche loro giocato nel giardino della casa del Re e sono arrivati alla fine del gioco; raccontano che:

- *Andrea è arrivato passando soltanto attraverso casette con numeri dispari;*
- *Beppe dopo essere partito dalla casetta iniziale, è entrato soltanto in 4 casette;*
- *Carla è arrivata con 12 cioccolatini;*
- *Daniela è arrivata ma è rimasta senza neppure un cioccolatino.*

<u>*Adesso cerchiamo di vedere se Andrea, Beppe, Carla e Daniela hanno detto la verità!*</u>

Commento
L'attività si può rendere più complessa, scegliendo opportunamente le regole del gioco in funzione delle abilità degli alunni, o semplificata diminuendo il numero delle regole da ricordare.. Il docente potrà scegliere se determinare il movimento con il lancio di un dado o concordare con gli alunni le regole per muoversi. La prima scelta rende il gioco più guidato dalla fortuna, la seconda invece può innescare procedimenti di valutazione e di scelta.
Ad ogni passo del percorso si verifica se quel che abbiamo fatto è stato vantaggioso e si può chiedere cosa fare, se conviene tornare indietro, muoversi in diagonale o in orizzontale o in verticale, quanti passi fare, ecc..
Si può anche semplificare scegliendo una sola delle precedenti affermazioni.

I cerchi tangenti

Livello scolare: 3° media

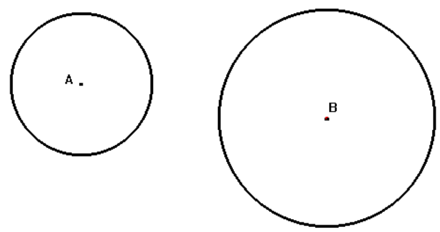
Competenze Interessate	**Contenuti dei nuclei tematici coinvolti**	**Nuclei tematici e di processo interessati**	**Collegamenti esterni**
Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure anche ricorrendo ad opportuni strumenti	Le principali figure del piano e dello spazio	Porsi e risolvere problemi Lo spazio e le figure Congetturare ed argomentare	Educazione tecnica

Contesto: figure geometriche nel piano come oggetti di studio
La situazione problematica parte da un problema su cerchi tangenti. I ragazzi conoscono le condizioni di tangenza in quanto hanno precedentemente lavorato nel campo di esperienza di ruote

e ingranaggi e sono arrivati al cerchio come forma che meglio modellizza la ruota (vedi esempio Nucleo tematico “Lo spazio e le figure”.

Descrizione dell’attività e commenti

1 - “Disegna un cerchio di raggio 4 cm tangente ai cerchi dati [sono disegnati due cerchi di raggi 2 cm e 3 cm, con distanza tra i centri di 7 cm].
Spiega chiaramente il metodo che usi in modo che altri possano usarlo.
Spiega con cura perché il metodo funziona”.



Si tratta di un problema di costruzione. I ragazzi devono individuare il metodo e giustificarlo. Dal punto di vista geometrico si tratta del classico problema di costruzione col compasso di un triangolo di cui sono assegnati i lati. Anche se i ragazzi conoscono questa costruzione difficilmente la utilizzano in questo contesto. Nel confronto di strategie successivo si arriva a formalizzare il metodo:

- apri il compasso della somma dei raggi del primo cerchio dato e di quello da costruire e traccia la circonferenza con centro A;
- apri il compasso della somma dei raggi del primo cerchio dato e di quello da costruire e traccia la circonferenza con centro B;
- il punto di intersezione è il centro del cerchio tangente (Fig.1) .

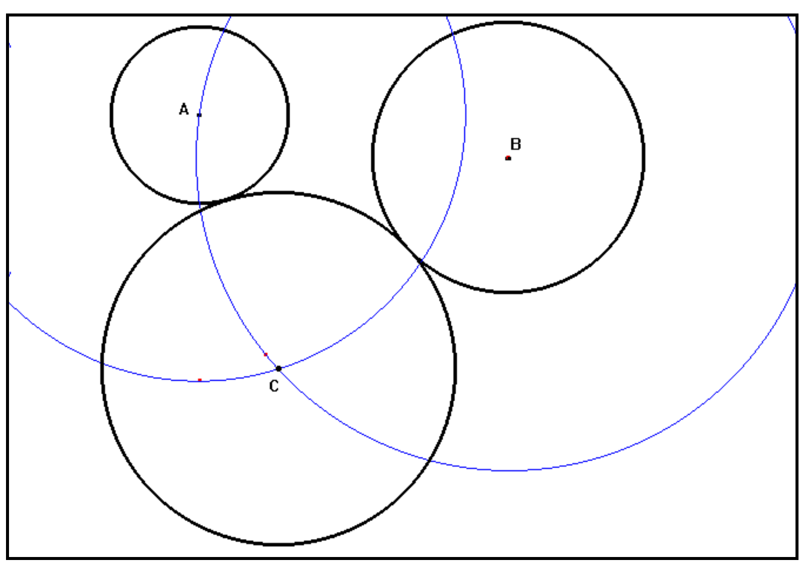


Fig.1

2 – Il problema 1 ha una sola soluzione?
In questo modo la maggior parte degli allievi individua la soluzione simmetrica
3 – Nel problema 1 il raggio del cerchio tangente era di 4 cm. Se il raggio fosse stato lungo a piacere? Disegna diversi cerchi tangenti e fai le tue osservazioni.
Si tratta di una richiesta di esplorazione che porta i ragazzi alle seguenti scoperte:

- esiste un cerchio di raggio minimo (1 cm);
- non esiste un cerchio di raggio massimo;
- i centri sono situati lungo una "*linea curva*" (ramo d'iperbole).

4 – In quale caso i centri dei cerchi tangenti stanno su una linea retta? Fai alcune prove ed argomenta la tua risposta.
Attraverso prove diverse i ragazzi scoprono che i centri stanno su una linea retta quando i due cerchi di partenza hanno uguale raggio. Così ha spiegato un allievo: " *Questo succede perché, essendo i due cerchi uguali, la linea dei centri dei cerchi tangenti non pende a destra o a sinistra, ma rimane al centro"*. (Fig. 2 e 3)

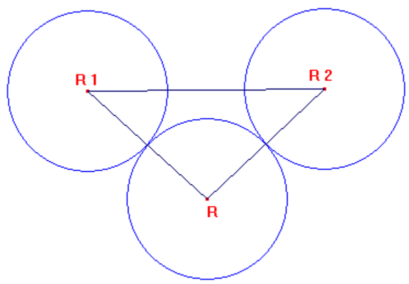


Fig.2

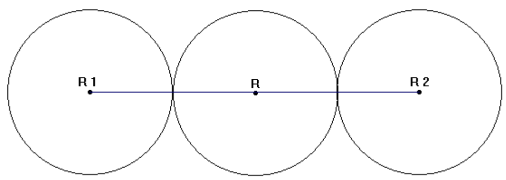


Fig. 3

Elementi di prove di verifica

In cartoleria

Livello scolare: 1ª - 2ª media

Competenze interessate:

- Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere.
- Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema.
- Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori.
- Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,...), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema.

Commento
I problemi più significativi per l'apprendimento sono quelli scaturiti da situazioni tratte dalla realtà dell'alunno nelle quali l'esperienza diretta, ma soprattutto la riflessione su di essa attraverso l'interazione sia con i compagni che con il docente, permette di semplificare il difficile passaggio dal concreto all'astratto. Tuttavia non è raro che la situazione reale sia evocata attraverso un testo scritto e, secondo una tradizione consolidata, che si interpreti una soluzione non data o una soluzione errata come segnale di carenze matematiche. Si trascura spesso cioè che l'ostacolo che ha

impedito l'avvio del processo risolutivo può derivare da una comprensione del testo scritto non corretta o incompleta.
La verifica proposta rappresenta il momento valutativo di un'attività incentrata sulla comprensione del testo del testo di un problema.
Nella verifica qui proposta si chiede agli alunni di leggere attentamente il testo di un problema e di rispondere ad un questionario, opportunamente predisposto dall'insegnante, per valutare la comprensione dei termini utilizzati, il loro significato sia nel linguaggio naturale che in quello matematico, la capacità di individuare dei dati essenziali per la risoluzione del problema e delle relazioni esistenti tra essi, di riconoscere i dati superflui rispetto all'obiettivo che il testo chiede di raggiungere.

Suggerimenti per la formulazione di altre verifiche
Altre verifiche potranno essere predisposte con testi di diversa impostazione: dal tipo standard, la cui unica difficoltà può essere costituita anche solo dalla presenza di termini di uso comune che nel contesto del problema assumono un particolare significato di tipo relazionale, al testo "allo stato grezzo", cioè formulato in un linguaggio colloquiale basandosi su tre aspetti fondamentali:

- *descrizione di una situazione problematica vicina alla realtà del ragazzo;*
- *utilizzo di una forma testuale narrativa, con una esposizione volutamente prolissa che tiene conto degli stati d'animo dei protagonisti;*
- *ricorso, non solo ai dati essenziali alla risoluzione, ma ad informazioni sovrabbondanti o superflue.*

- *È bene che non tutti i quesiti abbiano una sola risposta esatta, sia per controllare il grado di sicurezza posseduto dall'alunno circa le sue convinzioni, sia per evitare che si consolidi la convinzione che* "ogni quesito deve avere una sola risposta".
- *È importante che nel problema ci siano sia dati numerici che non numerici per sondare fino a che punto nella mente dell'alunno sia radicato lo stereotipo che il dato di un problema matematico debba essere necessariamente numerico.*
- *La presenza di dati sovrabbondanti o mancanti e la loro corretta individuazione permetterà di cogliere il controllo che l'alunno esercita delle relazioni esistenti tra i dati del problema e le sue richieste.*
- *I problemi che sono formulati in forma colloquiale con dati sovrabbondanti o mancanti fanno confrontare l'alunno con situazione che, sebbene scritta in un testo, è più vicina a quella che si troverebbe a vivere in una situazione problematica veramente "reale".*

Il testo che si propone è l'esempio di un testo "allo stato grezzo", seguito da una serie di domande a risposta multipla realizzate sul tipo di quelle utilizzati per l'analisi del testo in esercizi di lingua italiana.

Verifica
Leggi attentamente il testo del problema e poi rispondi alle domande che seguono.

IN CARTOLERIA
Giuseppe deve presentare un disegno ad inchiostro di china all'insegnante di educazione artistica e, poiché vorrebbe fare bella figura, è incerto se utilizzare un foglio di carta da lucido come quelli che usa di solito, o un foglio di carta pergamena. Certo questo materiale non lo troverà nell'emporio sotto casa dove è solito acquistare l'occorrente per la scuola, dovrà rivolgersi alla cartoleria specializzata che si trova in una zona centrale della città.
Chiede alla mamma del denaro per le spese che dovrà affrontare e la mamma gli dà 5 € , raccomandandogli di farne buon uso.

Così Giuseppe dopo aver atteso le ore 16 (orario di apertura dei negozi), compra il biglietto dell'autobus del costo di 0,75 € e con l'autobus numero 250 si reca in centro.

In una cartoleria specializzata compra una boccetta di inchiostro di china che costa 2,50 €. Rimane però un po' incerto se comprare il foglio di carta pergamena, o il foglio di carta da lucido che costa molto di meno. Il prezzo del lucido è veramente basso, appena 0,40 €, ma alla fine si decide per la carta pergamena, sperando che dia più valore al suo disegno. Rimane così senza una lira in tasca.

Giuseppe rientra a casa due ore dopo, soddisfatto per gli acquisti fatti, ma qui lo aspetta la mamma che lo rimprovera per aver perso metà del pomeriggio per quegli acquisti e per aver speso tutti i soldi che aveva ricevuto; infine aggiunge: "Ma ti sei fatto bene i conti? Ti sei chiesto quanto avresti risparmiato se ti fossi accontentato del foglio di carta da lucido ?"

Il ragazzo sopporta pazientemente i rimproveri della mamma, ma in cuor suo non può fare a meno di essere più che mai convinto di aver fatto bene. Forse, dopo aver visto il risultato finale (il disegno ad inchiostro di china che Giuseppe intende realizzare), anche la mamma si convincerà che è valsa veramente la pena di spendere qualche lira in più.

Ma..., a proposito..., quanto avrebbe risparmiato Giuseppe comprando il foglio di carta da lucido?

Segna con una crocetta <u>tutte</u> le affermazioni che ritieni vere:

1. *5 € sono:*
   A _ *il denaro che la mamma ha dato a Giuseppe*
   B _ *il denaro che Giuseppe spende durante il pomeriggio*
   C _ *il denaro che Giuseppe spende in cartoleria*
   D _ *il denaro che Giuseppe spende per comprare la carta pergamena.*
2. *Con i 5 € Giuseppe compra*
   A _ *la boccetta di inchiostro di china e il foglio di carta pergamena*
   B _ *la boccetta di inchiostro di china , il foglio di carta pergamena e il biglietto dell'autobus*
   C _ *la boccetta di inchiostro di china, il foglio di carta da lucido e il foglio di carta pergamena*
   D _ *il biglietto dell'autobus, la boccetta di inchiostro di china e il foglio di carta da lucido.*

3 *In cartoleria Giuseppe compra:*
   A _ *un foglio di carta pergamena e un foglio di carta da lucido*
   B _ *una boccetta di inchiostro di china, un foglio di carta pergamena e un foglio di carta da lucido*
   C _ *una boccetta di inchiostro di china e un foglio di carta pergamena*
   D _ *una boccetta di inchiostro di china, un foglio di carta pergamena e un biglietto per l'autobus.*

4. *Il prezzo della carta pergamena è:*
   A _ *più di 5 €*
   B _ *5 €*
   C _ *meno di 5 €.*

5. *Il prezzo della carta pergamena è:*
   A _ *uguale a quello della boccetta di inchiostro di china*
   B _ *minore di quello della boccetta di inchiostro di china,*
   C _ *maggiore di quello della boccetta di inchiostro di china.*

6 *Il prezzo della carta pergamena è :*
   A _ *uguale a quello della carta da lucido*
   B _ *minore di quello della carta da lucido*
   C _ *maggiore di quello della carta da lucido.*

7 *Il prezzo della carta da lucido è .*
   A _ *uguale a quello del biglietto dell' autobus*
   B _ *minore di quello del biglietto dell' autobus*

C _ *maggiore di quello del biglietto dell' autobus.*

8. *Tra tutte le informazioni presenti nel testo del problema, segna con una crocetta tutte quelle che non servono per risolverlo:*
   A _ *la mamma dà 5 € a Giuseppe*
   B _ *i negozi aprono alle ore l 6*
   C _ *il biglietto dell'autobus costa 0,75 €*
   D _ *Giuseppe prende l'autobus n° 250*
   E _ *la boccetta di inchiostro di china costa 2,50 €*
   F _ *la carta da lucido costa 0,40 €*
   G _ *Giuseppe torna a casa dopo due ore*
   H _ *Giuseppe spende tutti i soldi che ha ricevuto*
   I _ *Giuseppe perde metà del pomeriggio per gli acquisti.*
9. *Il problema chiede di trovare :*
   A _ *quanto Giuseppe ha speso in tutto in cartoleria*
   B _ *quanto la carta pergamena costa in più rispetto alla carta da lucido*
   C _ *quanto avrebbe risparmiato Giuseppe comprando la carta da lucido al posto della carta pergamena.*
   D _ *quanto ha speso complessivamente Giuseppe.*
10. *Il prezzo della carta pergamena è:*
   A _ *sicuramente maggiore di quella della carta da lucido*
   B _ *è probabilmente minore di quella della carta da lucido*
   C _ *è certamente minore di quella della carta da lucido*
   D _ *non è confrontabile con quello della carta da lucido*
11. Scrivi il testo del problema brevemente e in modo più semplice, eliminando tutte le informazioni che non sono utili alla sua risoluzione.

Verifica (altro esempio)

Leggi attentamente il testo del problema e poi rispondi alle domande che seguono.

PROBLEMA

In un museo sono entrati in tre giorni complessivamente 280 visitatori. Sapendo che il numero dei visitatori del secondo giorno è il doppio di quello del primo, mentre il numero dei visitatori del terzo giorno supera di 10 quello dei visitatori del secondo giorno, quante persone hanno visitato il museo in ciascuno dei tre giorni?

1. Sottolinea, nel testo, ciò che non ti è chiaro.

2. 280 è il numero dei visitatori del museo:
   A _ del primo giorno
   B _ del secondo giorno
   C _ del terzo giorno
   D _ di tutti i tre giorni insieme.

3. Il numero dei visitatori del primo giorno è :
   A _ maggiore del numero dei visitatori del secondo giorno
   B _ minore del numero dei visitatori del secondo giorno
   C _ uguale al numero dei visitatori del secondo giorno

4. Il numero dei visitatori del terzo giorno è :
   A _ maggiore del numero dei visitatori del secondo giorno
   B _ minore del numero dei visitatori del secondo giorno
   C _ uguale al numero dei visitatori del secondo giorno

5. Se vieni a sapere che il primo giorno hanno visitato il museo 54 persone, quanti sono stati i visitatori del secondo giorno?
   A _ 54 + 2 = 56
   B _ 54 x 2 = 108
   C _ 54 : 2 = 27
   D _ 54 – 2 = 52
   E _ 54^2 = 2916

6. I visitatori del terzo giorno sono stati:
   A _ 10 in più dei visitatori del secondo giorno
   B _ 10 in meno dei visitatori del secondo giorno
   C _ 10 volte i visitatori del secondo giorno

7. Segna con una crocetta tutte le domande alle quali devi rispondere per risolvere il problema.
   A _ Qual è il numero totale dei visitatori nei tre giorni?
   B _ Qual è il numero dei visitatori del primo giorno?
   C _ Qual è il numero dei visitatori del secondo giorno?
   D _ Qual è il numero totale dei visitatori nei primi due giorni?
   E _ Qual è il numero dei visitatori del terzo giorno?
   F _ Qual è la differenza fra il numero dei visitatori del terzo giorno e quello del secondo giorno?

Elementi di prove di verifica

Problemi geometrici usuali e (in)usuali in Cabri

Livello scolare: 2^a media

Contesto
Figure geometriche come oggetti matematici

Competenze interessate

- Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere.
- Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema.
- Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema.
- Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,...), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema.
- Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all'obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate.
- Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti.
- Valutare i procedimenti esaminati in riferimento all'economia di pensiero, alla semplicità di calcolo e alla possibilità di applicarli in altre situazioni.

- Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad esempio passando dal problema considerato ad una classe di problemi.

Commento
Nella didattica della geometria può essere opportuno affiancare ad attività usuali in cui l'utilizzo di Cabri è finalizzato alla "*scoperta*" di proprietà di una figura geometrica (***Problema 1***), altre in cui Cabri aiuta ad analizzare criticamente e a validare definizioni di figure geometriche (***Problema 2***).

<u>Verifiche:</u>

Problema 1
Dati due segmenti, costruisci con Cabri i triangoli che hanno il primo segmento come base e il secondo come altezza. Ottieni una famiglia di triangoli.

a) *Hanno tutti la stessa area?* SI NO

Se la risposta è no, continua a rispondere alle seguenti domande:

Ce n'è uno che ha area maggiore degli altri? ……………………
Se esiste, ha proprietà particolari? Quali? ………………………
Ce n'è uno che ha area minore degli altri?………………...……
Se esiste, ha proprietà particolari? Quali? ………………………

b) *Hanno tutti lo stesso perimetro?* SI NO

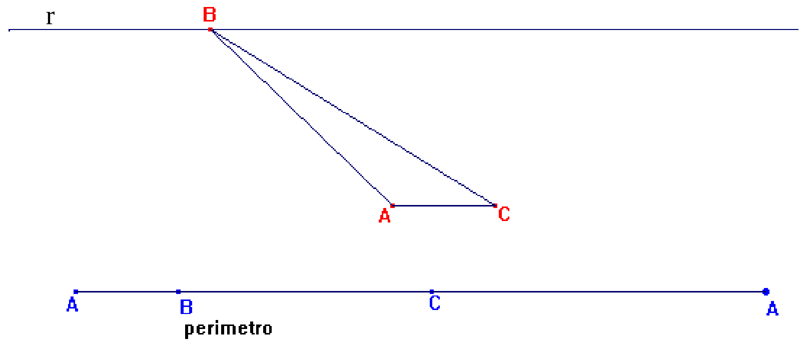
Se la risposta è no, continua a rispondere alle seguenti domande:

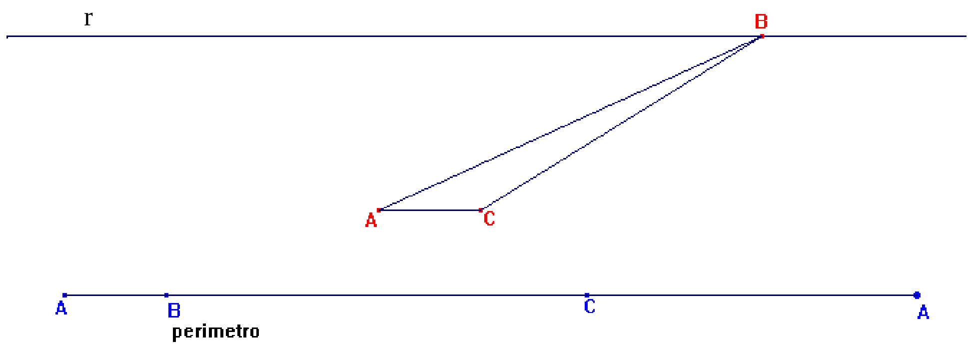
Ce n'è uno che ha perimetro maggiore degli altri?……………..
Se esiste, ha proprietà particolari? Quali? ………………………
Ce n'è uno che ha perimetro minore degli altri?………………..
Se esiste, ha proprietà particolari? Quali? ………………………

Puoi concludere che:

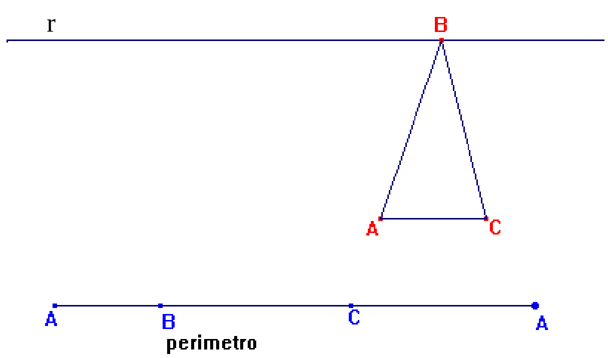
Fra tutti i triangoli di assegnata base e assegnata altezza quello che ha **…………………**

<u>Suggerimenti</u>
Subito dopo il questionario, perché i ragazzi possano verificare le loro risposte, l'insegnante può guidare alla costruzione di un segmento posto nella parte bassa dello schermo che rappresenti il perimetro del triangolo. Al variare del terzo vertice sulla retta parallela alla base, automaticamente si aggiorna la lunghezza di tale segmento.

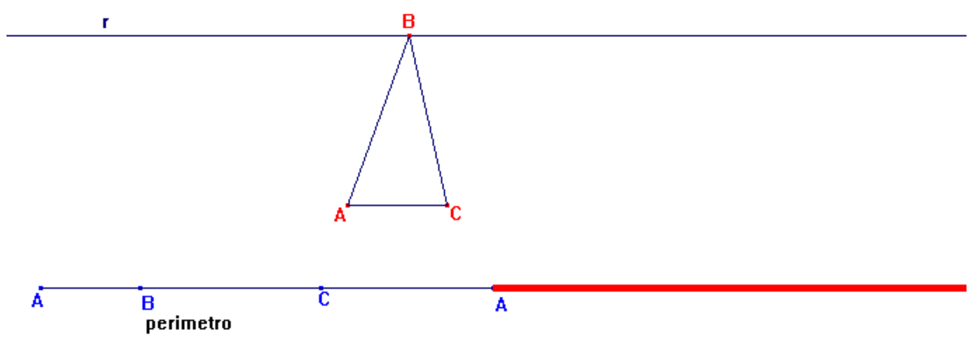




Nei ragazzi si conferma la prima intuizione che il perimetro minimo si ottiene in corrispondenza del triangolo isoscele.



Si può anche suggerire di utilizzare la funzione Luogo del punto A al variare del punto B sulla retta r. I ragazzi si renderanno conto del fatto che la posizione di A sul luogo (descritto nella figura riportata in basso con un tratto marcato), che rende minimo il perimetro, si ottiene in corrispondenza del triangolo isoscele.



Sempre nell’ambito dei problemi di isoperimetria e di equiestensione l’insegnante può proporre i seguenti problemi che guidano all’intuizione di determinate proprietà:

In una famiglia di triangoli isoperimetrici di base assegnata il triangolo isoscele è quello di area massima.

In una famiglia di triangoli isosceli isoperimetrici il triangolo equilatero è quello di area massima.

Problemi di questo tipo possono condurre, attraverso successive generalizzazioni, a concludere che nella famiglia dei poligoni di n lati il poligono regolare è quello di area massima.

Durante la risoluzione di questi problemi può essere necessario che i ragazzi siano guidati nella costruzione da schede precedentemente progettate dall’insegnante.

Problema 2

a) Costruisci con Cabri un parallelogramma che ha un angolo retto.

b) Costruisci con Cabri un quadrilatero con tre angoli retti.

Confronta le figure che hai costruito. Di quali figure si tratta? Quali considerazioni puoi fare in merito a ciò che hai osservato?

Puoi, a partire da quanto osservato, formulare due definizioni ugualmente corrette per la figura in questione?

Riusciresti a formulare un’altra definizione per la stessa figura, ad esempio a partire da un trapezio?

Per questo problema si confrontino le indicazioni didattiche date nell’attività “Definizioni e costruzioni geometriche *in discussione*” relativa al Nucleo **Lo spazio e le figure geometriche**.

Durante la risoluzione del problema, i ragazzi possono realizzare diverse costruzioni parimenti corrette. Può essere opportuno confrontarle per valorizzare, se è il caso, un modo di procedere rispetto ad un altro. Ad esempio fra le varie costruzioni proposte per la figura a) sarebbe utile che l’insegnante sottolineasse la valenza formativa di quella in cui il ragazzo inizia dalla realizzazione del parallelogramma al quale impone successivamente la perpendicolarità di due lati consecutivi [basta imporre, mediante la funzione di Cabri 2 “Ridefinizione di un oggetto”, *l’appartenenza di un vertice del parallelogramma (nella figura sotto riportata il punto A) alla retta r perpendicolare ad uno dei lati non aventi per estremo tale vertice, nell’estremo consecutivo rispetto a quello considerato]. Questa costruzione infatti consente di ottenere in maniera dinamica il rettangolo a partire da una famiglia di parallelogrammi, coerentemente con la scelta di una classificazione inclusiva dei quadrilateri.*