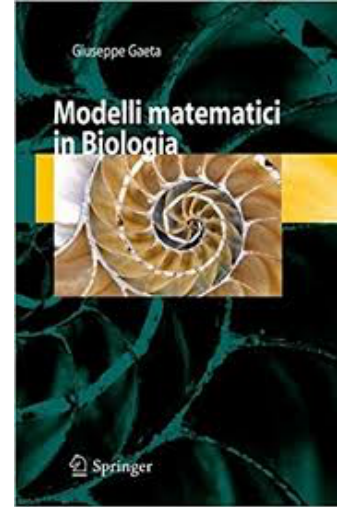
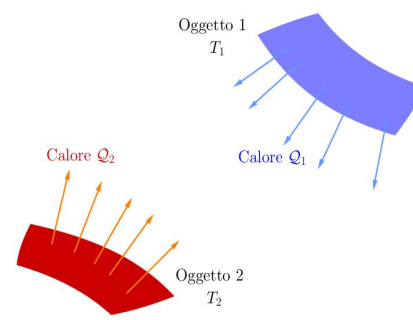


Meccanica dei Fluidi

I. Digiacomio
F. Hinegk



Fisica matematica, matematica applicata o
applicazioni della matematica?
L'oscura frontiera tra la matematica pura e le sue
applicazioni tra Ottocento e Novecento



Rossana Tazzioli
Université de Lille

La « matematica applicata » oggi

Modelizzare matematicamente un problema

Analizzare il problema matematico

Sviluppare gli algoritmi

Scrivere il software

Esperimenti computazionali

Validazione del modello

(Tratto da: The Princeton Companion to Applied Mathematics)

Le relazioni tra matematica pura e le sue applicazioni

- Dipendono dall'epoca
- dal paese
- dall'autore

Le stesse definizioni di matematica « pura », « applicata » (tipica del Novecento), « fisica matematica », « fisica », « fisica teorica » sono usate in modi diversi a seconda dei paesi, autori, periodi.

Galileo Galilei (1564-1642) ne *Il Saggiatore*, 1623:

“La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l’universo, ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.”

D'Alembert, « Mathématique » dell'Encyclopédie, 1765

« Le matematiche si dividono in due classi: la prima, che chiamiamo Matematiche pure, considera le proprietà della grandezza in modo astratto: la grandezza sarà dunque calcolabile o misurabile [si entra dunque nel dominio dell'Aritmetica o della Geometria]...

La seconda classe si chiama Matematiche miste ed ha per oggetto le proprietà della grandezza concreta... Tra le Matematiche miste troviamo la Meccanica, l'Ottica, l'Astronomia, la Geografia, la Cronologia, la Navigazione militare, l'Idrostatica, l'Idraulica, l'Idrografia o la Navigazione, ecc.”

Un panorama variegato

- Germania
- Francia e Italia
- Gauss/ Lamé
- La dinamica tra matematica pura e applicazioni (elasticità, meccanica dei fluidi,...) nel 19° secolo
- I modelli matematici (economia, biologia, medicina) e il calcolo numerico nel 20°/21° secolo

L'Ottocento

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), dal 1807 direttore dell'Osservatorio di Gottinga

- « La matematica è la regina delle scienze »
- « L'aritmetica (la teoria dei numeri) è la regina della matematica »
- Gauss « Titano della Scienza »
- Dissertazione, 1799
- Disquisitiones Arithmeticae, 1801
- Gauss “ritrova” l'asteroide osservato da Piazzi, 1801

Lavori di Gauss legati alla geodesia

- Nel 1818 Gauss è stato incaricato dal Governo di Hannover di realizzare un rilievo topografico della regione di Hannover.
- Teoria degli errori (nel 1819 Gauss pubblica il suo lavoro sui minimi quadrati, *Theoria combinationis erroribus..*)
- Analisi complessa (carte geografiche: rappresentazione conforme di Gauss)
- Geometria differenziale (*Disquisitiones generales...*, 1828)

Triangolazione

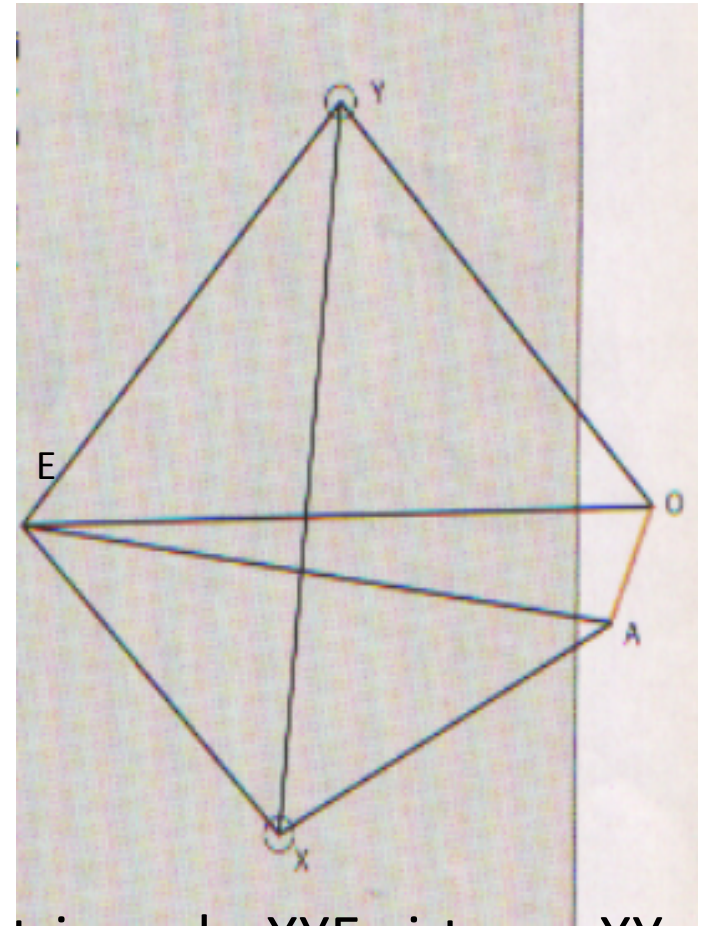
Il metodo è utile per calcolare la distanza tra due siti X e Y, non connessi da una linea visuale e non accessibili.

1. Determinare una serie di punti (A, O, E) di facile accesso e reciprocamente visibili;

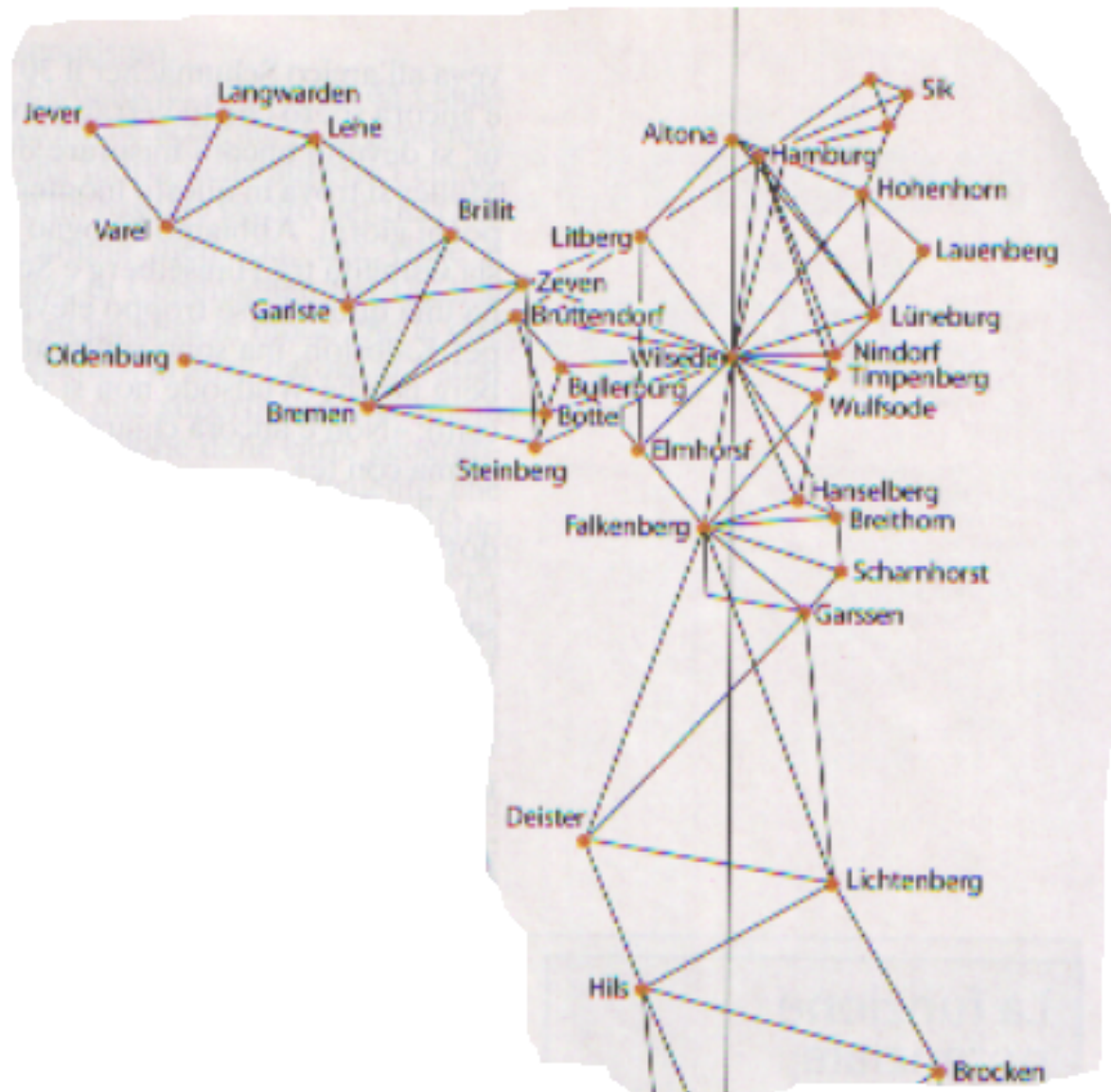
2. Fissare una base (AO) facilmente Misurabile. Si ponga il teodolite in O poi

in A e si misurino gli angoli $\widehat{EOA}$ e $\widehat{AOE}$ del triangolo OEA. Si calcolino i lati EO e AE e l'angolo $\widehat{AEO}$. Si considerino poi i triangoli EXA e EYO di basi EA e EO; si possono determinare tutti gli elementi

due due triangoli, tra cui EX, EY e gli angoli $\widehat{YEO}$ e $\widehat{XEA}$. Considerando infine il triangolo XYE si trova XY, poiché sono noti i lati EY e EX e l'angolo $\widehat{YEX}$ somma di angoli noti.



Esempio di triangolazione fatta da Gauss



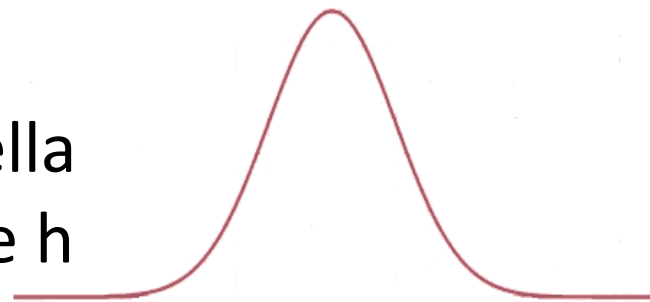
Come si distribuiscono gli errori (random)?

L'espressione analitica della gaussiana:

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

(h è il cosiddetto *coefficiente di precisione*).

Questa curva viene detta gaussiana o anche curva a campana. L'ampiezza della campana dipende dal coefficiente h . Se h è grande la campana è stretta e i valori osservati sono concentrati soprattutto intorno alla misura più probabile.

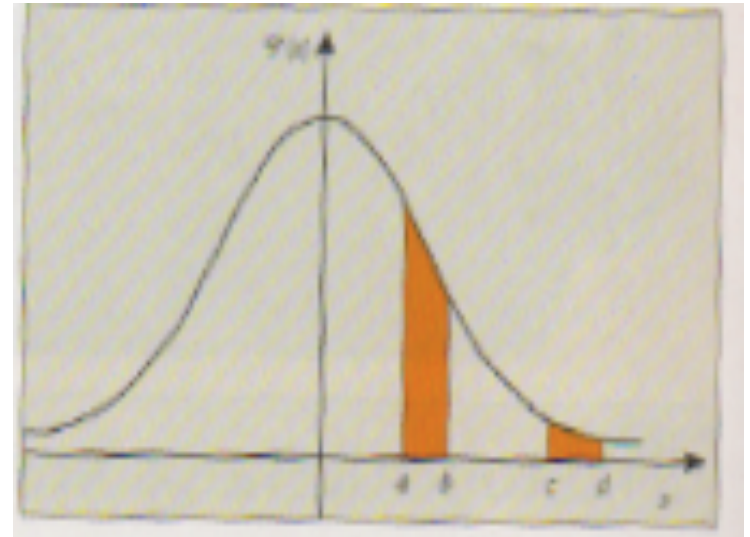


Teoria della probabilità

L'area sottesa dalla gaussiana tra i due punti a e b corrisponde alla probabilità che un errore cada tra questi due valori.

Dalla figura se ne deduce che la probabilità che un errore si trovi nella zona intorno al vertice della campana è superiore alla probabilità che cada alle estremità della curva.

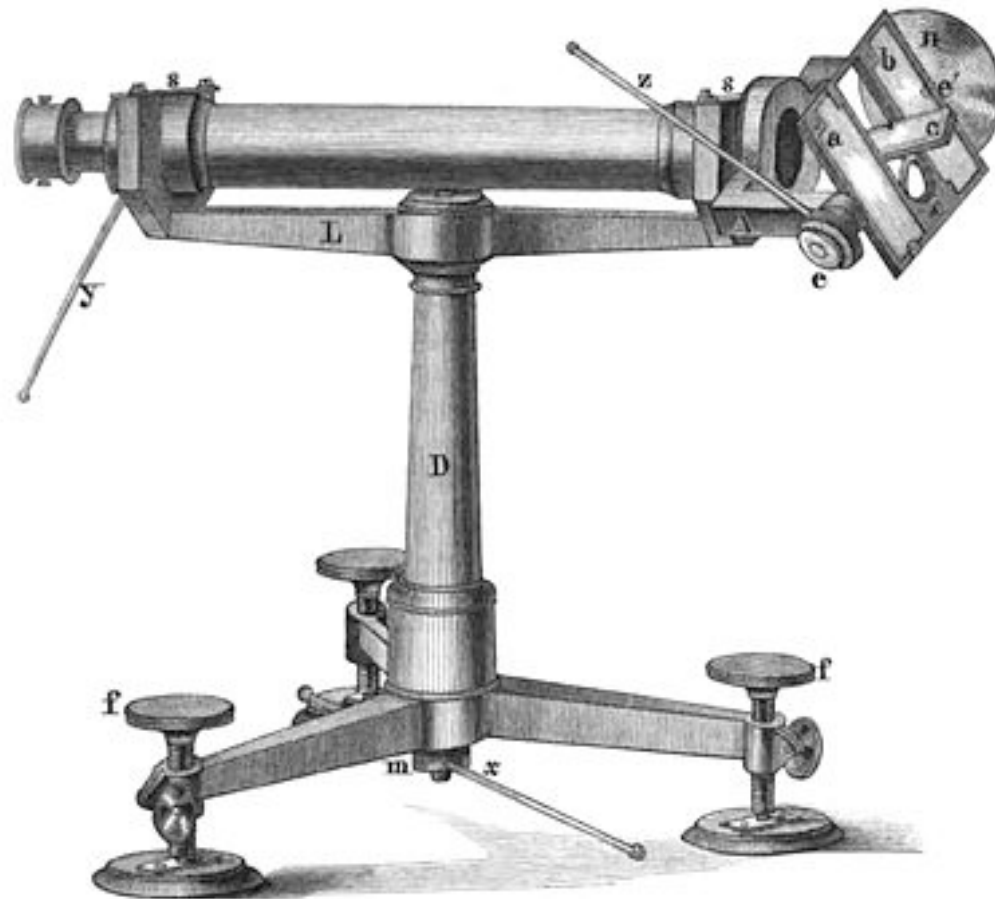
La gaussiana costituisce il ponte tra la teoria degli errori e il calcolo delle probabilità.



Gauss e la fisica

- Wilhelm Weber (1804-1891) diviene professore di Fisica a Gottinga nel 1831
- Nel 1833 Gauss e Weber costruiscono il primo telegrafo elettromagnetico; Gauss introduce una nuova unità di misura magnetica (detta “gauss”)
- Nel 1836 si costituisce la “Società per il Magnetismo”
- Nel 1838 Gauss pubblica la “Teoria generale del geomagnetismo”
- Nel 1840 Gauss pubblica l’articolo “Teoremi generali sulle forze attrattive...”
- Gauss ha anche inventato strumenti tecnici

Eliotropo

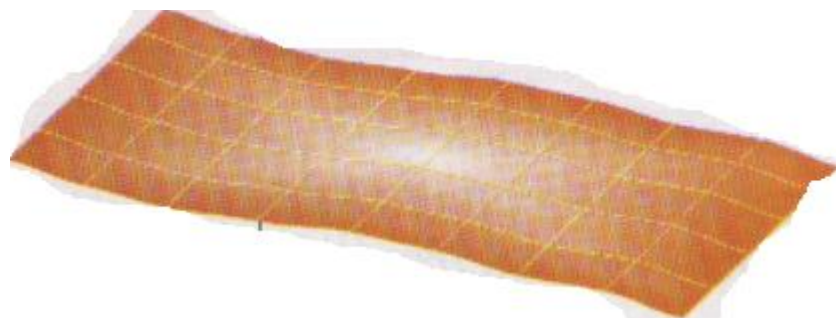


“Titano della scienza”

- Interesse di Gauss per la scienza pura, in particolare per la teoria dei numeri (*Mathematische Tagebuch*, Disq. Arith. 1801)
- Interesse di Gauss per le applicazioni (astronomia, geodesia, magnetismo..)
- Connessione tra le matematiche pure e le applicazioni: il “metodo dei minimi quadrati” e la “funzione gaussiana” utilizzati in teoria degli errori; la geometria delle superfici (Disq. Generales, 1828) in geodesia

Disquisitiones generales... (1827)

Sistema di coordinate
(u,v) sulla superficie
curva S

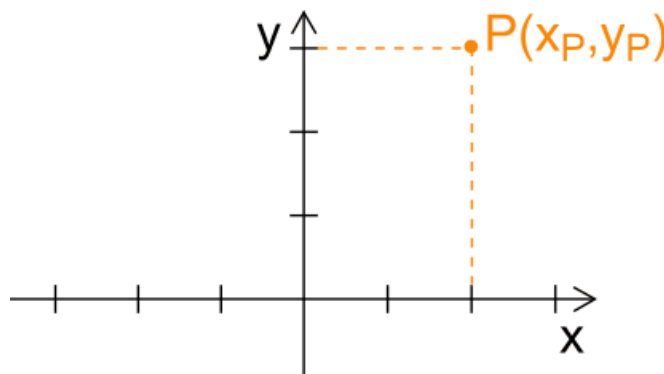


Definizione dell'elemento lineare o prima forma
fondamentale

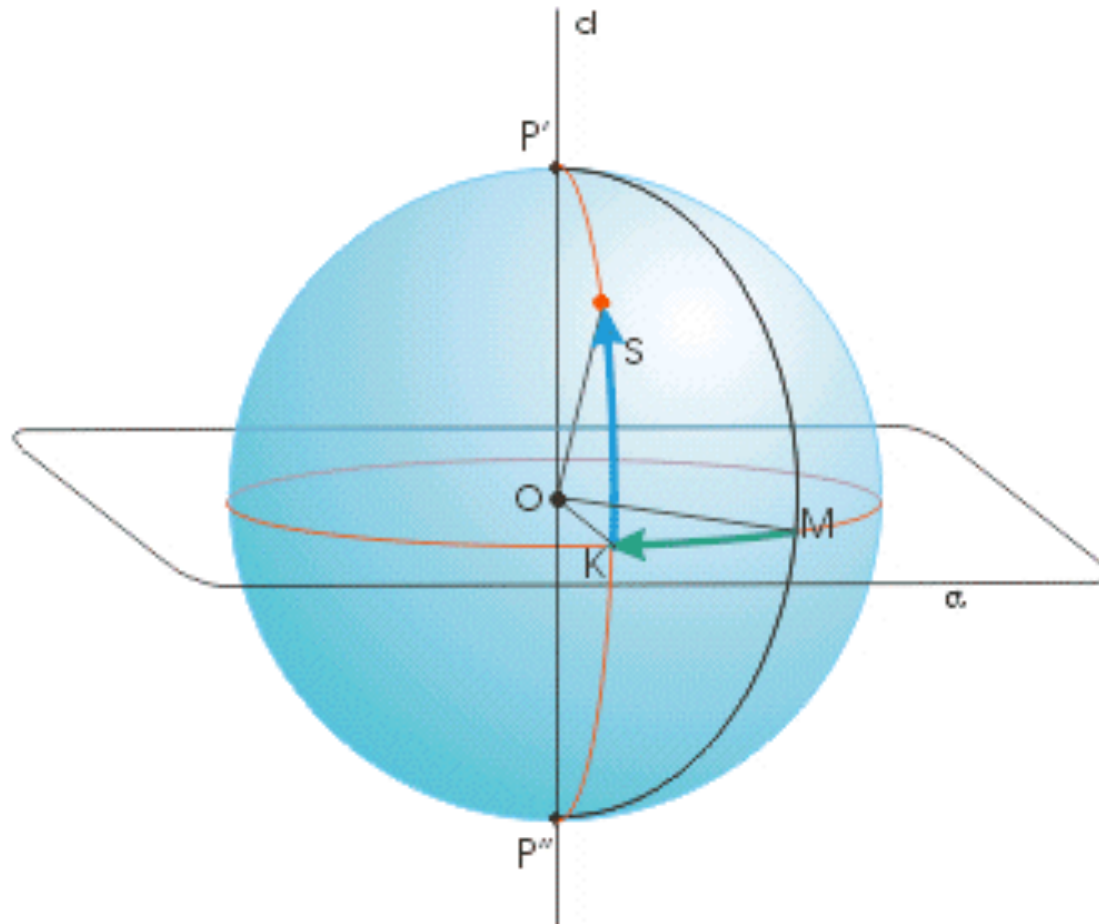
$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

dove E,F,G dipendono solo dalla superficie. Se la superficie è
piana, allora x, y sono le usuali coordinate cartesiane e ds è la
distanza euclidea:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

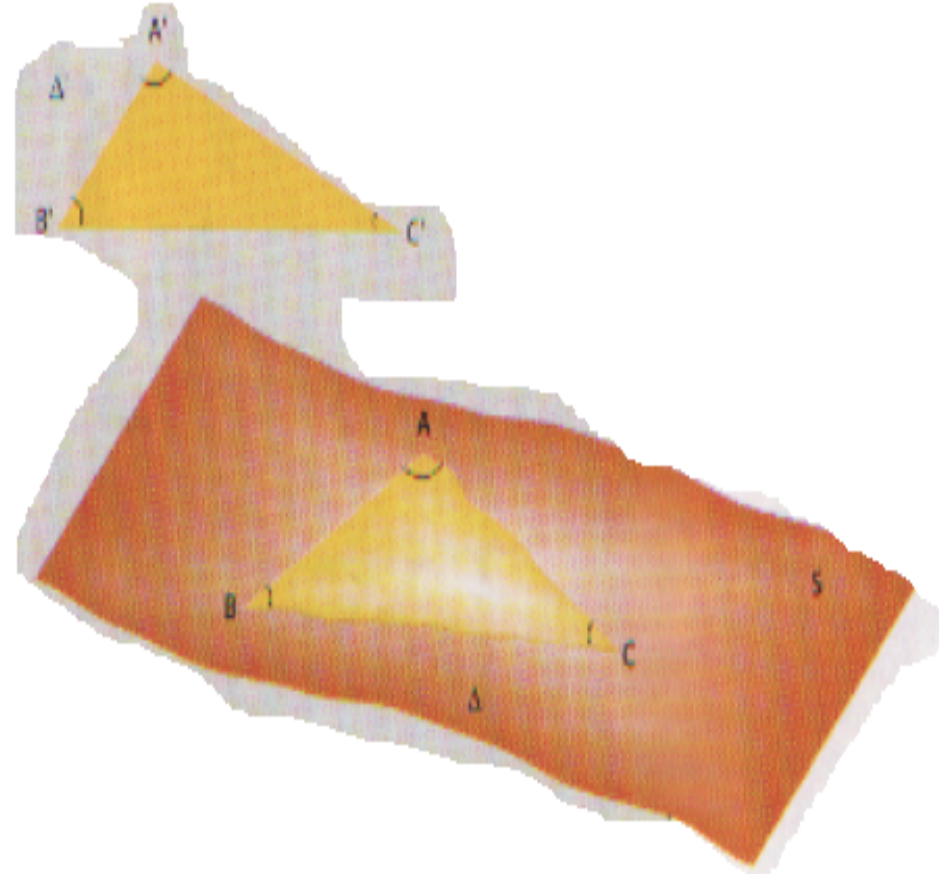


Coordinate su una sfera



Triangoli geodetici

Gauss considerava il triangolo geodetico Δ su una superficie curva S di vertici A , B , C e angoli α , β , γ e il triangolo Δ' sul piano (di vertici A' , B' , C' e angoli α' , β' , γ') che ha i lati rettilinei della stessa lunghezza (ossia: $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$).

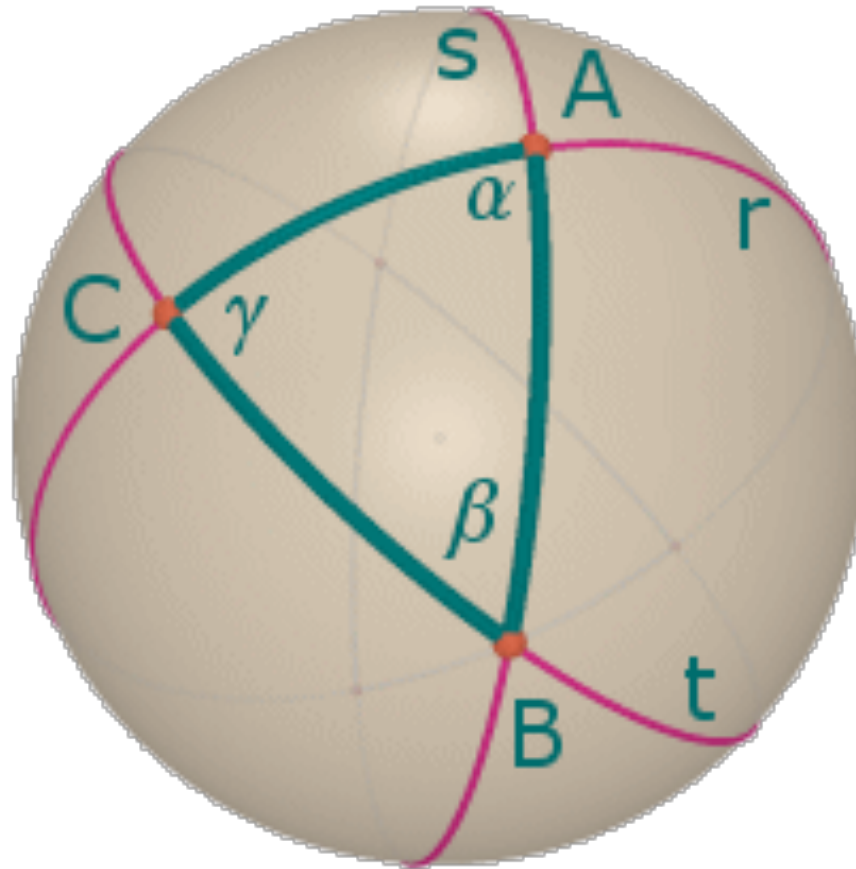


Di quanto si deforma il triangolo?

La curvatura totale di Δ era:

$$K(\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

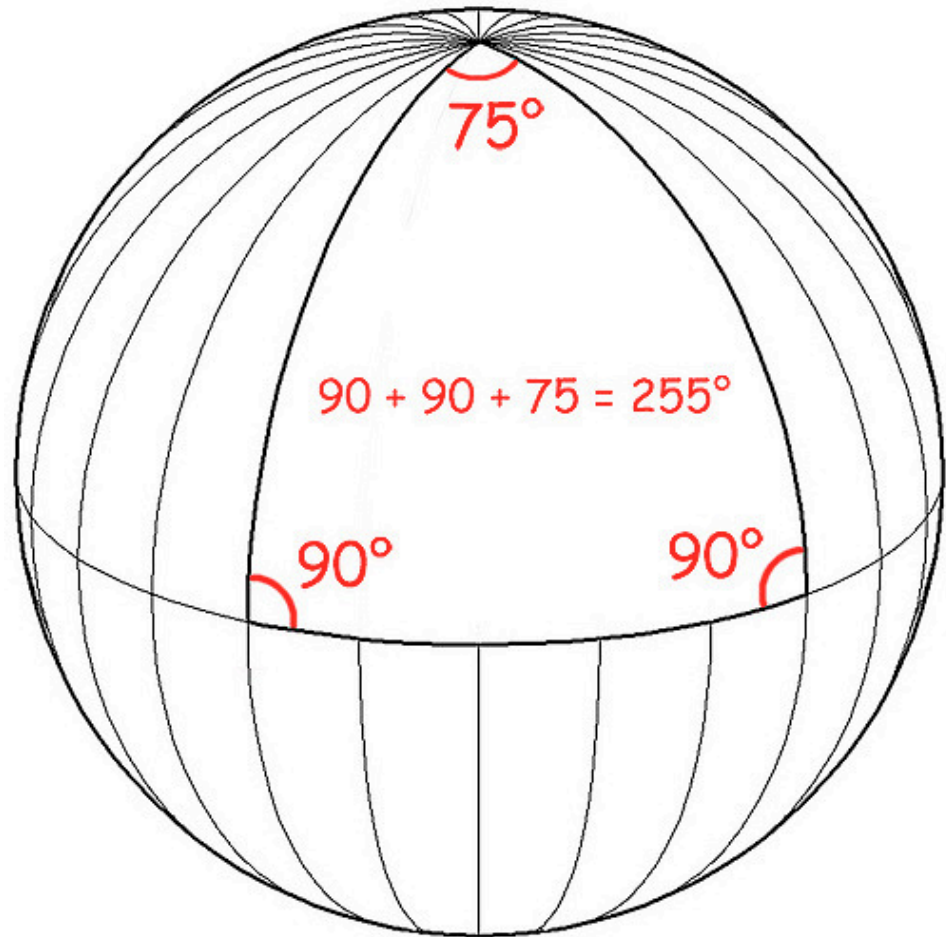
Triangolo geodetico su una sfera



La deformazione del triangolo è grande in questo caso!

La differenza tra la somma degli angoli di questo triangolo e quella del triangolo piano corrispondente è di 75° .

Per triangoli molto piccoli vi sarà una differenza piccola e dunque una piccola deformazione.



La geometria piana è una buona approssimazione

Gauss misura gli angoli del triangolo geodetico avente per vertici le colline di Brocken, Hohehagen e Inselberg (il lato più lungo è dell'ordine dei 100 Km). Trova che l'errore commesso supponendo che il triangolo sia disteso sul piano anziché sulla superficie terrestre è *impercettibile*.

(Disquisitiones generales..., 1827)

Dialettica tra matematica pura / applicata

- La matematica si applica alle scienze: le formule matematiche funzionano per formalizzare le teorie scientifiche (triangolazione, calcolo dell'orbita di Cerere...)
- Le scienze applicate (astronomia e geodesia) partecipano all'elaborazione di nuovi strumenti matematici (teoria degli errori, le geometria delle superfici curve, ...)

La geometria che si plasma sulla fisica matematica

Gabriel Lamé (1795-1870) ha il doppio statuto di matematico e ingegnere

“Il Corso che intraprendo oggi ha per obiettivo diverse questioni in cui si impiega la teoria delle superfici. E’ la Geometria considerata dal punto di vista della Fisica matematica, una geometria speciale e nuova, che cerco di definire.”

Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes...*, Paris, 1859, p. VII.

L'importanza delle coordinate curvilinee

« Risulta dalle lezioni precedenti che se l'idea di coordinate curvilinee è venuta dalla teoria dell'elasticità, è anche in questa teoria che il nuovo strumento ha condotto alle leggi più complete e incontra il maggior numero di applicazioni... »

(Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes...*, Paris, 1859, p. 367)

« Se alcuni trovano strano e singolare che si possa fondare un Corso di Matematica sulla sola idea di sistema di coordinate, noi osserveremo che sono precisamente questi sistemi che caratterizzano le fasi o le tappe della scienza. Senza l'invenzione di coordinate rettilinee l'algebra sarebbe forse ancora al punto in cui l'hanno lasciata Diofanto e i suoi commentatori, e noi non avremo né il calcolo infinitesimale né la Meccanica analitica » (Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes...*, Paris, 1859, p. 367-368)

Lamé utilizza le coordinate curvilinee al fine di risolvere problemi legati alla scienza delle costruzioni e alla fisica matematica (elasticità, calore, ecc.)

« In tutte le applicazioni dell'analisi fisico matematica, i corpi di forma poliedrica si presentano a ogni passo: quando ci si propone di calcolare esattamente gli sforzi supportati e le resistenze offerte dalle differenti parti di una costruzione, quando si strappa all'analisi il segreto della doppia rifrazione e della polarizzazione, e ancora quando ci si propone di studiare le circostanze che presiedono alla formazione dei cristalli. »

(Lamé, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres, et principalement dans le prisme triangulaire régulier, *Journal de l'Ecole R. Polytechnique*, vol. 14, 1833, p. 194-195)

Funzioni di Lamé

Al fine di stabilire le leggi del calore in un corpo solido e omogeneo con un contorno ellissoidale, Lamé considera l'equazione di Laplace espressa in coordinate ellissoidali. Trova la formula (detta "equazione di Lamé") che descrive questo fenomeno e deduce alcune soluzioni di questa equazione che si chiamano "funzioni di Lamé". Tali funzioni hanno lo stesso ruolo per l'ellissoide che le funzioni sferiche per la sfera.

(Lamé, Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, *Journal de math. pures et appliquées*, vol. 4, 1839, p. 126-183; Second mémoire..., *id.*, p. 351-385)

Osservazioni

- I fisici si interessano alla fisica sperimentale.
- I matematici che pubblicano articoli di fisica matematica si rivolgono a un pubblico di matematici e non di fisici.
- Vi sono molti fisici matematici in Francia e in Italia soprattutto: Betti, Beltrami, Padova, Somigliana, ecc.

Volterra: “Quelli che hanno conosciuto Betti, non solo per i suoi lavori ma anche per aver discusso con lui, sanno bene che se parlava matematica spesso pensava fisica.” (“Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes...”, 1902)

La fisica matematica: un difficile statuto

Beltrami: “un fisico tra i matematici, un matematico tra i fisici” (Lettera a Klein, 17/04/1888)

Confida anche a Klein l’opportunità di fondare un nuovo giornale per la fisica matematica: “esso potrebbe essere molto vantaggioso per i fisici, che hanno spesso qualche ripugnanza a consultare i giornali matematici e alcuni non ne hanno neppure i mezzi [un giornale destinato] principalmente a superare le prevenzioni, talvolta persino assai fondate, contro l’impiego dell’analisi in generale, o di una certa analisi in particolare.”

Osservazione sui metodi

- Appaiono nella seconda metà dell'Ottocento dei metodi importanti e necessari per dimostrare risultati in analisi e in fisica matematica. Per esempio, la teoria delle equazioni integrali introdotta da Fredholm per studiare problemi di teoria dell'elasticità.
- Si assiste a una dinamica interessante: una teoria analitica applicata alla fisica matematica ma anche degli specialisti dell'elasticità che apportano all'analisi nuovi risultati a partire da problemi della loro disciplina.

La teoria di Fredholm è una teoria analitica?

Intorno al 1902 Mittag-Leffler “ha fatto lobby affinché Fredholm ricevesse il Premio Nobel [per la Fisica], e in particolare ha chiesto l’appoggio di Appell e di Planck. Quest’ultimo ha risposto che tale richiesta lo ha fatto a lungo riflettere sulla linea di demarcazione tra matematica e fisica. Ma, infine, come fisico, Planck ha seguito la propria coscienza scegliendo Niels Bohr per la nomination al Nobel. Bohr era un fisico, mentre Fredholm era un matematico.”

(Stubhaug, A., *Gösta Mittag-Leffler. A Man of Conviction*, Springer, 2010)

La crociata di Mittag-Leffler per il Nobel

- La Commissione dell'Accademia delle Scienze di Stoccolma conferisce i Premi Nobel dal 1901
- Un Nobel per Poincaré? ML riesce a mobilitare un gran numero di matematici francesi e italiani (in primis Volterra): ML chiede che nella nomination a Poincaré si specifichi « per le sue scoperte concernenti le equazioni differenziali della Fisica matematica ».
- In caso di riuscita di Poincaré, si apriva la strada perché altri “fisici matematici” potessero ottenere il Nobel per la Fisica.

Volterra scrive nel suo rapporto:

« La storia della fisica, soprattutto nella sua parte più moderna, mostra come ogni progresso della fisica sia sempre più legato allo sviluppo dell'analisi, e che questo strumento del pensiero umano sia il più adatto a classificare rigorosamente, provare e confrontare i fenomeni del mondo fisico, e dunque a dominarli. »

(V. Volterra, Rapporto su Poincaré alla Commissione Nobel, Accademia delle scienze di Stoccolma)

Poincaré e il Nobel

- Nel 1902 ML appoggia strategicamente Lorentz, che ottiene il premio, per poter poi puntare su Poincaré.
- Nel 1910 ML riesce a ottenere il maggior numero di nomination per Poincaré, ossia 34.
- I padovani tuttavia appoggiano Righi (Levi-Civita, Ricci Curbastro, De Marchi, Vicentini)
- Poincaré: un « physicien-géomètre » piuttosto che un vero fisico (Marcel Brillouin) o « plus analyste que physicien » (Louis de Broglie)

Matematica pura e applicata nel dibattito sull'insegnamento, inizio XX secolo

“L'uso ha riunito queste due scienze [l'Analisi e la Geometria] sotto la generica denominazione di Matematiche pure, e ha raggruppato sotto il nome di Matematiche applicate, tutte quelle che risultano effettivamente dall'applicazione dell'Analisi e della Geometria... Sembra più naturale mettere da parte l'Analisi, che presta senza tregua i suoi principi ma non ne importa alcuno, ... e spostare nelle **Matematiche applicate** tutte le scienze che trovano nelle loro formule un supporto essenziale e continuo. Organizzandole nell'ordine in cui ciascuna è necessaria alle seguenti ma non alle precedenti, incontreremo **la Geometria, la Meccanica, la Fisica matematica, ...**”

(Ch. Méray, *L'Enseignement des Mathématiques*,
L'Enseignement Mathématique, vol. 3, 1901, p. 172-194)

« Tra la validità di un'ipotesi fisica e l'evidenza di un assioma matematico non vi è alcuna differenza essenziale » (Ch. Méray, Ibid)

La Geometria è una scienza fisica “poiché si basa sui sensi considerando la nozione di spazio e la nozione di spostamento”. Del resto, “l'origine delle nostre conoscenza si trova nei nostri sensi” e caratterizza le tre fasi della conoscenza: 1. osservazione, 2. ragionamento, 3. esperienza (oggi sperimentazione).

“L'estrazione non è altro che l'operazione in base alla quale noi consideriamo in un oggetto una particolare proprietà, senza fare attenzione alle altre.”

(Laurent , Ens. Math. vol. 1, 1899)

“E' certo che i ragionamenti non possono sostituirsi alla conoscenza dei fatti.” (Laisant, Ens. Math. vol. 4, 1902)

Gli strumenti geometrici diventano un mezzo per insegnare la geometria in Francia nella riforma del 1905 (i laboratori di matematica proposti da E. Borel)

Un « turning point »: la Grande Guerra

- 1904 Cattedra di matematica applicata a Gottinga (Carl Runge, Ludwig Prandtl)
- Richard Von Mises primo direttore dell'istituto di matematica applicata a Berlino nel 1920
- ZAMM giornale di matematica applicata e meccanica fondato nel 1921
- 1921 Istituto di fisica e matematica dell'Accademia delle scienze sovietica diretto da V. Steklov
- 1922 Primo ICAM organizzato da T. Levi-Civita e von Karman
- 1927 Istituto di Analisi Applicata (IAC poi INAC) di Picone
- 1926 Institut Henri Poincaré fondato da Borel
- Anni 1930 Grandi sviluppi della matematica applicata in USA con R. Courant, W. Prager, T. von Karman.

Matematica pura / applicata?

Matematici puri / applicati?

“La matematica applicata non è un campo scientifico specifico ma un’attitudine umana. L’attitudine del matematico applicato è diretta a trovare le risposte che possano chiarire le osservazioni empiriche. Per ottenere delle risposte a problemi che presentano spesso difficoltà teoriche insuperabili, si devono fare dei compromessi che riguardano il rigore matematico; per esempio, sostituire al ragionamento teorico l’analisi numerica, fare considerazioni plausibili, e via scorrendo.” (Richard Courant)

Conclusione

Continua dialettica tra la matematica e le sue applicazioni.

Per comprendere lo sviluppo della matematica bisogna fare una storia della **matematica pura e delle sue applicazioni**; si sono spesso trascurati gli aspetti “applicati” che consentirebbero una più ampia visione anche della matematica cosiddetta “pura”.

Cédric Villani (Medaglia Fields per la Matematica):
« Il confine tra la matematica pura e applicata è oggi scomparso. »