

5^a Scuola Estiva UMI CIIM – AIRDM

Frascati, 27-31 agosto 2018

Il problema dei problemi

**Il problema dei problemi:
cominciamo dal testo...**

Rosetta Zan

rosetta.zan@unipi.it

PROBLEMI REALI

‘problema’ come situazione difficile da risolvere, fonte di disagio...

PROBLEMI SCOLASTICI

‘problema’ come etichetta che individua un certo tipo di compito di matematica a scuola

**Il problema dei problemi:
cominciamo dal testo...**

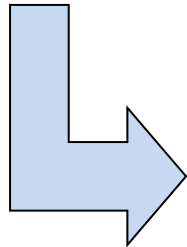
PROBLEMI REALI

PROBLEMI SCOLASTICI

...c'è una grossa frattura a livello di approccio e di processi risolutivi

ISRAELE

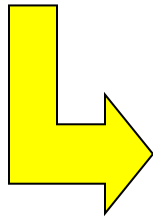
Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se metti insieme una caraffa d'acqua a 10° e una a 40°?



$$10^{\circ} + 40^{\circ} = 50^{\circ}$$

STATI UNITI

Un camion dell'esercito può portare 36 soldati. Se bisogna trasportare 1128 soldati alla loro base, quanti camion servono?



45.000 studenti
"31 col resto di 12" (29%)
"31" (18%)

PROBLEMI REALI

PROBLEMI SCOLASTICI

...c'è una grossa frattura a livello di approccio e di processi risolutivi

...ma anche le caratteristiche sono molto diverse

PROBLEMI REALI

L'individuazione dei dati significativi è a carico del solutore.

L'obiettivo da raggiungere è il punto di partenza, e non c'è bisogno di esplicitarlo.

Si affrontano in genere problemi che non sono già stati risolti.

Non è detto che si possa risolvere, e quanto tempo ci vuole.

C'è un'interazione continua con la realtà.

Non si sa a priori quali tipi di risorse dovranno essere utilizzate.

Se ci sono dati numerici, non sono necessariamente 'belli'.

PROBLEMI SCOLASTICI

Sono elencati tutti (e soli) i dati che servono.

L'esplicitazione dell'obiettivo da raggiungere è in fondo: la DOMANDA.

Si devono risolvere problemi per qualcuno che ne conosce la soluzione.

Bastano pochi minuti per risolverlo.

Non si può interagire con la realtà.

Bisogna utilizzare le ultime conoscenze apprese di matematica.

Ci sono dati numerici, e 'belli'.

STEREOTIPI



- Pratica didattica consolidata (soprattutto nei libri di testo)
- Volontà - più o meno implicita - di *ridurre la complessità*

PROBLEMI SCOLASTICI

Sono elencati tutti (e soli) i dati che servono.

L'esplicitazione dell'obiettivo da raggiungere è in fondo: la DOMANDA.

Si devono risolvere problemi per qualcuno che ne conosce la soluzione.

Bastano pochi minuti per risolverlo.

Non si può interagire con la realtà.

Bisogna utilizzare le ultime conoscenze apprese di matematica.

Ci sono dati numerici, e 'belli'.

PROBLEMI REALI

L'individuazione dei dati significativi è a carico del solutore

L'obiettivo da raggiungere è implicito, ed è il punto di partenza.

Si affrontano in genere problemi che non sono già stati risolti.

Non è detto che si possa risolvere, e quanto tempo ci vuole.

C'è un'interazione continua con la realtà.

Non si sa a priori quali tipi di risorse dovranno essere utilizzate.

Se ci sono dati numerici, non sono necessariamente 'belli'.

PROBLEMI SCOLASTICI

Sono elencati tutti (e soli) i dati che servono.

L'esplicitazione dell'obiettivo da raggiungere è in fondo: la DOMANDA.

Si devono risolvere problemi per qualcuno che ne conosce la soluzione.

Bastano pochi minuti per risolverlo.

Non si può interagire con la realtà.

Bisogna utilizzare le ultime conoscenze apprese di matematica.

Ci sono dati numerici, e 'belli'.

PROBLEMI REALI

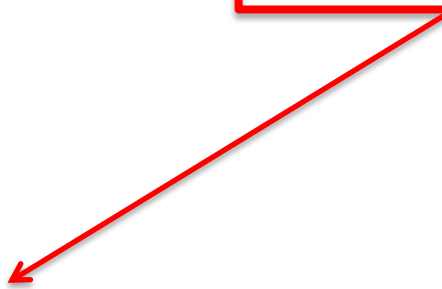
PROBLEMI SCOLASTICI

PROBLEMI 'REALISTICI'

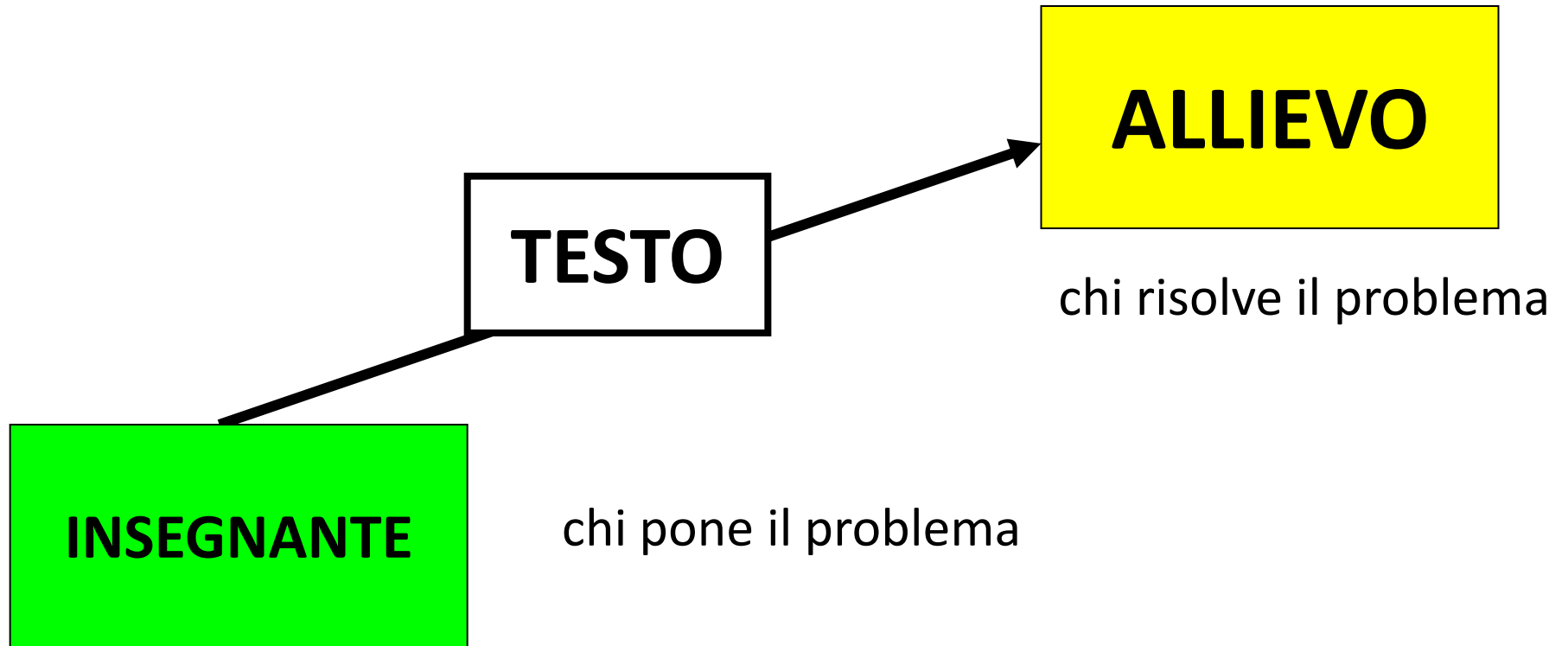
COMPITI AUTENTICI'

La differenza più significativa
è un'altra...

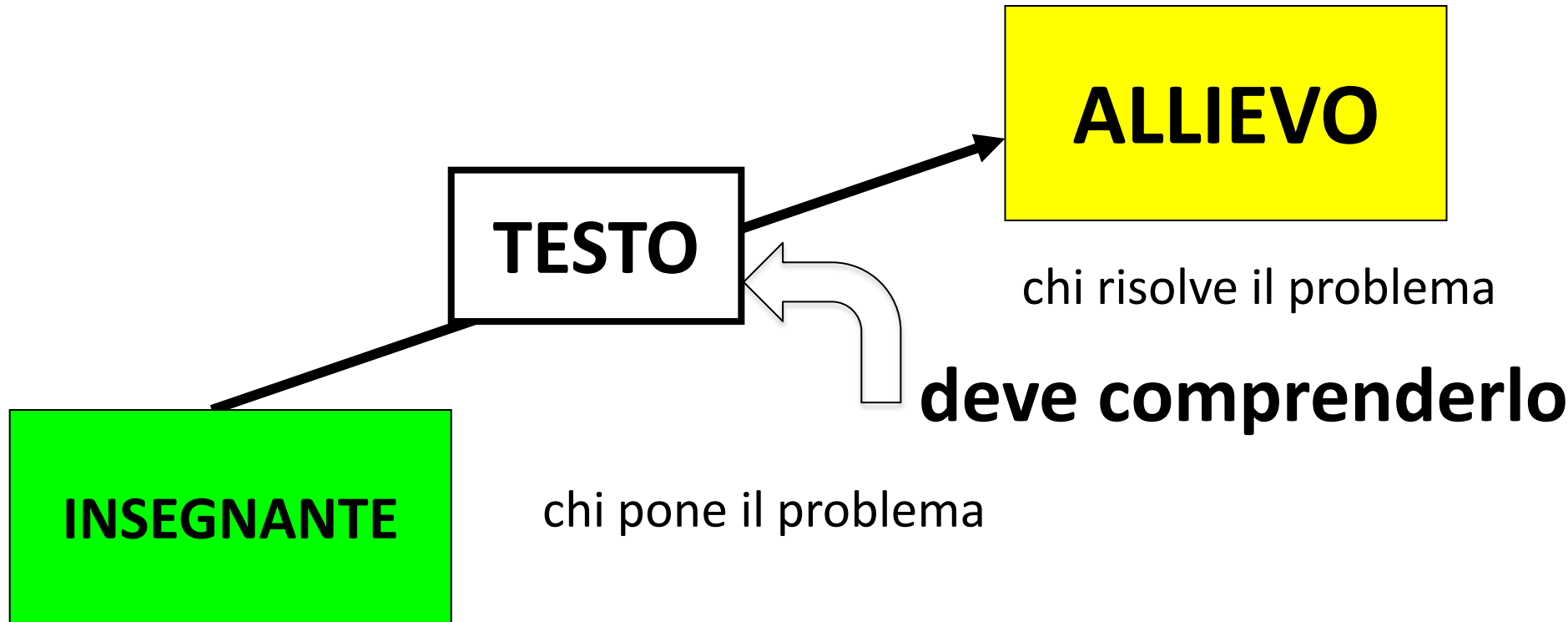
**Il problema dei problemi:
cominciamo dal **testo...****



problema espresso attraverso un testo (scritto)



problema espresso attraverso un testo (scritto)



problema espresso attraverso un testo (scritto)



Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di **comprensione**.

In realtà ...

...a volte non c'è neppure l'obiettivo di comprendere, ma solo quello di dare la risposta corretta.

L'allievo attiva una *lettura selettiva* del testo, finalizzata cioè alla ricerca di

- dati numerici
- *parole chiave* o espressioni che suggeriscano come combinare i dati numerici

Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di **comprensione**.

In realtà ...

...a volte non c'è neppure l'obiettivo di comprendere, ma solo quello di dare la risposta corretta.

L'allievo attiva una *lettura selettiva* del testo, finalizzata cioè alla ricerca di

- dati numerici
- *parole chiave* o espressioni che suggeriscano come combinare i dati numerici

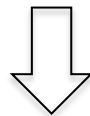
Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se metti insieme una caraffa d'acqua a 10° e una a 40°?

$$10^{\circ} + 40^{\circ} = 50^{\circ}$$



Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di **comprensione**.

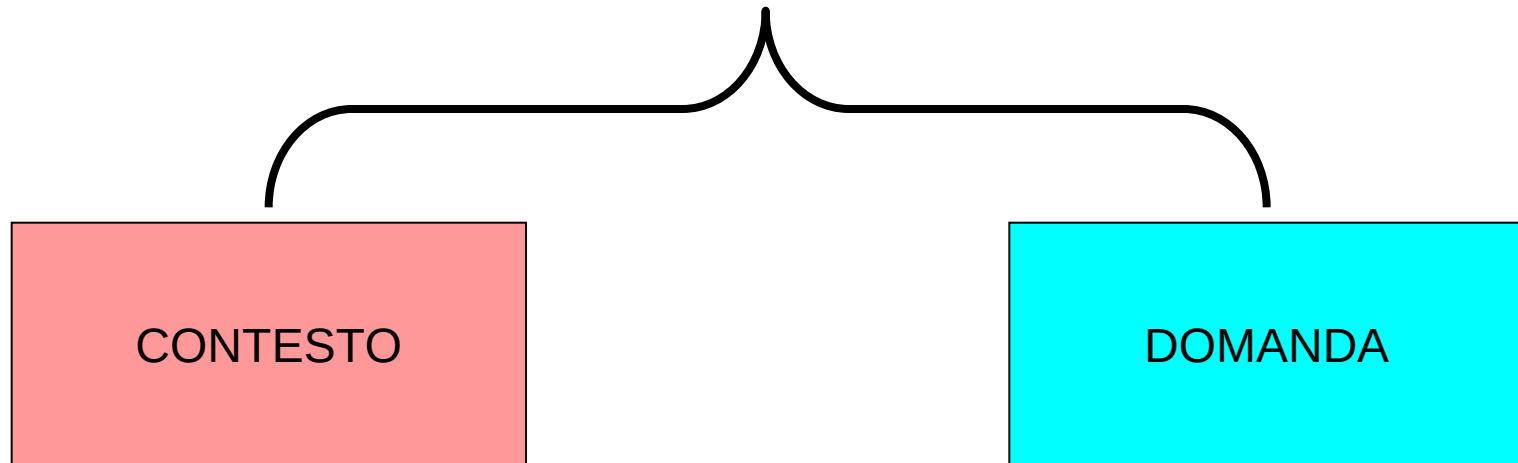
Il testo di un problema è un testo particolare...



...per capire quali difficoltà si possono incontrare nella comprensione è importante tener conto delle sue specificità.

Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di **comprensione**.

PROBLEMA VERBALE



Il problema come *genere*

PROBLEMA VERBALE

word problem o story problem



PROBLEMA VERBALE

word problem o story problem

CONTESTO

- eventi descritti nella loro dimensione temporale e causale
- personaggi animati che compiono azioni mosse da scopi

matematico

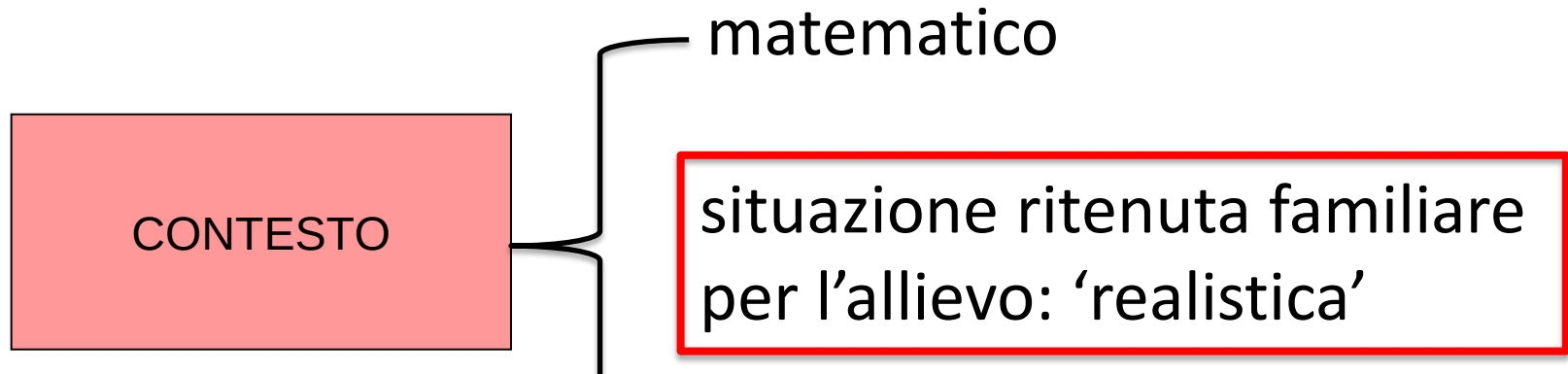
situazione ritenuta familiare per l'allievo: 'realistica'

....

spesso assume la forma di una breve 'storia'

PROBLEMA VERBALE

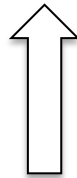
word problem o story problem



Le vengono riconosciute diverse funzioni:

- Favorire la motivazione
- Rendere più accessibile il problema ad allievi che non hanno ancora raggiunto un adeguato grado di astrazione
- Favorire lo sviluppo di competenze di matematizzazione / modellizzazione

- In genere si tende a dare la colpa alle scarse competenze linguistiche dell'allievo
- Invece qui evidenzierò alcune responsabilità della formulazione del testo, quindi delle scelte dell'AUTORE

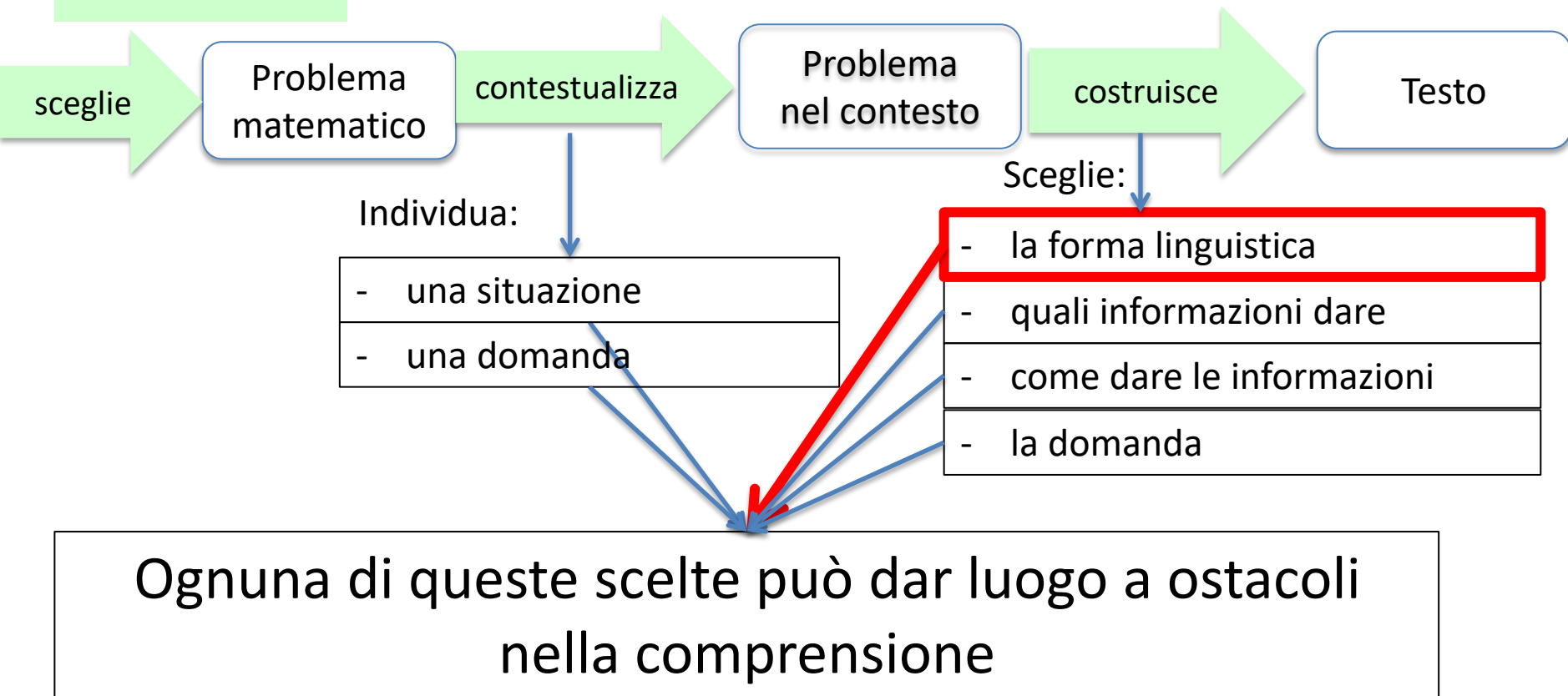


Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di **comprensione**.

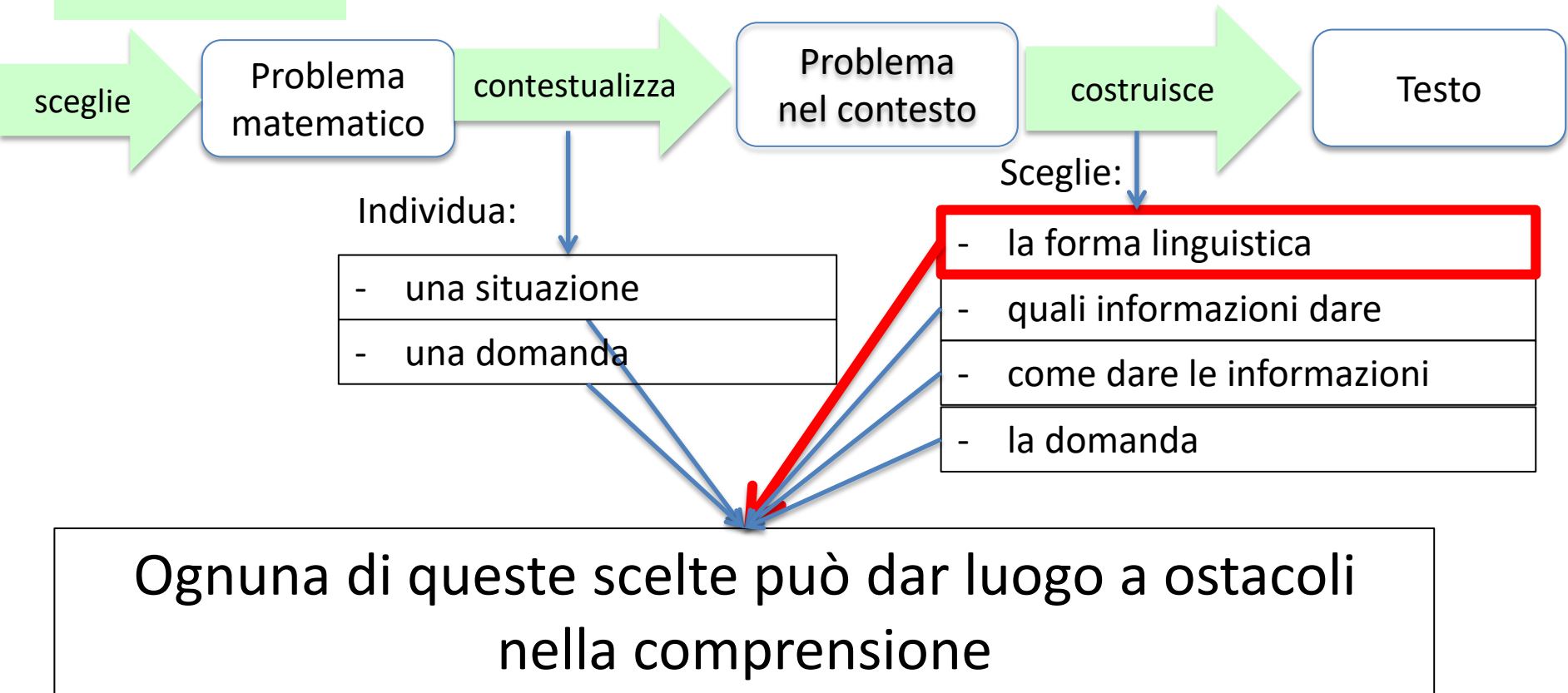
AUTORE



AUTORE



AUTORE



- Lessico

OCSE-PISA: Popolarità del Presidente

In Zedlandia sono stati effettuati alcuni sondaggi di opinione per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle prossime elezioni.

Quattro editori di giornali hanno svolto sondaggi indipendenti su scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali sono i seguenti:

- Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare).

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25 gennaio?

Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

OCSE-PISA: Popolarità del Presidente

In Zedlandia sono stati effettuati
determinare il livello di popola
prossime elezioni.

35,6% di risposte corrette
29,2% di risposte omesse

Quattro editori di giornali hanno
scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali
sono i seguenti:

- Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare).

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di
popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25
gennaio?

Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

OCSE-PISA: Popolarità del Presidente

In Zedlandia sono stati effettuati
determinare il livello di popola
prossime elezioni.

35,6% di risposte corrette
29,2% di risposte omesse

Cosa vuol dire che una persona
è *popolare*?

tro sondaggi dei giornali

il 6 gennaio su un campione di
(a caso),

il 20 gennaio su un campione di

500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

- Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare).

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di
popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25
gennaio?

Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

OCSE-PISA: Popolarità del Presidente

In Zedlandia sono stati effettuati
determinare il livello di popola
prossime elezioni.

35,6% di risposte corrette
29,2% di risposte omesse

Cosa vuol dire che una persona
è *popolare*?

tro sondaggi dei giornali

il 6 gennaio su un campione di
(caso),

il 20 gennaio su un campione di

‘Che fa parte del popolo’

500 cittadini con diritto di voto, s

- Giornale 3: 39,0% (sondaggio ef
1000 cittadini con diritto di voto,
- Giornale 4: 44,5% (sondaggio ef
1000 lettori che hanno telefonato

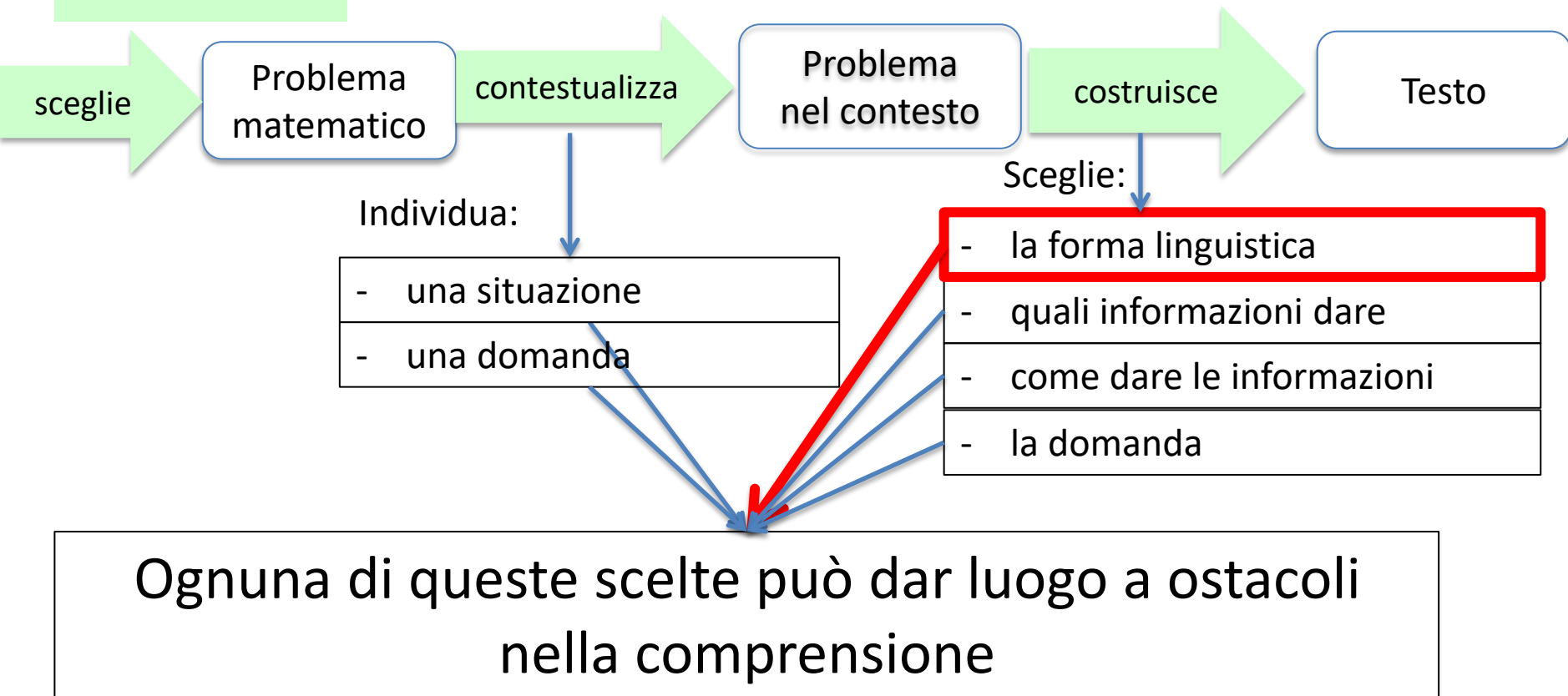
Cosa vuol dire che un giornale è
attendibile?

‘Che esce regolarmente’

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di
popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25
gennaio?

Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

AUTORE



- Lessico
- Legami fra le varie parti del testo

La scala (2^a primaria)

La strega Pasticcia ordina ai suoi gattini Buffetto e Sandogatt di lucidare tutta la lunga scala che porta alla torre più alta del castello.

Buffetto lucida 20 scalini.

Sandogatt ne lucida solo 3.

La strega ne lucida 7 più di lui.

Quanti scalini ha quella scala?

ANAFORE

Vacanze al campeggio (4^a primaria)

Tommaso ha deciso di passare una decina di giorni in campeggio con i suoi amici Alessio, Marco e Giovanni.

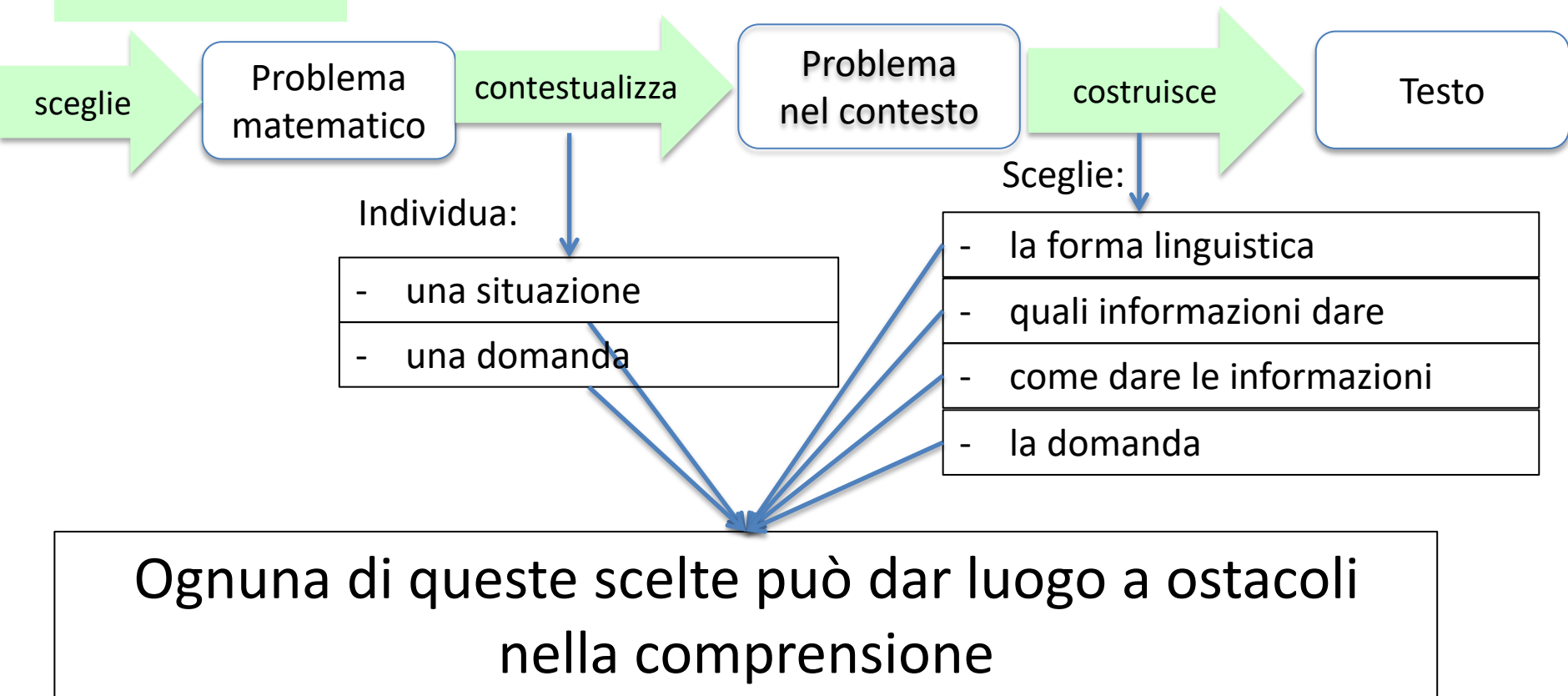
Se prenderanno una tenda con 4 posti letto, allora prevedono di spendere 15 euro al giorno per l'affitto della piazzola, 18 euro a testa per i pasti e 8 euro al giorno per l'ombrellone.

Quanto spendono i 4 ragazzi per stare al mare?

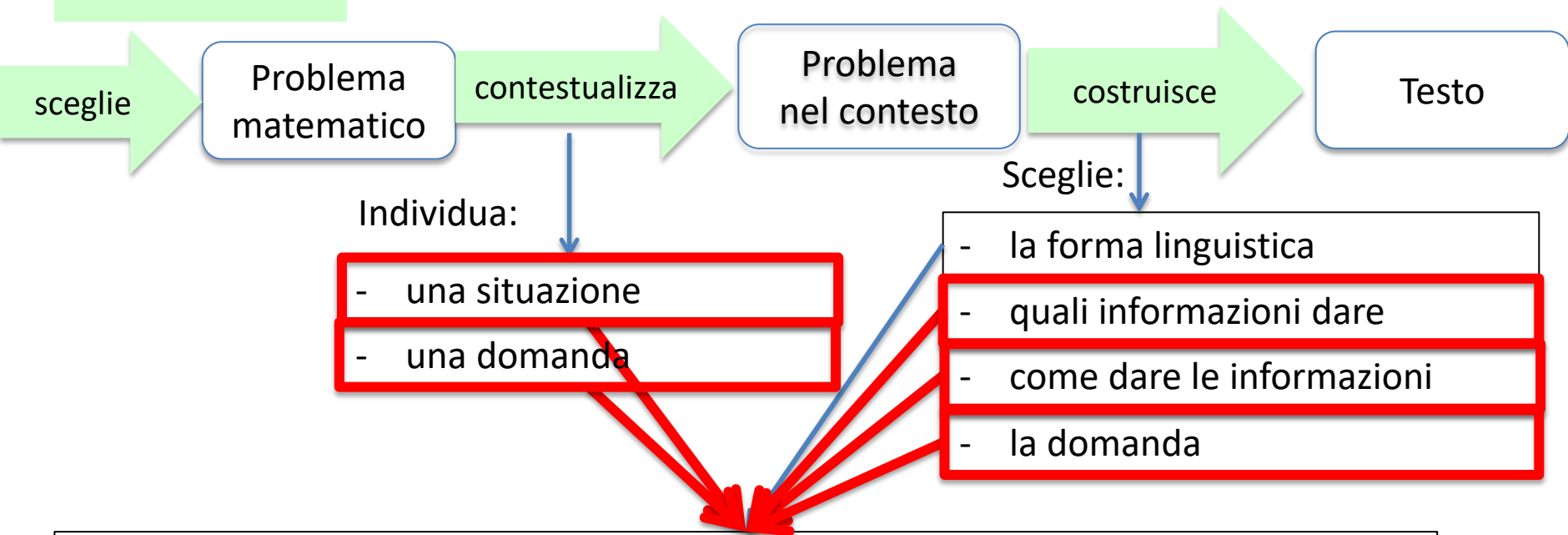


alcuni hanno considerato solo la spesa dell'ombrellone

AUTORE



AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature

Levinson (1983)

"Giovanni voleva comprare un regalo a Carlo per il suo compleanno, perciò andò a prendere il suo **maialino**; lo agitò ma non udì nessun rumore; avrebbe dovuto fare un regalo a Carlo con le sue mani".



Giovanni voleva comprare un regalo a Carlo per il suo compleanno

perciò andò a prendere il suo maialino;

lo agitò ma non udì nessun rumore;



avrebbe dovuto fare un regalo a Carlo con le sue mani.

?

?

?

Importanza della conoscenza enciclopedica

- Leggi attentamente il testo del seguente problema e, senza risolverlo, individua i dati mancanti o superflui:
- Un allevatore possiede 47 mucche e 10 cavalli. Una mucca produce in media 15 litri di latte al giorno. Quanto latte viene prodotto ogni giorno nell'allevamento?
- Nel problema c'è un dato:
☐ superfluo ☐ mancante
- Quale?.....

V primaria

- Leggi attentamente il testo del seguente problema e, senza risolverlo, individua i dati mancanti o superflui:
- Un allevatore possiede 47 mucche e 10 cavalli. Una mucca produce in media 15 litri di latte al giorno. Quanto latte viene prodotto ogni giorno nell'allevamento?
- Nel problema c'è un dato:
 - ☐ superfluo
 - ☒ mancante
- Quale?.....

Non sappiamo quanto latte producono i cavalli ogni giorno

Sceneggiature (comuni)

- La conoscenza enciclopedica è organizzata in schemi più o meno complessi e collegati gli uni agli altri, presenti nella memoria a lungo termine.
- Tali schemi in letteratura sono indicati come *frames, schemata, scripts, plans*.
- Umberto Eco parla di *sceneggiature comuni (frames)*.

Umberto Eco

[*Lector in fabula*, p. 81]

Riteniamo che la comprensione testuale sia ampiamente dominata dalla applicazione di sceneggiature pertinenti, così come le ipotesi testuali destinate all'insuccesso (...) dipendano dall'applicazione di sceneggiature sbagliate e "infelici".

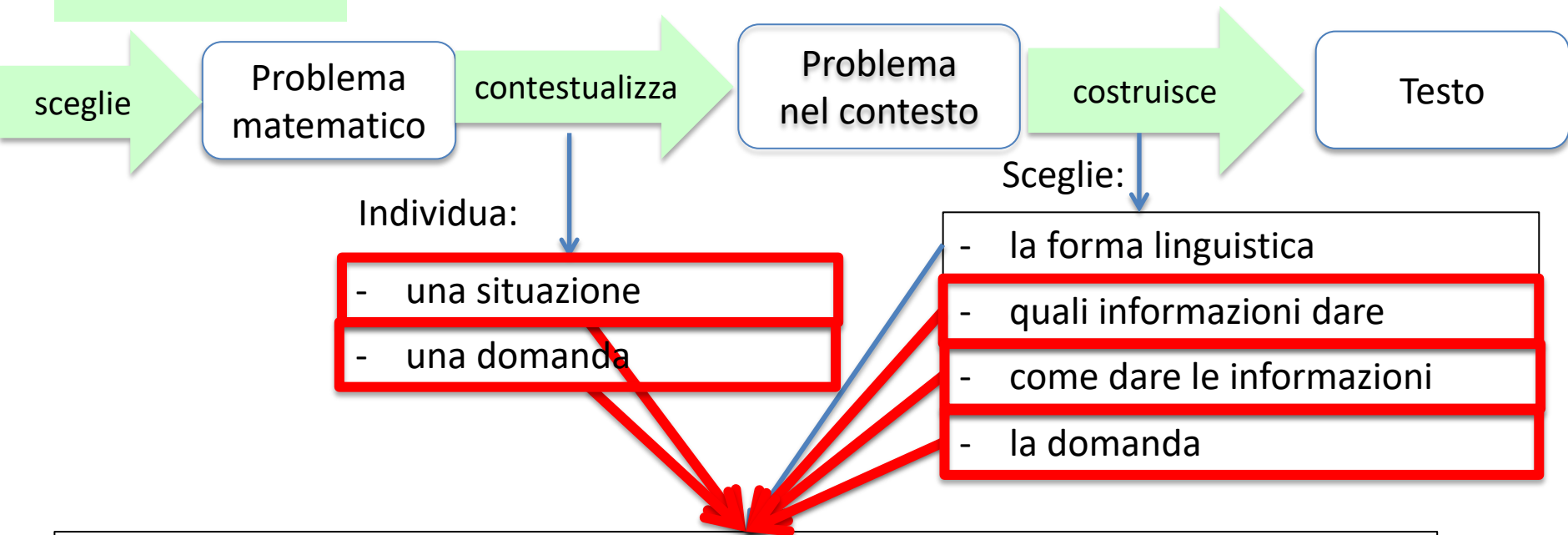
cioè quelle cui fa riferimento

L'AUTORE

da parte del

LETTORE

AUTORE

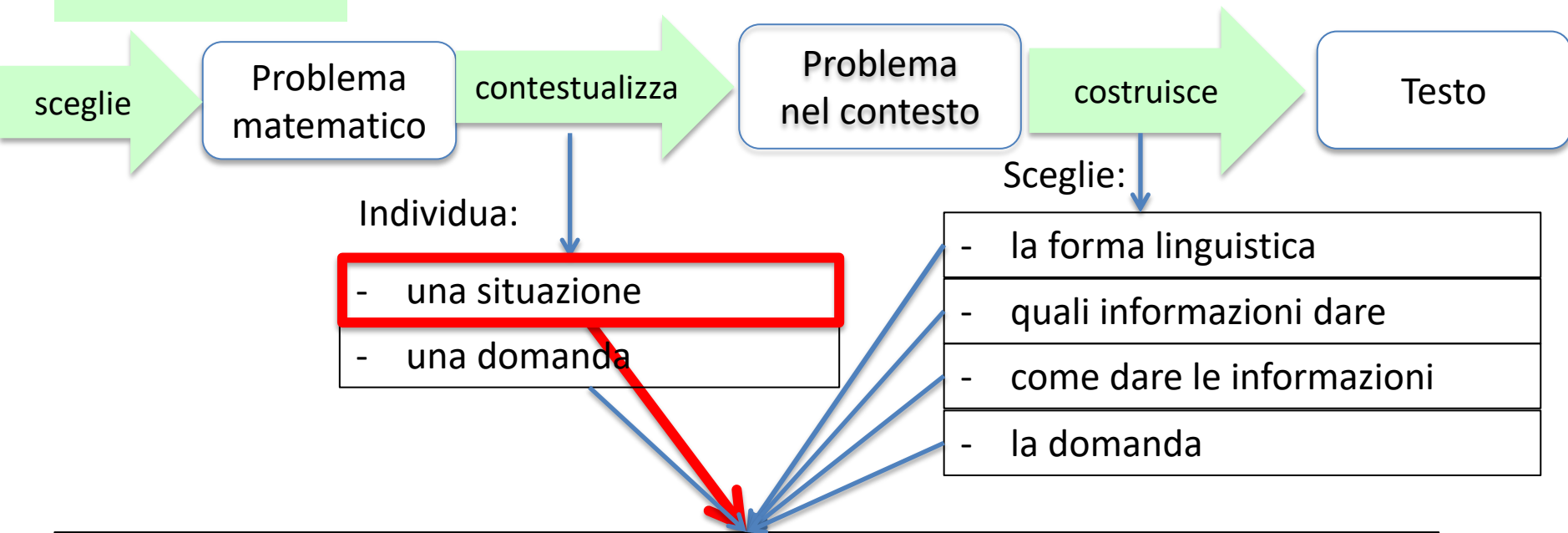


Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature

- si modificano nel tempo
- sono legate a un contesto socio-culturale

AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli
nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature

Vacanze al campeggio (4a)

Tommaso ha deciso di passare una decina di giorni in campeggio con i suoi amici Alessio, Marco e Giovanni.

Se prenderanno una tenda con 4 posti letto, allora prevedono di spendere 15 euro al giorno per l'affitto della piazzola, 18 euro a testa per i pasti e 8 euro al giorno per l'ombrellone.

Quanto spendono i 4 ragazzi per stare al mare?



molti hanno moltiplicato la spesa dell'ombrellone per il numero degli amici

La comprensione del testo

- è ostacolata se:
 - il testo fa riferimento a ‘sceneggiature’ sconosciute

La comprensione del testo

- è ostacolata se:
 - il testo fa riferimento a ‘sceneggiature’ sconosciute
 - o addirittura a sceneggiature che violano le sceneggiature comuni

Il torneo

(Invalsi 2013, SNV06 D17)

D17. Gianni partecipa a un torneo.

Il regolamento del torneo stabilisce che:

- ogni giocatore gioca 5 partite e parte con un punteggio iniziale di 100 punti;
- a ogni partita vinta, il punteggio raggiunto raddoppia;
- a ogni partita persa, il punteggio raggiunto si dimezza.

Gianni perde la seconda e la quarta partita, vince tutte le altre.

a. Completa la tabella.

	<i>Punteggio di Gianni</i>
<i>Punteggio iniziale</i>	100
Partita 1	200
Partita 2	
Partita 3	
Partita 4	
Partita 5	

b. Se Gianni avesse vinto tutte le partite, quale sarebbe stato il suo punteggio finale?

Risposta:

Il torneo

(Invalsi 2013, SNV06 D17)

D17. Gianni partecipa a un torneo.

Il regolamento del torneo stabilisce che:

- ogni giocatore gioca 5 partite e parte con un punteggio iniziale di 100 punti;
- a ogni partita vinta, il punteggio raggiunto raddoppia;
- a ogni partita persa, il punteggio raggiunto si dimezza.

Gianni perde la seconda e la quarta partita.

a. Completa la tabella.

	<i>Punteggio</i>	Punteggio iniziale: 100
		Partita 1 200
		Partita 2 400
<i>Punteggio iniziale</i>		Partita 3 800
Partita 1		Partita 4 1600
Partita 2		Partita 5 3200
Partita 3		
Partita 4		
Partita 5		
		Punteggio ...sommano

b. Se Gianni avesse vinto tutte le partite, quale sarebbe stato il suo punteggio finale?

Risposta:

Il torneo

(Invalsi 2013, SNV06 D17)

D17. Gianni partecipa a un torneo.

Il regolamento del torneo stabilisce che:

- ogni giocatore gioca 5 partite e parte con un punteggio iniziale di 100 punti;
- a ogni partita vinta, il punteggio raggiunto raddoppia;
- a ogni partita persa, il punteggio raggiunto si dimezza.

Gianni perde la seconda e la quarta partita.

a. Completa la tabella.

	<i>Punteggio</i>	Punteggio iniziale: 100
<i>Punteggio iniziale</i>		Partita 1 200
Partita 1		Partita 2 400
Partita 2		Partita 3 800
Partita 3		Partita 4 1600
Partita 4		Partita 5 3200
Partita 5		Punteggio ...sommano

b. Se Gianni avesse vinto tutte le partite, quale sarebbe stato il suo punteggio finale?

Risposta:

D17a: 74,1% risposte corrette

D17b: 29,4% corrette; 66,8% errate

Automobiline

Giulio e Andrea per giocare mettono insieme le loro automobiline.

Quando smettono di giocare, ciascun bambino vuole riprendersi lo stesso numero di automobiline che aveva all'inizio del gioco.

Tutte le automobiline sono 48, ma come dividerle?

Andrea ricorda che ne aveva il triplo di Giulio.

Vuoi aiutarli a dividere le macchinine nel modo giusto?

Simulazione prova di matematica 2014-'15

Problema 2: **Un mappamondo prezioso**

Lavori in un laboratorio d'arte vetraria e il responsabile del museo civico della tua città ti chiede di progettare un espositore avente forma conica che possa contenere un prezioso e antico mappamondo. Il mappamondo ha raggio R e l'espositore deve essere ermeticamente chiuso, per impedire che il mappamondo prenda polvere.

Il tuo collega Mario dice che, per costruire l'espositore, si potrebbe utilizzare il quarzo ialino ma, data la preziosità del materiale, per risparmiare è necessario determinarne le dimensioni ottimali. Inoltre per proteggere l'espositore dalla polvere decidete di ricoprirlo con una sottile pellicola trasparente di nuova generazione e piuttosto costosa.

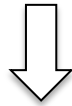
1. Trascurando lo spessore dell'espositore e attraverso un'opportuna modellizzazione geometrica, determina l'altezza h e il raggio di base r dell'espositore affinché sia minima la sua superficie totale, allo scopo di utilizzare una quantità minima di pellicola¹.
2. Fornisci una spiegazione adeguata e convincente del procedimento seguito, eventualmente anche con rappresentazioni grafiche.

Ora tu e Mario dovete scegliere la pellicola da sistemare sulla superficie esterna dell'espositore. La scelta va fatta tra due pellicole che hanno lo stesso costo unitario ma diverse proprietà: la prima ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, mentre la seconda ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale.

3. Aiuta Mario nel capire quale pellicola convenga scegliere in funzione della durata, tenendo conto del fatto che entrambe hanno la stessa resistenza di partenza e che una pellicola va cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza di partenza.

La comprensione del testo

- è ostacolata se:
 - il testo fa riferimento a ‘sceneggiature’ sconosciute
 - o addirittura a sceneggiature che violano le sceneggiature comuni



in entrambi i casi chi legge non costruisce la rappresentazione mentale del problema attesa dall'autore

AUTORE

sceglie

Problema
matematico

contestualizza

Problema
nel contesto

costruisce

Testo

ALLIEVO

Problema
matematico

matematizza

Problema
nel contesto

sceglie
la
soluzione

Testo



AUTORE

sceglie

Problema
matematico

contestualizza

Problema
nel contesto

costruisce

Testo

ALLIEVO

Problema
matematico

matematizza

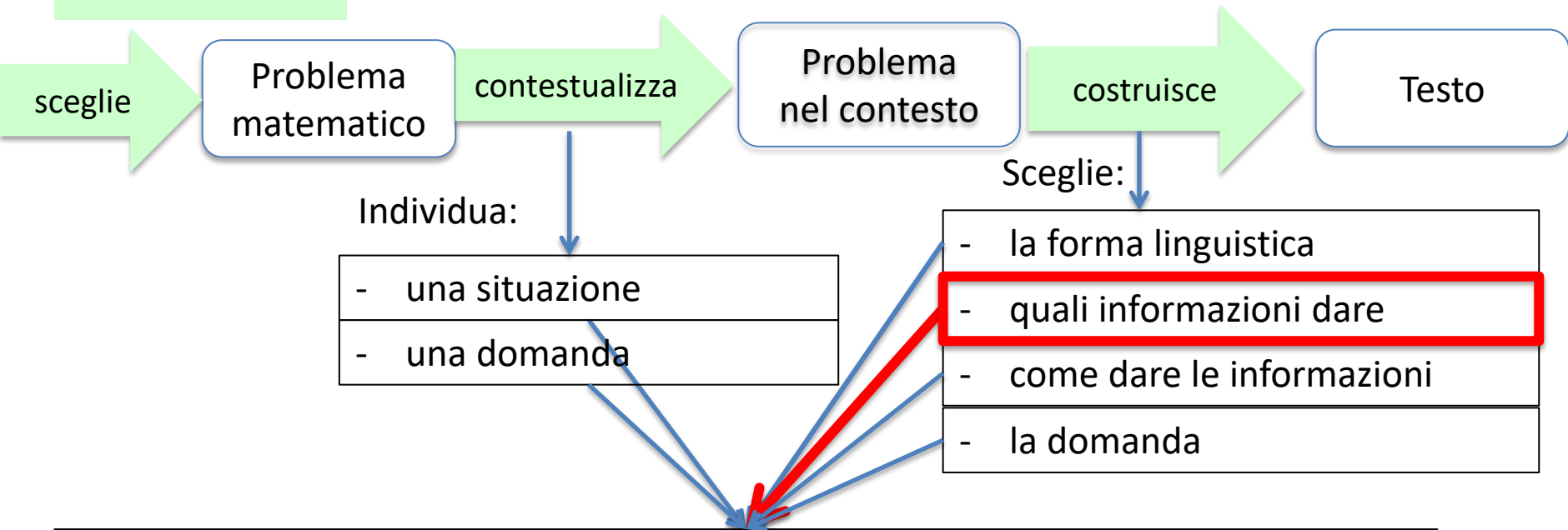
Problema
nel contesto

si rappresenta
la situazione

Testo



AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature

➤ Impliciti e non detto

Umberto Eco

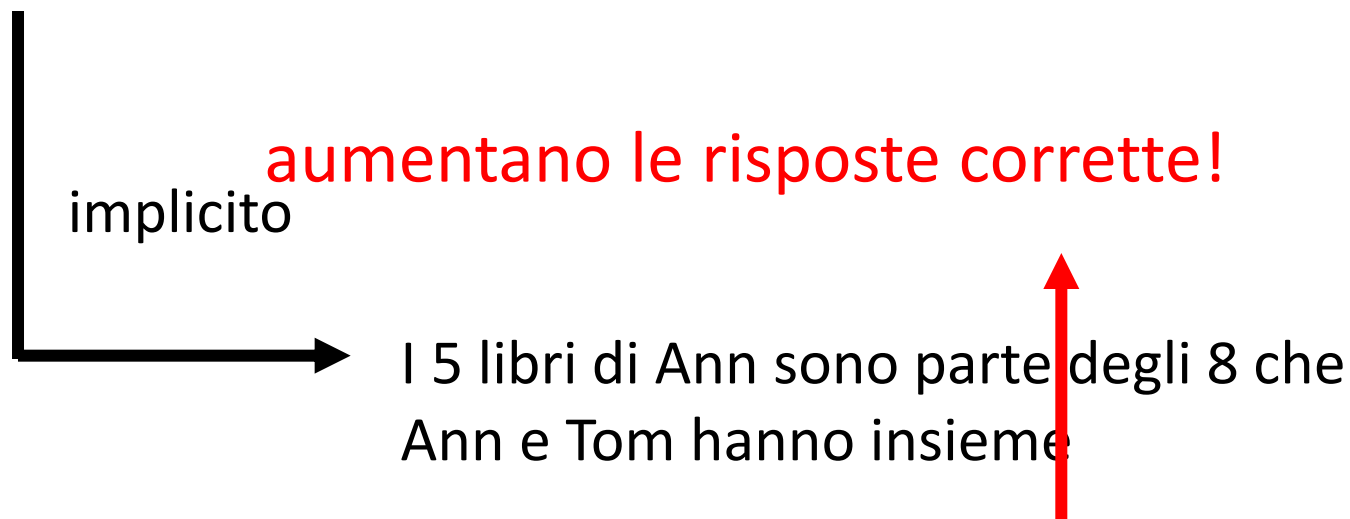


Un testo è una macchina pigra
che si attende dal lettore molta
collaborazione.

Un testo (...) è intessuto di ***non-detto***.

(Da De Corte et al., 1985)

Ann e Tom insieme hanno 8 libri. Ann ha 5 libri.
Quanti libri ha Tom?



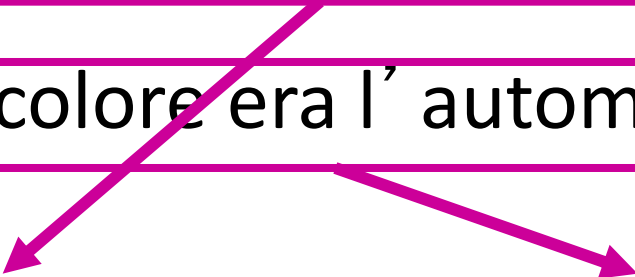
Ann e Tom insieme hanno 8 libri. 5 di questi libri
sono di Ann. Quanti libri ha Tom?

Marco prese l'automobile e si precipitò all'aeroporto.

Non dice:

- che nell'automobile c'era il motore

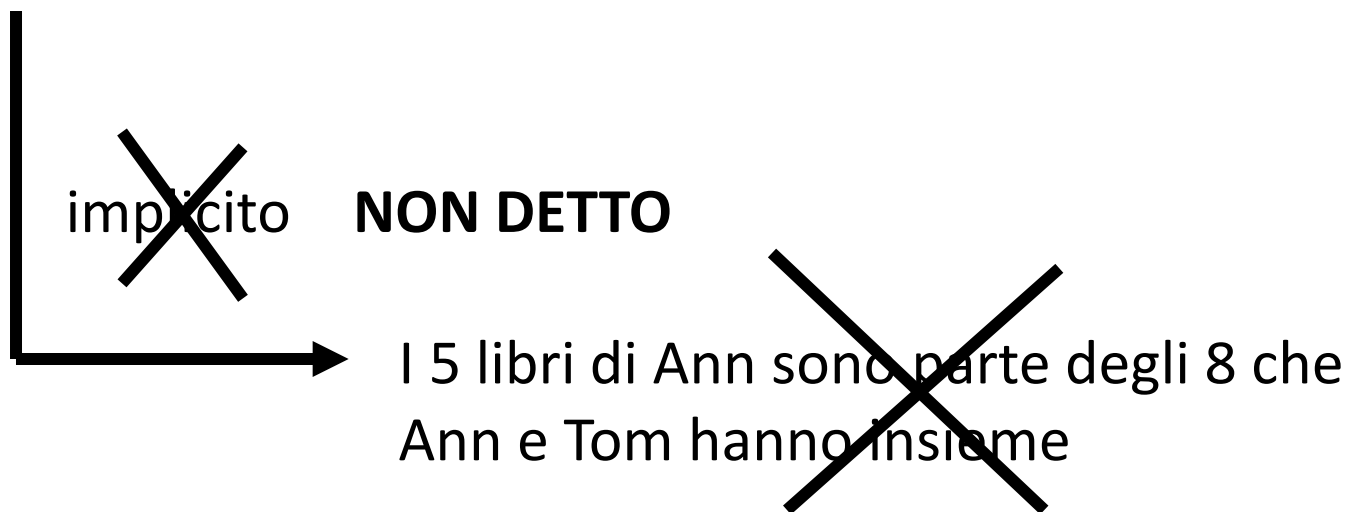
- di che colore era l'automobile



Implicito $\neq$ non detto

(Da De Corte et al., 1985)

Ann e Tom insieme hanno 8 libri. Ann ha 5 libri.
Quanti libri ha Tom?



Uno scenario possibile: Ann e Tom sono fratelli. Ognuno di loro ha una piccola collezione di libri: Ann ne ha 5, Tom ne ha 7.

Poi insieme hanno 8 libri, che sono stati regalati a entrambi, e che tengono nella libreria in sala.

(Da De Corte et al., 1985)

Ann e Tom insieme hanno 8 libri. Ann ha 5 libri.
Quanti libri ha Tom?

Non ci sono informazioni sufficienti per risolvere il problema

Il problema è risolubile

5 libri di Ann sono parte degli 8 che
Ann e Tom hanno insieme

Uno scenario possibile: Ann e Tom sono fratelli. Ognuno di loro ha una piccola collezione di libri: Ann ne ha 5, Tom ne ha 7.

Poi insieme hanno 8 libri, che sono stati regalati a entrambi, e che tengono nella libreria in sala.

Non viene detto:

- che sono stati lucidati TUTTI gli scalini

Ma se non fosse così...

...il problema non si potrebbe risolvere

La strega Pasticcia ordina ai suoi gattini Buffetto e Sandogatt di lucidare tutta la lunga scala che porta alla torre più alta del castello.

Buffetto lucida 20 scalini.

Sandogatt ne lucida solo 3.

La strega ne lucida 7 più di lui.

Quanti scalini ha quella scala?

Spiega il tuo ragionamento.


$$20+3+10=33$$

Non viene detto:

- che sono stati lucidati TUTTI gli scalini

Ma se non fosse così...

...il problema non si potrebbe risolvere

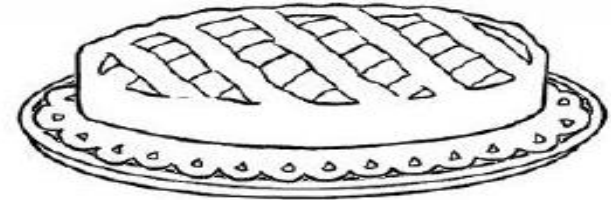
E' un' interpretazione che deriva:

- *non* direttamente dal testo
- ma dalla situazione di comunicazione (contratto didattico)
- dall' accettare le 'regole del gioco' dei problemi (stereotipi)

IMPLICATURA

La crostata (SNV 2009 liv. 5)

Per fare una crostata per 8 persone utilizzo, tra gli altri ingredienti, 240 grammi di farina e 160 grammi di burro. Se impasto 360 grammi di farina e 240 grammi di burro, per quante persone sarà la crostata?



- ☐ A. 16 persone.
- ☐ B. 12 persone.
- ☐ C. 10 persone.
- ☐ D. Non si può dire.

Risposta A	Risposta B (corretta)	Risposta C	Risposta D
20,4%	39,9%	17,1%	20,2%

Classe Prima Scuola Secondaria Primo Grado

- ☒ D. Non si può dire

“Mi sono immaginata di fare la torta e non mi tornava che fossero pesati solo burro e farina.”

INVALSI (5^a primaria, 2009-10)

Nel parco

1. Davide sta andando in bicicletta nel parco. Si ferma davanti al bivio dove vede queste indicazioni:



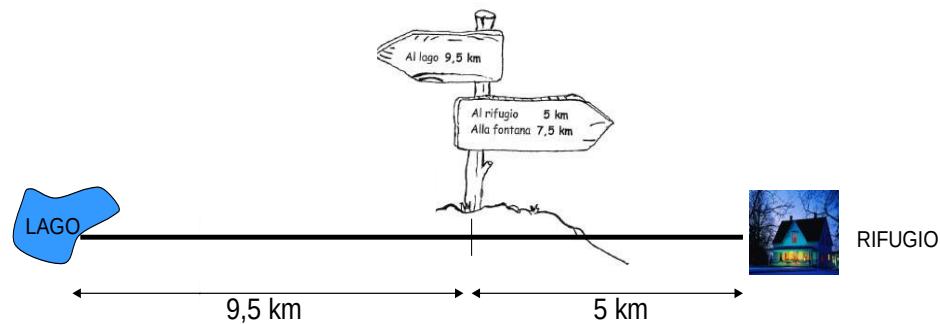
a. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e il lago?

- ☐ A. 5 km
- ☐ B. 9,5 km
- ☒ C. 14,5 km
- ☐ D. 17 km

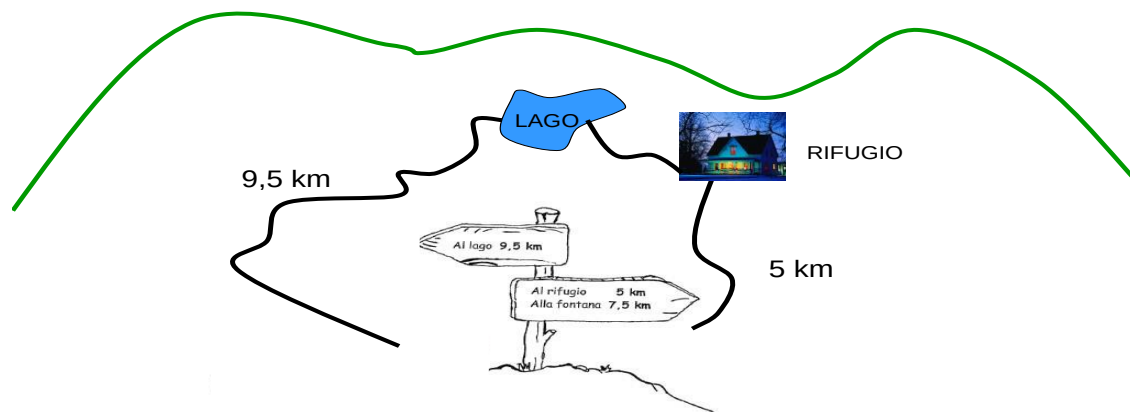
b. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e la fontana, che sono sulla stessa strada?

Risposta: km

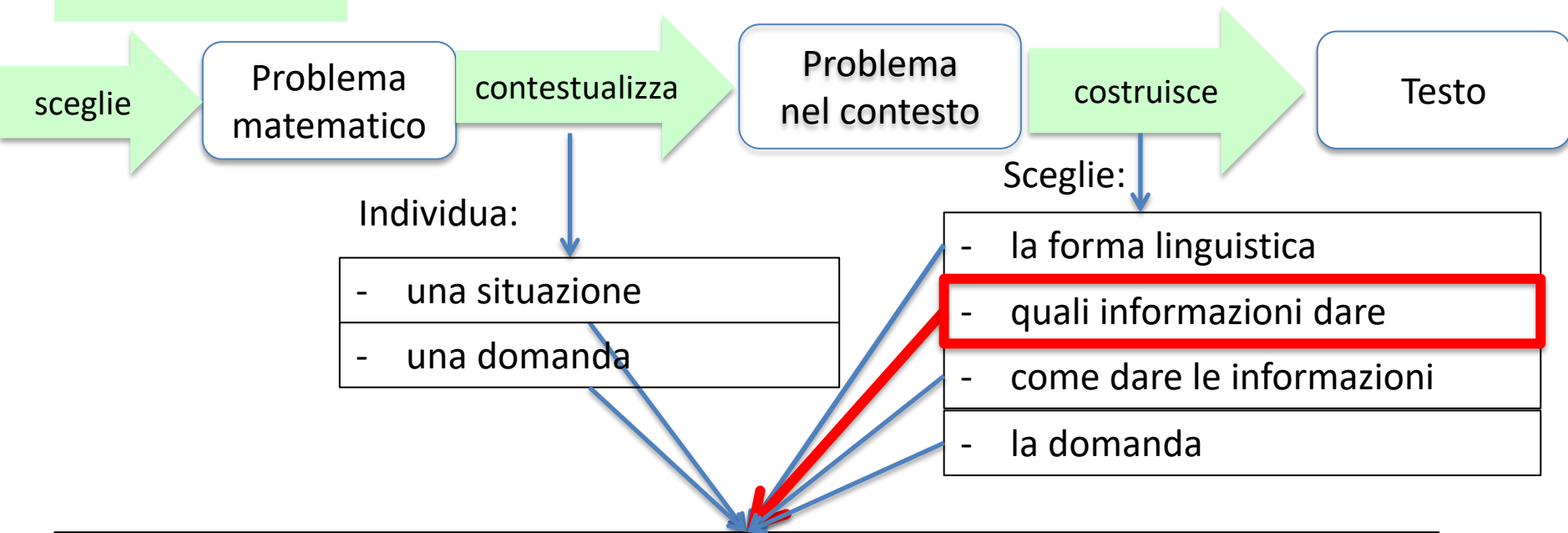
Si assume quindi che la posizione dei 3 poli (bivio, lago e rifugio) sia la seguente:



Ma è più realistico immaginare una situazione più complessa:



AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli
nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature

- Impliciti e non detto
- Informazioni rilevanti per la comprensione

Informazioni rilevanti per la comprensione

In genere l'autore del problema:

- è molto attento a fornire le informazioni necessarie per *risolvere* il problema...
- ...ma non è altrettanto attento alle informazioni necessarie per *comprendere* il problema, cioè per costruire una rappresentazione della situazione

Tre operai impiegano 6 ore a fare un certo lavoro.
Quanto tempo impiegheranno 2 operai a fare lo stesso lavoro?

Da una ricerca di D' Amore et al. (1995)

Ad allievi della scuola primaria e secondaria di 1° grado viene proposto il testo di un problema standard.

Si richiede agli allievi – senza risolverlo! – di riformularlo per proporlo ad altri allievi...

...nel modo che ritengono migliore perché altri lo possano capire

Tre operai impiegano 6 ore a fare un certo lavoro.
Quanto tempo impiegheranno 2 operai a fare lo stesso lavoro?

↓ gli allievi riformulano così

Tre operai fanno tutti i giorni un certo lavoro, tutti insieme, e ogni volta impiegano 6 ore.
Ma uno di loro si ammala e non va a lavorare.
Quel giorno, quindi, gli operai sono solo in 2, ma devono fare lo stesso lavoro.
Secondo te, impiegheranno più tempo o meno tempo?
Perché?
Calcola quanto tempo impiegheranno.

- 
- non è un dato essenziale per risolvere il problema
 - ...ma è essenziale per ***comprenderlo!***

Tre operai fanno tutti i giorni un certo lavoro, tutti insieme, e ogni volta impiegano 6 ore.

Ma uno di loro si ammala e non va a lavorare.

Quel giorno, quindi, gli operai sono solo in 2, ma devono fare lo stesso lavoro.

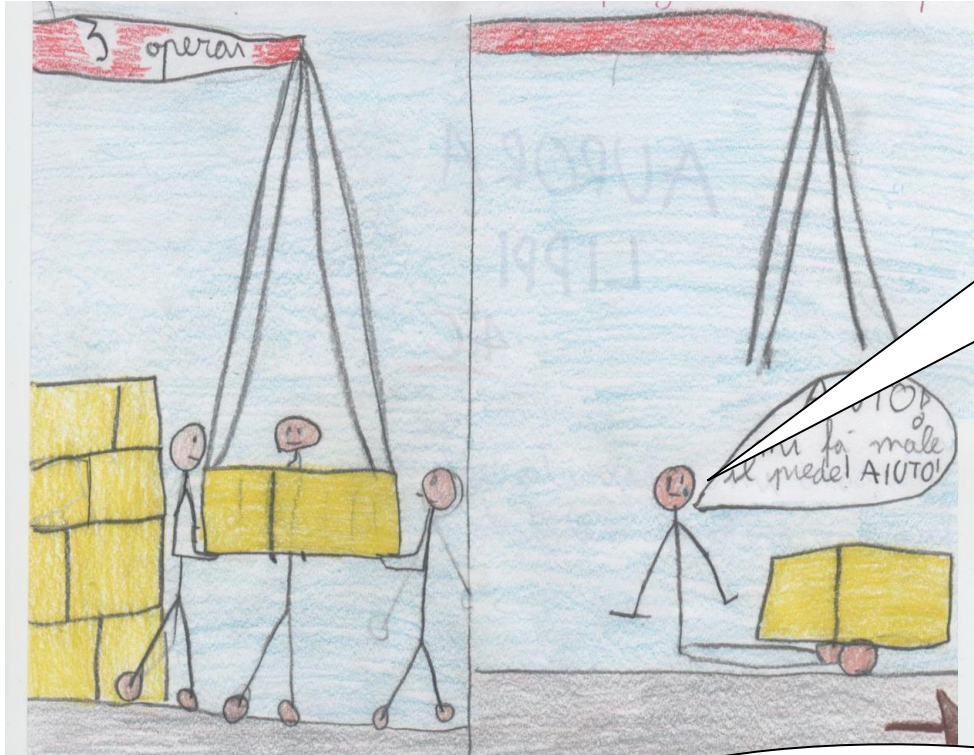
Secondo te, impiegheranno più tempo o meno tempo?
Perché?

Calcola quanto tempo impiegheranno

Tre operai...



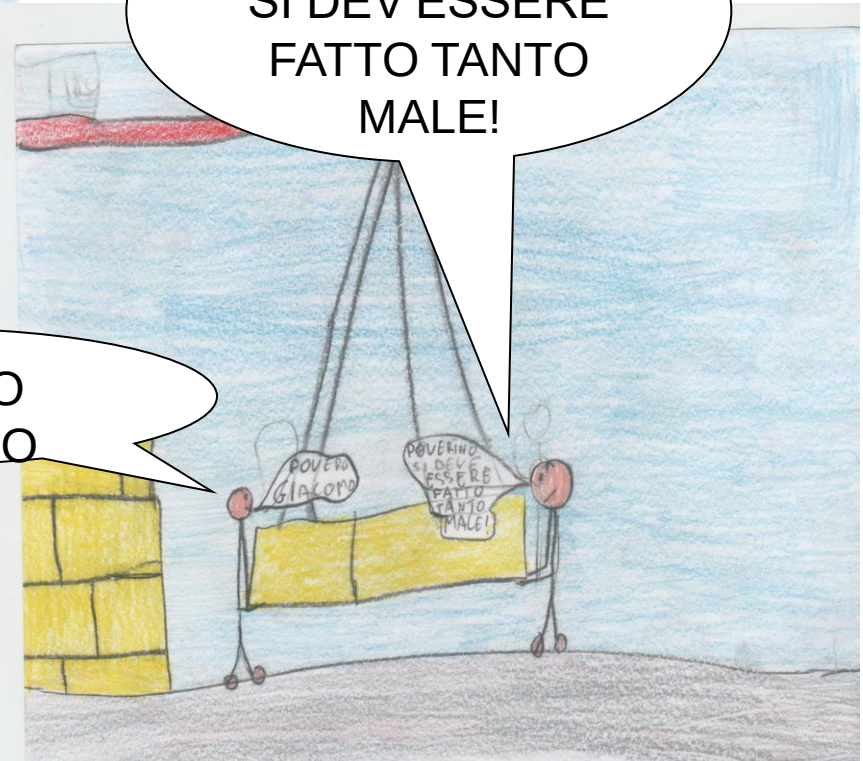
Due operai allo *stesso lavoro*



AIUTO!
Mi fa male il
piede!
AIUTO!

POVERINO!
SI DEV'ESSERE
FATTO TANTO
MALE!

POVERO
GIACOMO



Non riesco a immaginare la scena perchè non so che lavoro fanno.

Non capisco come rispondere alla domanda perchè all'inizio gli operai sono tre, e poi sono due, non è spiegato molto bene.

Questo problema è troppo corto e non si riesce a capire bene quello che succede.

Le informazioni necessarie per comprendere il problema

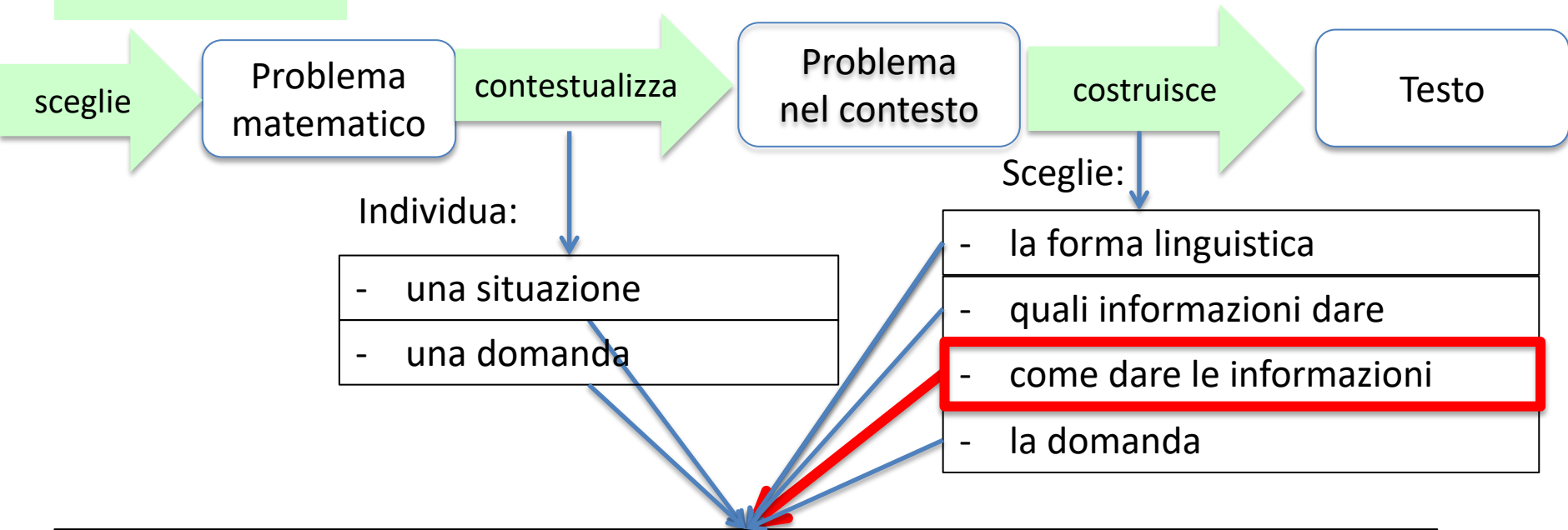
Informazioni NARRATIVAMENTE RILEVANTI

$\neq$

Informazioni LOGICAMENTE RILEVANTI

Le informazioni necessarie per risolvere il problema

AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature comuni

- Impliciti e non detto
- Informazioni rilevanti per la comprensione
- Autore perverso

La scala (2a)

La strega Pasticcia ordina ai suoi gattini Buffetto e Sandogatt di lucidare tutta la lunga scala che porta alla torre più alta.

Buffetto lucida 20 scalini.

Sandogatt ne lucida solo 3.

La strega ne lucida 7 più di lui.

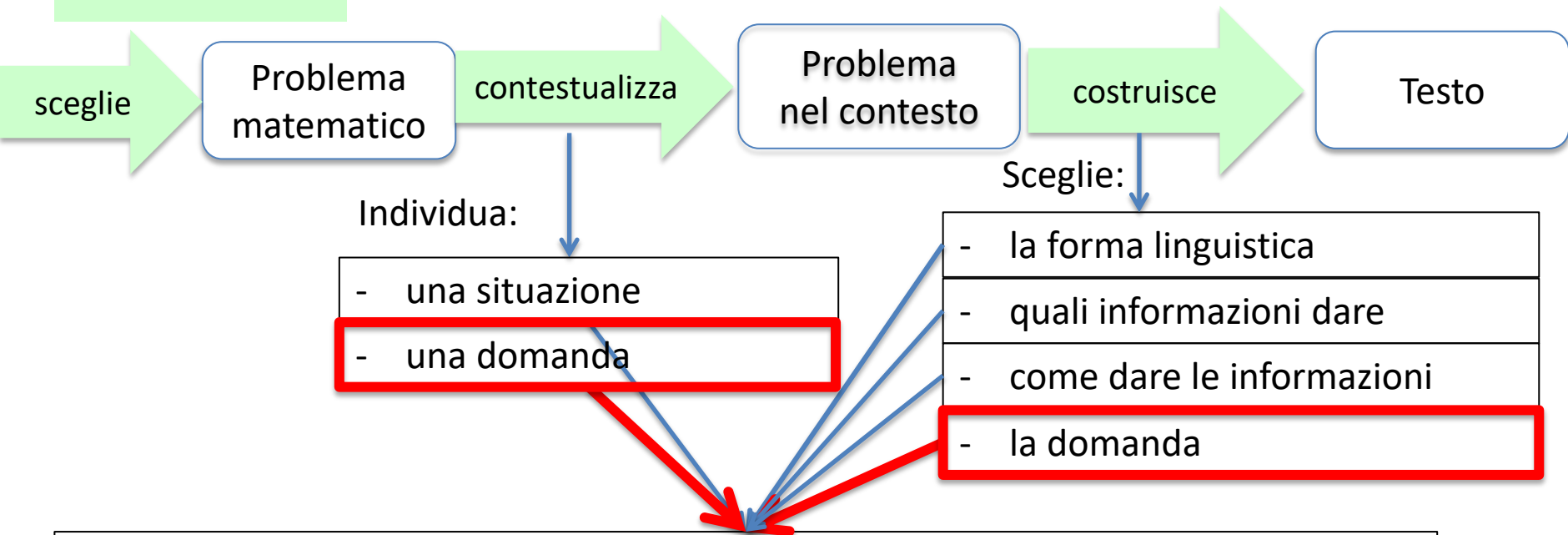
Quanti scalini ha quella scala?

Spiega il tuo ragionamento.

Il narratore dice quello che sa in un modo contorto...

...è PERVERSO

AUTORE

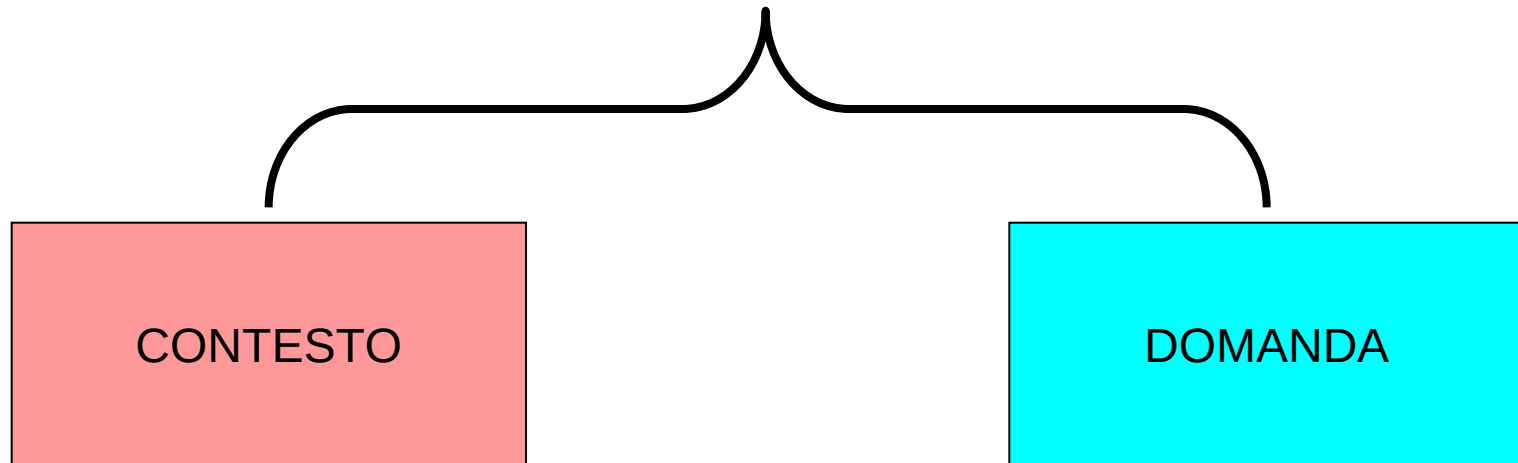


Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione

- Conoscenza enciclopedica e sceneggiature comuni

- Impliciti e non detto
- Informazioni rilevanti per la comprensione
- Autore perverso
- Legame contesto / domanda

PROBLEMA



È una specificità dei problemi che li differenzia da altri tipi di testo

PROBLEMA VERBALE

word problem o story problem

CONTESTO

- eventi descritti nella loro dimensione temporale e causale
- personaggi animati che compiono azioni mosse da scopi

matematico

situazione ritenuta familiare per l'allievo: 'realistica'

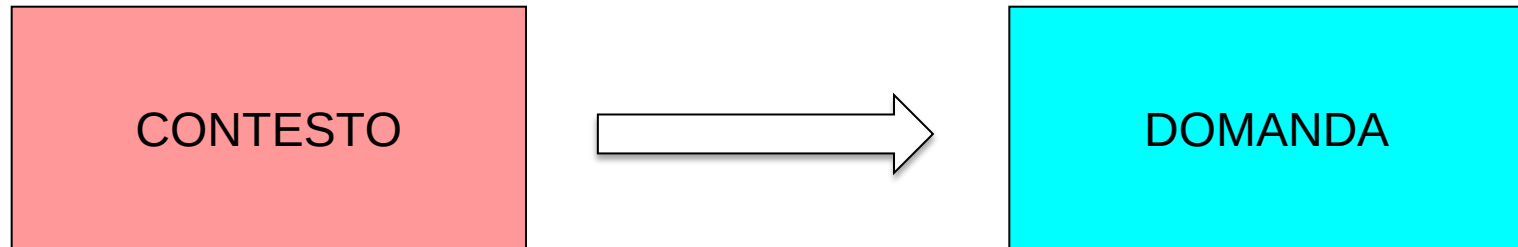
....

spesso assume la forma di una breve 'storia'

L'allievo deve rappresentarsi mentalmente la situazione descritta nel contesto...

...ma poi deve rispondere alla domanda.

Più la situazione descritta nel contesto suggerisce in modo naturale la domanda...



... più la comprensione del contesto favorisce la ricerca di una risposta.

La spesa

(da una riformulazione fatta da docenti)

Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma. Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina di casa, che è malata e non può uscire. La mamma dà loro 10 euro.

Al supermercato prendono latte, pane e detersivo: pagano con la loro banconota e ricevono 3 euro di resto dalla cassiera.

Arrivati a casa, portano il detersivo alla vicina, che chiede: «Quanto vi devo dare?»

Marco e Anna si accorgono che lo scontrino si è attaccato alla bottiglia del latte e si è sciupato! Riescono solo a leggere che il latte è costato 1 euro e 50 centesimi e il pane 1 euro e 40 centesimi.

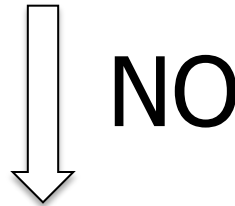
Come possono fare per sapere quanto è costato il detersivo?

- Nei problemi standard non c'è legame di senso fra contesto e domanda.
- Spesso il contesto descrive una situazione in cui agiscono dei personaggi, cioè una 'storia' ...
- ...ma poi la domanda prescinde da questa 'storia'
- Addirittura la domanda spesso non fa proprio riferimento ai protagonisti di tale storia

1° test di continuità narrativa

...controlla se la domanda è collegata al contesto

La domanda fa riferimento a personaggi del contesto?



C'è *frattura* narrativa fra contesto (la storia) e la domanda

La spesa

(versione originale)

Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma. Devono prendere il latte, il pane, e il detersivo per la lavatrice. La mamma dà loro 10 euro.

Al supermercato comprano tutto quello che la mamma ha chiesto.

Pagano 1 euro e 50 centesimi per il latte e 1 euro e 40 centesimi per il pane.

Hanno di resto 3 euro.

Quanto è costato il detersivo per la lavatrice?

La funzione del contesto – la storia - si riduce a quella di contenitore di dati da estrarre per rispondere

Nel parco

(INVALSI 2009-'10, D2, V primaria)

- Davide sta andando in bicicletta nel parco. Si ferma davanti al bivio dove vede queste indicazioni:



a. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e il lago?

- ☐ 5 km
- ☐ 9,5 km
- ☐ 14,5 km
- ☐ 17 km

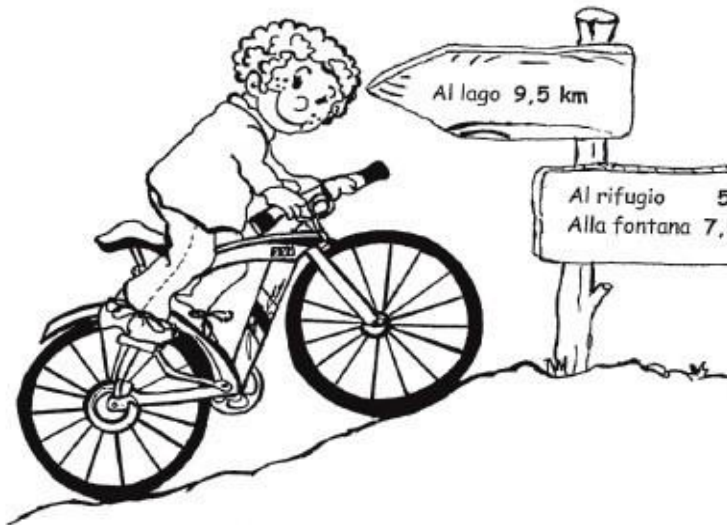
b. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e la fontana, che sono sulla stessa strada?

Risposta: km

Nel parco

(INVALSI 2009-'10, D2, V primaria)

- Davide sta andando in bicicletta nel parco. Si ferma davanti al bivio dove vede queste indicazioni:



ALCUNE RISPOSTE:

- 'Davide sembra arrivare dal lago e non essere a un bivio'
- 'Davide non vede i cartelli perché ha la faccia girata'
- 'Dalle domande, siccome si parla sempre di rifugio, sembra di capire che Davide sia al rifugio'

b. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e la fontana?
strada?

Risposta: km

La scala (2a)

La strega Pasticcia ordina ai suoi gattini Buffetto e Sandogatt di lucidare tutta la lunga scala che porta alla torre più alta del castello.

Buffetto lucida 20 scalini.

Sandogatt ne lucida solo 3.

La strega ne lucida 7 più di lui.

Quanti scalini ha quella scala?

Spiega il tuo ragionamento.

- Anche se un problema supera il 1° test di continuità narrativa...

...cioè anche se nella domanda si fa riferimento a personaggi della storia

- ci può essere lo stesso frattura fra contesto e domanda...

PROBLEMA

Andrea impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro viaggiando a 40 km/h.
Oggi è in ritardo e va a 50 km/h.
Quanto tempo impiegherà?



...una piccola storia

Per fare un certo percorso viaggiando a 40 km/h si impiegano 20 minuti.
Quanto tempo si impiega a fare lo stesso percorso viaggiando a 50 km/h?

PROBLEMA

Andrea impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro viaggiando a 40 km/h.

Oggi è in ritardo e va a 50 km/h.

Quanto tempo impiegherà?

**Molti studenti dicono
che...mancano i dati!**

Andrea impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro viaggiando a 40 km/h.
Oggi è in ritardo e va a 50 km/h.

Riuscirà ad arrivare in orario?

NON CI SONO DATI

DOMANDA 'NATURALE'

In realtà anche il contesto in mancanza di altri dettagli è artificioso: perché va proprio a 50 km/h?
Se riesce ad andare solo a 50 km/h, ce la farà ad arrivare in orario?
La domanda davvero naturale è: a quale velocità dovrebbe andare per arrivare in orario?

2° test di continuità narrativa

...controlla se la domanda è 'naturale' rispetto al contesto

Conoscere la risposta alla domanda serve al protagonista (o a un personaggio) del contesto?



NO

C'è *frattura* narrativa fra contesto (la storia) e la domanda

- Se la domanda non è sufficientemente collegata con la situazione descritta nel contesto...



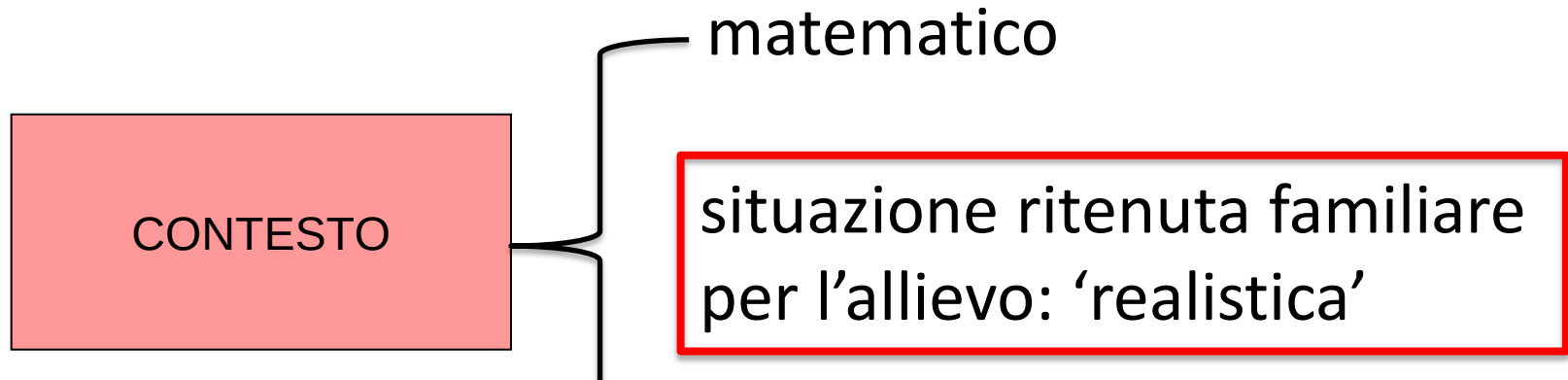
... la rappresentazione della situazione descritta nel contesto può:

- ostacolare la ricerca di una risposta
- dirigere verso un'altra domanda, più 'naturale' rispetto alle sceneggiature evocate

CONCLUSIONI

PROBLEMA VERBALE

word problem o story problem

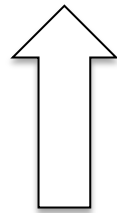


Le vengono riconosciute diverse funzioni:

- Favorire la motivazione
- Rendere più accessibile il problema ad allievi che non hanno ancora raggiunto un adeguato grado di astrazione
- Favorire lo sviluppo di competenze di matematizzazione / modellizzazione

Una scarsa attenzione alla formulazione del testo può:

- introdurre importanti elementi di artificiosità nel problema
- aumentando le difficoltà di comprensione
- vanificando le funzioni che vengono riconosciute a un contesto 'realistico'



situazione ritenuta familiare
per l'allievo: 'realistica'

Le vengono riconosciute diverse funzioni:

- Favorire la motivazione
- Rendere più accessibile il problema ad allievi che non hanno ancora raggiunto un adeguato grado di astrazione
- Favorire lo sviluppo di competenze di matematizzazione / modellizzazione

AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli
nella comprensione

AUTORE



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione

• Conoscenza enciclopedica e sceneggiature

- Impliciti e non detto
- Informazioni rilevanti per la comprensione
- Autore perverso
- Legame contesto / domanda

- È importante che l'insegnante sia consapevole della centralità e della complessità del processo di comprensione del testo di un problema
- Solo in tal caso potrà interpretare certi comportamenti degli allievi
- E potrà fare scelte adeguate

Se un problema è 'mal' formulato... che fare?

L'insegnante ha diverse possibilità di scelta:

- può modificare il testo in modo da superare le criticità evidenziate

La spesa

(da una riformulazione fatta da docenti)

Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma. Devono prendere il latte e il pane, e poi il detersivo per la vicina di casa, che è malata e non può uscire. La mamma dà loro 10 euro.

Al supermercato prendono latte, pane e detersivo: pagano con la loro banconota e ricevono 3 euro di resto dalla cassiera.

Arrivati a casa, portano il detersivo alla vicina, che chiede: «Quanto vi devo dare?»

Marco e Anna si accorgono che lo scontrino si è attaccato alla bottiglia del latte e si è sciupato! Riescono solo a leggere che il latte è costato 1 euro e 50 centesimi e il pane 1 euro e 40 centesimi.

Come possono fare per sapere quanto è costato il detersivo?

La spesa

(versione originale)

Anna e il suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma. Devono prendere il latte, il pane, e il detersivo per la lavatrice. La mamma dà loro 10 euro.

Al supermercato comprano tutto quello che la mamma ha chiesto.

Pagano 1 euro e 50 centesimi per il latte e 1 euro e 40 centesimi per il pane.

Hanno di resto 3 euro.

Quanto è costato il detersivo per la lavatrice?

A volte la riformulazione è poco
impegnativa...

LA MARMELLATA DI PESCHE

La marmellata di pesche

Per preparare la marmellata di pesche la nonna ha usato 10 kg di pesche e 5 kg di zucchero.

La marmellata che si ottiene (togliendo gli scarti e tenendo conto della cottura) è $\frac{3}{5}$ del peso iniziale di pesche e zucchero.

Quanti vasetti della capacità di 250 grammi ha utilizzato la nonna?

La marmellata di pesche (riformulazione 1)

La nonna *deve preparare* la marmellata di pesche con 10 kg di pesche e 5 kg di zucchero.

La marmellata che si ottiene (togliendo gli scarti e tenendo conto della cottura) è $\frac{3}{5}$ del peso iniziale complessivo di pesche e zucchero.

Quanti vasetti della capacità di 250 grammi *servono* alla nonna?

Se un problema è 'mal' formulato... che fare?

L'insegnante ha diverse possibilità di scelta:

- può modificare il testo in modo da superare le criticità evidenziate **...quando ne vale la pena**

Quando vale la pena di riformulare?

- In presenza di un problema significativo dal punto di vista matematico
- In particolare quando il problema vuole introdurre o comunque far lavorare su un concetto particolarmente significativo:
 - La proporzionalità
 - Il concetto di area, la differenza area/ perimetro
 - Le frazioni (e le operazioni...)
 - ...
- In presenza di allievi che hanno un rapporto negativo con la matematica
- Quando si vuol far lavorare gli allievi sulla modellizzazione

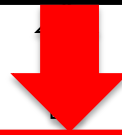
Se un problema è 'mal' formulato... che fare?

L'insegnante ha diverse possibilità di scelta:

- può modificare il testo in modo da superare le criticità evidenziate **...quando ne vale la pena**
- può riformulare il testo eliminando alcuni dettagli...

PROBLEMA

Andrea impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro viaggiando a 40 km/h.
Oggi è in ritardo e va a 50 km/h.
Quanto tempo impiegherà?



Per fare un certo percorso viaggiando a 40 km/h si impiegano 20 minuti.
Quanto tempo si impiega a fare lo stesso percorso viaggiando a 50 km/h?

Nel parco

(INVALSI 2009-'10, D2, V primaria)

- Davide sta andando in bicicletta nel parco. Si ferma davanti al bivio dove vede queste indicazioni:



a. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e il lago?

- ☐ 5 km
- ☐ 9,5 km
- ☐ 14,5 km
- ☐ 17 km

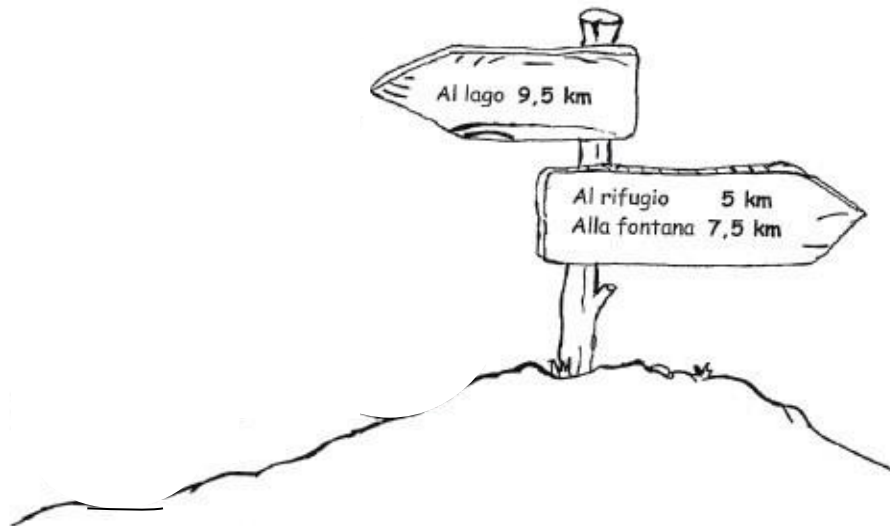
b. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e la fontana, che sono sulla stessa strada?

Risposta: km

Nel parco

(INVALSI 2009-'10, D2, V primaria)

- Nel parco c'è un bivio con queste indicazioni:



a. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e il lago?

- ☐ 5 km
- ☐ 9,5 km
- ☐ 14,5 km
- ☐ 17 km

b. Quanti chilometri ci sono tra il rifugio e la fontana, che sono sulla stessa strada?

Risposta: km

Se un problema è 'mal' formulato... che fare?

L'insegnante ha diverse possibilità di scelta:

- può modificare il testo in modo da superare le criticità evidenziate
- può riformulare il testo eliminando alcuni dettagli...
- ...o eliminando il contesto 'realistico'

Automobiline

Giulio e Andrea per giocare mettono insieme le loro automobiline.

Quando smettono di giocare, ciascun bambino vuole riprendersi lo stesso numero di automobiline che aveva all'inizio del gioco.

Tutte le automobiline sono 48, ma come dividerle?

Andrea ricorda che ne aveva il triplo di Giulio.

Vuoi aiutarli a dividere le macchinine nel modo giusto?

Automobiline (versione astratta)

La somma di due numeri è 48.

Si sa che uno dei due numeri è il triplo dell'altro.

Quali sono i due numeri?

Se un problema è ‘mal’ formulato... che fare?

L'insegnante ha diverse possibilità di scelta:

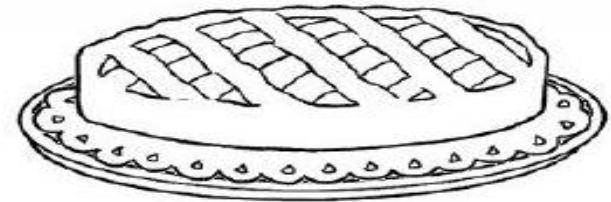
- può modificare il testo in modo da superare le criticità evidenziate
- può riformulare il testo eliminando alcuni dettagli...
- ...o eliminando il contesto ‘realistico’
- può lasciare la formulazione originaria e utilizzare il problema ‘mal formulato’ come occasione per una riflessione sugli aspetti linguistici

Le considerazioni fatte fin qui...

- Ci portano a riflettere sulla difficoltà di valutare competenze matematiche attraverso prove che mettono in gioco la comprensione del testo di un problema o in generale di un testo
- Suggestiscono cautela nell'interpretare i risultati ottenuti in prove di questo tipo
- Ad esempio a volte risposte realistiche vengono considerate scorrette

La crostata (SNV 2009 liv. 5)

Per fare una crostata per 8 persone utilizzo, tra gli altri ingredienti, 240 grammi di farina e 160 grammi di burro. Se impasto 360 grammi di farina e 240 grammi di burro, per quante persone sarà la crostata?



- ☐ A. 16 persone.
- ☐ B. 12 persone.
- ☐ C. 10 persone.
- ☐ D. Non si può dire.

Risposta A	Risposta B (corretta)	Risposta C	Risposta D
20,4%	39,9%	17,1%	20,2%

Classe Prima Scuola Secondaria Primo Grado

- ☒ D. Non si può dire

“Mi sono immaginata di fare la torta e non mi tornava che fossero pesati solo burro e farina.”

Risposta considerata corretta: 5 librerie

ASSI LUNGHE 26

$26:4=6$ col resto di 2

ASSI CORTE 33

$33:6=5$ col resto di 3

→ mancano 3 assi corte per la 6^a libreria...

... però posso ricavarle dalle assi lunghe avanzate!

Per costruire una libreria, un falegname ha bisogno del seguente materiale:

4 assi di legno lunghe

6 assi di legno corte

12 ferri ad angolo piccoli

2 ferri ad angolo grandi

14 viti



Il falegname ha a disposizione 26 assi lunghe, 33 assi corte, 200 ferri ad angolo piccoli, 20 ferri ad angolo grandi e 510 viti.

Quante librerie complete può costruire il falegname?

Risposta:

Le considerazioni fatte fin qui...

- Ci portano a riflettere sulla difficoltà di valutare competenze matematiche attraverso prove che mettono in gioco la comprensione del testo di un problema o in generale di un testo
- Suggestiscono cautela nell'interpretare i risultati ottenuti in prove di questo tipo
- Ad esempio a volte risposte realistiche vengono considerate scorrette
- In generale le considerazioni ci portano a riflettere:
 - sull'interpretazione dei risultati dei 'nostri' studenti in prove quali OCSE PISA
 - ...e a monte sul quadro teorico che è alla base del processo di valutazione di tali prove

“Il riquadro esterno della figura 1.1 mostra che la literacy matematica si esprime nel contesto di una sfida o di un problema che ha origine nel mondo reale.”

• Figura 1.1 •

L'applicazione pratica del modello di literacy matematica

Sfida nel contesto del mondo reale

Categorie di contenuto: Quantità, Incertezza, Cambiamento e relazioni, Spazio e forma

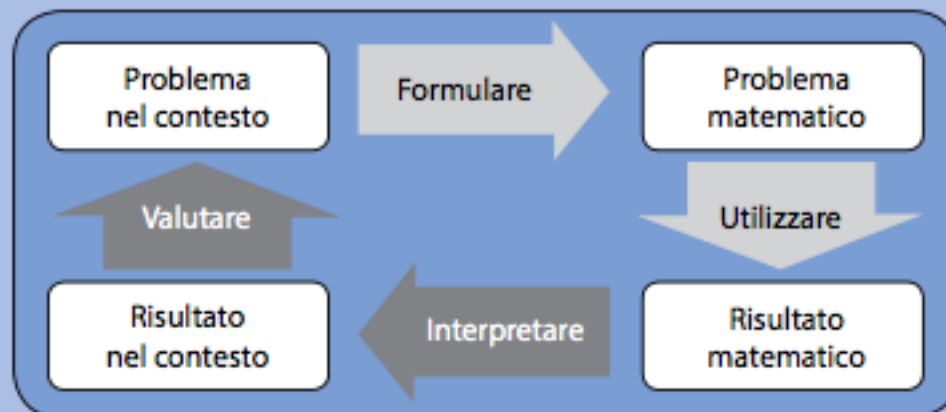
Categorie di contesto: Personale, Sociale, Occupazionale, Scientifico

Pensiero e azione matematica

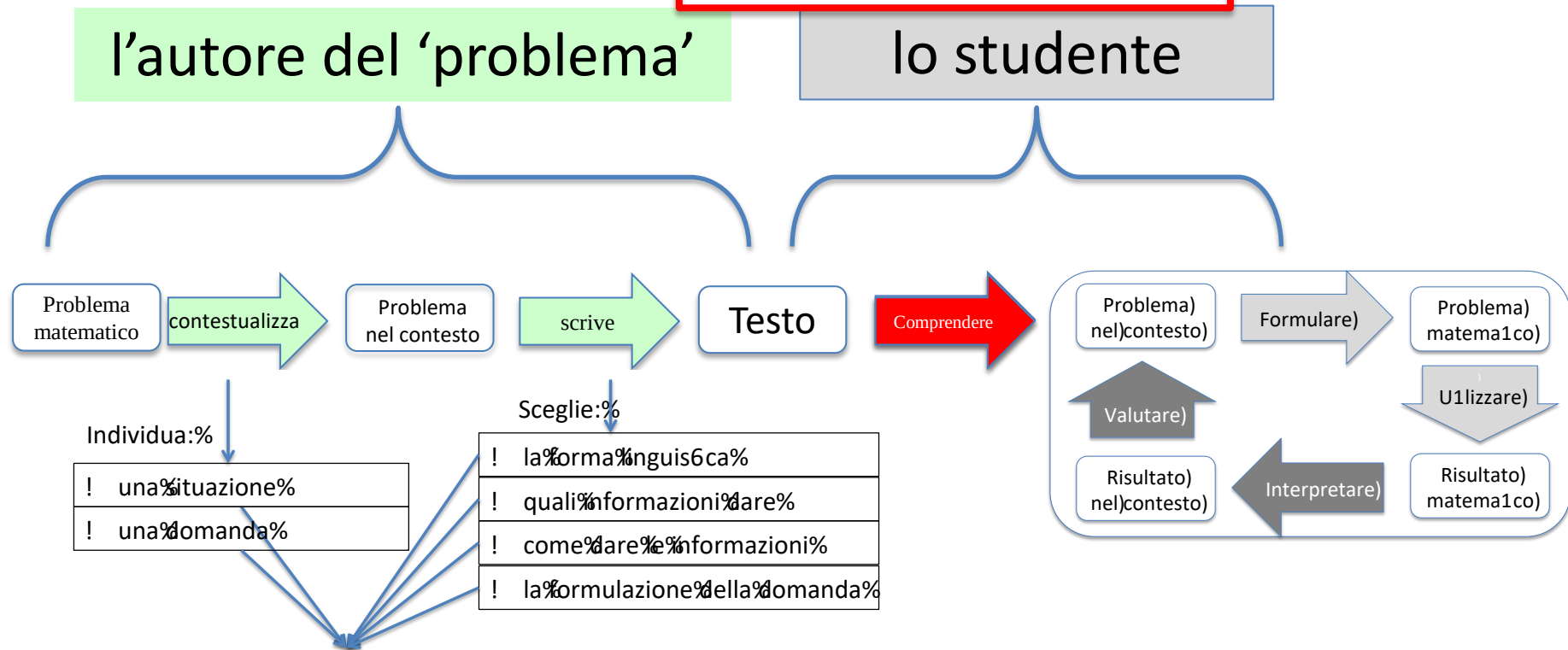
Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Capacità matematiche fondamentali: Comunicazione, Rappresentazione, Strategie di soluzione, Matematizzazione, Ragionamento e argomentazione, Uso di linguaggio e operazioni simboliche, formali e tecniche, Uso di strumenti matematici

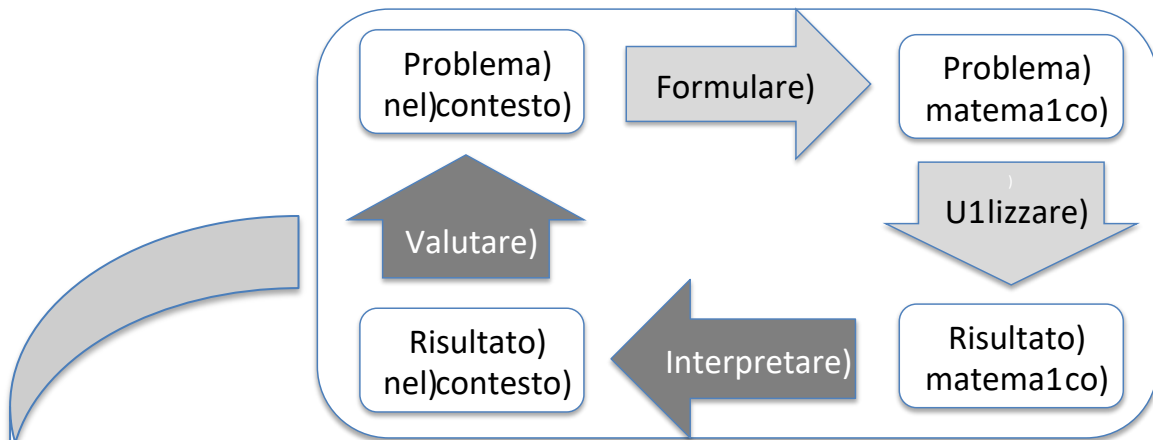
Processi: Formulare, Impiegare, Interpretare/Valutare



“Il riquadro esterno della figura 1.1 mostra che la literacy matematica si esprime nel contesto di una sfida o di un problema che ha origine nel mondo reale.”



Ognuna di queste scelte può dar luogo a ostacoli nella comprensione



Se non teniamo conto della complessità introdotta attraverso un testo

- la frattura fra problemi scolastici e problemi reali non si salda...
- ...anzi, può amplificarsi

PROBLEMI REALI

PROBLEMI SCOLASTICI

cosiddetti

PROBLEMI 'REALISTICI'

cosiddetti

COMPITI 'AUTENTICI'

Se non teniamo conto della complessità introdotta attraverso un testo

- la frattura fra problemi scolastici e problemi reali non si salda...
- ...anzi, può amplificarsi

Da un problema *reale* a un problema *realistico*...
...c'è di mezzo un **testo**

GRAZIE!