5a SCUOLA ESTIVA PER INSEGNANTI UMI CIIM – AIRDM
"IL PROBLEMA DEI PROBLEMI"
L'uso dei problemi nell'insegnamento della matematica
27-31 agosto 2018
Frascati (RM)

Scegliere problemi per costruire significati: analisi a priori, previsioni e interpretazioni

Antonella Montone
Università di Bari Aldo Moro

Premessa

Risultati nazionali ed internazionali (Invalsi, OCSE-PISA, …) evidenziano la necessità di migliorare l'apprendimento degli studenti

Nel confronto internazionale – l'ultimo PISA risale al 2012 e riguarda la matematica – l'Italia si colloca sistematicamente al di sotto della media dei paesi avanzati e fra gli ultimi posti in Europa, insieme a Spagna, Portogallo e Grecia; ben distante dunque dai primi della classe, concentrati in Asia. Nel 2012 il punteggio dei quindicenni italiani in matematica è stato di 485, contro una media OCSE di 494 e una punta di 613 a Shangai: fra i grandi paesi solo Spagna (484) e Stati Uniti (481) hanno fatto peggio di noi (Grafico 2.4).

Un dato particolarmente preoccupante è che ben il 25% dei giovani italiani non raggiunge la soglia di competenze (il livello 2 di PISA) internazionalmente ritenuta come quella minima per entrare a far parte della società a pieno titolo: nelle regioni meridionali questa percentuale supera ampiamente un terzo. Dal 2000 al 2012 il ritardo dei nostri quindicenni rispetto a quelli del plotone dei paesi più avanzati è rimasto sostanzialmente inalterato, nonostante qualche progresso compiuto fra il 2006 e il 2009, grazie presumibilmente al diffondersi anche in Italia dei test standardizzati.

8. A partire dalla metà dello scorso decennio anche in Italia è stato realizzato un numero crescente di prove standardizzate, a opera dell'INVALSI, l'agenzia del Ministero specializzata nella valutazione delle scuole. Attualmente le prove riguardano italiano e matematica e si tengono al termine della II e V primaria, della III secondaria di primo grado, della II e (sperimentalmente) V secondaria di secondo grado; fino allo scorso anno era inclusa anche la I secondaria di primo grado. Qui facciamo prevalentemente riferimento alle indagini internazionali piuttosto che a quelle dell'INVALSI perché i risultati di queste ultime sono alterati da significativi gradi di *cheating*, che differiscono nelle varie regioni (maggiormente al Sud) e nelle varie prove (maggiormente in III media).

Premessa

Risultati nazionali ed internazionali (Invalsi, OCSE-PISA, …) evidenziano la necessità di migliorare l'apprendimento degli studenti

dall’esame della prove INVALSI in tutti gli ordini di scuola emergono alcuni nodi concettuali che restano irrisolti

Classe seconda primaria

D6. Carlotta ha 6 anni, la metà degli anni di suo fratello Roberto.
Quanti anni ha Roberto?

Risposta: .... anni

Risposta corretta: 12 o 12 anni o dodici o dodici anni

D11. La somma degli anni di Anna e degli anni di Carlo è 57.

a. Se Carlo ha 7 anni più di Anna, quanti anni ha Anna?

- ☐ A. 25
- ☐ B. 28
- ☐ C. 32
- ☐ D. 50

D22. Cristina esce per fare acquisti con solo banconote da 20 euro nel portafoglio. In un grande magazzino compera:

- **due camicette che costano 38 euro l'una**
- **sei CD che costano 9,80 euro l'uno**
- **un libro che costa 19,90 euro.**

Quante banconote da 20 euro deve dare alla cassa per pagare il conto?

- ☐ A. 7
- ☐ B. 8
- ☐ C. 9
- ☐ D. 10

D8. Piero e Giorgio partono per una breve vacanza. Decidono che Piero pagherà per il cibo e Giorgio per l'alloggio. Questo è il riepilogo delle spese che ciascuno di loro ha sostenuto:

	Giorgio	Piero
Lunedì	27 euro	35 euro
Martedì	30 euro	30 euro
Mercoledì	49 euro	21 euro

Al ritorno fanno i conti per dividere in parti uguali le spese.

a) Quanti euro deve dare Piero a Giorgio per far sì che entrambi abbiano speso la stessa somma di denaro?

Risposta: …………….. euro

b) Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta:

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Secondo voi quale risposta avrebbero dato i vostri studenti e quanti studenti avrebbero dato quella risposta?

Facciamo la media!

INVALSI

<u>Classe seconda primaria</u>

D6. **Carlotta ha 6 anni, la metà degli anni di suo fratello Roberto.**
Quanti anni ha Roberto?

Risposta: .... anni

Risposta corretta: 12 o 12 anni o dodici o dodici anni

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
57,9	35,7	6,1

Matematica V Primaria SNV 2010 Liv. 5

D11. La somma degli anni di Anna e degli anni di Carlo è 57.

a. Se Carlo ha 7 anni più di Anna, quanti anni ha Anna?

- ☐ A. 25
- ☐ B. 28
- ☐ C. 32
- ☐ D. 50

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Mancate e non valide
40,1%	5,4%	5,8%	44,5%	4,2%

Matematica I Sec. di I gr. SNV 2010 Liv. 6

D22. Cristina esce per fare acquisti con solo banconote da 20 euro nel portafoglio. In un grande magazzino compera:

- **due camicette che costano 38 euro l'una**
- **sei CD che costano 9,80 euro l'uno**
- **un libro che costa 19,90 euro.**

Quante banconote da 20 euro deve dare alla cassa per pagare il conto?

☐ A. 7

☐ B. 8

☐ C. 9

☐ D. 10

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Mancate e non valide
31,8%	39,7%	11,5%	14%	3%

Matematica PN 2010: Livello 8

D8. **Piero e Giorgio partono per una breve vacanza. Decidono che Piero pagherà per il cibo e Giorgio per l'alloggio. Questo è il riepilogo delle spese che ciascuno di loro ha sostenuto:**

	Giorgio	**Piero**
Lunedì	27 euro	35 euro
Martedì	30 euro	30 euro
Mercoledì	49 euro	21 euro

Al ritorno fanno i conti per dividere in parti uguali le spese.

a) **Quanti euro deve dare Piero a Giorgio per far sì che entrambi abbiano speso la stessa somma di denaro?**

Risposta: …………….. euro

b) **Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta:**

……………………………………………………………………………………

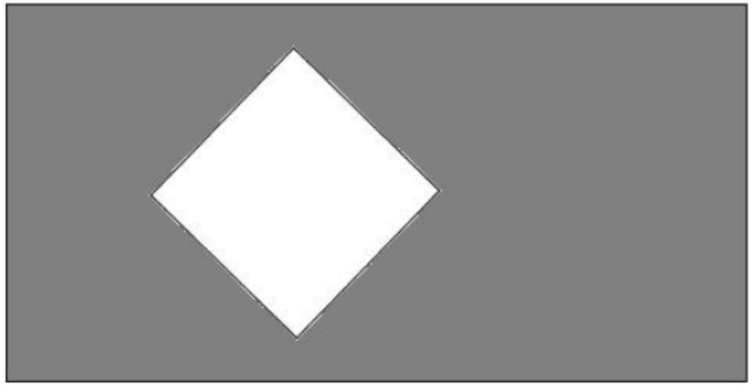
……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

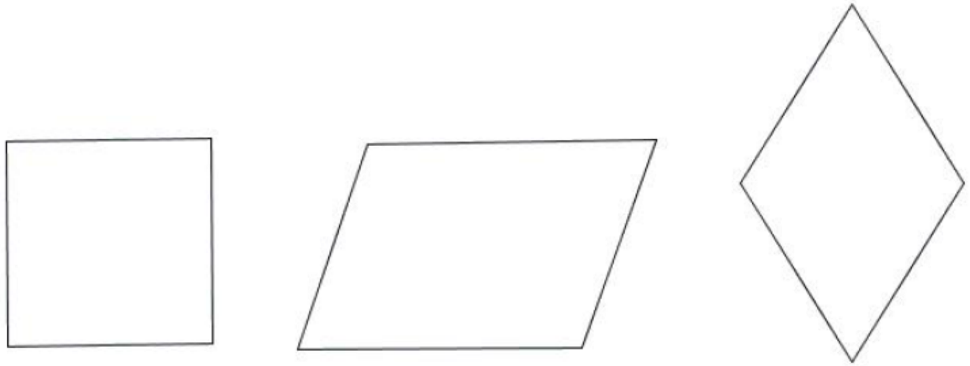
RISULTATI DEL CAMPIONE

Risposte Mancate	Errate	Corrette
6,7%	65,2%	28,1%

18. Andrea ha fatto un buco in un cartoncino:

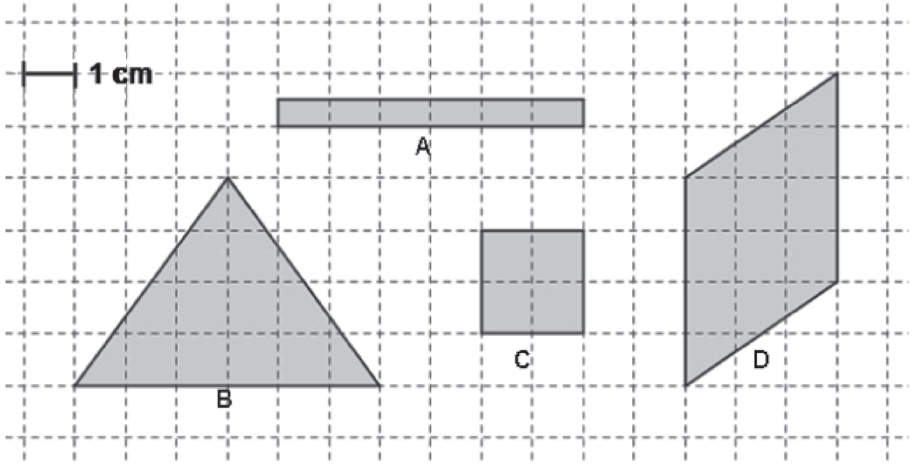


Qual è il pezzo che ha tagliato?



☐ A. ☐ B. ☐ C.

D10. Osserva queste figure.

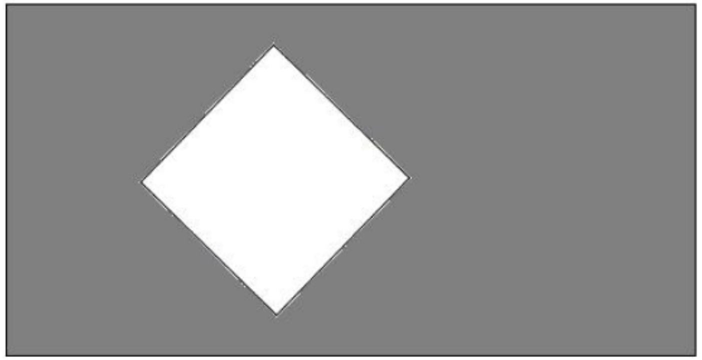


Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

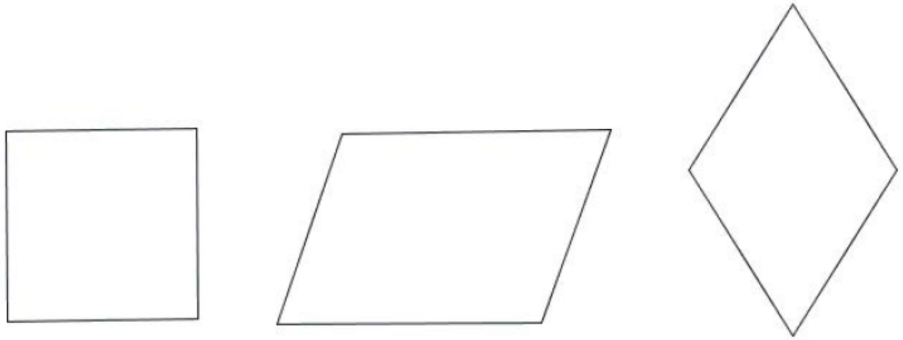
		Vero	Falso
a.	L'area di **A** è di 6 cm^2	☐	☐
b.	**B** e **D** hanno la stessa area.	☐	☐
c.	**C** è la figura con l'area minore.	☐	☐
d.	L'area di **B** è il triplo dell'area di **C**	☐	☐

Matematica II Primaria SNV 2009 Liv. 2

18. Andrea ha fatto un buco in un cartoncino:



Qual è il pezzo che ha tagliato?



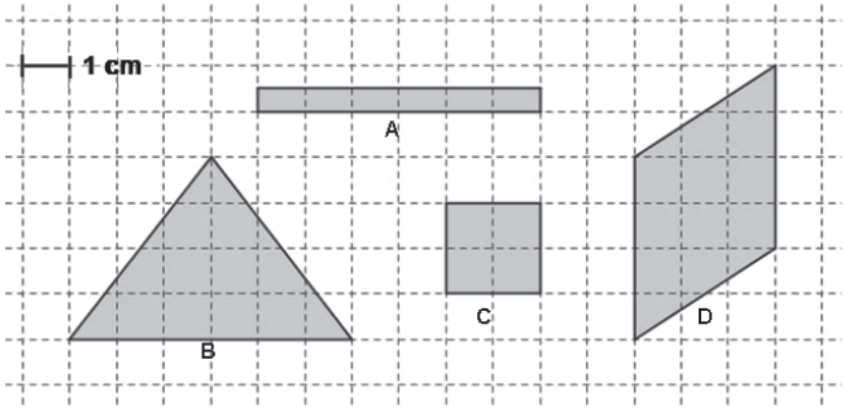
☐ A. ☐ B. ☐ C.

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Mancate e non valide
31,4%	5,4%	56%	7,2%

Matematica I Sec. di I gr. SNV 2010 Liv. 6

D10. Osserva queste figure.



Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

		Vero	Falso
a.	L'area di **A** è di 6 cm^2	☐	☐
b.	**B** e **D** hanno la stessa area.	☐	☐
c.	**C** è la figura con l'area minore.	☐	☐
d.	L'area di **B** è il triplo dell'area di **C**	☐	☐

RISULTATI DEL CAMPIONE

Mancate e non valide	Errate	Corrette
1,7%	60,6%	37,7%

Cosa avreste fatto prima di assegnare questo problema?

Facciamo un’analisi

Cosa significa?

Scegliere problemi per costruire significati: analisi a priori, previsioni e interpretazioni

Capacità di costruire significato

Trovare una struttura nel disordine

Risultati nazionali ed internazionali (Invalsi, OCSE-PISA, …) evidenziano la necessità di migliorare l'apprendimento degli studenti

↓

Ruolo centrale delle conoscenze degli insegnanti sull'apprendimento degli studenti

↓

Scelta e utilizzo del problema

Scelta del problema

- Analisi a priori
- Previsioni
- Interpretazioni

Analisi a priori e previsioni

- Competenze richieste per "**affrontare**" il problema
- Legame con le Indicazioni Nazionali e connessione con la "storia della classe"
- Individuazione di tutte le possibili strategie risolutive che possono sviluppare gli studenti, e anche quelle che può sviluppare un esperto, ma gli studenti no
- Potenziali errori e difficoltà

Interpretazione

(Ribeiro et al, 2017)

- Capacità degli insegnanti di effettuare scelte opportune in momenti contingenti (improvvisazione) e di rispondere alle situazioni che emergono, in modo da fornire agli studenti conoscenze matematiche stabili
- La conoscenza interpretativa permette di dare senso alle proposte/soluzioni degli studenti

L'attenzione non è rivolta (non dovrebbe essere) a ciò che non si sa, ma su come si possa contribuire a far evolvere e sviluppare le loro conoscenze proprie basandosi su ciò che già si sa e sui modi in cui si sa

La duplice valenza del problema

punto di partenza per

- Migliorare la preparazione matematica degli insegnanti

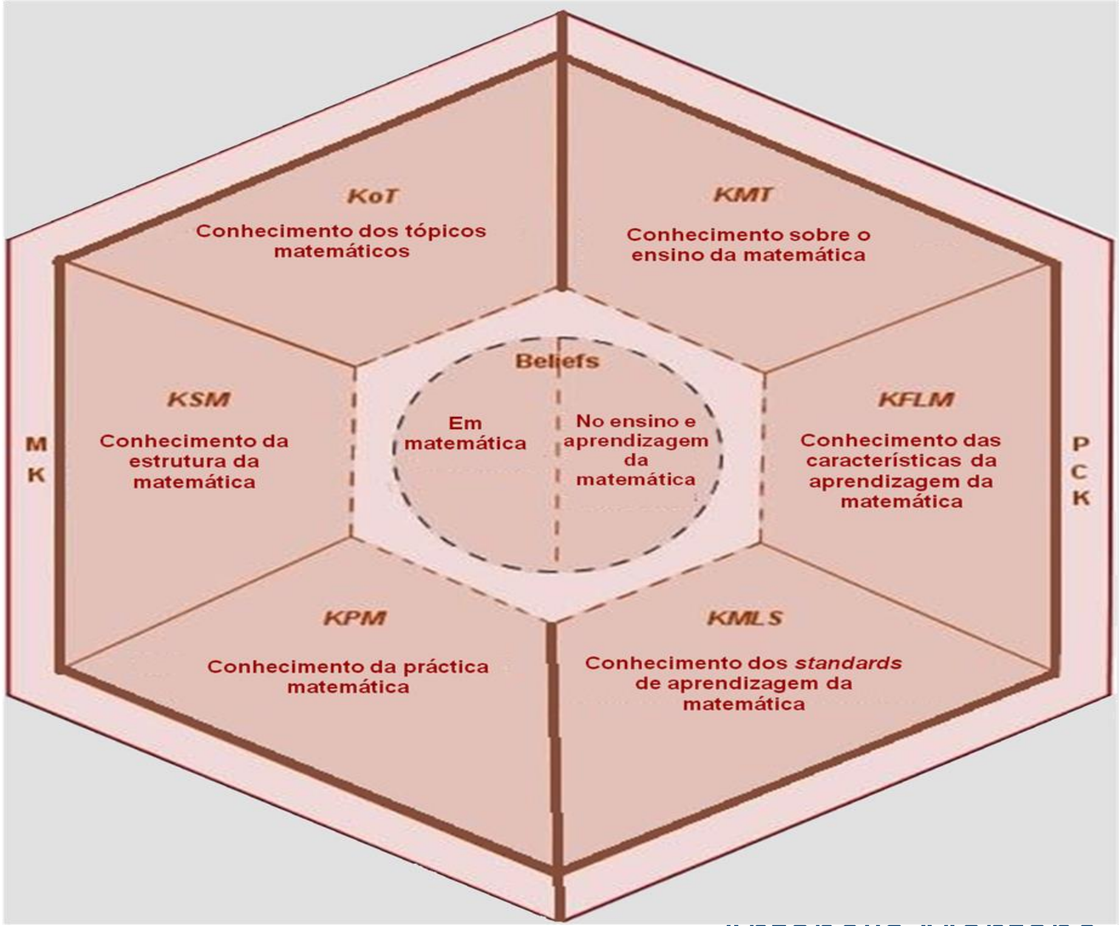
(in grado di garantire non solo una qualità puramente disciplinare, ma anche di fornire strumenti per analizzare la pratica e la matematica coinvolta nel compito dell'insegnamento)

- Analizzare e mediare la produzione di effetti sulle pratiche e sugli studenti

Quando si parla di conoscenza degli insegnanti si fa riferimento alle specificità di tali conoscenze legate alla pratica.

Specificità sia negli

- Aspetti matematici (contenuto)
- Aspetti pedagogici (modi di agire)



- **MTSK** – Matheatics Teachers' Specialized Knowledge

(Carrillo et al., 2013)

… dal costruttivismo sociale…

“*Diventare esperti equivale in un certo senso ad “imparare a pensare dentro le cose e attraverso le situazioni” tenendo conto dei loro vincoli e delle loro risorse*”

(Resnick, 1987)

L’insegnante, attraverso le sue scelte, potrebbe diventare esperto e condurre lo studente a diventare *esperto*

esperto

- Sviluppa rappresentazioni articolate di un problema, ne elabora visioni di insieme e conduce a ragionamenti astratti in base a procedure sperimentate in precedenza
- Utilizza procedure caratterizzate da rapidità e precisione poiché dispone di un ampio repertorio di conoscenze e procedure automatizzate, ben organizzate secondo schemi di azione generali e gerarchici

inesperto

- Si lascia attrarre da aspetti vistosi e dai dettagli del problema
- Pur possedendo gli elementi necessari alla risoluzione di un problema, non ne ha una rappresentazione organizzata e non è in grado di generalizzarli e trasferirli

(Glaser, 1984, 1992)

esperto

- Di fronte ad un problema impiega buona parte del tempo a cercare di inquadrarlo in uno schema risolutivo più generale per poi passare per analogia alla considerazione del caso particolare
- Sa introdurre variazioni anche minime di una stessa strategia, in modo da renderla adatta alla situazione
- Esercita un controllo costante sulla propria attività

inesperto

- È subito assorbito da operazioni e aspetti esecutivi
- Tende ad applicare rigidamente una strategia in base alla regola ingenua del "tutto o niente"
- Non avverte la necessità di monitorare lo svolgimento del processo in corso

(Glaser, 1984, 1992)

Diventare esperto… nella prospettiva degli studi sulla cognizione e metacognizione…

Diventare esperti non vuol dire solo disporre di conoscenza altamente specializzata e di procedure algoritmiche, ma anche saper utilizzare l'una e le altre in modo flessibile, imparare ad osservare, controllare, valutare e correggere la propria prestazione, imparare a gestire il tempo a disposizione, predire i risultati, valutare realisticamente possibilità e limiti e anche apprendere a cercare aiuti di cui si ha bisogno per la riuscita del compito

L'esperto ha appreso ad integrare diversi modi di conoscere ed è desideroso di impadronirsi di strategie nuove, anche se la loro acquisizione costa tempo e fatica

Il problema si può pensare come un modello ideale utilizzato dall'insegnante per permettergli di mettere alla prova la sua professionalità

Antonella Montone

Mettiamoci alla prova

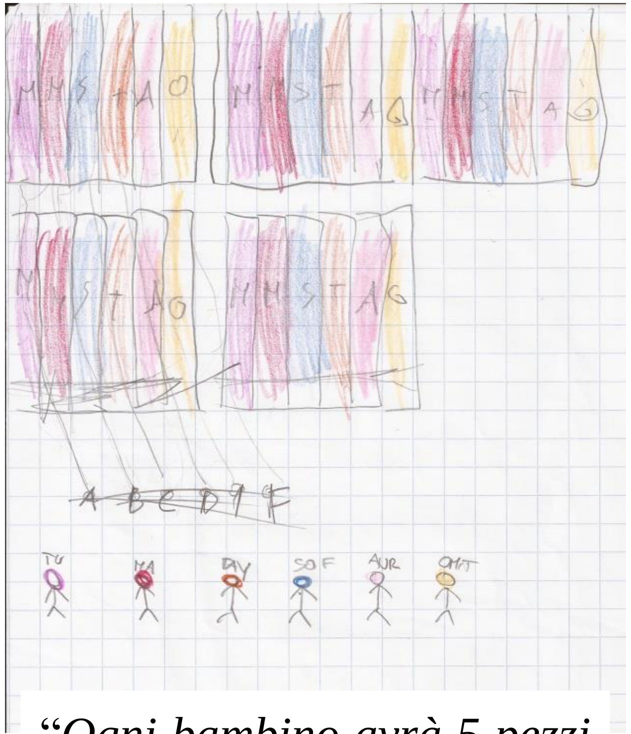
(problema proposto nelle ricerche di Ribeiro et al, 2017)

Se dividiamo 5 barrette di cioccolata equamente tra 6 bambini, quanta cioccolata riceverà ogni bambino?

Analisi a priori e previsioni

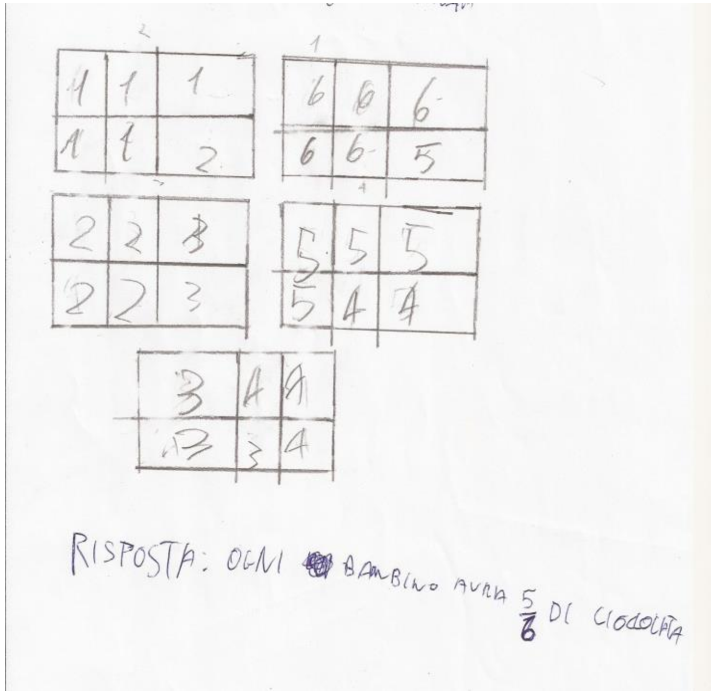
1. **Quali le competenze richieste per affrontare il problema?**
2. **Individuare i legami con le Indicazioni Nazionali**
3. **Individuare tutte le possibili strategie risolutive (corrette) che pensate possano sviluppare gli studenti e anche quelle che, secondo voi, un esperto potrebbe mettere in atto, ma gli studenti no (spiegando il perché)**
4. **Potenziali errori e difficoltà degli studenti (errori tipici e misconcezioni che potrebbero emergere, errori indotti dalla formulazione del problema...)**

Interpretazione: dare senso alle soluzioni



“Ogni bambino avrà 5 pezzi perché le tavolette sono 5 e io le ho divise in 6. Poi da ogni tavoletta ho preso un pezzo per ogni bambino, moltiplicato per 5 volte.”

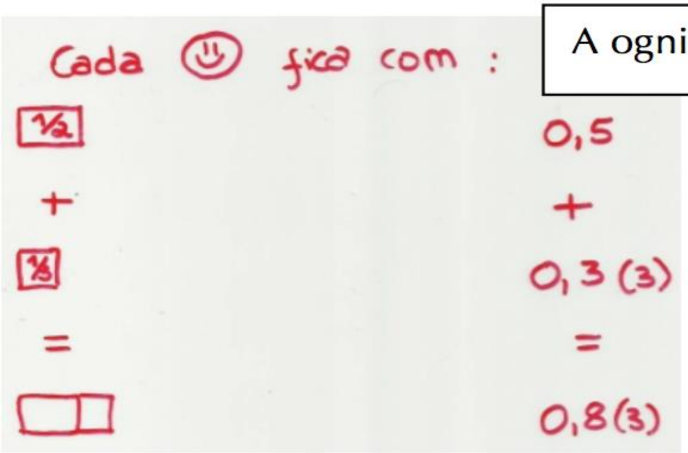
“Se divido 5 barrette in 6 parti ognuna da 5 pezzi, ad ogni bambino ottengo il risultato, cioè 5/6.”



“Ogni bambino avrà 5/6 di cioccolata.”

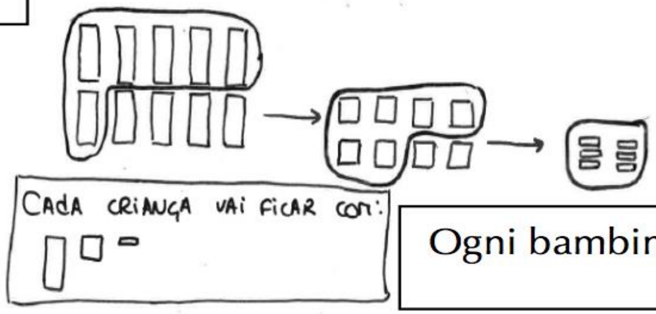
Antonella Montone

Madalena



A ogni bambino

Mariana



Ogni bambino avrà:

Isabel

6 crianças
5 barras

Divide-se cada barra em 6 pedaços

$5_{barras} \times 6_{pedaços} = 30_{pedaços}$

$30_{pedaços} : 6_{crianças} = 5\ pedaços$

OU

barras divididas em 6 pedaços

De cada barra retira-se um pedaço igual, formando uma 6ª barra.

Assim, teremos 1 barra para cada criança.

Pensando de outra forma, cada criança fica com $\frac{5}{6}$ de cada barra.

6 bambini

5 barrette

si divide ogni barretta in sei pezzetti

5 barrette x 6 pezzettini = 30 pezzetti

30 pezzettini : 6 bambini = 5 pezzetti

<u>oppure</u>

Da ogni barretta si prende un pezzetto uguale, formando una 6° barra.

Così avremo una barretta per ogni bambino.

Ragionando in un altro modo, a ogni bambino spettano 5/6 di ogni barretta.

Sofia

R: Cada criança ficava com $5/6$ de cada barra.

R: a ogni bambino spettano 5/6 di ogni barretta.

Inês

Nesta situação, a cada um cabe $2/4$ de barra e $1/3$ de outra barra:

$$\underset{(\times 3)}{\frac{2}{4}} + \underset{(\times 4)}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \underset{(:2)}{\frac{10}{12}} = \frac{5}{6} \longrightarrow \frac{5 \text{ barras}}{6 \text{ alunos}}$$

Concluindo, independentemente da forma como se dividem as barras de chocolate, vai sempre caber $\frac{5}{6}$ do total das barras, a cada aluno, [ou $\frac{5}{6}$ de cada barra] (acrescentado oralmente) (Na aula concluímos

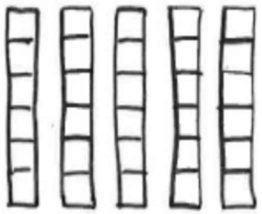
In questa situazione, a ognuno spettano 2/4 di barretta e 1/3 di un'altra barretta:

In conclusione, indipendentemente dal modo in cui si dividono le barrette di cioccolato, spetterà sempre 5/6 del totale delle barrette a ogni alunno, [o 5/6 di ogni barretta] (aggiunto oralmente)

In classe concludiamo che a ogni bambino spettano 5/6 di una barretta. Il gruppo aveva considerato che 5/6 del totale o di una barretta era lo stesso.

Ricardo

02...



1° Dividimos cada barra em 6 quadradinhos;

2° No total, ficámos com 30 quadradinhos

3° Dividimos os 30 quadrados por 6 crianças:

$\frac{30}{6}$ = 5 QUADRADINHOS

1° Dividiamo ogni barretta in 6 quadratini;

2° In totale, abbiamo 30 quadratini.

3° Dividiamo i 30 quadretti per 6 bambini:

30/6 = 5 quadratini

Flor

• Divide-se cada barra em 6 partes iguais. Cada aluno ficará com $\frac{1}{6}$ do total do chocolate; $\frac{5}{6}$ de cada barra.

$\frac{5 \text{ (pedaços)}}{30 \text{ (partes)}}$ $\quad \frac{5}{30} \overset{:5}{=} \frac{1}{6}$

Cada criança fica com 1 pedaço de cada barra.

Logo,

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Cada criança fica com $\frac{5}{6}$ de uma barra de chocolate.

Si divide ogni barretta in 6 parti uguali.

Ogni alunno avrà 1/6 del totale del cioccolato; 5/6 di ogni barretta.

5(pezzetti)/30(parti)

Ogni bambino ha un pezzetto di ogni barretta.

Quindi,

1/6+1/6+1/6+1/6+1/6=5/6

Ogni bambino ha 5/6 di una barretta di cioccolato.

Considerazioni conclusive

- Quando si parla di Problemi ci sono persone in gioco e non solo soluzioni
- L'insegnante dovrebbe prendersi cura dell'immagine del Sé che lo studente sviluppa nei contesti di apprendimento
- Interpretare (i comportamenti, gli atteggiamenti cognitivi, i risultati) vuol dire promuovere l'autonomia all'apprendimento attraverso l'analisi dei percorsi, dei limiti, delle difficoltà
- …

Grazie per l’attenzione!

Antonella Montone

antonella.montone@uniba.it

Bibliografia

- Cisotto, L., 2015, *Promuovere l'autonomia e il desiderio di imparare. Lo stile di apprendimento per competenze*, in L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, VOL.38 A-B N. 5 NOVEMBRE DICEMBRE 2015.
- Resnick, L. B., Education and learning to think, National Accademy Press, Washington, 1987, Literacy in schooland out, "Daedalus", 119, 1990, pp. 169-185, trad it. Imparare dentro e fuori dalla scuola. In C. Pontecorvo, A. Aiello e C. Zucchermaglio (a cura di). I contesti sociali dell'apprendimento, LED, MOLANO, 1995, P. 61-83.
- Glacer, R., 1984, Education and thinking, "American Psychologist", 39, pp. 93-104.
- Ribeiro, M., Jakobsen, A., Mellone, M., 2017, *Secondary prospective teachers' interpretative knowledge on a measurement situation, PME 41*