

V Scuola Estiva UMI-CIIM & AIRDM per Insegnanti  
centro Giovanni XXIII Frascati – Roma 27-31 Agosto 2018

***IL PROBLEMA COME  
CAMPO DI INDAGINE PER GLI ALLIEVI  
Aspetti linguistici, relazionali e di rappresentazione***

Nicolina A. Malara

Già ordinario presso Università di Modena e Reggio E  
**[nicolina.malara46@gmail.com](mailto:nicolina.malara46@gmail.com)**

•  
•

# Articolazione del lavoro

I parte: seminario

- Brevi richiami teorici
- nostri studi di innovazione sulla didattica del problema
- I problemi in prospettiva relazionale e di rappresentazione
- Questioni didattiche sui problemi verbali algebrici

II parte: laboratorio

- Analisi di problemi dal punto di vista degli studenti e dell'azione dell'insegnante

E' indiscussa la centralità del problema nella didattica della matematica ad ogni livello scolastico

Problematica è invece la tradizionale pratica didattica, solitamente centrata sul piano operativo e spesso essenzialmente rivolta alla verifica di abilità applicative e di calcolo.

I libri di testo più usati non offrono all'insegnante l'opportunità di andare al di là dei **problemi scolastici standard**, soprattutto non danno all'insegnante indicazioni su come avvicinare gli allievi *al piacere del problem solving*.

Anche se le attuali Indicazioni Nazionali forzano l'attenzione sulla costruzione sociale del sapere, pochi sono i docenti che

*Instillano negli allievi il giusto modo di porsi di fronte ai problemi*

- lavorando sugli aspetti linguistici connessi alla interpretazione del testo e sulla aderenza della situazione al reale
- guidando gli allievi nella costruzione di una strategia risolutiva, *portandoli a riflettere* su ciò che occorre determinare e su quello che le informazioni permettono di ottenere
- Verificando l'attendibilità del risultato raggiunto

A. H. Schoenfeld, autore del famoso libro  
*Mathematical Problem Solving* (1985)

sottolinea che i buoni risolutori di problemi, *nell'attuare il processo di risoluzione di un problema complesso, controllano via via il senso e la produttività delle loro scelte in relazione all'obiettivo da raggiungere* ed è questo controllo che li porta a decidere se continuare o cambiare percorso.

Queste considerazioni dovrebbero indurre gli insegnanti a promuovere la dimensione metacognitiva *nell'atto* della risoluzione di un problema.

Schoenfeld dà molta importanza all'**ambiente di apprendimento** che a suo dire dovrebbe far sì che gli studenti:

- partecipino all'inquadramento di questioni significative che la classe esplora (*Problematizing*),
- siano messi in grado di cercare informazioni, selezionarle, impostare e sviluppare argomentazioni (*agency e authority*),
- imparino a fare affermazioni e esprimere argomentazioni secondo le norme stabilite (*disciplinary accountability*),
- abbiano accesso a strumenti e risorse che siano loro necessari (*resources*).

F. K. Lester jr.(2013), altro noto studioso americano richiama l'attenzione sul fatto che nella didattica del problema vi siano due filoni intrecciati:

- un *insegnamento per risolvere problemi*, dove la capacità di risolvere problemi è l'obiettivo finale
- un *insegnamento via problemi* per sviluppare conoscenze e competenze matematiche

Egli sottolinea che questi due tipi di attività hanno obiettivi diversi e richiedono competenze diverse negli insegnanti ma che un buon insegnamento dovrebbe dare spazio ad entrambe.

Lester sostiene che, come documentano i suoi studi,

*la metacognizione  
è forza propulsiva per il problem solving*

ma che si sa poco su come promuovere e potenziare le abilità metacognitive degli studenti

Egli lamenta che la ricerca [in USA]

- dia scarsa attenzione a ciò che accade realmente nelle classi e soprattutto al ruolo dell'insegnante nel processo educativo
- non offra chiare indicazioni circa quello che gli insegnanti dovrebbero fare nelle classi per sviluppare tali abilità.

I nostri studi sulla didattica del problema (e non solo) si sviluppano attorno a queste tematiche

Sono realizzati in **classi reali** lavorando assieme a insegnanti motivati ed opportunamente guidati alla osservazione di sé nel processo di classe.

Nelle sperimentazioni grande spazio è dato a:

- aspetti logico-linguistici
- metacognizione
- ragionamento ipotetico
- argomentazione
- giustificazione
- Rappresentazione (in vari registri)

I nostri obiettivi di fondo sulla didattica del problema

in riferimento agli insegnanti

- portarli a modificare consapevolmente concezioni ed atteggiamenti nella pratica didattica, proponendo accanto ai problemi standard attività diverse proiettate verso il problem posing

in riferimento agli allievi

- rendere attraente e motivante l'attività di problem solving aprendo ad una concezione del problema come

*situazione giocosa ed intrigante da esplorare*

Italo Calvino (1984), Collezione di Sabbia,  
Garzanti

*Molte volte l'impegno che gli uomini mettono in attività che sembrano assolutamente gratuite, senz'altro fine che **il divertimento o la soddisfazione di risolvere un problema difficile**, si rivela essenziale in un ambito che nessuno aveva previsto, con conseguenze che portano lontano. Questo è vero per poesia ed arte, come è vero per la scienza e la tecnologia. Il gioco è sempre stato il grande motore della cultura. (p. 129)*

Il gioco è qui inteso come ‘modo di porsi’ di fronte alle cose, *speculativo e riflessivo insieme*, dove ogni situazione

- è vista con *naturale curiosità*
- è indagata per *piacere di esplorazione*

Un tale atteggiamento

- favorisce negli allievi il “*porsi e risolvere problemi*”
- alimenta *il gusto all’approfondimento ed alla conoscenza*

Per la costruzione di un tale atteggiamento il ruolo dell’insegnante ed i tipi di attività che propone sono fondamentali.

Nei nostri studi sulla didattica del problema si è ritenuto importante *coinvolgere gli allievi* in:

- una riflessione sul significato da loro attribuito al termine 'problema'
- l'esplicitazione delle emozioni da loro vissute in riferimento alla risoluzione di problemi
- lo scardinamento di atteggiamenti stereotipati in riferimento ai problemi scolastici standard
- la risoluzione di problemi non usuali, tratti da riviste di giochi, di tipo logico-relazionali o combinatorio
- Lo studio di problemi aperti e con dati da reperire per avviarli alla modellizzazione di situazioni del reale
- la formulazione di problemi sulla base di una serie di dati offerti da studiare in *sfida giocosa* tra compagni

Per condurre gli allievi ad *appropriarsi del problema* ed a concepirlo duttile ed aperto verso espansioni e possibili generalizzazioni

- Si è lavorato sull'*analisi del testo*, verificando nei singoli la comprensione di termini e di frasi, in taluni casi chiedendo la parafrasi o addirittura la riformulazione del testo
- Si sono sollecitate negli allievi osservazioni e commenti sulla situazione esposta in riferimento alla sua aderenza al reale
- Si è *spostata l'attenzione dal risultato al processo risolutivo* di un problema richiedendone *la verbalizzazione* ed in caso di difficoltà l'esplicitazione delle ragioni di esse

# Esempi di analisi di testi di problemi scolastici

## Esempio 1 (ingresso 1 secondaria inferiore)

*Una comitiva di 8 ragazzi e 5 ragazze si reca al cinema e poi in pizzeria. Al cinema ciascuno paga per sé spendendo 9 euro mentre in pizzeria i ragazzi offrono la pizza alle ragazze spendendo così 13 euro a testa in più. Quanto è stato speso in totale?*

### Rilevamento di ambiguità linguistiche

I ragazzi hanno rilevato che la locuzione *‘in più’* è passibile di due interpretazioni:

- In più rispetto alla spesa del cinema: in pizzeria ciascun ragazzo spende  $9 + 13$  euro
- In più rispetto alle ragazze in pizzeria: ciascun ragazzo in pizzeria paga 13 euro.

## Commenti critici dei ragazzi sulla aderenza al reale della situazione esposta

- A. Perché le ragazze non devono pagare? Non è giusto. Ognuno deve pagare per sé se non c'è un motivo.
- B. Non è detto che tutti hanno preso la stessa pizza, di solito questo non succede mai.
- C. Per fare il problema diciamo che tutti hanno preso la stessa pizza.
- D. Pensiamo a pizze diverse ma aggiustiamo il problema e chiediamo 'quanto doveva pagare ognuno se tutti pagavano lo stesso?'
- E. Quando si va in pizzeria si prende anche da bere.

## Esempio 2

I tassisti di Milano (ingresso secondaria inferiore)

*I tassisti di Milano praticano le seguenti tariffe: 2 euro come quota fissa alla messa in funzione del tassametro, 1 euro per ogni Km percorso e 15 euro per ogni ora di sosta. Un rappresentante all'uscita della stazione centrale prende un taxi per recarsi presso la ditta dove si ferma per mezz'ora con un dirigente. Con lo stesso taxi, che lo ha aspettato, ritorna alla stazione e paga per la corsa 15,80 euro. Quanti chilometri ha fatto il taxi per andare dalla stazione alla sede della ditta?*

## Commenti critici dei ragazzi sulla aderenza al reale della situazione esposta

### Commenti dei ragazzi

- A. Il problema non è reale, il taxi normalmente non si fa attendere per mezz'ora, se ne chiama un altro
- B. In genere il percorso di andata non è uguale a quello del ritorno, vi sono i sensi unici. Possiamo solo calcolare i chilometri di andata e ritorno
- C. Se nel percorso vi sono i semafori non si può risolvere il problema neanche così.

Thorndike (1922) *The psychology of Arithmetic*

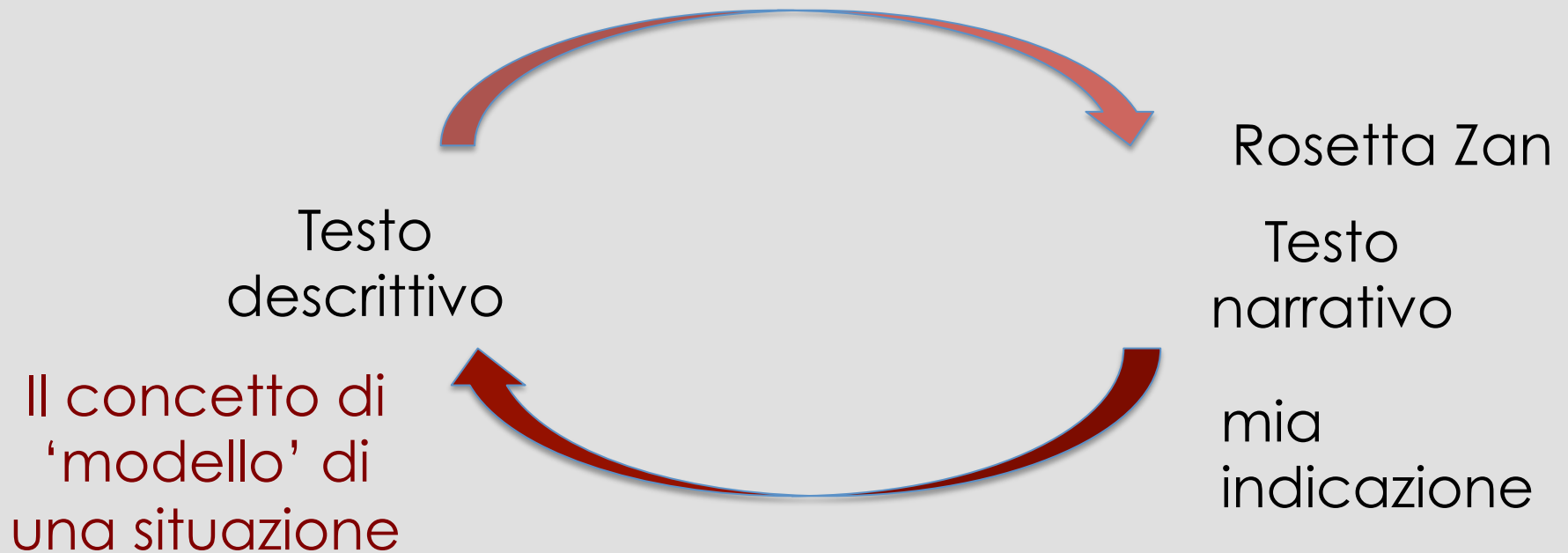
Due esempi di problemi scolastici (pp-101)

- Se un cavallo trotta per 10 miglia in un'ora quante miglia percorrerà in 9 ore?
- Se una ragazza può raccogliere 3 quarti di more in un'ora quanti quarti può raccoglierne in tre ore?

Thorndike definisce tali problemi 'ambigui e falsi'.

Egli commenta

*Un insegnante che insista sulle risposte di 90 e 9 rispettivamente per il primo ed il secondo problema potrebbe demotivare un ragazzo che si rapporta concretamente alla realtà, il quale smetterebbe di interessarsi di aritmetica per tutte le settimane a venire*



- Qui si innesta anche l'attività di formulazione di testi di problema (problem posing) e lo studio dei problemi aperti e con dati da reperire

Necessità ed importanza nella pratica didattica della doppia trasformazione

## Sulla verbalizzazione

Inizialmente, in riferimento alla richiesta di verbalizzazione del procedimento risolutivo, si sono rilevati i seguenti comportamenti degli allievi

- Parafrasi del testo mediante personalizzazioni in sostituzione del processo risolutivo
- Indicazioni del procedimento solo attraverso l'elenco delle operazioni eseguite
- Descrizione del procedimento dopo la risoluzione del problema

Fondamentale risulta l'attività di condivisione delle varie produzioni degli allievi : si attivano

- processi di apprendimento cognitivo
- importanti esperienze metacognitive

## Un esempio di verbalizzazione iniziale (I sec. Inf.)

Gigi e Aldo vanno dal cartolaio. Per 4 pennarelli e 3 gomme Gigi ha speso 8 euro e 90 centesimi. Per 3 pennarelli e 2 gomme Aldo ha speso 6 euro e 60 centesimi. Quanto costano un pennarello ed una gomma complessivamente? Quanto costa un pennarello?

Verbalizzazione corretta che rivela in sottofondo lo stereotipo 'problema=operazioni'

(Carlotta, inizio I secondaria di I° grado))

Per risolvere il problema io ragiono così: **sottrarre da 8,90 il costo di 6,60**. Perché il costo di 8,90 supera il costo di 6,60 con il costo di un pennarello e di una gomma (seguono rappr. iconica e calcoli)

**Come seconda operazione** utilizzerei il costo di una gomma e un pennarello (2,30) e lo moltiplicherei per 3 perché la domanda chiede il costo di 3 pennarelli e 3 gomme.

(seguono rappr. iconica e calcoli)

**Come terza e ultima operazione** per rispondere all'ultima domanda, utilizzerei il costo di 8,90 costo di 3 gomme e 4 pennarelli meno 6,60 costo di 3 pennarelli e 3 gomme. Così risulterà il costo di un pennarello.

La verbalizzazione e le discussioni su di esse producono

- miglioramenti nelle capacità di soluzione dei problemi nella fascia medio-bassa (lo sforzo di riflessione richiesto dalla verbalizzazione produce un maggior controllo sulla situazione)
- Miglioramento delle proprietà espressive nella fascia medio-alta
- Coinvolgimento, motivazione e gratificazione negli allievi (anche per poter esprimere i propri pensieri e le proprie difficoltà)

Porre e risolvere problemi

la formulazione di testi di problemi

## Il problem posing

E' considerato

- caratteristico di un insegnamento orientato verso l'indagine
- Mezzo per migliorare la capacità di risolvere problemi
- Finestra sulla comprensione matematica
- Mezzo per sollecitare creatività e la messa in atto di strategie

Kilpatrick (1987)

*L'attività di formulazione di problemi è un'importante alleata dell'attività di risoluzione di problemi*

E' interessante proporre queste attività perché:

- si capovolge l'usuale ruolo dell'allievo di fronte al problema
- L'allievo viene messo nelle condizioni di svolgere un lavoro sotterraneo e autonomo di analisi ed elaborazione di informazioni

Si suggerisce di svolgerla a piccoli gruppi per facilitare l'appropriazione del compito

# Attività di guida alla formulazione di problemi in contesto aritmetico

## Costruzione di storie-problema

L'attività, individuale o a coppie, si sviluppa in tre tempi

1. Si offre agli studenti un **canovaccio di situazione**, ossia un personaggio ed una serie di informazioni su sue azioni, e si chiede loro di costruire il testo di uno o più problemi, utilizzando alcune delle date informazioni.
2. Si propone un campione degli elaborati prodotti per la correzione incrociata tra i gruppi
3. Si discute collettivamente sul carattere dei testi prodotti e sulle variazioni effettuate

## Costruzione di storie-problema

Nella seconda fase dell'attività gli allievi vengono portati a riflettere sulle carenze strutturali del testo (ridondanze, incoerenze, lacune) delineando implicitamente le caratteristiche del testo di un problema.

Dalle sperimentazioni svolte appare inizialmente:

- il prevalere dell'aspetto linguistico-narrativo rispetto a quello logico-matematico
- l'emergere di aspetti caratteriali degli allievi (generosità/avidità; paure/sicurezze, rispetto/incuria degli altri, ...)

# Costruzione di storie-problema

Un esempio di canovaccio

## **Giacomo ha comperato 24 pennarelli**

Può accadere che:

- Ne perda qualcuno
- ne trovi quattro
- Ne regali al suo compagno di banco
- le metta in parti uguali in due astucci

Scrivi una storia-problema su Giacomo che tenga conto di almeno due di queste informazioni

Storia problema costruita da un allievo, selezionata dall'insegnante e sottoposta all'analisi della classe

*Giacomo entra in un negozio e compra 24 pennarelli, correndo tutto contento ne perde qualcuno. Quando arriva a casa si accorge che ne mancano, allora cerca per tutta la casa, disperato. Alla fine si stufa di cercare e quando va a scuola ne regala un po' al compagno di banco, poi ne trova quattro e tutto contento li prende. A casa vede che sono in numero pari, allora li mette in parti uguali in due astucci. Quando va a scuola fa vedere i suoi nuovi colori e i suoi astucci che aveva comprato.*

Per la maggioranza della classe questo problema è stato considerato

“irrisolvibile perché non precisa niente”

### Studio della situazione da parte dell'allievo

Questa storia problema assomiglia più ad un racconto che a qualcosa di matematico

$$24 - X - Y + 4 = A \text{ n pari } (=n \times 2)$$

↓      ↘  
( ne perde alcuni )      ( ne regala un pò )

X e Y potrebbero essere tanti numeri

|     |   |   |  |   |   |  |   |    |
|-----|---|---|--|---|---|--|---|----|
| es. | X | Y |  | X | Y |  | X | Y  |
|     | 6 | 2 |  | 4 | 4 |  | 8 | 10 |

e altri, ciò fa in modo che i risultati possano essere tanti. Ecco le possibili combinazioni che risultano pari

2 - 4; 2 - 2; 2 - 6; 2 - 8; 2 - 10; 4 - 2; 4 - 4; 4 - 6; 4 - 8; 4 - 10;  
6 - 2; 6 - 4; 6 - 6; 6 - 8; 6 - 10; 8 - 2; 8 - 4; 8 - 6; 8 - 8; 8 - 10;  
10 - 2; 10 - 4; 10 - 6; 10 - 8; 10 - 10

Le soluzioni non possono essere infinite perché non possiamo usare i numeri decimali.

Quanto può essere al massimo la somma  $X + Y$  ?

Non può essere + grande di 20 perché il risultato non può essere un numero pari.

Situazione disperata rimangono due pennarelli =  $24 - X - Y + 4 = 2$

$$24 - (X + Y) + 4 = 2$$

$$24 + 4 - (X + Y) = 2$$

$$28 - (X + Y) = 2$$

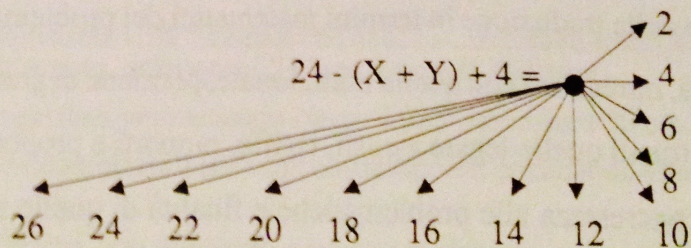
$$X + Y = 26$$

$$28 - (X + Y) = \text{pari n.} = 26$$

$$28 - (X + Y) = 26$$

↓  
2

Quanto può essere il minimo valore di  $X + Y$



La formulazione di problemi  
in contesto geometrico  
per lo studio di triangoli e quadrilateri  
Classe II secondaria inferiore

*In ricordo di Loredana Gherpelli,  
anima della sperimentazione,  
recentemente mancata*

## Obiettivo

Affrontare in modo nuovo e stimolante lo studio di problemi geometrici di base mettendo gli allievi nelle condizioni di acquisire con consapevolezza le principali relazioni tra gli elementi di una figura.

**Il ruolo iniziale dell'insegnante:** preliminarmente viene svolta un'attività di costruzione di testi di problemi sui rettangoli a classe intera, dove l'insegnante *discutendo collettivamente e riflettendo a voce alta mette in luce il modo di porsi di fronte a tale compito.*

Poi il lavoro viene affidato agli allievi e svolto a gruppi di tre unità. I gruppi sono organizzati in modo che in ciascuno vi sia un allievo di buone capacità in grado di fungere da coordinatore.

Il lavoro, una vera e ampia *attività di indagine*, si sviluppa in tre distinte fasi

I fase: costruzione di testi di problemi su triangolo isoscele, rombo e trapezio rettangolo e loro soluzione.

Di ogni figura geometrica vengono assegnati certi elementi che ne permettono la costruzione in scala. I valori numerici dei dati sono semplici per minimizzare le difficoltà di calcolo. E' permessa la calcolatrice.

II fase: analisi critica incrociata tra i gruppi di una selezione significativa di testi prodotti dai gruppi per verificarne la correttezza linguistica e matematica

III fase: classificazione dei testi prodotti e successivo confronto con quelli presenti nei libri di testo

## La prima fase: la produzione di testi di problemi

I testi inizialmente prodotti dagli allievi, nonostante i problemi debbano essere risolti, sono ambigui o con dati sovrabbondanti, a volte compatibili a volte no.

I testi si riferiscono a problemi di tipo sia diretto sia inverso. Vari gruppi propongono problemi con dati espressi come frazioni di altri o comunque di tipo relazionale.

Con il procedere dell'attività si rileva una certa sistematicità nelle modalità di lavoro degli allievi, i testi prodotti sono di varietà maggiore, da semplici a complessi, sempre più corretti ed espressi in un linguaggio chiaro e vicino a quello dei libri di testo.

## Esempi di problemi corretti prodotti

Triangolo isoscele. Misure date: lati  $l_1 = l_2 = 26 \text{ cm}$ ,  $l_3 = 20 \text{ cm}$

1. In un triangolo isoscele ABC la base AB è i  $\frac{5}{6}$  della altezza CH ad essa relativa. Sapendo che l'area di ABC è  $240 \text{ cm}^2$  trova la misura del perimetro.
2. In un triangolo isoscele ABC la somma dei tre lati è  $72 \text{ cm}$ . Sapendo che ciascuno dei lati uguali differisce da quello diverso di  $6 \text{ cm}$ , trova la misura dei tre lati.
3. In un triangolo isoscele uno dei lati uguali è maggiore del lato diverso di  $6 \text{ cm}$  e la loro somma è  $46 \text{ cm}$ . Trova l'area ed il perimetro.
4. Un triangolo isoscele ABC ha la semiarea di  $120 \text{ cm}^2$  e l'altezza relativa al lato AB di  $24 \text{ cm}$ . Trova il perimetro e l'altra altezza relativa ai lati uguali BC e AC.

## Esempi di problemi corretti prodotti

**Rombo. Misure date: diagonali  $d_1 = 30$  cm,  $d_2 = 40$  cm**

1. Un rombo ha le seguenti misure: il lato di 25 cm e metà diagonale di 20 cm. Calcola l'area.
2. Un rombo ha l'area di 600 cm<sup>2</sup>, un lato misura 25 cm. Trova l'altezza de rombo.
3. In un rombo l'una diagonale è i  $\frac{3}{4}$  dell'altra e la loro differenza è 10 cm. Trova la misura delle diagonali.

**Trapezio rettangolo.**

**Misure date: basi  $b=32$  cm,  $B=39$  cm e altezza  $h=4$  cm.**

1. La somma delle basi di un trapezio rettangolo è di 71 cm. Sapendo che l'altezza misura 24 cm e che la differenza delle basi è di 7 cm, trova il lato obliquo e l'area
2. In un trapezio rettangolo l'altezza è i  $\frac{3}{4}$  della base minore e la loro somma è di 56 cm. Sapendo che l'area misura 852 cm<sup>2</sup>, trova la misura del perimetro.

## La seconda fase: l'analisi critica dei testi prodotti

I testi non corretti, ambigui e con dati sovrabbondanti, compatibili o non, prodotti dai gruppi costituiscono un materiale di lavoro molto prezioso.

Per analizzare le diverse tipologie di errore gli allievi devono

- porsi sul piano metacognitivo,
- mettere in atto ragionamenti ipotetici,
- confrontare strategie,
- controllare l'aderenza dei testi alla consegna data.

## La seconda fase: l'analisi critica dei test prodotti

### Tipologie dei test non corretti prodotti

- Testi ambigui con interpretazioni ugualmente accettabili
- Testi ambigui con più interpretazioni possibili di cui qualcuna da scartare
- Testi ambigui con dati sovrabbondanti che danno luogo a più interpretazioni di cui qualcuna da scartare
- Testi ambigui con dati sovrabbondanti che danno luogo a più situazioni possibili
- Testi non ambigui con dati sovrabbondanti tra loro compatibili
- Testi non ambigui con dati sovrabbondanti tra loro non compatibili

Testo ambiguo con due possibili interpretazioni di cui una da scartare

*L'area del triangolo isoscele e  $240 \text{ cm}^2$ . Sapendo che l'altezza corrispondente alla base misura  $24 \text{ cm}$ , trova il perimetro del triangolo*

Gruppo L.

Gli allievi si riferiscono inizialmente al triangolo isoscele nella posizione standard e calcolano correttamente il perimetro. Poi esaminano il caso che il triangolo sia appoggiato su uno dei lati uguali. Commentano

1. La preposizione DEL non è appropriata perché il triangolo isoscele non è unico ma ce ne sono tanti, dunque noi la cambieremmo con un DI UN.
2. IL testo non specifica quale dei tre lati sia la base. Noi abbiamo fatto due supposizioni ma la seconda è impossibile perché un cateto misurerebbe più dell'ipotenusa

Un esempio di testo ambiguo con dati sovrabbondanti che dà luogo a più situazioni possibili

*In un rombo l'area misura  $600 \text{ cm}^2$  mentre una diagonale è differente dall'altra di  $10 \text{ cm}$  ed è i  $\frac{4}{3}$ . Calcola il perimetro e l'altezza.*

*(Gruppo T.)*

Gli allievi ignorano l'informazione sull'area e risolvono il problema ragionando sulle diagonali.

Poi commentano: I dati sono coerenti, anche se sono troppi. Si potrebbe togliere la misura dell'area ed allora il problema diventerebbe (scrivono correttamente la traccia)

Si potrebbe togliere la differenza tra le diagonali ( $10 \text{ cm}$ ), il problema risulterebbe (scrivono la relativa traccia).

Dal punto di vista grammaticale c'è un' imperfezione quando dice 'una diagonale è differente dall'altra ed è i  $\frac{4}{3}$ . Questo dato, qui sottolineato, non ha riferimento.

## La terza fase

Gli allievi vengono indotti a riflettere sulle diverse relazioni tra gli elementi di ogni figura considerata ed ad rilevare e confrontare lo stile di lavoro dei diversi gruppi.

Questo evidenzia agli allievi per ogni figura la possibilità o impossibilità di collegamenti tra certe informazioni e nel caso di compatibilità tra esse li porta a valutare il 'grado di vicinanza' ossia il numero di passi che occorrono per poterle collegare.

## La terza fase

L'analisi sistematica dei testi corretti per le diverse figure consente agli allievi di individuare che per ogni figura vi è il medesimo numero di informazioni da assegnare per porre un problema su di essa e che perciò tale numero può dirsi una caratteristica della figura.

Il confronto del patrimonio dei testi da loro prodotti con quelli presenti nel libro di testo li porta a

- vedere i problemi del libro di testo come 'oggetti familiari'
- comprendere il senso della loro collocazione nella sequenza del testo.

Approccio relazionale al problema  
e rappresentazione formale delle  
informazioni date

## Approccio relazionale al problema

Nell'approccio al problema è conveniente guidare gli allievi ad esplicitare le **relazioni tra i dati in gioco** a combinarle e poi procedere alla sostituzione dei valori numerici

Un esempio (da un articolo di P.L. Ferrari)

*Nella biblioteca di classe c'erano 58 libri. L'insegnante ne ha comprati altri 12 e li ha portati in biblioteca, ne sono stati prestati 8. Di notte sono venuti i ladri e ne hanno rubati 17. Quanti libri sono rimasti?*

# Approccio relazionale al problema

Un esempio (da un articolo di P.L. Ferrari)

*Nella biblioteca di classe c'erano 58 libri. L'insegnante ne ha comprati altri 12 e li ha portati in biblioteca, ne sono stati prestati 8. Di notte sono venuti i ladri e ne hanno rubati 17. Rappresenta quanti libri sono rimasti.*

## Relazioni

- *numero libri rimasti è dato da:*  
differenza tra numero libri in biblioteca e numero libri usciti dalla biblioteca
- *numero libri in biblioteca è dato da:*  
somma tra numero libri iniziali e numero libri acquistati
- *Numero libri usciti dalla biblioteca è dato da:*  
somma tra numero libri prestati e numero libri rubati

Le relazioni si possono comporre ed il procedimento risolutivo si può sintetizzare nella frase :

- N.ro libri rimasti = n.ro libri iniziali + n.ro libri acquistati – (n.ro libri prestati + n.ro libri rubati )
- Più sinteticamente  
$$\text{n. libri rimasti} = (\text{n. libri iniziali} + \text{n. libri acquistati}) - (\text{n. libri prestati} + \text{n. libri rubati})$$
- Ancora più sinteticamente  
$$\text{n. rim} = (\text{n. iniz} + \text{n. acq.}) - (\text{n. pres.} + \text{n. rub})$$
- Optimum: in formula inserendo la legenda  
r = numero libri rimasti;  
i = numero libri iniziali ; a = numero libri acquistati;  
p = numero libri prestati; b = numero libri rubati  
$$r = (i+a) - (p+b)$$

Il risultato numerico si ottiene sostituendo nella formula  $r = (i+a)-(p+b)$  il valore numerico di ciascuno dei dati.

$i = \text{numero libri iniziali} = 58$

$a = \text{numero libri acquistati} = 12$

$p = \text{numero libri prestati} = 8$

$b = \text{numero libri rubati} = 17$

per sostituzione si ha :  $r = (58 + 12) - (8 + 17)$

La formula  $r = (i+a)-(p+b)$   
è equivalente a  $r = [(i+a) - p] - b$

Formula procedurale che riflette il susseguirsi dei tempi e delle azioni.

Gli allievi sperimentano una regolarità che legittimerà in seguito la seguente proprietà degli interi:

$\text{l'opposto di una somma è la somma degli opposti}$

La codifica formale viene ad essere una conquista degli allievi per contrazione delle rappresentazioni verbali dei dati nella esplicitazione del procedimento

### I Vantaggi

- Comprendere la distinzione tra dati e valori numerici dei dati.
- Comprendere la generalità ed economicità della rappresentazione al variare dei dati numerici.

Questo aspetto viene potenziato dalla proposizione del gioco del

**‘ ... *E se invece* ’**

Risolto un problema, si propone lo stesso testo con dati numerici variati.

Qui si possono porre le situazioni:

- *E se invece* i libri iniziali fossero stati 64?
- *E se invece* i libri rubati fossero stati 20?
- *E se invece* libri prestati fossero stati 12?
- *E se invece* i libri acquistati fossero stati 2?
- *E se invece* valgono assieme tutte queste condizioni ?

Questo aspetto viene potenziato dalla proposizione del gioco ‘ ... *E se invece* ’

Si può ancora lavorare sul problema e procedere *esplorando le condizioni di variabilità dei valori numerici dei dati* per far comprendere ai ragazzi che il problema è sensato fino a quando è possibile eseguire la sottrazione tra numero libri nella biblioteca e numero libri fuori la biblioteca.

La condizione da esplicitare è:

*$(i+a)$  è maggiore o al più uguale ad  $(p+b)$*

In formule

$$(i+a) \geq (p+b)$$

Queste esplorazioni portano i ragazzi a

- *esercitare un controllo sul processo risolutivo del problema*
- *esprimere disuguaglianze in termini formali*

## Verso la costruzione di un repertorio di problemi in cui un problema viene trasferito in un altro: un esempio

Le campanelle di Murano

Un artigiano di una vetreria di Murano che produce decorazioni natalizie sta trasportando delle preziose campanelle prodotte nella settimana. Purtroppo, lungo il percorso, inciampa e cade rovinosamente a terra facendo cadere tutti i contenitori delle campanelle che si rompono tutte irrimediabilmente. Disperato, l'artigiano va dal suo assicuratore per capire se può ottenere un risarcimento. L'assicuratore gli chiede subito quante siano le campanelle che si sono rotte e l'artigiano risponde: "Io... non me lo ricordo. Ricordo solo le difficoltà che ho avuto nel cercare di imballarle per il trasporto e la spedizione. Quando le raggruppavo per 2, 3, 4, 5 e 6 mi avanzava sempre una campanella. Solo facendo gruppi da 7 non me ne avanzava nessuna".

Secondo voi, queste informazioni sono sufficienti per stabilire quante fossero le campanelle rotte?

C'è solo una possibile risposta o può essercene più di una?  
Spiegate il vostro ragionamento

Verso la costruzione di un repertorio di problemi in cui un problema viene trasferito in un altro: un esempio

Sul problema 'Le campanelle di Murano'

*L'esplorazione diretta è lunga e poco produttiva.*

### **Cambiamo punto di vista**

Dalle informazioni si ha che il numero delle campanelle è l'antecedente di un multiplo di 2, di un multiplo di 3 di un multiplo di 4, di un multiplo di 5, di un multiplo di 6.

Allora se consideriamo il numero  $3 \times 4 \times 5 = 60$  (che è anche multiplo di 6) occorre esplorare se tra i successivi dei multipli di 60 ci sono multipli di 7.

61 non è multiplo di 7, i successivi dei primi multipli di 60 sono: 61, 121, 181, 241, 301, 361, ... .

Tra questi il primo ad essere multiplo di 7 è 301:  **$301 = 7 \times 43$** .

Abbiamo trovato un numero possibile come risposta al problema. Ma potrebbero essercene altri?

# Verso la costruzione di un repertorio di problemi in cui un problema viene trasferito in un altro: un esempio

Le campanelle di Murano

...

Abbiamo trovato un numero possibile come risposta al problema. Ma potrebbero essercene altri?

Procedendo nell'esame della lista dei successivi dei multipli di 60 rispetto alla divisibilità per 7 si scopre che anche 721 è multiplo di 7. Precisamente  $721 = 7 \times 103$ . C'è un legame tra il numero 43 ed il numero 103? La loro differenza è 60! La rappresentazione di 103 come  $43 + 60$  ci permette di capire che a partire da  $7 \times 43$  sommando a tale numero il prodotto di un multiplo di 60 per 7 si ottiene ancora un numero divisibile per 7 che diviso 2, 3, 4, 5, 6 dà resto 1.

Le informazioni date all'assicuratore dall'artigiano non consentono di stabilire il numero di campanelle e l'assicuratore potrà liquidare il danno solo per il minimo numero di campanelle, cioè  $7 \times 43$ .

I problemi verbali algebrici

## I problemi verbali algebrici (PVA)

Le nostre sperimentazioni nell'ambito dei problemi con incognite sono state molteplici prima nella scuola secondaria poi nella primaria (si veda Progetto ArAl – Unità 6).

Dai nostri studi emerge l'efficacia di proporre lo studio dei PVA *prima della introduzione delle equazioni*

Questo permette agli studenti a:

- *generare equazioni attraverso la rappresentazione delle relazioni che intercorrono tra i dati noti e incogniti di un problema*
- *comprendere la significatività e l'opportunità dello studio autonomo delle equazioni, viste come oggetto matematico*

Da un punto di vista didattico tre sono le principali questioni che occorre affrontare:

- Individuazione delle relazioni espresse dal testo verbale e loro traduzione formale: **il problema del dare nome alle quantità incognite in gioco;**
- rappresentazione formale, trasformazione, e composizione delle relazioni al fine di ottenere un'equazione risolutiva **(principi logici della sostituzione e dell'uguaglianza );**
- studio 'ingenuo' delle equazioni per determinare le incognite e risolvere il problema ed interpretazione dei risultati **(fase necessaria per poter apprezzare i metodi risolutivi generali)**

L'uso delle lettere non dovrebbe essere dettato dall'insegnante. Gli studenti dovrebbero essere portati a concepire di farlo.

La strategia è di lavorare nella classe focalizzandosi sulla

## *rappresentazione algebrica*

Dando spazio a

*Attività di confronto di rappresentazioni diverse date dagli allievi*

riflettendo sulla loro correttezza, efficacia ed economicità

*E' un percorso lungo e delicato che, alla luce dei nostri studi, è bene che parta dai primi anni di scolarità*

## Alcune importanti indicazioni didattiche

E' bene

- separare l'attività di traduzione formale delle informazioni espresse dal problema in termini algebrici dalla ricerca di una soluzione
- proporre sin da subito problemi che non possono essere risolti facilmente attraverso strategie aritmetiche e/o rappresentazioni grafiche
- Procedere, quando possibile, al confronto tra strategie aritmetiche e strategie algebriche

## La questione della '*messa in formula*'

Punti chiave nel processo di traduzione formale

1. Valutare l'ordine in cui le informazioni espresse dal testo vanno considerate
2. Valutare, di fronte a più dati incogniti, la scelta di quella più opportuna attraverso cui esprimere le altre
3. Convertire e rappresentare in termini di uguaglianza relazioni verbali quali: "... è maggiore di ...", "... è minore di...", "... è il doppio di ...)

## Un problema classico per far apprezzare la formalizzazione algebrica

Il problema del pesce (Bell 1992)

*La coda di un pesce pesa 4 kg. Il corpo pesa quanto la testa e la coda insieme, la testa pesa quanto la coda e metà corpo. Quanto pesa il pesce?*

E' difficile connettere le relazioni verbalmente: la rappresentazione invece azzerava le difficoltà linguistiche

Assegnati i nomi  $b$ ,  $h$ ,  $t$ ,  $w$  ai pesi del corpo della testa della coda le relazioni sono tradotte in:

$$w = b + h + t$$

$$b = h + t ; h = t + (1/2)b ; t = 4$$

$$t = 4$$

$$b = 4 + (1/2)b + 4$$

$$h = 4 + (1/2)(h + 4)$$

$$w = 4 + b + h$$

$$t = 4$$

$$b = 16$$

$$h = 12$$

$$w = 32$$

## Sulla valenza della rappresentazione algebrica: il controllo delle intuizioni

*Carlo è andato a comprare una giacca che costava normalmente 50 zed ed era in saldo con uno sconto del 20%. Nel paese c'è una tassa di vendita del 5%. Il commesso ha aggiunto la tassa al prezzo della giacca e poi ha tolto il 20%. Carlo ha protestato: egli voleva che il commesso effettuasse lo sconto del 20% e poi calcolasse la tassa del 5%.*

*Che differenza c'è tra i due procedimenti e prezzi finali?*

*(Dai quesiti P.I.S.A. - area chiave Quantità)*

c rappresenta costo della giacca

Strategia cliente:  $80\%c + 5\%(80\%c)$

Strategia cassiere:  $80\%(c+5\%c)$

$$80\%(c+5\%c) = 80\%c + 80\%(5\%c)$$

La commutatività degli operatori moltiplicativi garantisce che

$$5\%(80\%c) = 80\%(5\%c)$$

allora

$$80\%(c+5\%c) = 80\%c + 5\%(80\%c)$$

Le due strategie sono equivalenti ai fini della determinazione della spesa ma  
La strategia del cassiere è ottimale perché richiede meno operazioni

# Problemi classici della messa in formula

frasi celeberrime

(Clement & Altri 1981)

- *In una università ci sono sei volte tanti studenti quanti professori*

Consegna: Traduci in linguaggio algebrico la frase. usa  $S$  per indicare la quantità di studenti e  $P$  per indicare la quantità di professori

(Mac Gregor , 1991)

- *In un cortile vi sono sei volte tanti cani quanti gatti. In tutto sono 224 animali fra cani e gatti*

Consegna: Stabilisci quanti sono i cani e quanti i gatti del cortile.

# Problemi classici della messa in formula

frase celeberrima (Clement & Altri 1981)

- *Al ristorante di Mindy per ogni quattro persone che ordinano cheesecake ve ne sono cinque che ordinano strudel.*

Consegna: Traduci in linguaggio algebrico la frase. Usa  $C$  per indicare il numero di cheesecake ed  $S$  per indicare il numero di strudel

Questa è una relazione di proporzionalità

Frase da tradurre

In una classe di 30 alunni ogni due maschi vi sono tre femmine.

Rappresenta mediante una formula questa relazione e stabilisci il numero totale dei maschi ed il numero totale delle femmine.

In una classe di 30 alunni ogni due maschi vi sono tre femmine . Rappresenta mediante una formula questa relazione e stabilisci il numero totale dei maschi ed il numero totale delle femmine.

Soluzione data da una laureanda in Matematica

spiega come, secondo lei, in questo caso si è  
risposta.

Non avrei affrontato il problema nello stesso modo. Cercerei di capire di quale relazione si tratta.

La prima cosa che mi è venuta in mente è stata

$2+3+2+3+2+3 \dots$  fino ad arrivare a 30.

oppure  $(2M+3F)n=30$

ma non mi trovo la soluzione.

Uso delle  
Lettere come  
'marche'

Traduzione  
letterale della  
rappresentazi  
one  
aritmetica

# Soluzione data da una laureanda in Matematica al quesito

Non guardare il foglio successivo prima di aver svolto il compito

30 alunni = x  
Tale che  $x = a + b$   
a = m.no ragazzi  
b = m.no ragazze  
 $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$  ho aspettato insieme ragazzi  
 $b = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j\}$  " " " ragazze  
quindi  
 $x = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j$   
devo determinare i e j  
io so che:  
 $\alpha_k + \alpha_j \xrightarrow{\text{corrispondenza}} \beta_k + \beta_j + \beta_j$   
non intendo se li insieme a e b scriverli in modo tale da  
avere un dato dato dato opp. considerarci come ragazzi e m  
cioè come, il bene a cui appartengono -  
se ho  
ho considerato l'uguaglianza primo def. in modo tale da con  
me insieme finito l'insieme di The ragazzi e The ragazze  
 $\alpha_k + \alpha_j + \beta_k + \beta_j + \beta_j = g = 5$   
quindi gli alunni si possono dividere in insiemi formati da  
persone di cui 2 maschi e The femmine  
 $30 = 5 \cdot T \Rightarrow T = 6$  vi sono sei insiemi.  
in ogni insieme vi sono 3 ragazze  $\Rightarrow (\beta_k + \beta_j + \beta_j) = 3 \cdot 3 = 9$

Eccessi nella  
Rappresentazione

Dominanza della 'x' e  
suo uso per indicare  
una quantità nota

mascheramento  
formale del processo  
aritmetico

## Relazioni di proporzionalità composta

Quando nel testo del problema le relazioni di proporzionalità sono più di una la loro traduzione formale è ancora più difficile.

### Esempio

*Tre amiche, Mary, Nelly and Susy, hanno raccolto 770 castagne. Decidono di dividerle in modo che il numero di castagne di ciascuna sia in proporzione con la loro età. For ogni quattro castagne prese da Mary, Nelly ne prende tre. Per ogni sei castagne prese da Mary, Susy ne prende sette. Quante sono le castagne prese da ciascuna amica?*

Assegnazione dei nomi

$m$  = quantità di castagne prese da Mary       $m = 264$

$n$  = quantità di castagne prese da Nelly       $n = 198$

$S$  = quantità di castagne prese da Susy       $s = 308$

$$m + n + s = 770$$

$$m : n = 4 : 3 ; m : s = 6 : 7$$

**rappresentare  $m$  in 2  
modi e confrontare**

$$m = (4/3)n ; m = (6/7)s$$

**Appare una nuova  
relazione tra  $n$  ed  $s$**

$$(4/3)n = (6/7)s$$

$$s = (7/6)(4/3)n$$

$$(4/3)n + n + (14/9)n = 770$$

$$12n + 9n + 14n = 770 \times 9$$

## Sui problemi con più incognite

Quando i problemi presentano due o più dati incogniti collegati da differenti relazioni

- è importante educare gli studenti a rappresentare le relazioni in modi differenti, scegliendo di esprimere la loro composizione attraverso incognite diverse

Gli studenti possono confrontare le formule che costruiscono ed acquisire nel tempo l'abilità di prevedere la 'forma' della frase algebrica globale che essi otterranno rispetto ad una data incognita.

Un semplice esempio per promuovere negli studenti la comprensione della questione

Problema. *Rudy è 4 anni più giovane di Sara, Eva è 3 anni più vecchia di Sara. Tutti insieme hanno 38 anni. Esprimi l'età totale mediante l'età di Rudy, di Eva, di Sara.*

(1) attraverso l'età di Rudy :  
 $r + (r+4) + (r+7) = 38$

**Ciò richiede un cambio di  
soggetto ed una  
composizione**

(2) attraverso l'età di Sara:

**Ciò richiede una inversione**

**Confronto del tipo di  
equazioni e del tipo di  
trasformazioni sintattiche**

**Ciò richiede una  
composizione ed un  
cambio di soggetto**

Il problema è modellizzato dalle equazioni:

(1)  $3r+11 = 38$  ;      (2)  $3s-1 = 38$  ;      (3)  $3e - 4 = 38$

## Analogie strutturali e confronto di strategie

Es. 1 (da 'Algebra' di E. Clairaut, 1746)

Un appaltatore deve dare la paga di 3 libbre a ciascuno dei suoi operai, ma gli mancano 8 libbre. Dando 2 libbre a ciascuno di loro gli rimangono 3 libbre. Quante libbre ha in tutto?

**La codifica formale dei due problemi mette in luce la comune struttura**

Es. 2 (da Cipolla & Mignosi 1924)

Una signora ha delle caramelle da distribuire ai suoi nipotini. Se gliene dà 5 ciascuno gliene rimangono 5. Ma non può dargliene 6 ciascuno perché gliene mancherebbero 3. Quanti sono i nipotini della signora?

**Entrambi i problemi possono essere risolti per via aritmetico-intuitiva**

## *Es. 2 (da Cipolla & Mignosi 1924)*

*Una signora ha delle caramelle da distribuire ai suoi nipotini. Se gliene dà 5 ciascuno gliene rimangono 5. Ma non può dargliene 6 ciascuno perché gliene mancherebbero 3. Quanti sono i nipotini della signora?*

Distribuendo a ciascun nipote 5 caramelle ne rimangono 5: i nipotini sono almeno 5

Non si possono donare 6 caramelle ciascuno perché ne mancano 3: i nipoti sono allora  $5+3$

***Mantenere aperte le sorgenti  
della intuizione  
(H. Freudenthal)***

E per finire

Due citazioni d'autore  
come ringraziamento per l'ascolto

Inserto domenicale de 'Il sole 24 ore' del 26 Agosto 2018  
Storia & Istruzione *La sfida ad un pensiero critico* Y. Harari

... Quando la Politica o la Scienza sembrano troppo complicate c'è sempre la tentazione di passare a qualcos'altro come divertenti video di gatti, pettegolezzi sulle celebrità o la pornografia.

In un mondo del genere l'ultima cosa che può fare un'insegnante è dare ai suoi allievi ulteriori informazioni. Ne hanno già troppe. *La gente invece ha bisogno di strumenti critici per interpretare le informazioni, per distinguere ciò che è importante da ciò che è irrilevante*, e soprattutto per poter inquadrare tutte le informazioni in un più ampio scenario [corsivo mio]

Daniel Pennac, 2008, *Diario di Scuola*, Feltrinelli  
Pag. 212-13 (corsivi miei)

## Sulla figura dell'insegnante

...[alcuni professori] erano artisti nella trasmissione della loro materia. Le loro lezioni erano atti di comunicazione, certo, ma di **un sapere talmente padroneggiato che passava quasi per creazione spontanea. ... Insegnando creavano l'avvenimento.**

...

Avevano certamente altri interessi, una grande curiosità che doveva alimentare la loro forza, il che spiegava, tra le altre cose, **la densità della loro presenza in classe. ...**

Non era soltanto il sapere che quei professori condividevano con noi, ma **il desiderio stesso del sapere!**