Volevo proporre un nuovo problema che si basa su una leggenda indiana riguardante l'origine del gioco degli scacchi.

La leggenda narra le vicende del ricco e generoso Re Iadava che dovette combattere una sanguinosa guerra contro il feroce avventuriero Varangul. Grazie alla sua abilità militare Iadava riuscì a sconfiggere Varangul in una sanguinosa battaglia che si svolse nei campi di Dacsina, ma la vittoria richiese il sacrificio di molti giovani guerrieri tra cui il principe Adjamir, figlio del Re.
Da quel momento il doloroso ricordo di quella battaglia non abbandonò più il Re. L'infelice sovrano passava intere giornate a tracciare in una grande scatola piena di sabbia i movimenti delle truppe durante lo scontro. Dopo aver completato lo schema della battaglia con tutti i dettagli di cui si ricordava, il Re lo cancellava e poi ricominciava da capo.
Finalmente un giorno il Re fu informato che un giovane bramino, umile e povero, chiedeva di essere ricevuto. In realtà aveva già fatto questa richiesta diverse volte, ma il Re aveva sempre rifiutato, sostenendo che il suo spirito non era abbastanza forte da permettergli di ricevere visite. Tuttavia questa volta gli concesse udienza e ordinò che il giovane straniero venisse condotto al suo cospetto.
Una volta giunto alla sala del trono, il bramino di nome Lahur Sessa fu interrogato, secondo le regole del cerimoniale, da uno dei nobili del Re. Il bramino veniva dal villaggio di Namir, a trenta giorni di cammino dalla città del Re. Aveva avuto notizia che il Re era afflitto da profondo dolore, che era amareggiato dalla perdita del figlio che gli era stato strappato nelle vicende della guerra. Sessa aveva quindi pensato che sarebbe stato quanto mai opportuno inventare un gioco che potesse distrarlo e aprire il suo cuore a nuovi piaceri. Era questo l'umile dono che Sessa recava al Re.
Il Re, udito che il giovane bramino stava per offrirgli un gioco nuovo e sconosciuto, volle senza indugio vederlo e poterlo sperimentare.
Sessa mise davanti al Re una tavola divisa in sessantaquattro caselle di uguali dimensioni. Su di essa erano disposti due gruppi di pezzi, gli uni bianchi e gli altri neri. Le figure di questi pezzi erano allineate simmetricamente sulla scacchiera e vi erano strane regole che governavano i loro movimenti. Sessa cominciò pazientemente a spiegare al Re, ai nobili e ai cortigiani lì raccolti, lo scopo e le regole fondamentali del gioco. Il Re Iadava fu molto interessato e imparò rapidamente le regole del gioco. Poche ore dopo sconfisse i nobili cortigiani in una magnifica partita; ogni tanto Sessa interveniva per chiarire un dubbio o per suggerire un diverso piano di attacco o di difesa.
Ad un certo punto il Re notò con grande sorpresa che i pezzi, dopo tutte le mosse fatte, erano spiegati esattamente come nella battaglia di Dacsina . Allora il giovane bramino gli fece osservare che, per vincere la battaglia, doveva sacrificare un nobile guerriero e gli indicò proprio il pezzo che il Re aveva posto a capo delle schiere impegnate nel cuore della lotta. Il saggio Sessa volle così mostrare che talvolta la morte di un principe è necessaria per assicurare pace e libertà al suo popolo. In questo modo Iadava si rese conto che un Re è impotente senza l'aiuto e la dedizione dei suoi sudditi e che, talvolta, per conseguire una grande vittoria, il sacrificio di una piccola pedina può equivalere a quello di un pezzo importante.
Il Re, per mostrare la grandezza della sua riconoscenza, chiese a Sessa di esprimere un desiderio tra le cose che era in grado di dargli. Sessa disse di non volere alcuna ricompensa perché questa era la felicità di aver guarito il Re. Questi sorrise e, incapace di credere alla sincerità del giovane, insistette e aggiunse che il rifiuto dell'offerta sarebbe stato non solo una scortesia ma una disobbedienza. Sessa allora, per non essere scortese, chiese di essere pagato in chicchi di grano. Il Re stupito dalla strana moneta chiese in quale modo poteva ricompensarlo. Sessa spiegò che era facilissimo: bastava dargli un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza, otto per la quarta e così via, raddoppiando la quantità ad ogni casella fino alla sessantaquattresima e ultima.
Il re rise di questa richiesta, dicendogli che poteva avere qualunque cosa e invece si accontentava di pochi chicchi di grano. Il giorno dopo i matematici di corte andarono dal re e gli dissero che per adempiere alla richiesta del monaco non sarebbero bastati i raccolti di tutto il regno per ottocento

anni. Lahur Sessa aveva voluto in questo modo insegnare al re che una richiesta apparentemente modesta poteva nascondere un costo enorme. Comunque,una volta che il re lo ebbe capito, il bramino ritirò la sua richiesta e divenne il governatore di una delle province del regno.

Questa novella, con maggiori particolari, è riportata dal libro: *L'uomo che sapeva contare*, di Malba Tahan, ed. Salani.

Il problema illustrato dalla novella indiana è indubbiamente uno dei più famosi nell'ambito dei passatempi matematici. Mi sembra un problema ricco che vale la pena di sfruttare. È un problema che coinvolge le potenze del 2 fino a 2^{63} nell'ultimo quadratino della scacchiera. Precisamente il numero complessivo dei chicchi di grano, secondo la promessa fatta dal Re Iadava, sarà espresso dalla somma dei primi sessantaquattro termini della progressione geometrica:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad \dots \quad 2^{63}.$$

La loro somma vale $2^{64} - 1$. A questo risultato, che può essere dato agli studenti anche senza dimostrazione, si può arrivare seguendo diversi percorsi.

Un primo procedimento, a mio parere utilizzabile anche in classe, consiste nello scrivere esplicitamente la somma S:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$$

poi moltiplicare entrambi i membri per 2, che nel caso del secondo membro equivale, per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, a moltiplicare ogni addendo per 2.

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots + 2^{63} + 2^{64}$$

Se ora sottraiamo membro a membro otteniamo (e qui vale la pena di chiedere agli studenti il risultato …)

$$2S - S = 2^{64} - 1$$

cioè $S = 2^{64} - 1$.

Un secondo procedimento utilizza il risultato generale che afferma che la somma $S_n = b_0 + qb_0 + q^2b_0 + \cdots + q^{n-1}b_0$ dei primi n termini, con $n > 1$, di una progressione geometrica di base b_0 e ragione q diversa da 1 è $b_0 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ con $b_0 = 1$ e $q = 2$.

Una terza possibilità è quella di utilizzare il principio di induzione per dimostrare che $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Resta il problema di stabilire l'ordine di grandezza di questo numero, cioè 2^{64}, espresso mediante una potenza di 2. Probabilmente tra gli studenti di una Prima Classe di Scuola Secondaria Superiore ci sarà qualcuno abbastanza "esperto" di informatica che avrà sentito parlare di Byte, KiloByte

(KB), ecc. È abbastanza noto che un KB non è esattamente 1000 Byte, bensì 1024 Byte e 1024 = 2^{10}. Quest'ultimo dato mi può aiutare a trovare l'ordine di grandezza di 2^{64}. Sfruttando le proprietà delle potenze posso scrivere $2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60}$ che sarà approssimativamente uguale a $16 \cdot 10^{18} = 1{,}6 \cdot 10^{19}$ e questo mi dà l'ordine di grandezza cercato.
Fino a questo punto non ho utilizzato alcuno strumento tipo calcolatrice scientifica, ma si può andare avanti. Se sostituisco 1000 a 1024 commetto un errore per difetto che è circa 2,3% e al mio risultato finale cosa succede? Con la calcolatrice gli studenti trovano che 2^{64} vale circa $1{,}84 \cdot 10^{19}$ e quindi come ordine di grandezza ci siamo, ma qual è l'errore sul risultato finale? Facendo i calcoli si trova un errore di circa 13%. Quindi si può parlare con gli studenti anche di propagazione dell'errore.
Resta un'altra curiosità da soddisfare: che volume occupa una tale quantità di grano? Per rispondere a questa domanda occorre creare un modello matematico della situazione in esame. Cercando in rete si trova che attualmente un chicco di grano pesa mediamente 50 mg = $5 \cdot 10^{-5}$ Kg e che un ettolitro = 100 dm^3 = 0,1 m^3 di grano pesa in media 80 Kg. Questi dati ci permettono di determinare quanti chicchi di grano sono presenti mediamente in 0,1 m^3 di grano; precisamente $80 : 5 \cdot 10^{-5} = 1{,}6 \cdot 10^6$. Possiamo ora determinare il volume occupato da $1{,}84 \cdot 10^{19}$ chicchi di grano. Otteniamo

$$\frac{1{,}84 \cdot 10^{19}}{1{,}6 \cdot 10^6} \cdot 10^{-1} = 1{,}15 \cdot 10^{12} \text{ m}^3.$$

Quale sarà lo spigolo di un cubo il cui volume corrisponde a questo valore? Basta calcolare la radice cubica del precedente risultato. Otteniamo

$$\sqrt[3]{1{,}15 \cdot 10^{12}} \approx 1{,}05 \cdot 10^4 \text{ m} = 10{,}5 \text{ Km!}$$

Questo risultato è dello stesso ordine di grandezza del valore trovato da un famoso matematico del passato John Wallis (1615 – 1703); precisamente 9400 m. Possiamo presumere che Wallis abbia utilizzato un peso medio di un chicco di grano diverso da 50 mg.
Un ultimo confronto: la quantità di grano, espressa in Kg, che abbiamo trovato è maggiore o minore della produzione mondiale annuale di grano? Il 2015, che è stato un anno record per la produzione di grano, ha fatto registrare un valore di circa $7{,}33 \cdot 10^{11}$ Kg, mentre il peso dei "nostri" chicchi di grano è dato da $1{,}84 \cdot 10^{19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}$ Kg = $9{,}2 \cdot 10^{14}$ Kg, cioè più di mille volte superiore!