PROBLEM SOLVING NEI CAMPI DI ESPERIENZA PER DARE SENSO ALLA MATEMATICA E SVILUPPARE COMPORTAMENTI RAZIONALI

Paolo Boero, Università di Genova

boero@dima.unige.it; http://didmat.dima.unige.it

- Un **CAMPO DI ESPERIENZA** è un settore della cultura umana identificabile dagli allievi come parte della loro esperienza (effettiva o potenziale), con specifiche caratteristiche che lo rendono (sotto la guida dell'insegnante) adatto per attività di modellizzazione matematica, di problem solving matematico, di costruzione e sviluppo di concetti matematici, di argomentazione matematica, ecc. Esempi sono **"Monete e prezzi", "Ombre del sole", "Produzioni in classe", "Numeri e operazioni", "Eventi aleatori" ….**
- Ogni campo di esperienza può essere considerato sotto tre punti di vista: quello dell'insegnante ("**contesto interno dell'insegnante**", che comprende le sue rappresentazioni mentali a proposito del campo di esperienza, le sue strategie, i suoi schemi che gli permettono di agire con sicurezza in esso, le sue attese a proposito del suo utilizzo didattico in classe, ecc.); quello dell'allievo ("**contesto interno dello studente**", che comprende le sue rappresentazioni mentali a proposito del campo di esperienza, le sue strategie, i suoi schemi a proposito delle azioni in esso, le sue attese a proposito di come comportarsi in classe per fare fronte alle richieste dell'insegnante relative ad esso, ecc.) e quello degli elementi oggettivi e delle relazioni tra essi che rendono un campo di esperienza riconoscibile dall'esterno ("**contesto esterno**": gli oggetti materiali, le rappresentazioni grafiche, i testi, le convenzioni sociali e i vincoli che ne derivano, le relazioni fisiche tra le sue parti e i vincoli che ne derivano, ecc.). **I tre "contesti" evolvono nel corso dell'azione didattica in classe E nell'esperienza a più lungo termine dei soggetti coinvolti.**
- http://www.seminariodidama.unito.it/2011/tutti/relboero.pdf per quadro teorico e evoluzione negli anni (2011)
- http://didmat.dima.unige.it per Progetto completo "Bambini, maestri, realtà" e alcune unità di lavoro dei Progetti SeT.

La **DIDATTICA NEI CAMPI DI ESPERIENZA** comprende le **azioni dell'insegnante che utilizza il contesto esterno del CdE per intervenire sul contesto interno dell'allievo realizzando la mediazione (diretta o indiretta)** di quegli elementi rilevanti della cultura che vuole siano appropriati dall'allievo come oggetti e strumenti per la sua **realizzazione intellettuale** nel **contesto sociale**.

La didattica dei campi di esperienza comprende la **routine fondamentale**, che può essere iterata più volte nel corso di una sequenza didattica :

I) Lavoro individuale (o in piccoli gruppi, quando necessario) degli allievi sul **compito proposto dall'insegnante** *<con eventuale sostegno individualizzato da parte dell'insegnante, realizzato attraverso il "prestamano">*

II) **Confronto in classe con/tra prodotti degli allievi**, **selezionati dall'insegnante**, *<durante il confronto l'insegnante realizza un primo livello di mediazione sulla formulazione dei testi, ai fini della comprensione>* e **discussione** su essi, orchestrata dall'insegnante (Bartolini): dalla concettualizzazione, al bilancio *<l'insegnante realizza un secondo livello di mediazione, attraverso la **valorizzazione di contributi degli allievi**, **e/o** **l'introduzione di nuovi elementi**: segni, riferimenti, ecc.>*

III) Sintesi, che può essere **provvisoria**, **guidata dall'insegnante** *<che realizza un terzo livello di mediazione, sulla formulazione delle conclusioni>*

I) Lavoro individuale (o in piccoli gruppi, quando necessario) degli allievi sul **compito proposto dall'insegnante** *<con eventuale sostegno individualizzato da parte dell'insegnante, realizzato attraverso il "prestamano">*

II) **Confronto in classe con/tra prodotti degli allievi**, **selezionati dall'insegnante**, *<durante il confronto l'insegnante realizza un primo livello di mediazione sulla formulazione dei testi, ai fini della comprensione>* e **discussione** su essi, orchestrata dall'insegnante (Bartolini): dalla concettualizzazione, al bilancio *<l'insegnante realizza un secondo livello di mediazione, attraverso la* ***valorizzazione di contributi degli allievi, e/o l'introduzione di nuovi elementi:*** *segni, riferimenti, ecc.>*

III) Sintesi, che può essere **provvisoria**, **guidata dall'insegnante** *<che realizza un terzo livello di mediazione, sulla formulazione delle conclusioni>*

… **quale relazione con il problem solving**? Tradizionalmente inteso, il problem solving si esaurisce nella fase 1… Ma (*anche tenuto conto delle Indicazioni Nazionali – vedi Morselli*) in realtà **il problem solving si realizza compiutamente solo attraverso tutte e tre le fasi**!

Costruzione dello scenario per la routine*: lavoro precedente nel CdE, che ha sollevato degli interrogativi, a volte con* ***PROBLEMI POSTI DAGLI ALUNNI****; conclusione provvisoria della precedente routine; intervento esterno (esempio: lettera di alunni di un’altra classe), ecc.*

** **Lavoro individuale** (o in piccoli gruppi, quando necessario) degli allievi sul **compito proposto dall’insegnante, se possibile rilanciando questioni poste dagli alunni** *<con eventuale sostegno individualizzato da parte dell’insegnante, realizzato attraverso il “prestamano”>*

vedi contributo di Morselli a proposito del Task Design: analisi a priori in relazione agli obiettivi, formulazione aperta o chiusa della consegna, ecc. –

** **Confronto in classe con/tra prodotti degli allievi**, **selezionati dall’insegnante**,

scelta assai delicata: ideale sarebbe realizzarla insieme a dei colleghi; importante avere chiari gli obiettivi, e individuare i contributi degli allievi (*o aggiungerne, “di un’altra classe”)* ***in relazione ad essi*** *– oltre a tener conto della rappresentatività dei contributi in relazione alle produzioni degli allievi*

<l’insegnante realizza durante il confronto un primo livello di mediazione sulla formulazione dei testi, ai fini della comprensione> e **discussione** su essi, orchestrata dall’insegnante (Bartolini): dalla concettualizzazione, al bilancio *<l’insegnante realizza un secondo livello di mediazione, attraverso la* ***valorizzazione di contributi degli allievi, e/o l’introduzione di nuovi elementi****: segni, riferimenti, ecc.>*

** **Sintesi**, che può essere **provvisoria**, **guidata dall’insegnante** *<che realizza un terzo livello di mediazione, sulla formulazione delle conclusioni>*

la provvisorietà è una qualità importante a fini educativi!!

http://didmat.dima.unige.it per Progetto completo “Bambini, maestri, realtà” e alcune unità di lavoro dei Progetti SeT.

I) Lavoro individuale (o in piccoli gruppi, quando necessario) degli allievi sul **compito proposto dall'insegnante** <*con eventuale sostegno individualizzato da parte dell'insegnante, realizzato attraverso il "prestamano"*> **variante: lavoro in piccoli gruppi ben assortiti (se il compito lo richiede!)**

è il momento del ***dialogo interno*** ***costruttivo e riflessivo*** ***<INTERIORIZZATO A PARTIRE DALLE ATTIVITA' DI INTERAZIONE IN CLASSE, QUANDO NON PROMOSSO FUORI DELLA SCUOLA>*** (dialogo specifico a seconda del compito: produzione di una ipotesi/"congettura" **argomentata**, costruzione di una **strategia risolutiva controllata**, presa di posizione **argomentata** su una affermazione altrui, scelta **argomentata** tra posizioni/soluzioni diverse…). *Il dialogo è in vista della* ***comunicazione ad altri****.* ***L'insegnante può (o deve, a seconda dei casi!) intervenire sul dialogo interno, quando carente, e sulla comunicazione esterna, quando impacciata o bloccata***

II) Confronto in classe con/tra prodotti degli allievi, **selezionati dall'insegnante**, <*attraverso il confronto l'insegnante realizza un primo livello di mediazione sulla formulazione dei testi, ai fini della comprensione*> e **discussione** su essi, orchestrata dall'insegnante (Bartolini): dalla concettualizzazione, al bilancio <*l'insegnante realizza un secondo livello di mediazione, attraverso la* ***valorizzazione di contributi degli allievi****,* ***e/o*** ***l'introduzione di nuovi elementi****: segni, riferimenti, ecc.*>

È il momento dello **sviluppo della costruzione sociale del sapere** **mediata dall'insegnante**, e delle occasioni di **dialogo collaborativo e contrastivo** e di **argomentazione collettiva** in vista dell'**interiorizzazione**; è anche il momento della **valutazione e socializzazione delle strategie risolutive**, dell'affinamento della **comunicazione**, e **dell'identificazione e esercizio dei** **criteri di verità delle affermazioni**

III) Sintesi, che può essere **provvisoria**, **guidata dall'insegnante** <*che realizza un terzo livello di mediazione, sulla formulazione delle conclusioni*>

E' il momento della **revisione di strategie** e **verità delle affermazioni**, e di **comunicazione** finale

- **Costruire e valutare strategie… controllare… comunicare….**
- **Prendere posizione… individuare e esercitare criteri di verità… comunicare…**

Tutto ciò suggerisce un collegamento con il **costrutto della razionalità elaborato da Habermas** per rendere conto di pratiche discorsive che consentono **l'intesa** (tra persone con posizioni e prospettive diverse: vedi libro sul dialogo Habermas-Ratzinger) e **l'esercizio della libertà di pensiero** (individuale nel contesto sociale)

(riferimento bibliografico: Verità e giustificazione, Laterza, cap. VI)

Il costrutto della razionalità si articola in tre componenti che si intrecciano nell'evolvere del discorso:

La componente **EPISTEMICA** relativa al **conoscere**: individuare e applicare criteri di verità delle affermazioni e di validità dei ragionamenti in un dato contesto culturale; **nella prospettiva del problem solving essa riguarda non solo il controllo delle soluzioni raggiunte, ma anche dei passi intermedi**

La componente **TELEOLOGICA** relativa all'**agire**: valutare l'efficacia di strategie risolutive prodotte per raggiungere un obiettivo; **nella prospettiva del problem solving essa riguarda tale valutazione**

La componente **COMUNICATIVA** (relativa al **comunicare**): scegliere strumenti e modi per entrare in relazione comunicativa efficace con il contesto sociale di interesse. **Nella prospettiva del problem solving essa riguarda la comunicazione delle soluzioni e dei modi per ottenerle.**

III primaria (nel CdE delle ombre del sole, dopo alcune osservazioni e giochi sulle ombre del sole che hanno **per il momento** messo a tacere concezioni animistiche, o di “altro da sé”)

Come faresti a misurare la tua ombra da solo?

Analisi a priori:

L’alunno deve

- Immaginare la situazione
- tenere conto della rigidità del rapporto dinamico tra movimenti della persona, e trasformazioni subite dalla sua ombra

E l’alunno può

- Approfittare dell’invarianza per traslazione della misura di lunghezza (“teorema in atto”- Vergnaud- del concetto di misura di lunghezza)

III primaria, T. Gazzolo (dopo alcune osservazioni e giochi sulle ombre del sole)

Come faresti a misurare la tua ombra da solo?

Alcune produzioni individuali tipiche:

"*Mi chino piano piano, e allungo il metro dai piedi (con lo 0) all'ombra della testa, e guardo dove arriva, così trovo la misura"*

*"Guardo dove arriva la mia ombra, mi ricordo e ci faccio un segno, e misuro la distanza dai piedi" (*con prestamano*)*

"Mi sposto in modo da fare arrivare l'ombra della testa a toccare dove comincia il muro, però prima devo segnare dove erano i piedi"

"Prendo un bastone lungo e lo metto tra i piedi e dove arriva l'ombra, ma con i piedi, se no cambia la lunghezza"

"Prendo il metro, quello lungo a striscia, lo metto per terra in modo che attraversi la mia ombra dalla testa ai piedi, poi misuro dalla testa ai piedi e vedo quanto è lunga."

III primaria - ***Come faresti a misurare la tua ombra da solo?*** *Alcune produzioni individuali tipiche:*

1) "Mi chino piano piano, e allungo il metro dai piedi (con lo 0) all'ombra della testa, e guardo dove arriva, così trovo la misura"

2) "Guardo dove arriva la mia ombra, mi ricordo e ci faccio un segno, e misuro la distanza dai piedi"(prestamano)

3) "Mi sposto in modo da fare arrivare l'ombra della testa a toccare dove comincia il muro, però prima devo segnare dove erano i piedi"

4) "Prendo un bastone lungo e lo metto tra i piedi e dove arriva l'ombra, ma con i piedi, se no cambia la lunghezza, poi misuro sul bastone dove c'era l'ombra"

5) "Prendo il metro, quello lungo a striscia, lo metto per terra in modo che attraversi la mia ombra dalla testa ai piedi, poi misuro dalla testa ai piedi e vedo quanto è lunga."

Di solito, nessun progetto è completo. Ma molti progetti contengono elementi utili per costruire insieme una o più soluzioni del problema.

Che fare? Dopo il **confronto** tra le strategie selezionate e la propria strategia (necessario per coinvolgere i bambini nelle attività successive) …

… si passa alla **valutazione argomentativa** dei progetti selezionati (uno per uno). L'insegnante volta per volta stabilisce se è necessario ricorrere alla **verifica empirica** (realizzazione della strategia). Poi si procede **all'integrazione e riformulazione di singoli progetti**, tenuto conto degli altri. Si può arrivare facilmente a 3-4 progetti validi e diversi. **L'insegnante può eventualmente mettere in evidenza:**

- Nel progetto derivato da 3), **l'invarianza della misura - per traslazione** – ma, a rigore, come a volte dicono i bambini, la lunghezza nel tempo è variata mentre ci si sposta … variata sia pure "di pochissimo" (meno "pochissimo" la mattina d'inverno alle 9, o il pomeriggio alle 16)
- La differenza tra il progetto derivato da 4) e il progetto derivato da 5), … (ecc.)…

Forme di razionalità nel campo di esperienza delle **ombre del sole:**

- **Criteri di validità condivisibili**: verifica argomentativa (con "argomenti" che fanno riferimento a esperienze condivise); verifica empirica; entrambi sono **criteri culturali che necessitano la mediazione dell'insegnante e una riflessione gradualmente più precisa; la loro "definizione" (nella cultura occidentale) risale a (risp.) Aristotele e Galileo**
- **Strategie**: sono costruite con processi mentali di immaginazione dinamica riferita ai vincoli materiali rigidi del **contesto esterno del CdE** (relativi al fenomeno E agli strumenti di trattamento del problema posto), e sono valutate in relazione all'efficacia in relazione allo scopo da raggiungere; si tratta della componente **più personale e autonoma**, soggetta ad **arricchimento attraverso il confronto con gli altri**; **la mediazione diretta riguarda solo la presa di coscienza riflessiva sull'efficacia**
- **Comunicazione**: aspetti importanti riguardano i verbi delle azioni da compiere, gli impliciti e le parole che sintetizzano operazioni complesse ("**misuro con il metro** la distanza tra i due segni sul terreno") – **anche questi aspetti devono essere mediati dall'insegnante, se necessario, e fatti oggetto di riflessione**!

CLASSE III, CAMPO DI ESPERIENZA DELLE PRODUZIONI IN CLASSE

Per Pasqua abbiamo deciso (con i soldi guadagnati con la vendita degli album delle nostre foto nel Parco delle Cinque Terre) di regalare ai nostri genitori della marmellata di arance confezionata da noi. Ci sono rimasti 62,5 €; vorremmo realizzare 22 pacchi come si deve, con barattolo riutilizzabile e una bella busta colorata robusta. Al supermercato abbiamo visto che vendono:

- *A- Confezioni da 12 barattoli, che costano 18 € l'una; ci vogliono buste che costano 0,6 € l'una*
- *B- Confezioni da 10 barattoli, che costano 13 € l'una; ci vogliono buste che costano 0,7 € l'una*

Quale soluzione scegliere (se ci bastano i soldi che abbiamo)?

Individualmente i bambini risolvono il problema; la maestra sceglie le seguenti soluzioni, un po' sintetizzate d'accordo con gli autori:

Amelia: A-ogni barattolo costa 1,50 € (18 € li faccio con 12 monete da 1€ e 12 monete da 50 cent), più 0,60 € fa 2,10 € . Riusciamo sicuramente a stare nei soldi che abbiamo, perché viene in tutto poco più di 44€. Ma A costa di più di B, perché con B ogni barattolo costa 1,30 € più 0,70€ che fa in tutto 2€. Meglio scegliere B

Giulio: Con A ci servono DUE confezioni di barattoli e dobbiamo spendere 36 € e dobbiamo aggiungere 0,60x22=13,20€ di buste, in totale 36+13,20€ che fa 49,20€. Con B dobbiamo comprare TRE confezioni di barattoli, pagando 39 €, e dobbiamo aggiungere 22 buste, che costano 22x0,7=15,4€ In totale spendiamo 39+15,4€ che fa 54,4€. Riusciamo a pagare, ma B costa più di A. Dobbiamo scegliere A

Dopo il confronto **con** le due soluzioni (a parte errori di calcolo, che vengono discussi, 4 alunni hanno scelto una soluzione come quella di Amelia, 12 alunni come quella di Giulio, e 4 alunni si sono “persi” non riuscendo a concludere), **l’insegnante avvia la discussione collettiva.** Si riporta il passo più importante:

Giulio: *Amelia, tu ti sei dimenticata che bisogna comprare le confezioni dei barattoli, mica te li vendono uno per uno!*

Amelia: *lo so, ma l’ho fatto apposta, volevo vedere quanto costava ogni pacco*

Laura: *Ha ragione Giulio, se facciamo come dici tu spendiamo più di 5€ in più, che ci possono venir bene per prendere delle minerali per la gita di lunedì prossimo*

Andrea: *Invece per me ha ragione Amelia, perché è vero che spendiamo di più, ma ci restano 8 barattoli invece di 2, e li possiamo tenere per delle altre cose. Il confronto lo dobbiamo fare su ogni pacco. Su quello che costa davvero ogni pacco.*

Elisa: *Mi sembra che non abbiamo considerato un’altra cosa. I barattoli della A costano di più ma sono anche più belli e sembrano più robusti, i nostri genitori potranno usarli di più, preferirei regalare quelli*

Al supermercato abbiamo visto che vendono:

- *A- Confezioni da 12 barattoli, che costano 18 € l'una; ci vogliono buste che costano 0,6 € l'una*
- *B- Confezioni da 10 barattoli, che costano 13 € l'una; ci vogliono buste che costano 0,7 € l'una*

Quale soluzione scegliere (se ci bastano i soldi che abbiamo)?

Si tratta di un problema di modellizzazione aritmetica elementare in campo economico. Alla **razionalità del calcolo aritmetico si sovrappone** la **razionalità delle scelte economiche** (situazione comune in economia a tutti i livelli, dal singolo cittadino allo stato!).

La **componente teleologica della razionalità** (riguardante la valutazione delle strategie in termini di efficacia) **si interccia** con la **componente epistemica** (riguardante i criteri di accettabilità delle soluzioni – al di là della correttezza dei calcoli). Questo intreccio non riguarda solo la modellizzazione matematica in campo economico, ma **ogni tipo di modellizzazione** (anche interno alla matematica: scelta della formalizzazione algebrica adatta per un problema di geometria del Liceo, e analisi dei risultati che ne derivano) → sviluppo di competenze in una prospettiva a lungo termine, fino al Liceo e oltre!

Avvio alla transizione dai campi di esperienza della realtà extrascolastica, al campo di esperienza dei numeri e delle operazioni aritmetiche (fine classe I): PRIMI PROBLEMI

A) ***"Quanti modi ci sono per pagare 6 cent con le monete che conosci?"***

E quanti modi ci sono per ottenere 6 sommando numeri più piccoli di 6? Scrivi quello che hai scoperto"

"Ho scoperto che ci sono altri modi, con i numeri"

"Ho scoperto che con i numeri ci sono molti più modi"

"Ho scoperto che 3+3 si può fare con i numeri e non si può fare con le monete"

"**Ci sono più modi con i numeri perché ci sono numeri che non sono monete, e si possono sommare per fare 6"**

B) ***"Lucia doveva scrivere TREDICI in cifre, ha scritto 31. Sappiamo che Lucia ha sbagliato, capita! Spiega a Lucia perché ha sbagliato"***

"…perché 31 è TRENTUNO che sono nato io, che viene molto dopo TREDICI sul calendario"

"… perché con 31 cent puoi pagare molte più cose che con TREDICI cent"

"… perché TREDICI si scrive con 1 a sinistra di 3 e non a destra come hai scritto tu (1 viene prima di 3 forse ti sei sbagliata perché quando lo dici tu dici prima TRE)

"… **perché 31 cent lo puoi pagare con 3 monete da 10 cent, e una moneta da 1 cent, invece TREDICI cent basta una moneta da 10 cent e 3 monete da 1 cent**"

Transizione dai ***(problemi nei)*** campi di esperienza della realtà extrascolastica, al campo di esperienza dei numeri e delle operazioni aritmetiche (classe III): ***la costruzione delle tecniche di calcolo scritto delle operazioni come problema da risolvere***

→ Il caso della **tecnica ragionata della divisione** ("canadese", meglio sarebbe "Nuffield" o "Araba")

PREMESSA PER GLI INSEGNANTI PRESENTI QUI: perché oltre un terzo degli alunni di prima media sbaglia il calcolo di 245221 : 122 ?

… problema nel campo di esperienza delle produzioni in classe:

"***Vogliamo costruire una striscia del tempo per la storia dei nonni, sistemando uno di fianco all'altro dei fogli larghi 21 cm sulla parete che è lunga 470 cm. Quanti fogli possiamo sistemare?***"

Tra le strategie prodotte, alcuni alunni producono strategie di questo tipo:

"**Sistemiamo 10 fogli, e sono 210 cm, e altri 10, e sono 210 cm che in tutto fanno 420 cm, per arrivare a 470 cm ci sono ancora 50 cm, e ci stanno ancora due fogli = 42 cm: in tutto possiamo sistemare 10+10+2=22 fogli**"

<nota: con le monete hanno imparato già tra fine prima e inizio seconda che 10 monete da 2 cent sono 20 cent, e 10 monete da 5 cent sono 50 cent, ecc.>

… problema nel campo di esperienza delle produzioni in classe:

“Vogliamo costruire una striscia del tempo per la storia dei nonni, sistemando uno di fianco all’altro dei fogli larghi 21 cm sulla parete che è lunga 470 cm. Quanti fogli possiamo sistemare?”

“Sistemiamo 10 fogli, e sono 210 cm, e altri 10, e sono 210 cm che in tutto fanno 420 cm, per arrivare a 470 cm ci sono ancora 50 cm, e ci stanno ancora due fogli = 42 cm: in tutto possiamo sistemare 10+10+2=22 fogli”

<nota: con le monete hanno imparato già tra fine prima e inizio seconda che 10 monete da 2 cent sono 20 cent, e 10 monete da 5 cent sono 50 cent, ecc.>

… evoluzione in pochi mesi:

7398 | 32

6400 32x200=6400 (quante centinaia di volte il 32 sta in 7398?)

=998 ← *quello che resta, tolte le centinaia di volte..*

960 32x30=960 (quante decine di volte il 32 sta in 998?)

=38 ← *quello che resta, tolte le decine di volte…*

32 32x1=32 (quante volte il 32 sta in 38?)

=6 ← *quello che resta, tolte le volte… **il resto della divisione nell’insieme degli interi**!*

Quindi:

7398= 32x(200+30+1) + 6

E allora (prospettiva di lungo termine dalla primaria al liceo):

$$\begin{array}{l|l} 245221 & \underline{\ 122\ } \\ \underline{242000} & 122x2000=242000 \\ ==1221 & \\ \quad\underline{1220} & 122x10=1220 \\ \quad ===1 & \end{array}$$

In conclusione: **245221=122x(2000+10)+1**

...coerente con la divisione tra polinomi nel biennio del liceo (pensando a **245221**=**2**x10^5+**4**x10^4+**5**x10^3+**2**x10^2+**2**x10^1+**1**):

$$\begin{array}{l|l} 2x^5+4x^4+5x^3+2x^2+2x^1+1 & \underline{\ x^2+2x+2\qquad} \\ \underline{2x^5+4x^4+4x^3\quad} & (x^2+2x+2)2x^3 \\ = \quad = \quad x^3+2x^2+2x^1+1 & \\ \qquad\quad \underline{x^3+2x^2+2x^1} & (x^2+2x+2)\,x \\ \qquad\quad = \quad = \quad = \quad 1 & \end{array}$$

e quindi: $\mathbf{2x^5+4x^4+5x^3+2x^2+2x^1+1 = (x^2+2x+2)\,(2x^3+x) + 1}$

PROBLEM SOLVING TEORICO NEL CAMPO DI ESPERIENZA DEI NUMERI E DELLE OPERAZIONI (CLASSE V)

(dopo alcune esperienze "gradevoli" di lavoro con divisibilità e numeri primi… Gli alunni sanno che cosa sono due numeri **consecutivi** sulla linea dei numeri interi)

"Quali sono i divisori comuni a due numeri interi consecutivi? Scrivi come hai ragionato e cerca di giustificare la tua risposta" (C. Rubini)

"Ho provato con 5 e con 6 ma era facile perché 5 è primo. Solo 1 è divisore di 5 e di 6. Poi ho provato con 9 e con 10, era ancora facile: i divisori di 9 sono 1 e 3 e 9, i divisori di 10 sono 1 e 2 e 5 e 10, perciò solo 1 è divisore comune. E' stato un po' più difficile con 15 e 16, divisori di 15: 1,3,5,15. Divisori di 16: 1,2,4,8,16. Ancora 1 è l'unico divisore comune. Ho provato con 48 e 49, è stato veramente complicato trovare tutti i divisori di 48: 1,2,3,4,6,8,12,16,24,48. Più facile con 49: 1, 7, 49. Di nuovo 1 unico divisore comune. Penso che sia 1 sempre, ma non so perché, mica si può andare avanti con numeri sempre più grossi e con divisori che rischiano di essere sempre più tanti!"

Un testo di questo tipo (o un confronto/discussione di testi che riguardano varie coppie di numeri) può servire per innescare la motivazione alla ricerca di un ragionamento che vale per tutte le coppie di numeri interi consecutivi.

SE lo spunto non viene dagli alunni, l'insegnante può innescare la costruzione di un ragionamento dicendo (ad esempio – C. Rubini, classe V del ciclo successivo):

INS "Cosa vuol dire che un numero è divisibile per un altro?"

Roberto "che il resto della divisione è 0"

Lucia "ma allora, se un numero- facciamo, 8 – è divisibile per 4, il numero dopo, che è 9, non è divisibile per 4…"

Stefano "perché il resto è 1"

INS "Bene, bravi, andiamo avanti: Gloria, hai capito quello che hanno detto Lucia e Stefano?

Gloria: "si, se prendo 9 che è divisibile per 3 ho 10 che viene dopo e non è divisibile per 3 perché il resto è 1"

INS: *(idem con Andrea, Ines, Tommaso)*

INS: e allora, come potremmo andare avanti? Cerchiamo un ragionamento che vada bene per tutte le coppie di numeri interi consecutivi

Roberto: ma io ho anche pensato che tra 8 e 9, e tra 9 e 10, e tra 14 e 15, e tra 20 e 21, tra tutti questi esempi… c'è sempre 1, ma allora i multipli… solo i multipli di 1, cioè i divisori di tutti, vanno di 1 in 1, gli altri saltano di 2, i multipli di 2, di 3, i multipli di 3, non possono essere divisori di due numeri che sono uno dopo l'altro"

INS: scrivi questo ragionamento, è importantissimo! Poi lo discutiamo!

INS: Torniamo al ragionamento di Lucia, Stefano, Gloria, Andrea, Ines, Tommaso… Hanno fatto degli esempi che cominciano a spiegare perché non possono esserci divisori comuni a due numeri consecutivi, tranne 1. Proviamo se riusciamo a fare un ragionamento UNICO per TUTTE le coppie possibili

Daniela: ci provo. Se un numero è divisibile per un divisore, per un certo divisore che non è 1, allora il numero consecutivo è quello prima più 1 (come ha detto Roberto), e allora se lo divido per quel divisore, il resto è 1

Roberto: perché se non avesse resto, sarebbe il multiplo successivo del divisore, impossibile!

INS: riprendiamo il discorso di Daniela. Stefi, vuoi provare tu a ripeterlo per bene?

Stefi: Prendo un divisore di un numero, se è divisore sta nel numero esattamente tante volte, e allora non può stare nel numero dopo esattamente

Daniela: se è diverso da 1

Stefi: si, se è diverso da 1 non può stare esattamente un numero di volte nel numero consecutivo, e allora il numero consecutivo non è divisibile per lui, perché il resto non è 0

Roberto: è 1, la distanza

Debora: Stefi, non ho capito chi è “lui”

Stefi: se il divisore del numero che viene prima è più grande di 1, non può stare esattamente un certo numero di volte nel numero consecutivo perché il resto è 1, e quindi il numero consecutivo non è divisibile per QUEL DIVISORE

INS: Marco, prova tu (…)

INS: e ora, Roberto, torniamo al tuo ragionamento. Attenzione tutti, è un altro ragionamento, diverso da quello fatto finora

(…..)

Sulla base di attività in molte classi di ambienti diversi e con insegnanti diversi, il passaggio alla razionalità del dimostrare in campo aritmetico – obiettivo “alto” per la scuola primaria, un po’ al di là degli attuali “traguardi per lo sviluppo delle competenze”- è accessibile, per la maggior parte degli alunni di V, **se vengono curate a partire dalla classe I le componenti della razionalità che confluiscono nella razionalità del dimostrare come problem solving:**

- **Strategie**: esplorare esempi, individuare regolarità e ragioni di tali regolarità (già nel problema dei modi di comporre 6 con i numeri… “*Ci sono più modi con i numeri perché ci sono numeri che non sono monete, e si possono sommare per fare 6*”), “**muovendosi**” mentalmente entro i vincoli rigidi del sistema dei numeri (“rigidi” come la relazione tra bambino e ombra proiettata… Nel nostro caso, la rigidità del succedersi dei multipli sulla linea dei numeri)
- **Criteri di verità degli enunciati**: **sono culturali e specifici, l’insegnante deve “mediarli” via via**, su bisogni indotti attraverso opportuni compiti (in questo caso, dopo la faticosa ricerca dei divisori comuni a coppie di numeri consecutivi → **l’INS. suggerisce la ricerca di un ragionamento valido per qualsiasi coppia**)
- **Comunicazione**: affinata attraverso l’ascolto reciproco, il tentativo reciproco di capirsi (**anche correggendosi a vicenda**, **pratica da incoraggiare, o grazie alla mediazione dell’insegnante**)

In conclusione: la prospettiva della razionalità consente di:

- Confrontare **in modo sincronico** aspetti importanti del problem solving in campi di esperienza diversi, evidenziando aspetti culturali (**con necessità di mediazione, soprattutto sul versante epistemico**) e cognitivi specifici

  (esempio: ombre del sole, e produzioni in classe, in III)

- Confrontare **in modo diacronico** aspetti importanti del problem solving in una prospettiva a lungo termine (soprattutto nel passaggio dai campi di esperienza della realtà quotidiana, ai campi di esperienza della matematica, **in particolare - ma non solo- sul versante teleologico -** delle strategie risolutive e delle dinamiche mentali relative)

<SLIDE NON PRESENTATA, ripresa nella tavola rotonda finale> **VALUTAZIONE DEL PROBLEM SOLVING NEI CdE**

Il problema della valutazione delle competenze INDIVIDUALI di problem solving (nei CdE e anche più in generale) deve essere affrontato a partire da cosa sono le ***competenze****: in sintesi* ***capacità di utilizzare conoscenze e abilità in un contesto sociale, con autonomia (dimensione individuale)*** *e* ***responsabilità (dimensione sociale).*** *E allora possono essere* ***strumenti/occasioni di valutazione*** *delle competenze di problem solving nei CdE, da scegliere anche in relazione all'età degli alunni:*

- Attività di problem solving individuale (eventualmente sostenute individualmente dall'insegnante, che valuterà così la Zona di Sviluppo Prossimale dell'alunno)
- Attività individuale di confronto con la risoluzione di un compagno (indicando aspetti comuni e differenze)
- Attività di auto-correzione individuale del lavoro svolto individualmente, dopo la fase di confronto con i lavori dei compagni, se possibile indicando i loro contributi, oppure a distanza di tempo
- Attività individuale di correzione di lavori svolti dai compagni, cercando di fare comprendere errori e di orientare la loro attenzione su un modo per risolvere il problema (se possibile, nella direzione su cui si è mosso il compagno)
- Adozione di una strategia /modalità di soluzione presentata da un compagno
- Svolgimento in coppia (omogenea) di un compito collaborativo di problem solving, con assunzione di ruoli diversi e valutazione unica del lavoro comune
- Idem, in coppia disomogenea – l'alunno più debole assume la responsabilità di riferire sul lavoro svolto.
- Attività di sintesi individuale di una discussione (le conclusioni, i contributi principali…)

LABORATORIO, E DISCUSSIONE DEL LABORATORIO

Abbiamo 3 ore a disposizione (COMPRESA mezz’ora circa di pausa).

PROPOSTA: integrare discussione collettiva e attività a piccoli gruppi secondo questa “scaletta”:

- Max 45’: preparazione (a piccoli gruppi) di domande di chiarimento sulla relazione (10’), e risposte in plenaria (35’).

Poi:

Max 45’: **Prima attività** da affrontare in piccoli gruppi (30’) seguita da confronto/ discussione (15’)

- Max 45’: **Seconda attività** da affrontare in piccoli gruppi (30’) seguita da confronto / discussione (15’)
- Min 15’: Discussione finale sul laboratorio.

IN ALTERNATIVA: **Solo la prima attività** (30’ piccoli gruppi, max 30’-45’ confronto e discussione) seguita da min 45’/30’ di discussione conclusiva sul laboratorio.

<SCELTA A MAGGIORANZA: entrambe le attività>

Prima attività

Scenario: nei primi mesi della classe II i bambini stanno imparando a misurare lunghezze con il metro “da sarta” e con il righello. Ogni bambino ha un righello a disposizione, con circa 1 cm senza tacche a sinistra dello 0. Viene seminato il grano in alcuni vasi in classe (**nel campo di esperienza del “Tempo della natura e delle attività umane”- vedi unità di lavoro del progetto SeT**) **e si decide di scegliere una piantina per seguirne con cura la crescita, misurandone periodicamente l’altezza.**

Come fare? Non possiamo danneggiare la piantina… Scrivi la tua proposta in modo preciso.

= A: a cosa può servire questa attività?(obiettivo/i)

= B: quali testi possono produrre gli alunni?

= C: Come proseguire il lavoro, tenuto conto dell’obiettivo/i ipotizzato/i ?

< se c’è tempo: **= D: Quali aspetti/componenti della razionalità intervengono, e con quali possibili sviluppi a lungo termine?>**

Seconda attività-

Scenario: classe III; nel corso dell'anno sono stati affrontati, nel CdE delle produzioni in classe, problemi collegati alle attività in corso,

senza introdurre "ufficialmente" il segno**" : "** **-** esempi:

IN PARALLELO, ripartizione equa di spese tra i 25 bambini della classe,

E: "quanti … possiamo comprare con i… € che abbiamo in cassa?"

IN PARALLELO, ripartizione equa di un nastro adesivo colorato di 2 metri per le 25 targhette da fissare sui quadernoni personali di "Produzioni in classe",

E: "quanti fogli larghi 21 cm possiamo sistemare uno a fianco all'altro sulla parete di 450 cm"

Attività proposta (a gruppi omogenei di 2 alunni): *Risolvete questi due problemini, uno a testa, disegnando con cura la situazione e la soluzione di ogni problema. Poi confrontate il lavoro fatto, e scrivete cosa avete scoperto.*

1. *Marco vuole ottenere 3 strisce colorate di lunghezza uguale tagliando un nastro lungo 6 metri. Quanto è lunga ogni striscia da tagliare?*
2. *Quanti nastri lunghi 3 metri si possono sistemare, uno dopo l'altro, lungo una parete lunga 6 metri?*

= A: a cosa può servire questa attività?(obiettivo/i)

= B: quali testi possono produrre gli alunni?

= C: Come proseguire il lavoro, tenuto conto dell'obiettivo/i ipotizzato/i ?

< se c'è tempo: **= D: Quali aspetti/componenti della razionalità intervengono, e con quali possibili sviluppi a lungo termine?>**