



Commissione Italiana per  
l'Insegnamento della Matematica

Commissione Permanente  
dell'Unione Matematica Italiana



Associazione  
Italiana di  
Ricerca in  
Didattica della  
Matematica

5a Scuola Estiva per Insegnanti UMI CIIM – AIRDM  
« Il Problema dei Problemi »

# ***Problemi di matematica per argomentare, modellizzare e costruire significati***

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica «F. Casorati»

Università di Pavia

Frascati, 30 agosto 2018



Il senso... un esempio



***Su una nave ci sono 26 montoni e 10 cani. Qual è l'età del capitano?***



# Questionario di Healy-Hoyles somministrato nel pavese

## CAMPIONE

80 studenti:

- 65 di licei scientifici
- 15 di una classe liceo linguistico

## STRUMENTO

2 questionari (ambito algebrico e ambito geometrico)

# QUESTIONARIO (Algebra)

## 1^ PARTE

Dimostrare la seguente affermazione:

*“La somma di due numeri dispari è un numero pari”.*

## 2^ PARTE

Ad alcuni studenti è stata assegnata la stessa dimostrazione.  
Le varie risposte ottenute sono riportate di seguito.

A)

Un numero dispari è il consecutivo di un numero pari, quindi la somma di due dispari è data dalla somma di due pari con il numero 2.

Quindi siccome la somma di due numeri pari è un numero pari e l'aggiunta di 2 dà ancora un pari possiamo affermare che la somma di due dispari è un pari.

B)

$$3+5 = 8$$

$$7+9 = 16$$

$$11+13 = 24$$

$$25+45 = 70$$

$$31+43 = 74$$

allora l'affermazione è vera.

# QUESTIONARIO (Algebra)

C)

primo numero dispari =  $2n+1$   
secondo numero dispari =  $2m+1$

$$(2n+1)+(2m+1) = 2(n+m) + 2 = \\ = 2(n+m+1)$$

quindi, essendo il doppio del numero  $n+m+1$ , è un numero pari.

E)

$x$  = intero dispari

$y$  = intero dispari

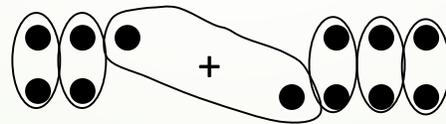
$z = x-1$

$w = y-1$

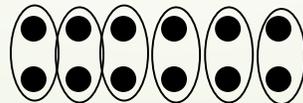
$x + z = y + w = 2x-1+1 = 2x = 2y$

quindi è un numero pari.

D)



=



# QUESTIONARIO (Algebra)

Dopo aver analizzato le varie soluzioni rispondi alle seguenti domande:

- Quale tra quelle riportate è più vicina a quella da te proposta (o, se non ne hai proposta nessuna, quale è più vicina a quella che avresti proposto)?
- Quale tra quelle riportate utilizzeresti per **convincere** un tuo amico che l'affermazione "la somma di due numeri dispari è un numero pari" è vera?
- Quale tra quelle riportate ti sembra più efficace per **spiegare perché** l'affermazione è vera?
- Quale dimostrazione pensi che ti consentirebbe di ottenere il voto più alto da parte dell'insegnante?

## RIEPILOGO

<b>più vicina</b>	form.scorr.	2,50%
	empirica	<b>38,75%</b>
	discorsiva	23,75%
	formale	<b>37,50%</b>
	grafica	5%
<b>convincere</b>	form.scorr.	5%
	empirica	<b>43,75%</b>
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
<b>spiegare</b>	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	<b>38,75%</b>
	grafica	18,75%
<b>voto+alto</b>	form.scorr.	
	empirica	
	discorsiva	
	formale	
	grafica	

## RIEPILOGO

<b>più vicina</b>	form.scorr.	2,50%
	empirica	<b>38,75%</b>
	discorsiva	23,75%
	formale	<b>37,50%</b>
	grafica	5%
<b>convincere</b>	form.scorr.	5%
	empirica	<b>43,75%</b>
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
<b>spiegare</b>	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	<b>38,75%</b>
	grafica	18,75%
<b>voto+alto</b>	form.scorr.	
	empirica	2,50%
	discorsiva	
	formale	
	grafica	1,25%

## RIEPILOGO

<b>più vicina</b>	form.scorr.	2,50%
	empirica	<b>38,75%</b>
	discorsiva	23,75%
	formale	<b>37,50%</b>
	grafica	5%
<b>convincere</b>	form.scorr.	5%
	empirica	<b>43,75%</b>
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
<b>spiegare</b>	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	<b>38,75%</b>
	grafica	18,75%
<b>voto+alto</b>	form.scorr.	
	empirica	2,50%
	discorsiva	16,25%
	formale	
	grafica	1,25%

## RIEPILOGO

<b>più vicina</b>	form.scorr.	2,50%
	empirica	<b>38,75%</b>
	discorsiva	23,75%
	formale	<b>37,50%</b>
	grafica	5%
<b>convincere</b>	form.scorr.	5%
	empirica	<b>43,75%</b>
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
<b>spiegare</b>	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	<b>38,75%</b>
	grafica	18,75%
<b>voto+alto</b>	form.scorr.	
	empirica	2,50%
	discorsiva	16,25%
	formale	<b>63,75%</b>
	grafica	1,25%

## RIEPILOGO

<b>più vicina</b>	form.scorr.	2,50%
	empirica	<b>38,75%</b>
	discorsiva	23,75%
	formale	<b>37,50%</b>
	grafica	5%
<b>convincere</b>	form.scorr.	5%
	empirica	<b>43,75%</b>
	discorsiva	13,75%
	formale	17,50%
	grafica	37,50%
<b>spiegare</b>	form.scorr.	5%
	empirica	17,50%
	discorsiva	28,75%
	formale	<b>38,75%</b>
	grafica	18,75%
<b>voto+alto</b>	form.scorr.	<b>30%</b>
	empirica	2,50%
	discorsiva	16,25%
	formale	<b>63,75%</b>
	grafica	1,25%

# Forma e contenuto

Gli studenti ritengono che PER L'INSEGNANTE una buona dimostrazione debba essere ricca di simboli. Probabilmente, nella loro scelta non hanno nemmeno controllato la logica della dimostrazione: 1 studente su 3 (in algebra) sceglie una dimostrazione completamente priva di senso, ma che evidentemente SEMBRA “più matematica” delle altre anche se non ha nessun ruolo oltre a quello di compiacere l'insegnante.

**La scelta si basa sull'aspetto esteriore**

Per sé stessi gli studenti, tranne rare eccezioni, scelgono argomentazioni di tipo empirico o dimostrazioni narrative o formali comunque corrette.

**La scelta della dimostrazione si basa sul suo contenuto**



**Concezione di «problema»  
(e di «problema di  
matematica»)**

**Obiettivo di attività con  
problemi**

**Visione della  
Matematica**

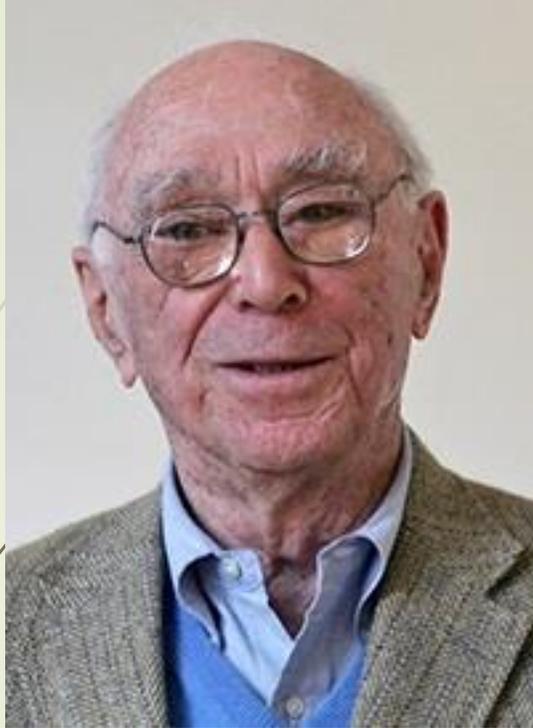
**Concezione di insegnamento  
e apprendimento (della  
matematica)**

**Concezione di «problema»  
(e di «problema di  
matematica»)**

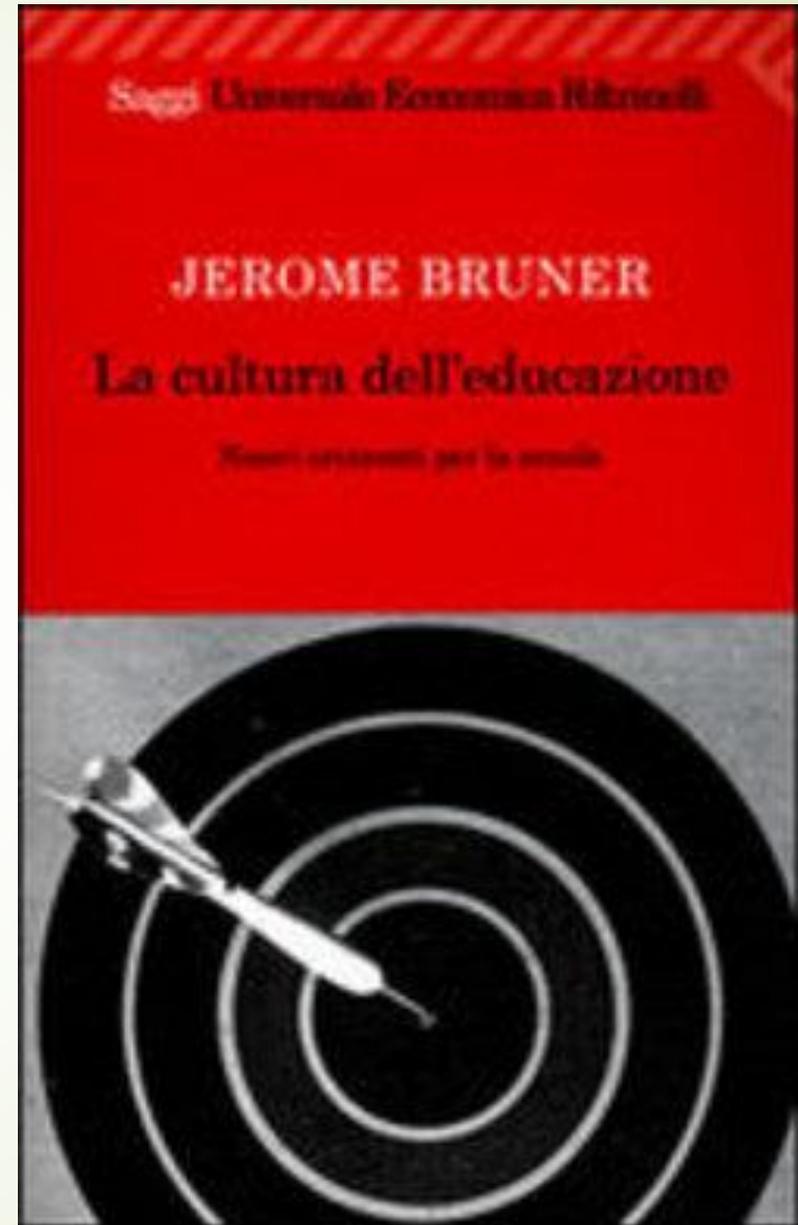
**Visione della  
Matematica**

**Obiettivo di attività con  
problemi**

**Concezione di insegnamento  
(della  
matematica)**



Jerome Bruner (1915-2016)





*C'è un problema che non ci abbandona mai quando ci occupiamo di insegnamento e di apprendimento, un problema così onnipresente, così costante, che fa così parte del tessuto della vita che spesso non lo notiamo, non riusciamo nemmeno a scoprirlo – come il pesce che «è sempre l'ultimo a scoprire l'acqua». Ed è il problema di come avviene l'incontro fra due menti, che l'insegnante esprime chiedendosi: «Come faccio ad arrivare ai bambini?» e i bambini: «Dove sta cercando di arrivare?».*

*(Bruner, CdE, p. 58)*



*Le nostre interazioni con gli altri sono profondamente influenzate dalle teorie intuitive correnti sul funzionamento della mente degli altri (p.58)*

Teorie ingenuie, raramente esplicitate, «psicologia popolare»

*Le psicologie popolari riflettono certe tendenze umane radicate (come la tendenza a ritenere che la gente normalmente abbia il controllo delle proprie azioni), ma riflettono anche alcune profonde convinzioni culturali riguardo alla «mente». La psicologia popolare non si occupa solo di come lavora la mente qui e adesso, ma dispone anche di nozioni su come impara la mente infantile e perfino su cosa la fa crescere. (p. 59)*



*L'insegnamento, insomma, ha alla sua base inevitabilmente delle idee sulla natura della mente del discente. Le convinzioni e gli assunti sull'insegnamento, in una scuola o in qualsiasi altro contesto, sono un riflesso diretto delle convinzioni e degli assunti del docente riguardo all'allievo (p. 59)*



Importante esplorare i modi più generali di concepire tradizionalmente la mente di chi apprende e le metodologie che conseguono



Le varie pedagogie popolari, per esempio, riflettono una varietà di assunti sui bambini: possono essere visti come dei testardi che devono essere corretti; degli innocenti che vanno protetti da una società volgare; degli individui che hanno bisogno di imparare delle abilità che possono essere sviluppate solo attraverso la pratica; dei recipienti vuoti da riempire di conoscenze che solo gli adulti possono fornire; degli essere egocentrici che devono essere socializzati.

[...]

.. queste concezioni, che siano o meno «giuste», possono avere un impatto enorme sulle attività di insegnamento.

(Bruner, CdE, p. 62)

Diversi approcci all'apprendimento e diverse forme di istruzione – dall'imitazione, all'istruzione, alla scoperta, alla collaborazione – riflettono convinzioni e assunti diversi riguardo al discente (p. 62).



## **Modelli della mente e modelli di pedagogia (di teorici dell'educazione, insegnanti e studenti)**

I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

I bambini imparano dall'esposizione didattica: l'acquisizione di conoscenza proposizionale

I bambini come pensatori: lo sviluppo dello scambio intersoggettivo

I bambini come soggetti intelligenti. La gestione della conoscenza obiettiva



## **Modelli della mente e modelli di pedagogia (di teorici dell'educazione, insegnanti e studenti)**

I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

I bambini imparano dall'esposizione didattica: l'acquisizione di conoscenza proposizionale

I bambini come pensatori: lo sviluppo dello scambio intersoggettivo

I bambini come soggetti intelligenti. La gestione della conoscenza obiettiva



# I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

Adulto mostra una azione o un modello di azione a un bambino

convinzione a) Il bambino non sappia fare x  
b) Il bambino possa imparare a fare x se gli viene mostrato

L'atto di fornire un modello presuppone anche

c) Il bambino voglia fare x  
d) Forse sta proprio cercando di fare x



# I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

Base dell'apprendistato: il novizio adotta i comportamenti degli esperti

*L'esperto cerca di trasmettere un'abilità che ha acquisito con una lunga pratica a un novizio che a sua volta per riuscire deve esercitarsi nell'azione dimostrata.*

Poca distinzione tra conoscenza procedurale (sapere come) e conoscenza proposizionale (sapere che)



# I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

assunti

E' possibile insegnare mostrando – è possibile imparare imitando

La proposta di modelli e l'imitazione rendono possibile l'accumulazione di una conoscenza culturalmente rilevante e la trasmissione della cultura da una generazione alla successiva

La competenza deriva solo dalla pratica. Consiste di talento, perizia e abilità più che di conoscenza e comprensione.

# I bambini apprendono per imitazione: l'acquisizione di know-how

**MA**

*[...] dimostrare semplicemente «come si fa» e offrire la possibilità di fare pratica non è sufficiente.*

*Gli studi condotti sulla perizia hanno dimostrato che imparare ad eseguire qualcosa con abilità non porta alla stessa combinazione di maestria e flessibilità che si ottiene attraverso un apprendimento che unisce alla pratica la spiegazione concettuale. (p. 67)*



Teoria dell'apprendimento di tipo imitativo NON adatta per una società avanzata



# **I bambini imparano dall'esposizione didattica: l'acquisizione di conoscenza proposizionale**

Presentazione agli allievi di fatti, principi e regole di azione che devono essere imparati, ricordati, applicati.

## **Presupposti**

L'allievo è all'oscuro di fatti, regole o principi che si trovano invece nella mente degli insegnanti oltre che nei libri, carte geografiche, ecc. e che può essere trasmesso

La conoscenza deve essere semplicemente «ascoltata», «consultata».



## **I bambini imparano dall'esposizione didattica: l'acquisizione di conoscenza proposizionale**

*Questa visione presume che la mente di chi apprende sia una tabula rasa. Le conoscenze che vengono trasmesse nella mente vengono considerate cumulative, una sorta di costruzione progressiva in cui le conoscenze si sommano via via alle precedenti. Più importante ancora in questa concezione è l'assunto che la mente del bambino sia passiva, sia un ricettacolo che aspetta di essere riempito. L'interpretazione attiva, la ricostruzione, non rientrano in questo quadro. La tendenza didattica vede il bambino o la bambina dall'esterno, dalla prospettiva di una terza persona, piuttosto che cercare di «entrare nei loro pensieri». E' totalmente a senso unico. L'insegnamento non è un dialogo, ma il racconto fatto da uno all'altro. (pp. 68-69)*

## La realtà scolastica

*La realtà scolastica, naturalmente, non è mai legata a un unico modello di discente o un unico modello di insegnamento. Per lo più l'educazione quotidiana nelle scuole si propone di coltivare competenze e abilità, di impartire una conoscenza di fatti e di teorie e di stimolare la comprensione delle convinzioni e delle intenzioni sia di chi è vicino che di chi è lontano. Qualsiasi scelta pedagogica pratica comporta un modo di concepire il discente e, col tempo, può essere adottata da lui o da lei come il modo adeguato di riflettere sul processo di apprendimento. Perché una scelta pedagogica comunica inevitabilmente una concezione del processo di apprendimento e del soggetto dell'apprendimento. La pedagogia non è mai ingenua. E' uno strumento che trasmette un proprio messaggio. (Bruner, CdE, p. 76)*



# Indicazioni nazionali



# Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, **la matematica** dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; **contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.** (p. 60)



# Indicazioni nazionali per il primo ciclo

**Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi** che devono essere intesi come **questioni autentiche e significative**, legate alla vita quotidiana, e **non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.**(p. 60)



# Indicazioni Nazionali: I ciclo

## Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

Riesce a **risolvere** facili **problemi** in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il **controllo** sia sul **processo** risolutivo, sia sui **risultati**. **Descrive** il procedimento seguito e riconosce **strategie** di soluzione diverse dalla propria.



# Indicazioni nazionali per il primo ciclo

## Traguardi per lo sviluppo delle competenze

### Termine scuola primaria

Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, **sostenendo le proprie idee** e confrontandosi con il **punto di vista** di altri.

### Termine scuola secondaria di primo grado

**Produce argomentazioni** in base alle conoscenze teoriche acquisite [...] Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; **accetta di cambiare opinione** riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

# Profilo culturale, educativo e professionale dei licei

«Piena valorizzazione» della «**pratica dell'argomentazione e del confronto**»

## **Risultati di apprendimento comuni a tutti i percorsi liceali**

A conclusione dei percorsi di ogni liceo gli studenti dovranno:

### **2. Area logico-argomentativa**

- Saper sostenere una propria tesi e saper **ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui.**
- Acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico, ad **identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni.**
- Essere in grado di leggere e interpretare criticamente i contenuti delle diverse forme di comunicazione.

# Dal Profilo Educativo

## Liceo scientifico

Gli studenti, a conclusione del percorso di studio, oltre a raggiungere i risultati di apprendimento comuni, dovranno:

[...]

comprendere le strutture portanti dei procedimenti **argomentativi** e **dimostrativi** della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare **nell'individuare e risolvere problemi** di varia natura;

# Indicazioni nazionali per il primo ciclo

## Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di **affrontare problemi e situazioni** sulla base di elementi certi e di avere **consapevolezza dei limiti** delle affermazioni che riguardano questioni complesse che **non si prestano a spiegazioni univoche**.



# Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di **matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione**. L'alunno **analizza le situazioni per tradurle in termini matematici**, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, **sceglie le azioni da compiere** (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni...) e **le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema**. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo **sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti**. (p. 60)

# Indicazioni Nazionali: I ciclo

## PRIMARIA: AMBIENTE DI APPRENDIMENTO

**Favorire l'esplorazione e la scoperta**, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In questa prospettiva, **la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali** (p. 27)

**Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio**, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il **dialogo e la riflessione** su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia **la ricerca e la progettualità**, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento. (p. 27)



# Indicazioni nazionali per il primo ciclo



In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il **laboratorio**, inteso sia come **luogo** fisico sia come **momento** in cui l'alunno è **attivo**, **formula** le **proprie** ipotesi e ne **controlla** le conseguenze, **progetta** e **sperimenta**, **discute** e **argomenta** le **proprie scelte**, impara a raccogliere dati, **negozia** e **costruisce significati**, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.(p. 60)



# Linee guida Istituti professionali

Il docente di “Matematica” concorre a far conseguire allo studente, al termine del percorso quinquennale di istruzione professionale del settore [...] : utilizzare il linguaggio e i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative; utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per **affrontare situazioni problematiche**, elaborando opportune soluzioni.

# Linee guida Istituti professionali

## Il laboratorio come metodologia di apprendimento

**Il laboratorio** è concepito, nei nuovi ordinamenti dell'istruzione professionale, non solo come il luogo nel quale gli studenti mettono in pratica quanto hanno appreso a livello teorico attraverso la sperimentazione di protocolli standardizzati, tipici delle discipline scientifiche, ma **soprattutto come una metodologia didattica** che coinvolge tutte le discipline, in quanto facilita la personalizzazione del processo di insegnamento/apprendimento e consente agli studenti di acquisire il “sapere” attraverso il “fare”, dando forza all'idea che la scuola è il posto in cui si “impara ad imparare” per tutta la vita. Tutte le discipline possono, quindi, giovare di momenti laboratoriali, in quanto tutte le aule possono diventare laboratori. (p. 26)

# Linee guida Istituti professionali

## Il laboratorio come metodologia di apprendimento

Il lavoro in **laboratorio** e le attività ad esso connesse sono particolarmente importanti perché consentono di attivare processi didattici in cui gli **allievi diventano protagonisti e superano l'atteggiamento di passività e di estraneità che caratterizza spesso il loro atteggiamento di fronte alle lezioni frontali**. L'impianto generale dei nuovi ordinamenti richiede che l'attività laboratoriale venga integrata nelle discipline sulla base di progetti didattici multidisciplinari orientati all'acquisizione di competenze. I nuovi ordinamenti degli istituti professionali possono offrire, quindi, occasioni per valorizzare i diversi stili cognitivi, in una rinnovata relazione tra discipline teoriche ed attività di laboratorio che aiuti lo studente, attraverso un processo induttivo, a connettere il sapere acquisito in contesti applicativi al sapere astratto basato su concetti generali e riproducibile nella più ampia generalità dei contesti. (p. 26)



# Linee guida Istituti professionali

## **Il laboratorio come metodologia di apprendimento**

I docenti, attraverso il laboratorio, hanno la possibilità di guidare l'azione didattica per “**situazioni-problema**” e di utilizzare strumenti per orientare e negoziare il progetto formativo individuale con gli studenti, che consente loro di acquisire consapevolezza dei propri punti di forza e debolezza.(p. 26)



# Indicazioni nazionali per il primo ciclo

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata **visione della matematica**, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo. (p. 60)





Ma cos'è un problema?



# Cos'è un problema

## Dizionario on-line Garzanti

### PROBLEMA

1. caso complicato, difficile da risolvere; situazione preoccupante: la disoccupazione è un problema sociale; ognuno ha i suoi problemi; che problema!, esclamazione di chi non sa che cosa fare | essere un problema, essere fonte di preoccupazione | non c'è problema, per affermare che non ci sono ostacoli, che non sussiste alcuna difficoltà (a fare qualcosa, a soddisfare una richiesta ecc.) dim. problemino, problemuccio, accr. problemone, pegg. problemaccio

2. quesito con cui si chiede di trovare, con un **procedimento di calcolo, uno o più dati sconosciuti, partendo dai dati noti contenuti nell'enunciato del quesito stesso**: problema di aritmetica, di geometria, di fisica; risolvere un problema, trovarne **la soluzione** | questione di cui si cerca **la soluzione**: problema filosofico, morale, scientifico



# Definizioni...

**Da un sito per studenti...**

Un **problema matematico** è un quesito del quale si conoscono alcuni elementi (**i dati**) per mezzo dei quali si devono calcolare altri elementi (**le incognite**)



MA...

# Imparare a risolvere (gestire) problemi: decisioni, argomentazioni e aspetti metacognitivi



Rosetta Zan

«Prendere decisioni si contrappone al comportamento automatico [...] e caratterizza l'attività di risoluzione di problemi.

Qualsiasi definizione di problema mette infatti in evidenza la presenza di un obiettivo e la mancanza di un procedimento automatico per raggiungerlo, e presuppone quindi implicitamente la necessità di prendere decisioni.»



# Una buona definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha  
una meta ma non sa come raggiungerla  
(Karl Duncker, 1945)

Esercizio - problema

# Una buona definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla  
(Karl Duncker, 1945)

Comportamento automatico

Esercizio - problema

# Una buona definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla  
(Karl Duncker, 1945)

Esercizio - problema

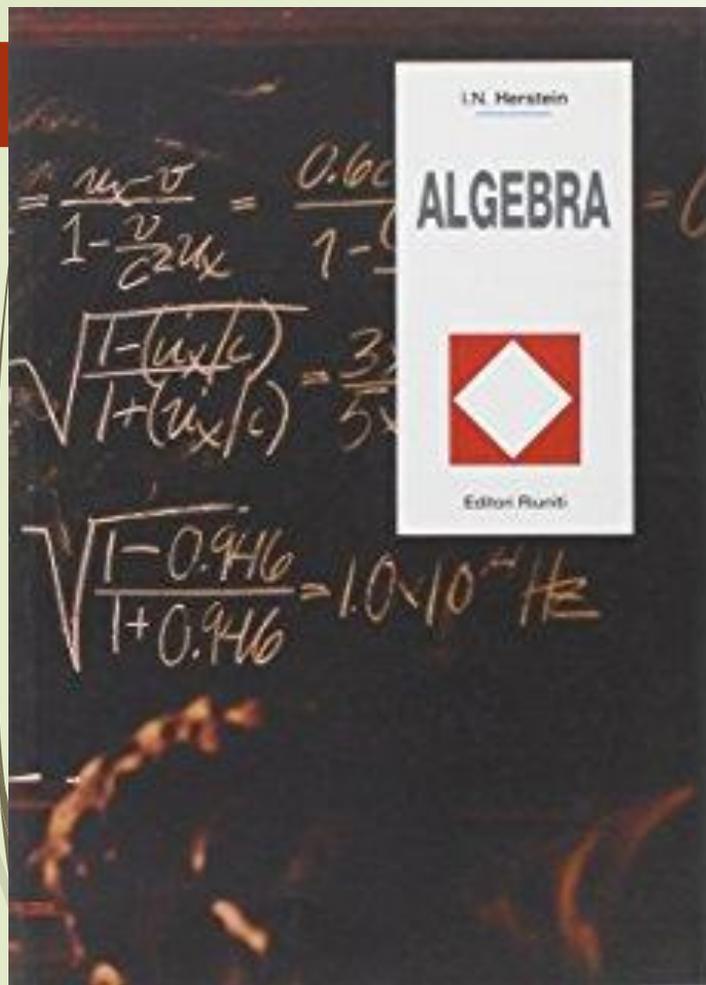
...nel problema si devono prendere  
**DECISIONI**

# Imparare a risolvere (gestire) problemi: decisioni, argomentazioni e aspetti metacognitivi



Rosetta Zan

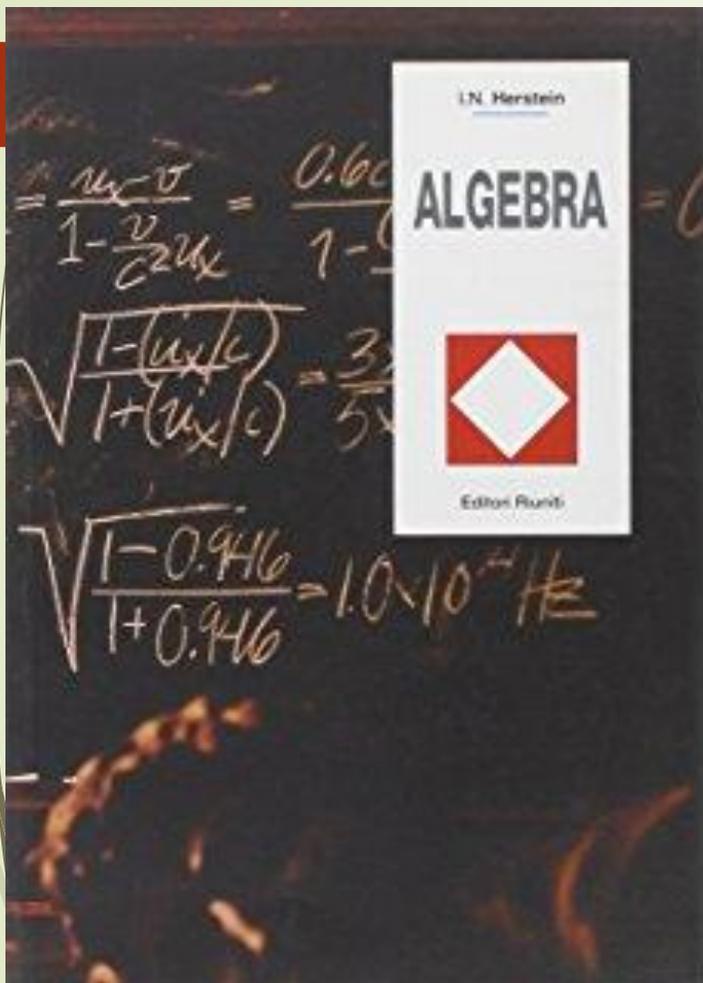
«In particolare nella prassi scolastica la tipologia dei problemi utilizzati (caratterizzati dall'avere sempre una soluzione, dalla necessità di utilizzare tutti i dati presenti e le conoscenze recentemente apprese) spesso mette in secondo piano questo ruolo delle decisioni, o lo riduce a semplice scelta fra più opzioni possibili e già disponibili.»  
(pp.134-135)



Due parole sui problemi. Ve ne sono molti, e solo uno studente eccezionale potrebbe risolverli tutti. Alcuni servono solo a completare dimostrazioni del testo, altri hanno lo scopo di illustrare i risultati ottenuti e far pratica su di essi.

Molti non vengono proposti **tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati**. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi lo affronta e nei tentativi messi in atto. Altri problemi **anticipano** questioni che saranno sviluppate dopo, con la speranza sia di gettare le basi del lavoro da fare in seguito che di rendere più naturali le idee, le definizioni e gli argomenti quando verranno introdotti. Alcuni problemi compaiono più di una volta.

(Herstein, I.N., 1988, Algebra, Editori Riuniti, p. XIV)



Problema 26 doppio asteriscato, capitolo «teoria dei gruppi»....

*«Non vi scoraggiate se non riuscite a risolvere questo problema, usando, della teoria dei gruppi, solo quanto visto fin qui.*

*Non conosco nessuno, me compreso, che abbia risolto il problema usando i limitati mezzi a disposizione a questo punto. Ma è divertente tentare. Ho ricevuto più lettere su questo problema che su qualunque altro punto del libro.»*

(Herstein, I.N., 1988, *Algebra*, Editori Riuniti, p. 51)

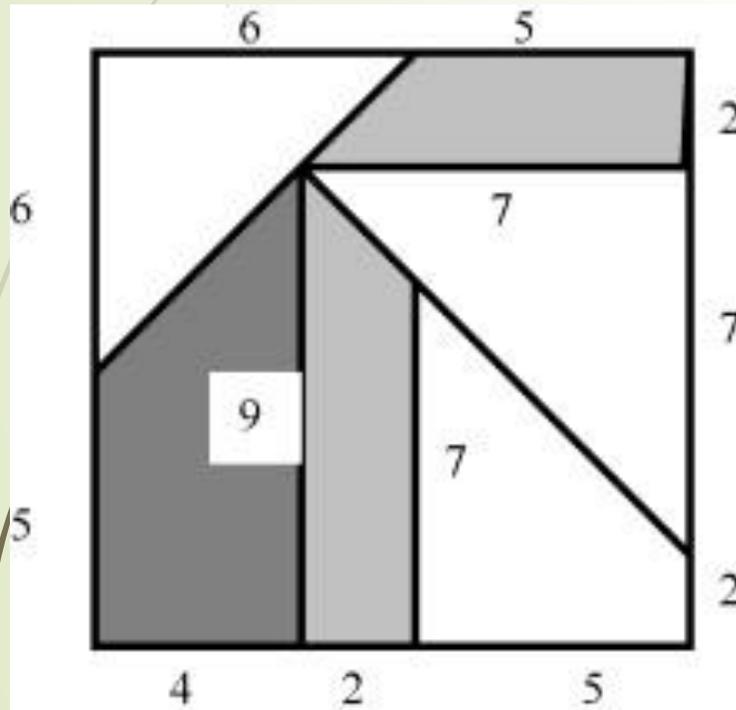
# La matematica e i problemi

Paul Richard Halmos (1916, 2006)

*In che cosa consiste veramente la matematica? Assiomi (...)? Dimostrazioni (...)? Definizioni (...)? Formule (...)? Metodi (...)? Certamente la matematica non potrebbe esistere senza questi ingredienti; essi sono tutti essenziali. Tuttavia un punto di vista sostenibile è che nessuno di essi è al centro della disciplina, che il motivo principale di esistenza per il matematico è risolvere problemi, e che, dunque, quello in cui consiste veramente la matematica sono problemi e soluzioni [Halmos, 1980, The heart of mathematics, AMM, 87, p. 519]*

# Problema del puzzle

Costruire un puzzle come questo ma più grande, in modo che il segmento che misura 4cm misuri 7cm nella riproduzione.



Ogni gruppo di 4 o 5 studenti ha un puzzle, ma ogni studente dovrà realizzare un solo pezzo (oppure una coppia di studenti realizzerà due pezzi). Una volta realizzati dovranno ricostruire la figura.

# **Relazioni problema – conoscenza: una rivoluzione copernicana**



# Teoria delle situazioni didattiche (Brousseau)

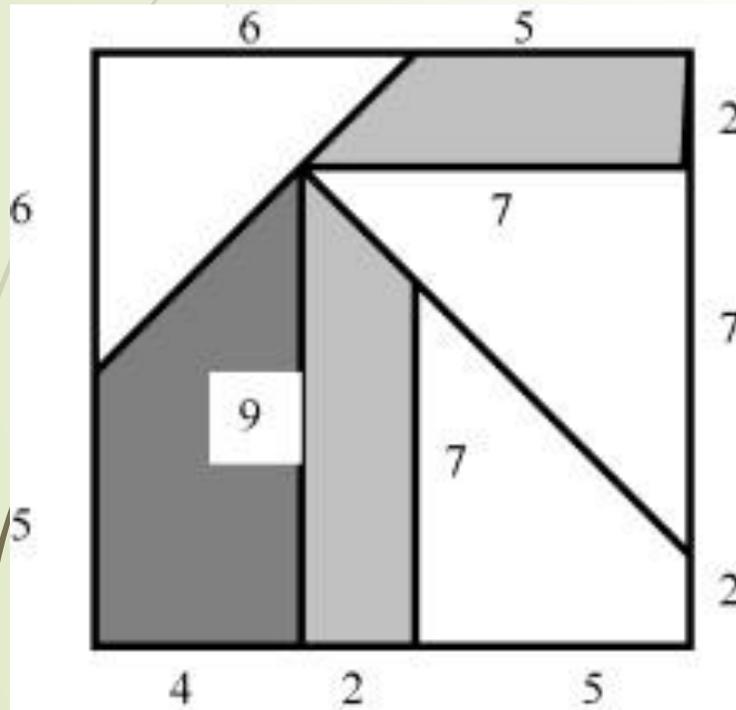
## Situazione a-didattica

- L'alunno può immaginare una risposta ma questa risposta iniziale (procedura di base) non è quella che si vuole insegnare: se la risposta fosse già conosciuta, questa non sarebbe una situazione di apprendimento;
- Questa procedura di base deve rivelarsi immediatamente insufficiente o inefficace perché l'alunno sia costretto a fare degli accomodamenti, delle modifiche del suo sistema di conoscenza
- Esiste un ambiente per la validazione

**Lo strumento più adatto alla soluzione del problema è proprio quella conoscenza che è obiettivo di insegnamento**

# Problema del puzzle

Costruire un puzzle come questo ma più grande, in modo che il segmento che misura 4cm misuri 7cm nella riproduzione.



Ogni gruppo di 4 o 5 studenti ha un puzzle, ma ogni studente dovrà realizzare un solo pezzo (oppure una coppia di studenti realizzerà due pezzi). Una volta realizzati dovranno ricostruire la figura.



# Partecipante attivo... Laboratorio

problema

argomentazione

punto di vista

laboratorio matematico

decisioni

modellizzare

# Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

<b>Ada</b>	<b>100</b>	<b>Ada+Bea</b>	<b>400</b>
<b>Bea</b>	<b>150</b>	<b>Ada+Ciro</b>	<b>300</b>
<b>Ciro</b>	<b>180</b>	<b>Bea+Ciro</b>	<b>420</b>
<b>Ada+Bea+Ciro</b>			<b>600</b>



Come possono accordarsi?

Motivare adeguatamente le vostre affermazioni



# Laboratorio di teoria dei giochi

Contesto: Piano Lauree Scientifiche 2016/2017

Laboratorio per insegnanti di scuola  
secondaria di I e II grado (4 incontri)

Attività in classe (II e III secondaria di I grado)  
condotta da insegnanti (6-8 ore)



# Teoria dei giochi



Attività didattica

Obiettivo: promuovere, mediante problemi della teoria dei giochi cooperativi, **processi decisionali**, produzione di **argomentazioni, controargomentazioni, assunzione di diversi punti di vista e la transizione tra essi, processi di modellizzazione**

# Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo



Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

<b>Ada</b>	<b>100</b>	<b>Ada+Bea</b>	<b>400</b>
<b>Bea</b>	<b>150</b>	<b>Ada+Ciro</b>	<b>300</b>
<b>Ciro</b>	<b>180</b>	<b>Bea+Ciro</b>	<b>420</b>
<b>Ada+Bea+Ciro</b>			<b>600</b>



Mettendovi nei panni dei tre musicisti; provate a discutere l'offerta e spiegate in che modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni!!



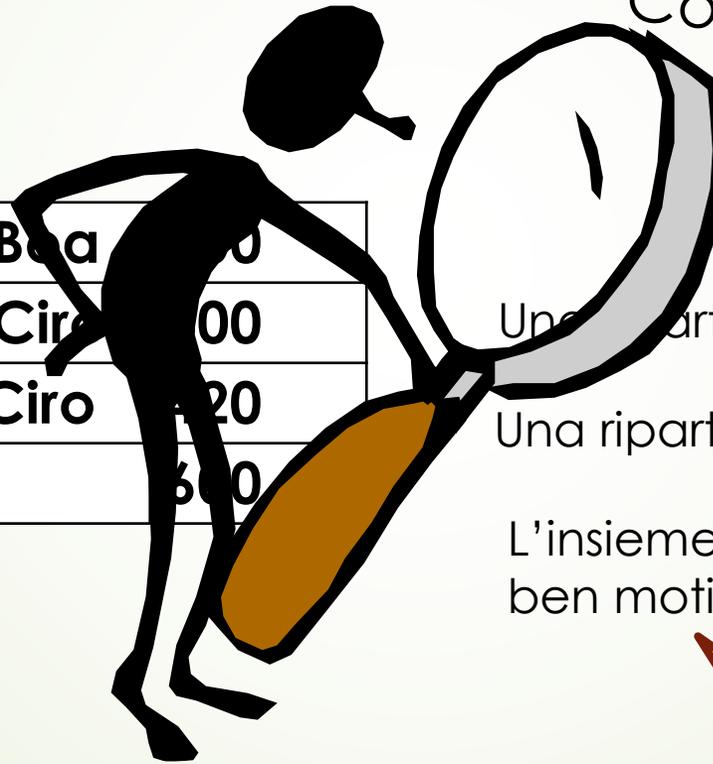
# Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

*Cos'è una soluzione?*

<b>Ada</b>	<b>100</b>	<b>Ada+Bea</b>	<b>400</b>
<b>Bea</b>	<b>150</b>	<b>Ada+Ciro</b>	<b>300</b>
<b>Ciro</b>	<b>180</b>	<b>Bea+Ciro</b>	<b>420</b>
<b>Ada+Bea+Ciro</b>			<b>600</b>

# Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

<b>Ada</b>	<b>100</b>	<b>Ada+Bea</b>	<b>250</b>
<b>Bea</b>	<b>150</b>	<b>Ada+Ciro</b>	<b>300</b>
<b>Ciro</b>	<b>180</b>	<b>Bea+Ciro</b>	<b>330</b>
<b>Ada+Bea+Ciro</b>		<b>600</b>	



*Cos'è una soluzione?*

Una ripartizione del guadagno

Una ripartizione del guadagno ben motivata

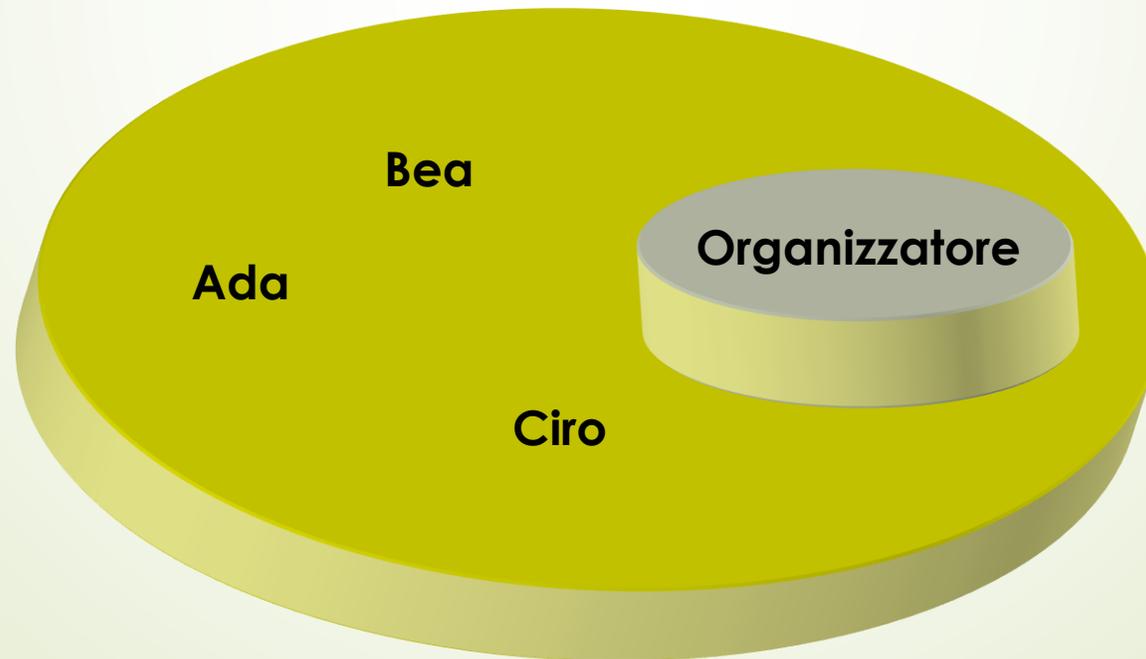
L'insieme delle ripartizioni del guadagno ben motivate

SU  
cosa?



Una ripartizione sarà motivata in base alle aspettative, ai vincoli, alle richieste dei musicisti e dell'organizzatore dell'evento....

*Cos'è una soluzione?*



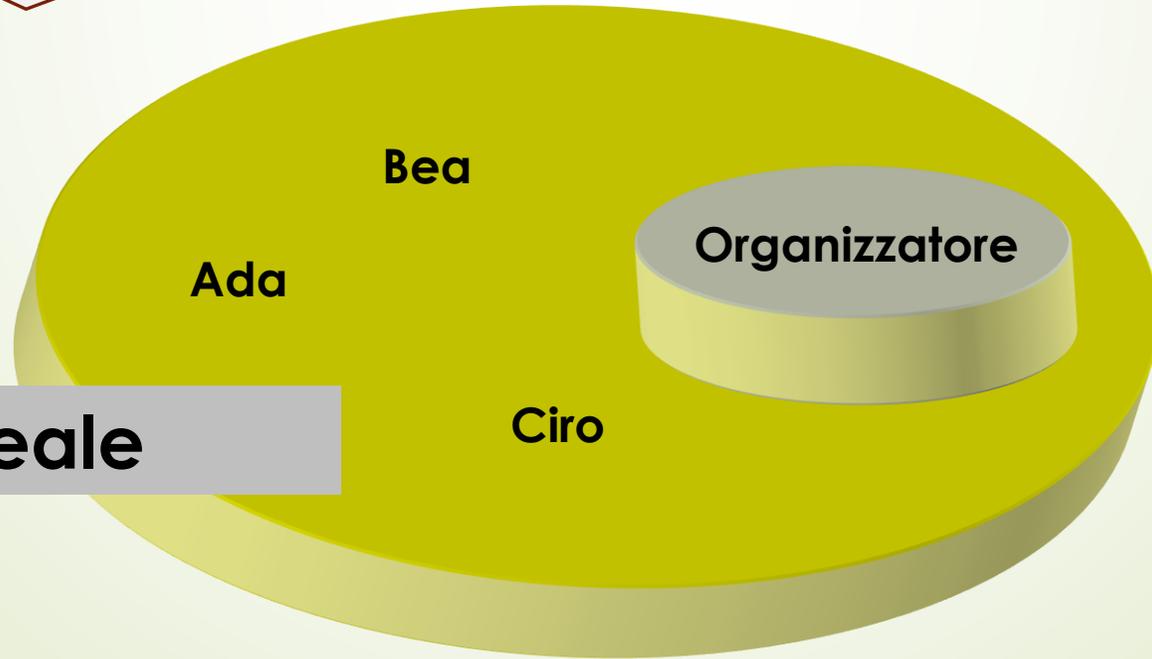
# Modello

Una ripartizione sarà motivata in base alle aspettative, ai vincoli alle richieste dei musicisti dell'organizzazione... evento....

Decisioni/Argomentazioni

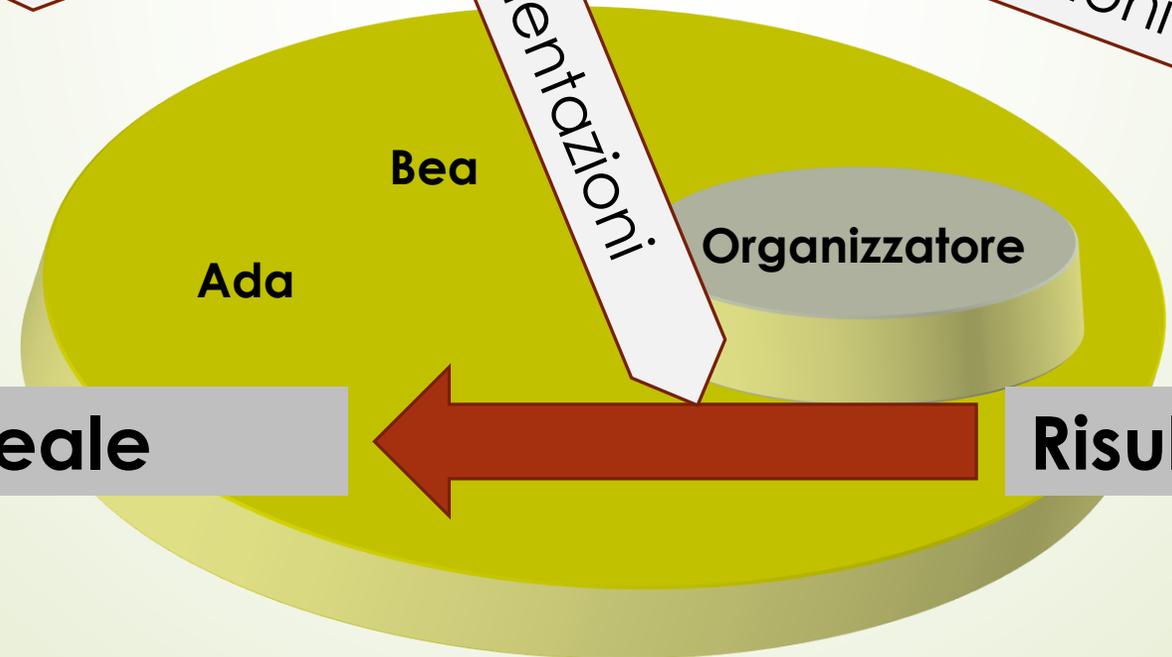
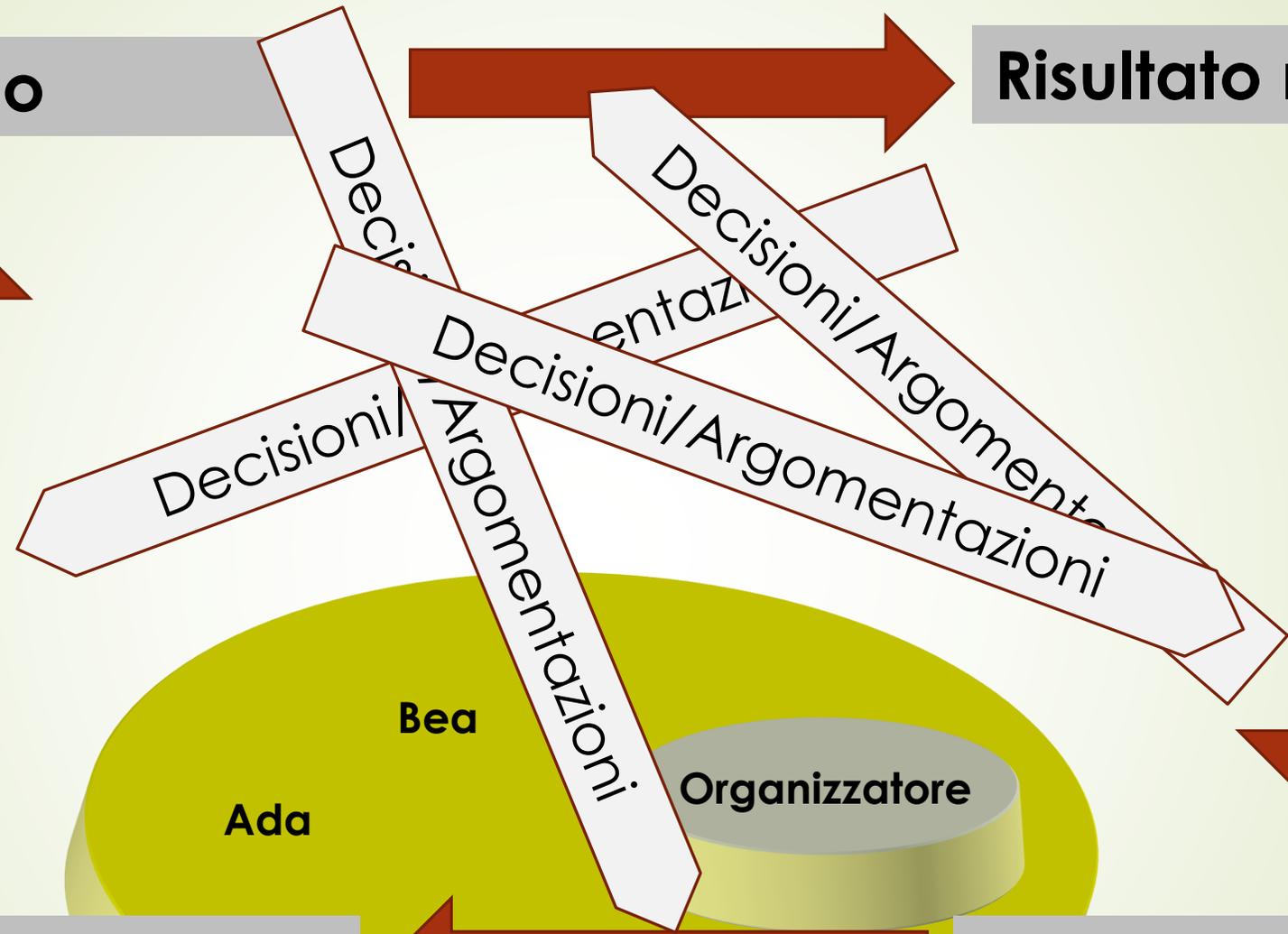
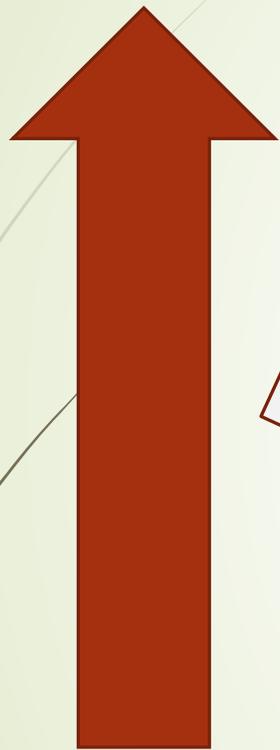
Cos'è una soluzione?

# Situazione reale



**Modello**

**Risultato matematico**

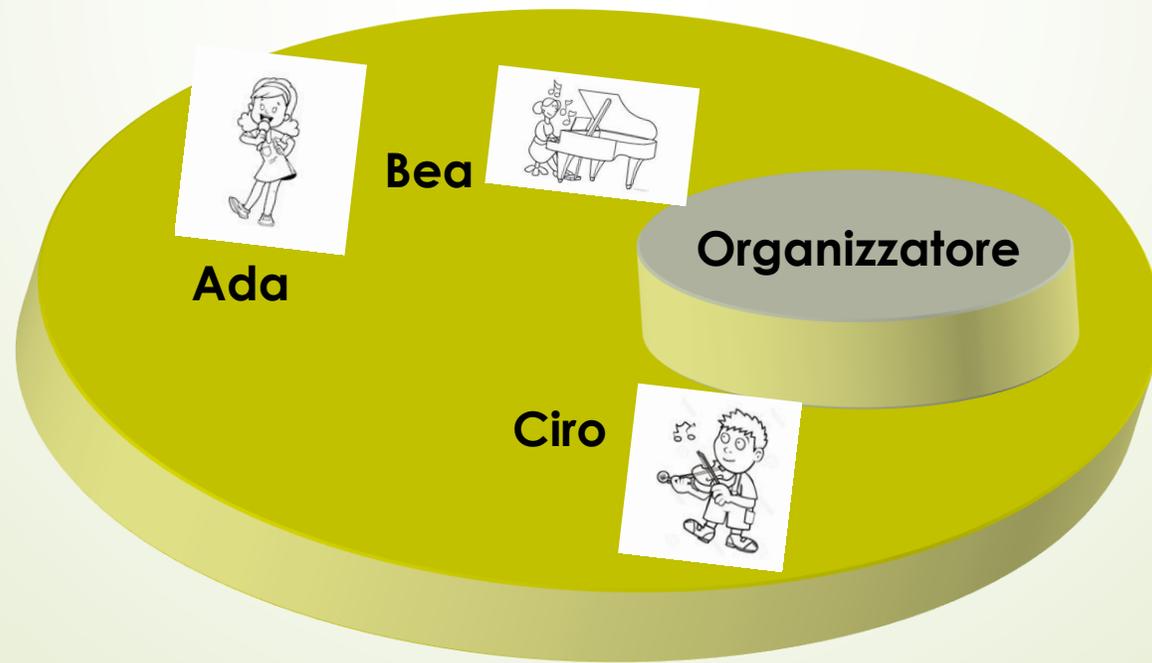


**Situazione reale**

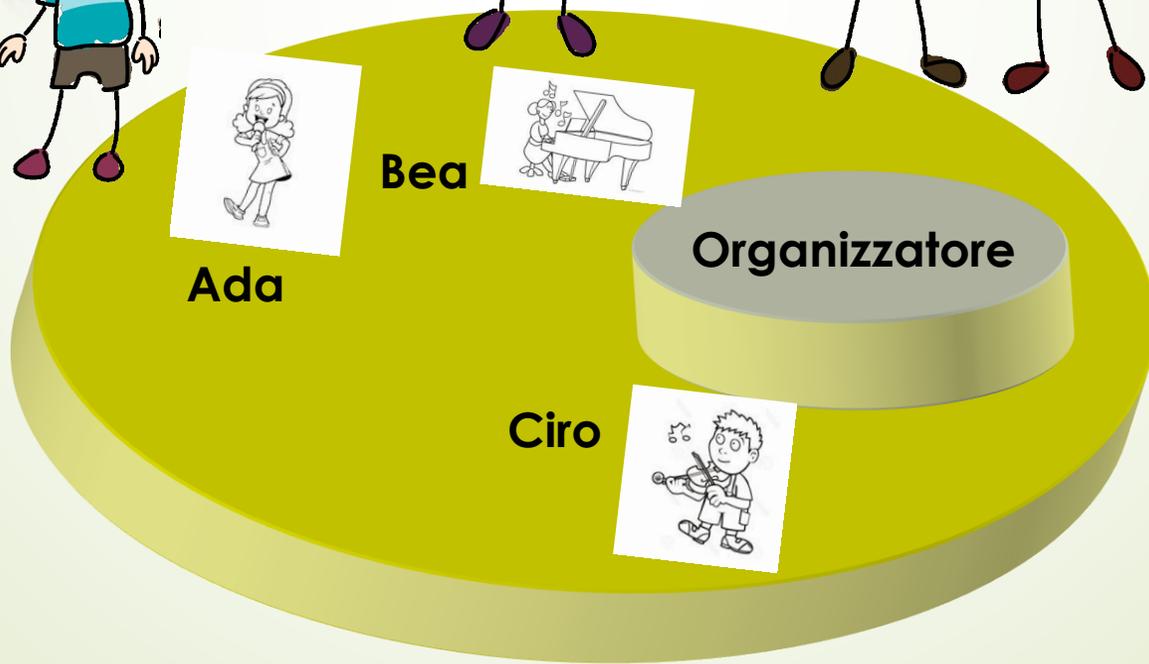
**Risultato nel contesto**



# Punti di vista



# Punti di vista





# Laboratorio di teoria dei giochi

I problemi posti:

- vicini a situazioni reali, in cui gli alunni possono immedesimarsi
- non sono necessarie conoscenze matematiche particolari per formulare una proposta e per argomentarla, né il problema suggerisce l'uso di particolari strumenti matematici. Questo permette di focalizzare l'attenzione sulla scelta degli strumenti, che è a carico degli alunni ed è loro richiesto di giustificare
- non c'è un criterio o una procedura per determinare una soluzione: diverse risposte sono possibili ma nessuna può ambire ad essere LA soluzione. Lo stesso significato di "soluzione" è in discussione

# Laboratorio di teoria dei giochi

Andare in laboratorio è - principalmente, ma non solo - una metafora. In questo caso è il **luogo** e il **momento** in cui:

- prendere decisioni, averne consapevolezza e renderle esplicite;
- produrre argomentazioni a sostegno delle scelte effettuate;
- cambiare punto di vista e comprendere le argomentazioni altrui al fine di controargomentare e di arrivare ad una proposta condivisa;
- costruire un modello matematico, derivare conseguenze, valutare l'adeguatezza delle soluzioni fornite dal modello e validare il modello stesso



# Laboratorio di teoria dei giochi

- Lavoro di gruppo
  - Presentazione del lavoro di gruppo da parte di un relatore
  - Discussione collettiva
- 

# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	<b>Ada</b>	<b>Bea</b>	<b>Ciro</b>
<b>Equamente</b>	200	200	200

Se sono  
amici



Perché  $600:3=200$   
che è di più del  
guadagno andando  
da singoli



# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
Frazioni	$600 \cdot 100 / 430$	$600 \cdot 150 / 430$	$600 \cdot 180 / 430$

Ciro  
guadagna di  
più degli altri  
cioè vale di  
più degli altri

Quindi potrebbe dire  
perché dobbiamo  
dividere in parti uguali  
se io da solo valgo di  
più, voglio di più



# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
Frazioni	$600 \cdot 100 / 430$	$600 \cdot 150 / 430$	$600 \cdot 180 / 430$



Abbiamo [...] due proposte...  
c'è n'è una meglio dell'altra?



Dipende da che parte si guarda



# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
<b>Surplus</b>	100+56,6	150+56,6	180+56,6

Siamo riusciti  
mantenendo le cifre di  
quello che guadagna di  
più e quello che  
guadagna di meno,  
siamo riusciti a dividerlo  
equamente



Perché tutti in  
questo modo  
guadagnano  
56,6 euro in più



**Modello**

**Risultato matematico**

Principio di monotonia

**Lunga e accesa discussione sulla  
divisione del guadagno basata sul  
mantenimento delle relazioni d'ordine**

**Situazione reale**

Bea

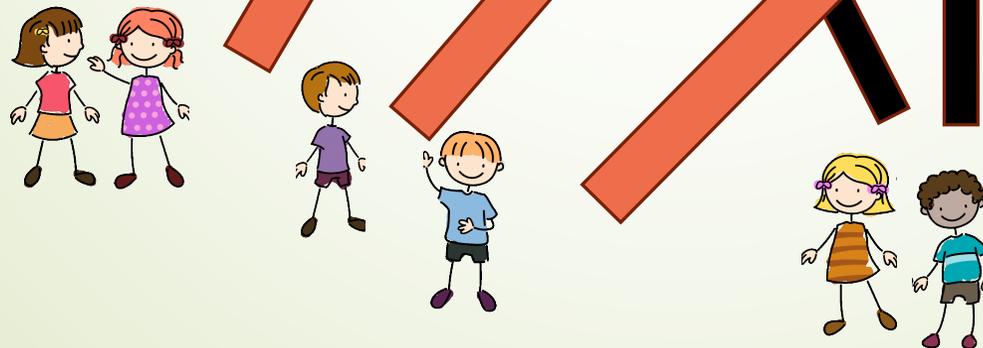
Ada

Ciro

# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
Surplus	$100+56,6$	$150+56,6$	$180+56,6$



# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	<b>Ada</b>	<b>Bea</b>	<b>Ciro</b>
<b>Surplus</b>	$100+56,6$	$150+56,6$	$180+56,6$
<b>Surplus a Ciro</b>	$100+50$	$150+50$	$180+70$



# Prime proposte ..... Tutte corrette!

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	<b>Ada</b>	<b>Bea</b>	<b>Ciro</b>
<b>Equamente</b>	200	200	200
<b>Frazioni</b>	140	209	251
<b>Surplus</b>	156,6	206,6	236,6
<b>Surplus a Ciro</b>	150	200	250



**Modello**

**Risultato matematico**

Le proposte degli studenti si basano su modelli moltiplicativi e additivi, volti a declinare su un piano quantitativo certi principi.

**Situazione reale**

**Risultato nel contesto**

Bea

Ada

Organizzatore

**Modello**

**Risultato matematico**

**Le argomentazioni, spontaneamente prodotte dagli studenti, si articolano su più livelli, andando a motivare le diverse decisioni: la scelta dei vincoli più opportuni (discussione sui “principi”); e la scelta delle modalità più efficaci per soddisfarli, sia a priori sia a posteriori, con la valutazione del raggiungimento degli obiettivi, ossia attraverso una vera e propria validazione della soluzione sulla base dei principi assunti.**

**Situazione reale**

**Risultato nel contesto**

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

**Gioco dei punti di vista**

**C'è qualcuno che vuole fare il *Ciro* della situazione?**



Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

**Gioco dei punti di vista**

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

**Propongo a Bea di venire con me  
così guadagna di più**



**Una possibilità sarebbe stata:**

**Ciro: 190**

**Bea: 230**

**Ma propone:**

**Ciro: 225**

**Bea: 195**

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

**Gioco dei punti di vista**

**Propongo a Bea di venire con me  
così guadagna di più**



Una possibilità sarebbe stata:

Ciro: 190

Bea: 230

Ma propone:

Ciro: 225

Bea: 195

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

**Gioco dei punti di vista**

Bea non ci sta



Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

**Gioco dei punti di vista**

Ada+Bea		Ciro
100+75	150+75	180

**Recitando la parte di *Ciro*, gli studenti realizzano che, se *Ada* e *Bea* decidono di suonare insieme e di dividersi 400 euro in parti uguali, *Ciro* può proporre a *Bea* di suonare con lui prendendosi 190 euro (dei 420) e lasciandone 230 a *Bea*. Per entrambi sarebbe un vantaggio**





**Gli alunni immaginano una scenetta in cui impersonano via via personaggi diversi.**

**Inizia a farsi strada un nuovo principio: ogni musicista sceglie l'opzione che gli permette di ottenere il guadagno maggiore.**

**Inizialmente, i due principi (monotonia, vantaggio) convivono o entrano in conflitto. Piano piano il principio del vantaggio prende il sopravvento.**

**Modello**

Principio del vantaggio

Devono avere tutti di più di quanto andrebbero da soli [...] però la differenza tra i guadagni deve essere sempre la stessa

Principio di monotonia

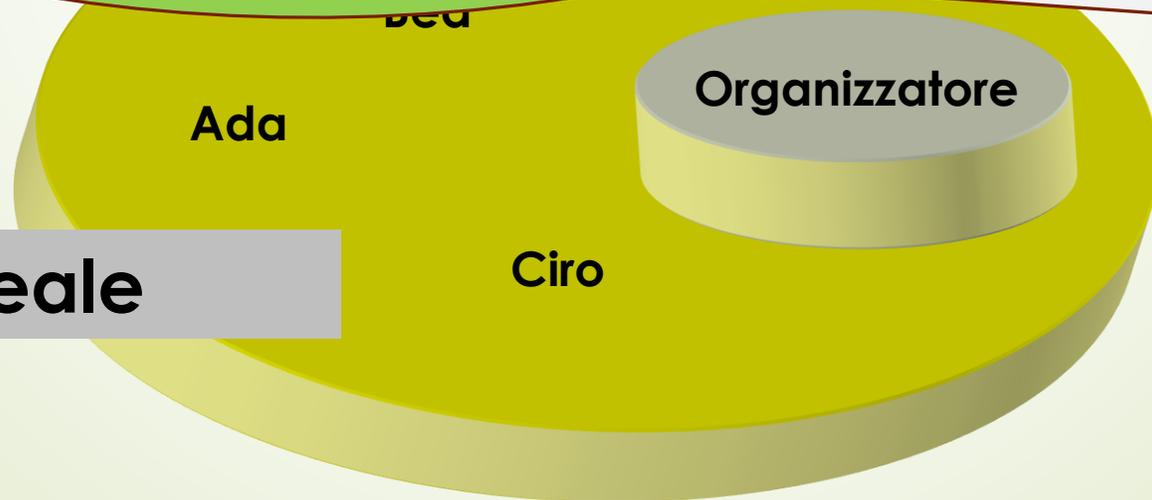


**Situazione reale**

Ada

Ciro

Organizzatore



# Modello

però Ada e Bea guadagnano di meno e possono non starci

Principio del vantaggio

SCONTRO TRA PUNTI DI VISTA

Principio di monotonia

Ada

si, ma loro valgono di meno rispetto a Ciro



Si... e rec

**Modello**

Una contrattazione non può essere accettata se uno dei tre musicisti può fare una proposta più vantaggiosa per sé e per un altro

**Situazione reale**

Ada

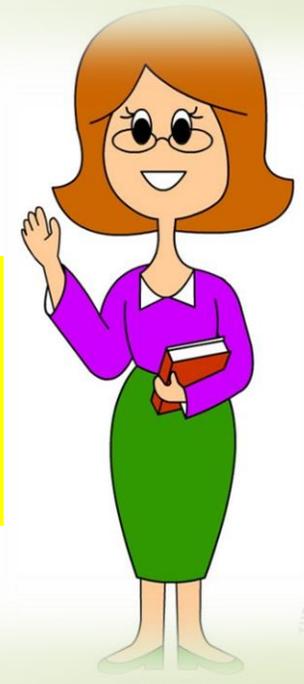
Bea

Organizzatore

Ciro

**Le prime proposte iniziano ad essere messe in crisi nel momento in cui, sempre più spesso, gli studenti assumono il punto di vista di uno dei musicisti, esplicitando i suoi obiettivi e simulando un suo comportamento, e riuscendo allo stesso tempo a cambiare punto di vista**

**RUOLO DELL'INSEGNANTE: invitare gli alunni ad impersonare i diversi musicisti, promuovendo in questo modo l'assunzione di diversi punti di vista**



Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	<b>Ada</b>	<b>Bea</b>	<b>Ciro</b>
<b>Equamente</b>	200	200	200
<b>Frazioni</b>	140	209	251
<b>Surplus</b>	156,6	206,6	236,6
<b>Surplus a Giro</b>	150	200	250



Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	<b>Ada</b>	<b>Bea</b>	<b>Ciro</b>
<b>Frazioni</b>	140	209	251



Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
<b>Frazioni</b>	140	209	251
	<b>170</b>	<b>230</b>	

**Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.**



Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
<b>Frazioni</b>	140	209	251
	<b>170</b>	<b>230</b>	180

**Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.**

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
<b>Frazioni</b>	140	209	251
	<b>170</b>	<b>230</b>	180
		<b>235</b>	<b>185</b>

**Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.**

**A questo punto, però, Ciro potrebbe proporre a Bea di suonare con lui dividendo i 420 euro (235 a Bea e 185 per sé) ....**

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

	Ada	Bea	Ciro
<b>Frazioni</b>	140	209	251
	<b>170</b>	<b>230</b>	180
	100	<b>235</b>	<b>185</b>

**Ada può proporre a Bea di suonare solo con lei e di dividere i 400 euro tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea.**

**A questo punto, però, Ciro potrebbe proporre a Bea di suonare con lui dividendo i 420 euro (235 a Bea e 185 per sé) ....**

# Il modello

$x(A)$ ,  $x(B)$ ,  $x(C)$ : ricavi rispettivamente di Ada, Bea e Ciro quando suonano insieme

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

$x(A) \geq 100$	$x(A)+x(B) \geq 400$	$x(A)+x(B)+x(C)=600$
$x(B) \geq 150$	$x(A)+x(C) \geq 300$	
$x(C) \geq 180$	$x(B)+x(C) \geq 420$	

ESEMPI

<b>Ada</b>	<b>Bea</b>	<b>Ciro</b>
170	240	190
115	300	185
.....	....	....
....	....	...

# Problema dei musicisti

La matematica offre diversi strumenti per rispondere

La matematica ha dei limiti! Possono avere un peso anche questioni non matematiche (o non modellizzabili, o non facilmente modellizzabili)

Non c'è un'unica soluzione Lo stesso significato di «soluzione» è in discussione

Indicazioni nazionali per il primo ciclo  
Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il processo di un pensiero razionale gli consente di **affrontare problemi e situazioni** sulla base di elementi certi e di avere **consapevolezza dei limiti** delle affermazioni che riguardano questioni complesse che **non si prestano a spiegazioni univoche**.



# Pensiero matematico

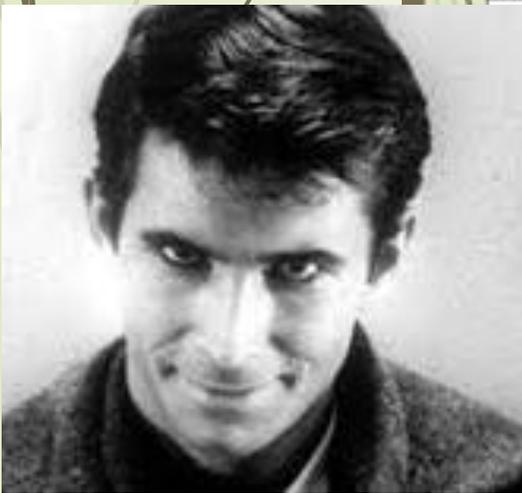
La discussione ha permesso l'emergere delle potenzialità e dei limiti delle diverse proposte e potenzialità e limiti dei modelli presentati sono state discusse e argomentate. La matematica, di base (certamente), è stata utilizzata come strumento per esplorare una situazione, modellizzarla, e ricavare delle possibili proposte di soluzione. Il pensiero matematico che soggiace ai processi di elaborazione dei modelli e della loro validazione non è (certamente) elementare, ma è possibile promuoverlo a tutti i livelli scolari.



## Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

<b>Ada</b>	<b>100</b>	<b>Ada+Bea</b>	<b>400</b>
<b>Bea</b>	<b>150</b>	<b>Ada+Ciro</b>	<b>300</b>
<b>Ciro</b>	<b>180</b>	<b>Bea+Ciro</b>	<b>420</b>
<b>Ada+Bea+Ciro</b>			<b>600</b>



Mettendovi nei panni dei tre musicisti; provate a discutere l'offerta e spiegate in modo che Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni!!



# Il Problema dei musicanti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

Ada	100	Ada+Bea	400
Bea	150	Ada+Ciro	300
Ciro	180	Bea+Ciro	420
Ada+Bea+Ciro			600

**Secondo te ad Ada conviene suonare da sola o in coppia con Bea? O in coppia con Ciro? Perché?**

**Accetterebbe Bea di suonare in trio e guadagnare 140 euro? Perché?**

**Una soluzione potrebbe essere dividere in tre parti uguali. Bea e Ciro accetterebbero? Perché?**

**Una soluzione potrebbe essere quella di dividere il guadagno in modo proporzionale al cache individuale. Sarebbe conveniente per tutti? Perché?**

**Eccetera.....**

# Il Problema trovare



sti: Ada (cantante), ... ti per  
una festa. Potranno ... ompense  
l'organizzatore dell'evento son...

**Abbiamo accompagnato  
lo studente passo-passo**

Ada		
Ada+Bea		



**Dove?**

Secondo te ad A

**Perché?**

O in coppia con Ciro? Perché?

Accetterebbe Bea di suonare

Perché?

Una soluzione pot

**Qual era l'obiettivo?**

Accetterebbero? Perché?

Una soluzione potrebbe essere quella di dividere il guadagno in modo proporzionale al cache individuale. Sarebbe conveniente per tutti? Perché?

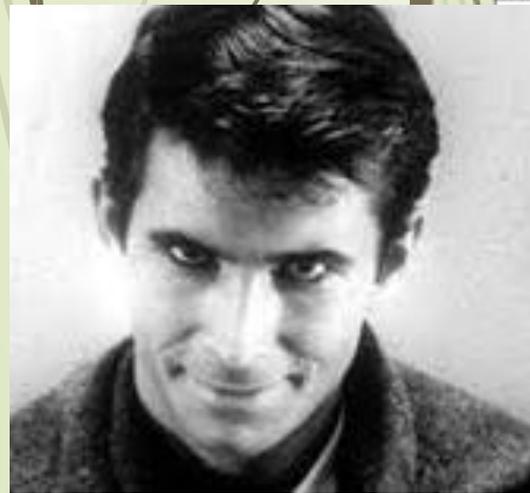
Eccetera.....



## Il Problema dei musicisti: trovare un buon accordo

Tre musicisti: Ada (cantante), Bea (pianista) e Ciro (violinista) vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi: da soli, in coppia o in tre. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti:

<b>Ada</b>	<b>100</b>	<b>Ada+Bea</b>	<b>400</b>
<b>Bea</b>	<b>150</b>	<b>Ada+Ciro</b>	<b>300</b>
<b>Ciro</b>	<b>180</b>	<b>Bea+Ciro</b>	<b>420</b>
<b>Ada+Bea+Ciro</b>			<b>600</b>



Mettendovi nei panni dei tre musicisti; provate a discutere l'offerta e spiegate in modo convincente a Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni!!





# Qualche esempio



# Problema dei voti

Due classi di una scuola chiedono al Prof. Smith (loro insegnante di inglese) di accompagnarli in gita. Il professore dice che accompagnerà la classe che avrà i migliori risultati nella sua materia. In tabella sono riportati i voti degli studenti al termine di I quadrimestre. Come può decidere quale classe portare in gita?

Voto	Numero studenti IIA	Numero studenti IIB
3	0	1
4	2	1
5	3	3
6	5	4
7	6	6
8	4	0
9	1	0
10	0	3

## Problema dei voti

Due classi di una scuola chiedono al Prof. Smith (loro insegnante di inglese) di accompagnarli in gita. Il professore dice che accompagnerà la classe che avrà i migliori risultati nella sua materia. In tabella sono riportati i voti degli studenti al termine di I quadrimestre. Come può decidere quale classe portare in gita?

Voto	Numero studenti IIA	Numero studenti IIB
3	0	1
4	2	1
	3	3
	5	4
	6	6
	4	0
	1	0
	0	3



# Problema dei voti

Due classi di una scuola chiedono al Prof. Smith (loro insegnante di inglese) di accompagnarli in gita. Il professore dice che accompagnerà la classe che avrà i migliori risultati nella sua materia. In tabella sono riportati i voti degli studenti al termine di I quadrimestre.

Voto	Numero studenti IIA	Numero studenti IIB
3	0	1
4	2	1
5	3	3
6	5	4
7	6	6
8	4	0
9	1	0
10	0	3

- 1) **Calcola la media dei voti delle due classi. Quale è la classe con la media più alta?**
- 2) **Calcola la media pesata.... Quali delle due medie prenderesti come indicatore dei risultati della classe?**
- 3) **Il Prof Smith non è soddisfatto del risultato, perché a parte tre studenti eccellenti della IIB nessun altro ha voti sopra al 7. Quale indice statistico può considerare?**

# Problema dei voti

Abbiamo accompagnato lo studente per piccoli passi.....

Dove?

Perché?

8	4	0
9	1	0
10	0	3

ei voti delle due  
asse con la media

esata.... Quali delle  
due medie prenderesti come

i della classe?  
ddisfatto del

risultato, perché a parte tre studenti

nessun altro ha voti  
lice statistico può

# Problema della divisione della posta

Vedi <http://www.matematica.it/paola/>

In una taverna del piccolo paese di Matelandia, Ariele e Calibano giocano a testa e croce con una moneta. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l'esito. Vince tutta la posta di 24 denari (12 dei quali sono di Ariele e 12 di Calibano) chi per primo totalizza 6 punti. I giochi d'azzardo sono però proibiti a Matelandia e il gendarme Prospero, venuto a conoscenza della partita, si avvia verso la taverna per arrestare Ariele e Calibano. Informati del pericolo, i due giocatori interrompono la partita sul 5 a 3 per Ariele e fuggono, ciascuno con i 12 denari messi per formare la posta, concordando di ritrovarsi il giorno dopo senza finire la partita ma solo per dividere la posta in gioco.

Come dovrebbero, Ariele e Calibano, dividersi i 24 denari in modo tale da tenere conto del fatto che avevano contribuito alla posta con 12 denari ciascuno e che quando la partita è stata interrotta il punteggio era 5 a 3 per Ariele?



**L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.**

La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività.

**(UMI-CIIM, MATEMATICA 2003)**

# Esempio: una attività

**PRODUZ/TRASF. DI ESEMPI**



**CONGETTURE  
ARGOMENTAZIONI**

- Estensione dello spazio di esempi (familiarità con gli oggetti)
- Produzione e trasformazione di oggetti matematici (consapevolezza)
- Produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni



# IL CONTESTO

Due classi quinte di un Liceo Scientifico tradizionale

Attività svolta all'interno di una normale programmazione didattica

Periodo: marzo

Precedentemente trattati in modo tradizionale: concetto di funzione, dominio, limiti e derivabilità

## Verifica iniziale

- Fai un esempio di funzione  $f$  con dominio  $\mathbb{R}$  e con 2 punti di non continuità.
- Fai un esempio di una funzione  $f$  con dominio  $\mathbb{R}$  e con 2 punti di non derivabilità.
- Fai un esempio di funzione  $f$  definita su  $\mathbb{R}$  non continua nel punto  $x=5$ , tale che  $f(5)=2$  e le derivate destro e sinistro per  $x$  che tende a 5 siano uguali.

**DISASTRO !!**

# L'attività

Congettare, Argomentare, Dimostrare,  
Costruire e trasformare oggetti matematici

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione di esempi
- Riflessione sui processi

## Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)

Fai l'esempio, se possibile, di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica per ognuno dei seguenti domini:

$$(-\infty; -1) \cup (5; +\infty) ; [-1, 5]; (-1, 5); [-1, 5); (-1, 5]$$

## Produzione di esempi non prototipici

Fai l'esempio di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica, **i più strani possibile**, per ognuno dei domini seguenti

$[-1,5]$ ;  $(-1,5)$ ;  $[-1,5)$ ;  $(-1,5]$ ;  $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

## Produzione di esempi non prototipici

### Produzione di “controesempi” a potenziali “enunciati impliciti”

Se possibile fai due esempi di funzione continua su  $[-3,4)$  senza massimo, almeno una anche limitata

Se possibile disegna 2 grafici di una funzione limitata inferiormente ma non superiormente, con dominio  $[0, +\infty)$ , senza asintoti verticali e per la quale non esiste il limite a  $+\infty$ .



## Produzione di esempi impossibili

Se possibile costruisci due esempi di funzione continua in  $[4,6]$  senza minimo.



## Trasformazione di esempi

1) Fai 2 esempi (in forma grafica e algebrica) di funzioni periodiche che verificano le seguenti proprietà:

- Non limitata;
- Limitata;
- Con periodo  $5\pi$ .

2) Modifica le funzioni del punto 1) affinché diventino:

- Periodica di periodo  $8\pi$ ;
- Non periodica.



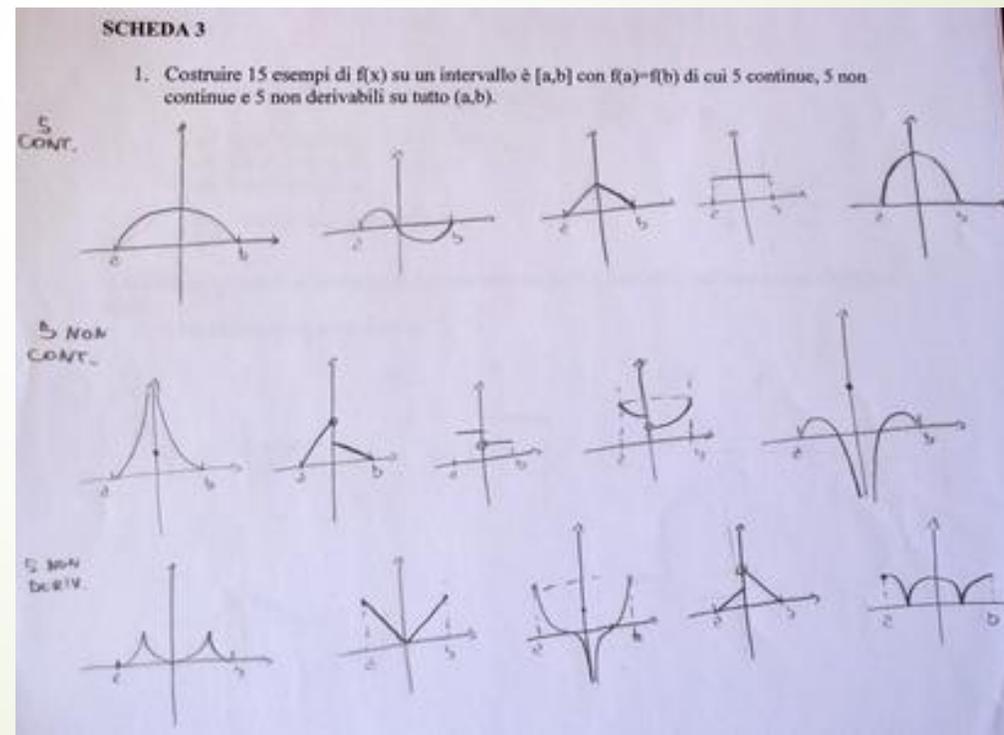
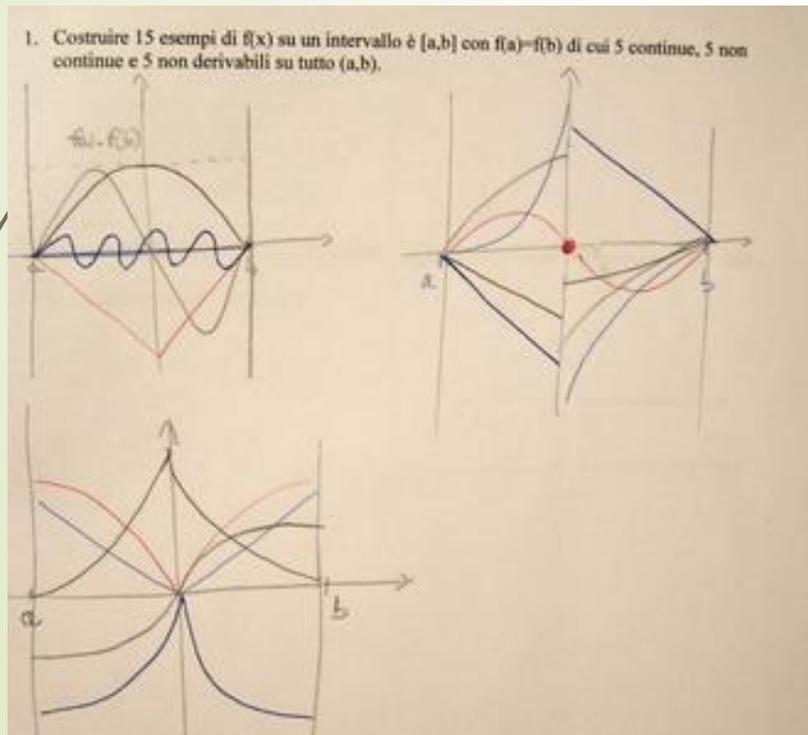
## Riflessione sui processi

(dopo alcuni problemi)

Descrivere il procedimento, spiegare ad uno studente di un'altra quinta liceo scientifico come hai fatto a trovare gli esempi di richiesti.....

# Dai processi di produzione di esempi alla congettura e argomentazione

Costruire 15 funzioni definite su un intervallo  $[a,b]$  tali che  $f(a)=f(b)$ , di cui 5 continue, 5 non continue e 5 non derivabili.



## Dai processi di produzione di esempi alla congettura e argomentazione

Fai un esempio di  $f(x)$  definita su  $[a,b]$  con  $f(a)=f(b)$  e:

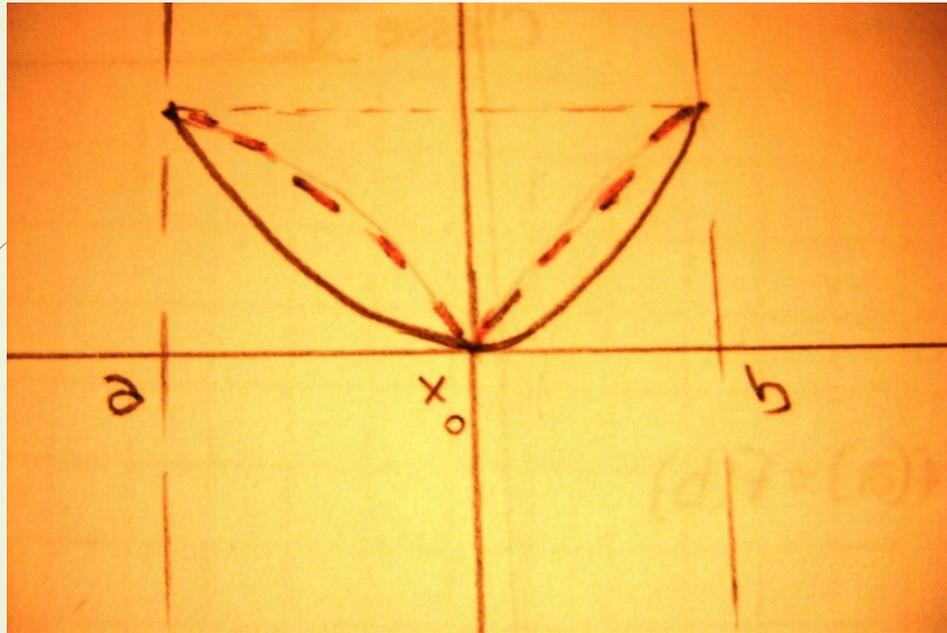
- a)  $f'(x) > 0$  su  $(a,b)$ ;
- b)  $f'(x) = 0$  su  $(a,b)$ ;
- c)  $f'(x) < 0$  su  $(a,b)$ ;
- d)  $f'(x) > 0$  su  $(a, (b+a)/2)$ .



Costruisci, se possibile, una funzione  $f$  continua su  $[a,b]$  e derivabile sull'aperto  $(a,b)$  tale che  $f(a)=f(b)$  e  $f'(x)$  sia diversa da zero per ogni  $x$ .

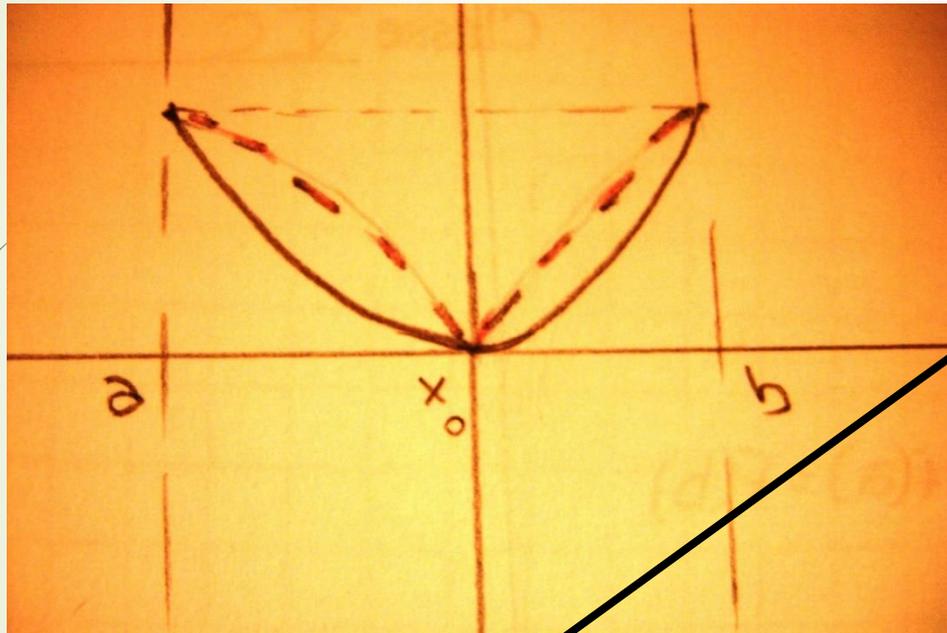


Costruisci, se possibile, una funzione  $f$  continua su  $[a,b]$  e derivabile sull'aperto  $(a,b)$  tale che  $f(a)=f(b)$  e  $f'(x)$  sia diversa da zero per ogni  $x$ .



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi né minimi relativi ma deve avere  $f(a)=f(b)$ . Non può essere un segmento parallelo all'asse  $x$  perché la derivata sarebbe 0.*

Costruisci, se possibile, una funzione  $f$  continua su  $[a,b]$  e derivabile sull'aperto  $(a,b)$  tale che  $f(a)=f(b)$  e  $f'(x)$  sia diversa da zero per ogni  $x$ .



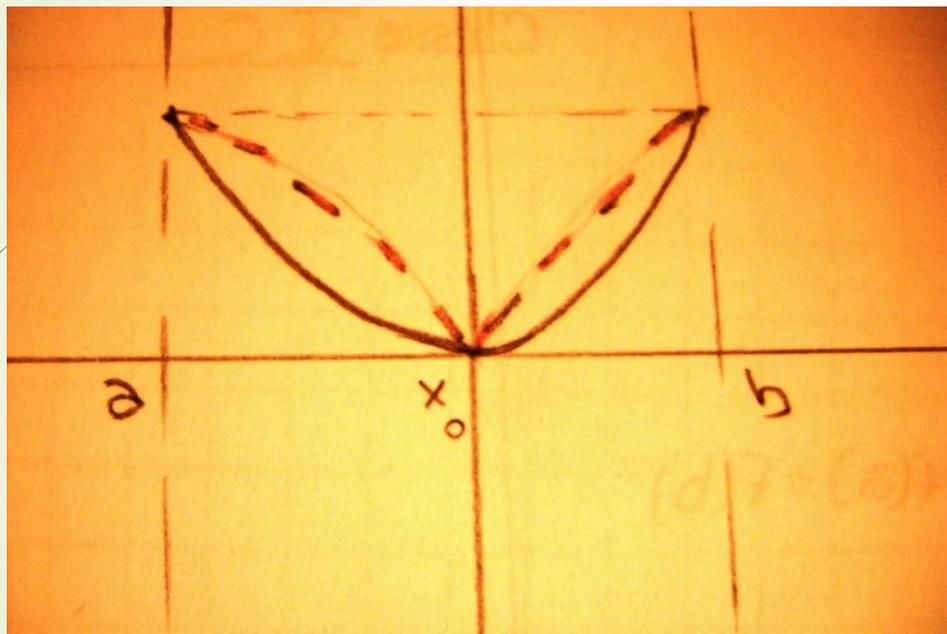
Non è possibile  
costruire  
l'esempio

Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi né minimi relativi ma deve avere  $f(a)=f(b)$ . Non può essere un segmento parallelo all'asse  $x$  perché la derivata sarebbe 0.*

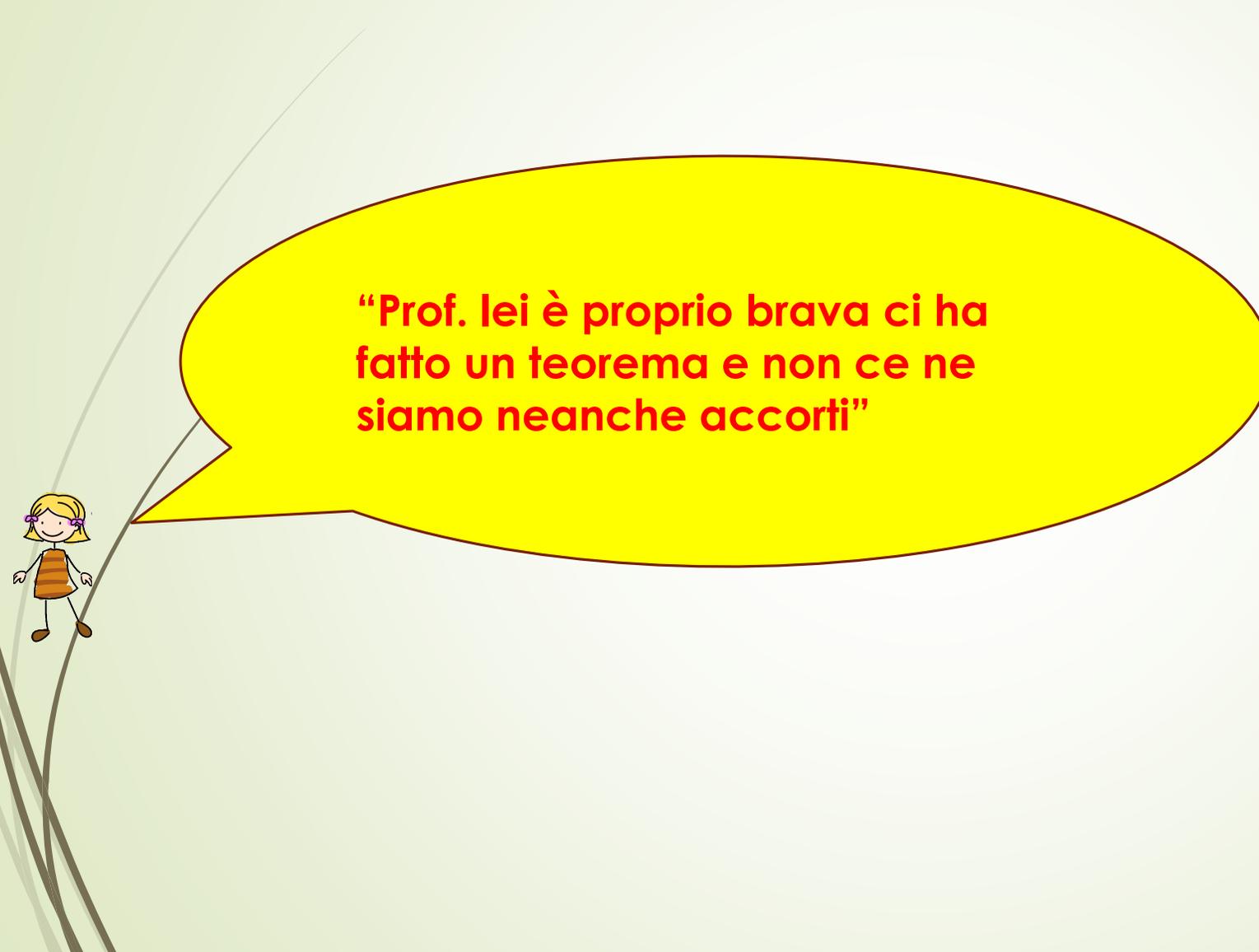
## Dimostrazione classica:

$f$  costante

$f$  non costante quindi max o min interno ad  $[a,b]$



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi né minimi relativi ma deve avere  $f(a) = f(b)$ . Non può essere un segmento parallelo all'asse  $x$  perché la derivata sarebbe 0.*



**“Prof. lei è proprio brava ci ha fatto un teorema e non ce ne siamo neanche accorti”**

- 
- Promozione di processi di produzione di esempi
  - Produzione di una congettura sulla base delle potenziali modalità di costruzione degli esempi
  - Argomentazione del “non si può”



Accettazione dell'enunciato, della sua generalità,  
della necessità delle ipotesi

# L'attività di risolvere problemi

George Polya:

«Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».

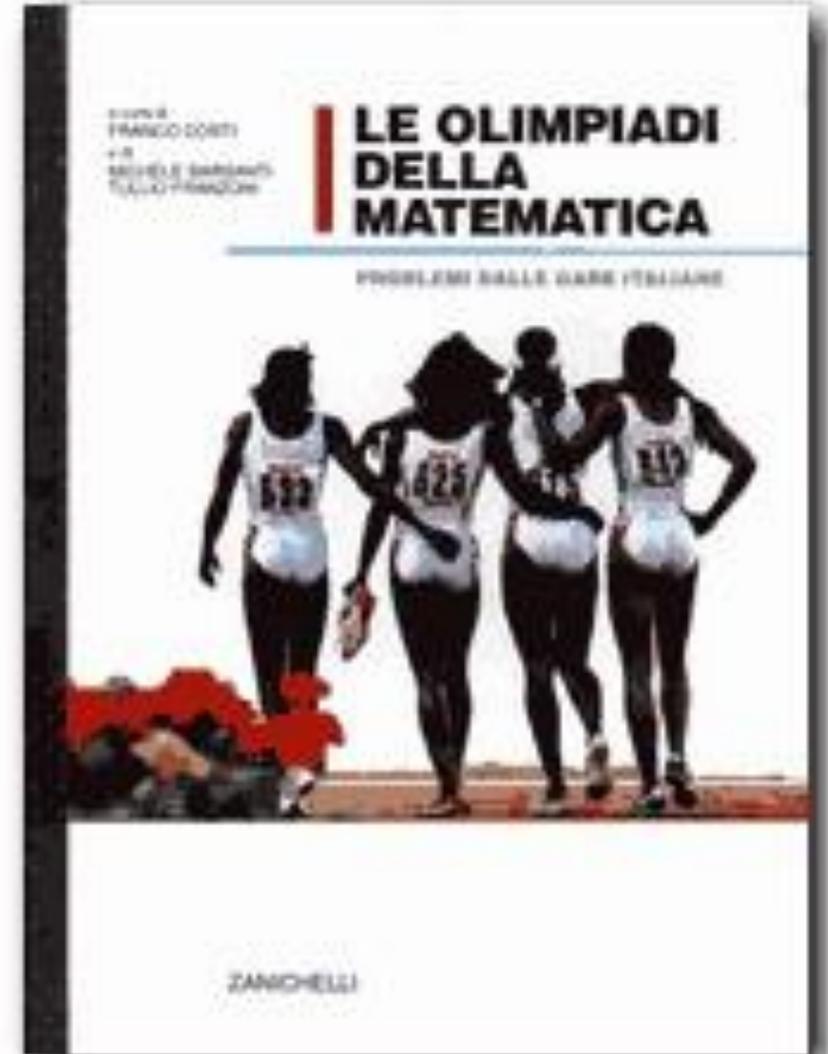


# ...lontano

Giovanni Prodi:

*... molte volte questi problemi sono come punti estremi di fili che vanno molto lontano*

Dalla presentazione a Conti, F.; Barsanti, M.; Franzoni, T., *Le Olimpiadi della matematica, problemi dalle gare italiane*, ed. Zanichelli, 1994)



# Problemi, decisioni, responsabilità e consapevolezza

Rosetta Zan



«Dalla responsabilità delle piccole decisioni relative ad un problema, forzata dal ruolo non direttivo dell'insegnante, lo studente arriva gradualmente ad un'assunzione diversa della responsabilità dell'apprendimento, ma soprattutto al *gusto* di tale responsabilità. Qualsiasi sia il prodotto, un processo di pensiero è di per sé significativo: la sensazione di «potercela fare» passa dalla semplice produzione di un risultato giusto, alla consapevolezza di *poter pensare*.» (p.141)



Commissione Italiana per  
l'Insegnamento della Matematica

Commissione Permanente  
dell'Unione Matematica Italiana



Associazione  
Italiana di  
Ricerca in  
Didattica della  
Matematica

5a Scuola Estiva per Insegnanti UMI CIIM – AIRDM  
« Il Problema dei Problemi »

# ***Problemi di matematica per argomentare, modellizzare e costruire significati***

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica «F. Casorati»

Università di Pavia

Frascati, 30 agosto 2018