Andrea Mondino.

Il candidato presenta l'articolo: *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds* in collaborazione con Fabio Cavalletti, pubblicato su *Inventiones Mathematicae* (2017). L'obiettivo di questo articolo è provare la disuguaglianza isoperimetrica di Lévy-Gromov nel contesto degli spazi metrici di misura (X, d, μ), ovvero uno spazio metrico (X, d) dotato di una misura di probabilità di Borel μ. La disuguaglianza isoperimetrica di Lévy-Gromov stabilisce che se Ω è un sottoinsieme di una varietà riemanniana (M^N, g) con curvatura di Ricci limitata inferiormente da $K > 0$, allora

$$\frac{|\partial\Omega|}{|M|} \geq \frac{|\partial B|}{|S^K|}$$

dove B è la palla nella sfera S^K, N-dimensionale, di curvatura di Ricci costante K, tale che $\frac{|\Omega|}{|M|} = \frac{|B|}{|S^K|}$ e $|\cdot|$ indicano le misure della giusta dimensione. Questo significa che la disuguaglianza isoperimentrica in M è forte almeno quanto quella nella sfera S^K. Negli spazi metrici di misura bisogna innanzi tutto avere una nozione di limite inferiore della curvatura di Ricci. Tale nozione risulta dipendere anche da una dimensione. A tale scopo, gli autori danno la condizione $RCD^*(K, N)$ che è un raffinamento di precedenti nozioni di limite inferiore della curvatura di Ricci ed evita gli spazi che non siano limite di varietà riemanniane con curvatura di Ricci limitata dal basso. Tale nozione garantisce la compatibilità con il caso Riemanniano classico e la stabilità rispetto alla convergenza di Gromov-Hausdorff. Per semplicità, enunciamo la disuguaglianza isoperimetrica (risultato principale) nel caso meno generale dell'articolo: *Sia (X, d, μ) uno spazio che soddisfa la condizione $RCD^*(K, N)$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ e $K > 0$. Allora per ogni sottoinsieme di Borel $\Omega \in X$ vale:*

$$\mu^+(\Omega) \geq \frac{|\partial B|}{S^N}$$

dove B è la palla nella sfera S^K N-dimensionale di curvatura di Ricci costante K tale che $\mu(\Omega) = \frac{|B|}{|S^K|}$ e $\mu^+(\Omega)$ è il contenuto di Minkowsky di Ω.

Il risultato si generalizza ammettendo valori di N in $(1, \infty)$ e di K in $\mathbb{R}$. Inoltre, gli autori ottengono un risultato di rigidità per il caso in cui si realizza l'uguaglianza. Essenzialmente mostrano che nel caso di uguaglianza, (X, d, μ) è una sospensione sferica. In seguito si studia anche la quasi-rigidità.

Qualche idea sulle tecniche usate. Uno dei motivi principali del poco avanzamento sulle disuguaglianze di Lévy-Gromov negli spazi metrici di misura è che le prove conosciute di tali disuguaglianze si basano sull'esistenza e la regolarità delle regioni isoperimetriche, garantita dalla teoria geometrica della misura. Tale strumento qui non è disponibile. Gli autori, si ispirano ad un lavoro di Klartag, dove viene dimostrata la disuguaglianza di Lévy-Gromov su una varietà riemanniana, usando un argomento di trasporto ottimo L^1 e la geometria convessa. In sostanza si riduce il problema n-dimensionale ad un problema uni-dimensionale che si riesce a maneggiare. Cavallotti e Mondino, sfruttano l'idea di usare il trasposto ottimo L^1 (che non ha bisogno della regolarità della regione isoperimetrica) ma non hanno a disposizione la regolarità dello spazio ambiente, che invece viene pesantemente usata da Klartag per stabilire stime di curvatura di opportuni sottoinsiemi della varietà.

Lo spazio ambiente viene decomposto in classi di equivalenza di *raggi* sui quali si fa il trasporto L^1. La novità tecnica più importante di questo lavoro è una stima di curvatura lungo tali raggi. Questo consente di trasformare il problema originale in un problema unidimensionale come nel caso di Klartag. Risulta chiaro che, come gli autori stessi sottolineano, queste innovative tecniche consentiranno di ottenere molti altri risultati negli spazi metrici di misura. Ad esempio diseguaglianze di tipo Poincaré e log-Sobolev.

Ciro Ciliberto