Ministero
della
Pubblica
Istruzione

Direzione Generale
Istruzione Classica
Scientifica e
Magistrale

IL PROGETTO LABCLASS

Seminario di formazione per Docenti

QUADERNI 44

Documenti di lavoro

Liceo Scientifico Statale
"G. Ricci Curbastro"
Lugo di Romagna

Giugno 2001

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Cosentino
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinamento editoriale: A. D'Itollo, M. Tortorici
Revisione scientifica: L. Ciarrapico, A. M. Anconelli, M. Impedovo
Editing: L. Ciarrapico, A. M. Anconelli, M. Impedovo
Grafica: F. Panepinto, A. Comisso

Nota editoriale

In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione Classica, Scientifica e Magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori, nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuali nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione classica, scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale

IL PROGETTO LABCLASS

Seminario di formazione per Docenti

Liceo Scientifico Statale
"G. Ricci Curbastro" - Lugo di Romagna (RA)
Giugno 2001

Questa pubblicazione è dedicata alla memoria di PAOLO BRANDOLIN che tanto ha contribuito alla nascita e allo sviluppo del Progetto LABCLASS

INDICE

LA SERIE “DOCUMENTI DI LAVORO” DEI NOSTRI QUADERNI

Luigi Catalano

Dirigente Div. IV Direzione Classica Scientifica e Magistrale
Ministero Pubblica Istruzione

La collana “Quaderni” della Dirclassica si arricchise di una nuova “serie”: essa porta quali suoi “segni” grafici distintivi il dorso rosso della copertina e la dizione “documenti di lavoro” che vi compare in aggiunta a quelle che contrassegnavano i “tradizionali” fascicoli “verdi” e “grigi. Ogni nuovo nato è testimonianza di vitalità. E difatti questa nuova serie risponde a una triplice esigenza di sviluppo.

In primo luogo, quella di dare tempestiva comunicazione del lavoro che la nostra Direzione viene compiendo – a ritmi di costante accelerazione – sul terreno della formazione e dell’aggiornamento degli operatori scolastici. Il numero crescente delle nostre iniziative richiede non solo un allargamento degli strumenti, ma pure un utilizzo delle forze e delle risorse disponibili che sappia farsi via via più articolato e diffuso.

In secondo luogo, alcuni seminari – per la loro peculiare natura di essere finalizzati a discutere questioni di pressante attualità – richiedono che gli esiti di lavoro trovino una disseminazione nella nostra realtà scolastica al possibile immediata e richiedono, pertanto, un taglio delle pubblicazioni che sappia privilegiare – rispetto alle altre serie – non solo la rapidità dei tempi, ma anche la caratteristica di indispensabile supporto informativo e documentario.

Infine – last but not least – la scuola dell’autonomia richiederà sempre di più ai nostri presidi e ai nostri docenti la capacità di “volare da soli”: questa terza serie, infatti, continuerà sì a essere il frutto di un dialettico rapporto di collaborazione tra “centro” e “periferia” e potrà ancora contare su un momento di editing teso a uniformare i criteri generali dell’intera collana, ma – in pari tempo – vedrà sempre più accentuato il responsabile ruolo delle singole scuole nella produzione di questo peculiare “prodotto” culturale.

In tal modo, ritengo che non solo aumenteranno le frecce al nostro arco, ma riusciremo pure – questi almeno sono l’impegno e la speranza – a garantire alla collana grigia e a quella verde lo spazio temporale e la disponibilità umana per il lavoro legato alle scansioni necessariamente più dilatate dell’approfondimento tematico di alcune questioni di fondo.

PRESENTAZIONE DEL PROGETTO

Ferdinando Arzarello

UMI – CIIM

Lucia Ciarrapico

MPI

Il Protocollo d'Intesa, sottoscritto alla fine del 1993 dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana, prevede la promozione di "programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni". In quest'ottica sono stati realizzati in questi anni numerosi seminari di aggiornamento, rivolti a docenti dei vari ordini di scuola, su tematiche fondamentali, quali l'aritmetica, l'algebra, la geometria, l'analisi matematica e, per venire a temi più nuovi, su logica, probabilità e statistica. I contenuti dei seminari, promossi dalla Direzione Classica, Scientifica e Magistrale, cui compete il coordinamento delle iniziative, sono stati raccolti in una collana, nota appunto come i Quaderni della Direzione Classica, e costituiscono una fonte preziosa di formazione per docenti di matematica e per maestri.

Nell'ambito delle finalità del Protocollo sono stati realizzati altri progetti, con finalità più specifiche, rivolti alla ricerca di metodologie didattiche innovative, a supporto dell'insegnamento della matematica. Tra questi ultimi si colloca il progetto *Labclass*, avviato nell'anno 1997 con lo scopo di verificare quali potessero essere i vantaggi, in termini di più alti standard raggiunti, di un insegnamento della matematica supportato dall'uso di calcolatrici.

L'esperienza è partita sulla base della convinzione, generalizzata nei paesi europei e fuori tra coloro che sono impegnati nell'insegnamento della matematica e nella relativa ricerca didattica, che un uso di appropriati software matematici possa indurre un modo nuovo e più coinvolgente nel "fare matematica" e determinare un cambiamento non indifferente, in termini migliorativi, in relazione all'approccio metodologico. L'intento del Progetto *Labclass* è stato quello di conoscere, attraverso una sperimentazione monitorata, quale potesse essere il plus valore raggiunto da uno studente che utilizzi, nello studio della matematica, non solo libri, lavagna, carta e penna, ma anche idoneo software.

Un’altra considerazione ha influito sulle scelte del progetto, che cioè solo un uso costante del software matematico, a scuola e a casa, in tutti i momenti dell’attività matematica in cui se ne avverte l’esigenza didattica, possa incidere in maniera significativa sui risultati.

L’esistenza al momento di un solo laboratorio informatico nelle scuole secondarie superiori, nei casi più fortunati di due, consente ai docenti di matematica solo un uso sporadico degli strumenti tecnologici. Tale situazione si è particolarmente acuita negli ultimi anni a seguito della, pur giusta, apertura dei laboratori informatici a tutte le discipline. Ed è ancora lontano il momento in cui il rapporto alunno-strumento possa divenire di uno a uno.

Esistono oggi in commercio altri strumenti più maneggevoli – le calcolatrici – che possono comodamente trovare posto sul banco di scuola o nello zainetto dello studente, ma al contempo estremamente ricchi e potenti, in cui sono implementati prodotti software la cui validità didattica è da tempo ampiamente riconosciuta. Il Progetto *Labclass* ha puntato su di esse.

Il nome dato al progetto esprime proprio quanto si è detto. *Labclass* vuol dire *Laboratorio in classe*: non l’alunno che va in laboratorio, ma il laboratorio che è presente costantemente in classe. E poiché l’approccio alla matematica non può essere schizofrenico, anche a casa quando lo studente studia.

Il progetto è stato avviato in 20 licei scientifici, per lo più sperimentali e diffusi in tutto il territorio nazionale. 20 docenti di matematica, di biennio o di triennio, uno per ogni scuola, già in possesso di una notevole esperienza in campo informatico hanno fruito di un intenso corso di formazione sull’uso delle calcolatrici, con particolare riferimento alle ricadute didattiche.

Al contempo, le loro scuole sono state dotate di fondi sufficienti all’acquisto di calcolatrici in numero adeguato a coprire il fabbisogno di una classe media. Ogni alunno che ha partecipato alla sperimentazione ha così avuto a disposizione in classe la propria calcolatrice, e in più occasioni ha potuto portarla a casa per esercitarsi e per prepararsi alle prove di valutazione.

Al fine di realizzare un’esperienza che fornisse informazioni a largo raggio si sono scelte calcolatrici in cui fossero presenti un programma di calcolo simbolico, un editor di funzioni con relativo ambiente grafico, un software di geometria ed anche un linguaggio di programmazione.

È stato quindi avviato un insegnamento sperimentale della matematica, dapprima in forma non sistematica e successivamente, quando i docenti si sono sentiti di dominare completamente le potenzialità dello strumento, su un progetto ben preciso e concordato.

Nei vari stages cui i docenti hanno partecipato, molti aspetti di natura didattica e metodologica sono stati rilevati e discussi via via che l’esperienza procedeva.

Un discorso importante è stato quello sul calcolo. Quanto e fino a che punto l'alunno deve saper calcolare? Che peso ha il calcolo sulla sua formazione? E' stato questo un tema che hanno osservato con particolare attenzione nell'evolversi del progetto, su cui hanno discusso ed hanno raggiunto alcune importanti conclusioni.

Non importa, ad esempio, che l'alunno non sappia calcolare rapidamente con carta e penna la derivata di una funzione complicata; importa che sappia cosa sia la derivata, e quali informazioni, teoriche ed operative, essa fornisca. Il docente ha così la possibilità di dedicare il massimo spazio e sviluppo al valore semantico dei concetti: lo studente deve saper calcolare con carta e penna la derivata delle funzioni più semplici, mentre deve saper usare la calcolatrice per determinare la derivata di funzioni più complesse. In questo modo non si rischia di confondere la matematica con le tecniche di calcolo e si guadagna tempo prezioso per affrontare argomenti più profondi.

Così, più che il saper calcolare un difficile integrale, è importante dominare il problema della misura e comprendere in quali casi è possibile calcolare lunghezze, aree e volumi mediante un integrale, cosa integrare, da dove a dove. Anche in questo caso l'alunno deve conoscere gli integrali indefiniti delle funzioni elementari e saper calcolare quelli più semplici, per gli altri userà la calcolatrice.

Altro aspetto che il progetto ha messo in luce è la facilità con cui gli studenti producono congetture lavorando con le calcolatrici. L'attività del congetturare, troppo spesso trascurata nelle nostre scuole, ha invece un forte valore scientifico e formativo. In un certo senso la formulazione di una congettura sensata (non esatta, solo sensata) restituisce all'allievo, anche all'allievo più debole, la sensazione di poter padroneggiare la disciplina, di aver capito quali sono i termini del problema. In un certo senso capire un problema, coglierne l'essenza, è più importante che risolverlo, e porta in modo naturale ad una delle attività più importanti per il consolidarsi di un abito mentale scientifico: formulare ipotesi. Qualunque studente è portato a fare tentativi per convalidare, oppure rigettare le ipotesi formulate.

Questo libro vi racconta tutto questo. Esso raccoglie una parte del materiale e delle riflessioni che sono scaturite dall'esperienza del lavoro in classe. Racconta anche di problemi nati su sollecitazione degli studenti e non programmati, di deviazioni dal percorso tradizionale; racconta di riflessioni critiche sugli attuali curricoli e di proposte di rinnovamento, oggi più che mai attuali in vista della riforma della scuola.

Racconta di qualche conquista; di ragazzi che si sono appassionati alla matematica e che hanno discusso su problemi con convinzione e con passione.

Racconta, soprattutto, delle esperienze condotte dai docenti, di prove, di tentativi, ed anche di errori da essi commessi.

La realizzazione dell'iniziativa è stata resa possibile dalla disponibilità e dall'impegno di molte persone. Un sentito ringraziamento va rivolto:

- alla Direzione Generale dell'Istruzione Classica, Scientifica e Magistrale che ha creduto nel progetto e l'ha reso possibile;
- ai proff. Giulio Cesare Barozzi della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Bologna, Paolo Boieri del Politecnico di Torino, Sebastiano Cappuccio dell'Istituto Tecnico Aeronautico di Forlì per l'assistenza e consulenza scientifica fornita;
- alla preside Mariangela Liverani e a tutto lo staff del Liceo Scientifico "Ricci Curbastro" di Lugo di Romagna cui è stata affidata l'organizzazione dell'iniziativa;
- a tutti i docenti che hanno partecipato, per l'impegno profuso, spesso con sacrificio: al loro lavoro sul campo si deve questo piccolo libro.

POLINOMI E LISTE

Giulio C. Barozzi
CIRAM-Università di Bologna

Questa nota si inserisce una serie di articoli volti ad illustrare le possibilità offerte dalla calcolatrici grafico-simboliche; per contributi simili il lettore può consultare i riferimenti bibliografici [1], [4], [5], [6] e [7]. Come nelle note citate, utilizzeremo il linguaggio TI BASIC, implementato nelle calcolatrici TI 89 e TI 92.

L'argomento di cui vogliamo occuparci è quello dei polinomi e delle funzioni polinomiali ad essi associate. Come è ben noto un polinomio è un'espressione del tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

dove i coefficienti sono prelevati da un anello commutativo A, x è un'indeterminata e n un numero naturale.

L'informazione relativa ad un polinomio è contenuta nella lista dei suoi coefficienti $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, con la convenzione di considerare equivalenti due liste se esse differiscono soltanto per uno o più zeri posti in coda. Questa convenzione è giustificata dal fatto che due liste equivalenti, nel senso appena definito, inducono la medesima funzione polinomiale. Infatti, se x viene interpretata come un elemento dell'anello A, allora al polinomio sopra considerato viene associata la funzione che ad x associa

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

da A a sé stesso.

Nei casi di uso più frequente A non è soltanto un anello ma un campo. Se si tratta del campo dei numeri reali, del campo dei numeri complessi, in generale di un campo con infiniti elementi, allora polinomi distinti generano funzioni polinomiali distinte (vale cioè il principio d'identità dei polinomi); non è così per i campi finiti. Nel campo $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ delle classi di resti modulo 2, i cui elementi possono essere indicati 0 e 1, le funzioni del campo in sé sono soltanto 4, e sono rappresentabili mediante i polinomi 0, 1, x e $1+x$; ogni altro polinomio induce una delle funzioni appena descritte. Ad esempio, il polinomio $x + x^2$, individuato dalla lista di coefficienti $\{0, 1, 1\}$, genera la funzione identicamente nulla.

Nel resto di questa nota supporremo di operare nel campo reale, salvo esplicito avviso in contrario. Ciò che vogliamo mostrare è la possibilità di passaggio da un polinomio alla lista dei suoi coefficienti e viceversa, e come tutte le comuni operazioni tra polinomi possano essere eseguite sulle liste dei coefficienti. Si tratta dunque di un'esercitazione sull'uso delle liste.

La prima funzione che ci serve è quella che, prendendo in ingresso la lista dei coefficienti, genera il valore della corrispondente funzione polinomiale in un assegnato punto *x*. Il linguaggio che utilizziamo dispone già di una funzione che opera nel senso desiderato: si tratta della funzione `polyEval`. Tuttavia, come mostra la figura 1, essa prende in ingresso la lista dei coefficienti ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile e non la lista degli stessi coefficienti ordinati secondo le potenze crescenti, come più spesso ci capiterà di fare.

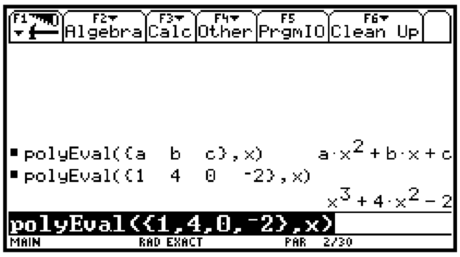


Fig. 1

La prima funzione che scriviamo è dunque una funzione d'inversione di una lista, che ci consenta di operare indifferentemente su liste dei coefficienti ordinate in uno qualunque dei due modi indicati. La figura 2 mostra tale funzione, mentre la figura 3 ne mostra alcuni utilizzi.

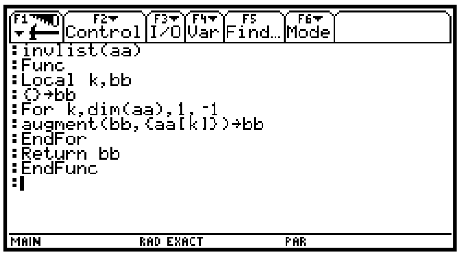


Fig. 2

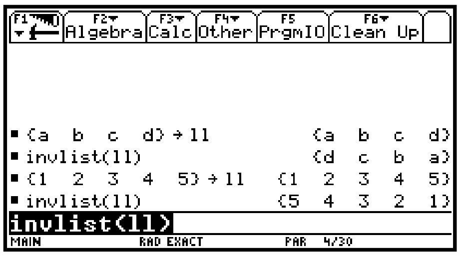


Fig. 3

Vogliamo ora una funzione che compia l'operazione in senso inverso, cioè data un polinomio *p*, ne estragga la lista dei coefficienti. A tale compito provvede la funzione `pcoef` mostrata nelle figure 4-A e 4-B.

È importante che la calcolatrice sia predisposta per funzionare in modalità esatta; in caso contrario il valore terminale assunto dalla variabile *p* non è 0, bensì 0., è la funzione entra in un ciclo infinito.

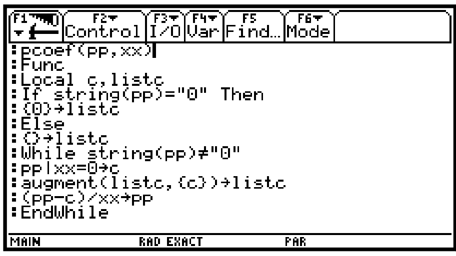


Fig. 4-A

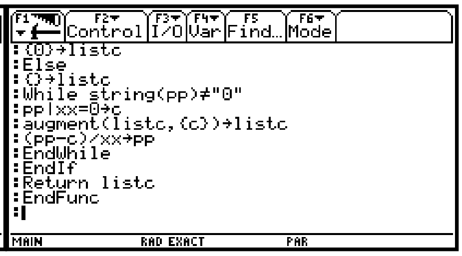


Fig. 4-B

Come si vede, il caso in cui venga introdotto il polinomio nullo viene trattato a parte, per evitare un funzionamento scorretto della funzione. In figura 5 sono mostrati alcuni esempi di utilizzo della funzione `pcoef`.

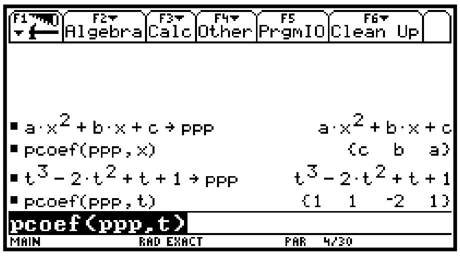


Fig. 5

Una volta che disponiamo della lista dei coefficienti relativi a due polinomi *p* e *q*, vogliamo costruire la lista dei coefficienti dei polinomi *p*+*q* e *pq*. La prima lista è semplicemente la somma delle due liste, se le liste sono di uguale lunghezza, condizione che può sempre essere ottenuta aggiungendo, ove necessario, uno o più zeri in coda alla lista più corta. Costruiamo dapprima una funzione di servizio `az`, che aggiunge un prefissato numero di zeri in coda ad una lista, poi utilizziamo tale funzione per sommare le liste dei coefficienti di due polinomi assegnati.

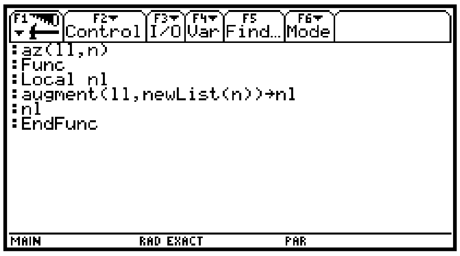


Fig. 6

Come si vede, la funzione `az` prende in ingresso una lista `ll`, e restituisce in uscita la lista `nl`, ottenuta dalla precedente mediante l'aggiunta di *n* zeri in coda. A questo punto l'addizione tra polinomi è immediata.

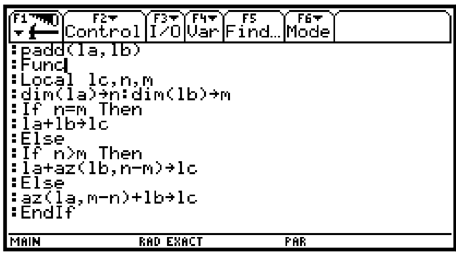


Fig. 7-A

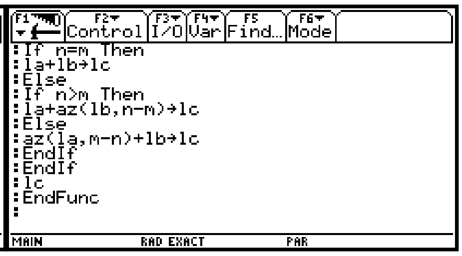


Fig. 7-B

Il caso del prodotto è più complesso: la lista dei coefficienti del prodotto pq si ottiene facendo la "convoluzione" tra le liste dei due polinomi fattori. Se n e m sono i gradi dei due polinomi dati, e aggiungiamo in coda alle liste dei coefficienti un numero opportuno di zeri in modo da ottenere liste di $n + m + 1$ elementi, allora il coefficiente del polinomio prodotto che occupa la posizione k+1 (si tratta del coefficiente della potenza di esponente k) si ottiene sommando prodotti del tipo $a_j\ b_{k+1-j}$.

Nel listato mostrato in Figura 8 si fa uso della funzione di sistema `dotP`, che esegue il prodotto "scalare" tra due liste di numeri. Naturalmente, il linguaggio delle calcolatrici che stiamo usando, come tutti i linguaggi di manipolazione algebrica, dispone direttamente della possibilità di moltiplicare due polinomi e dunque possiamo verificare la correttezza della funzione costruita, estraendo le liste dei coefficienti di due polinomi dati mediante la funzione `pcoef`, e poi moltiplicandoli tra loro mediante la funzione `pmolt`.

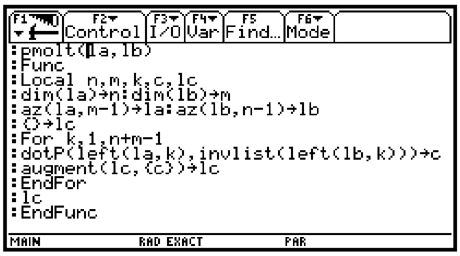


Fig. 8

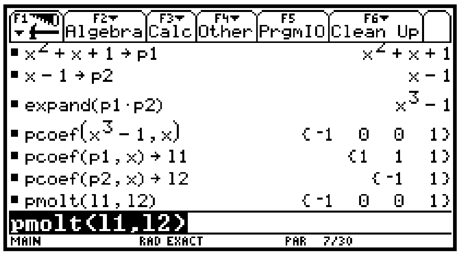
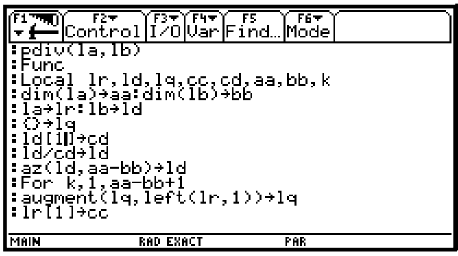


Fig. 9

Per la divisione tra polinomi utilizzeremo le liste dei coefficienti ordinati secondo le potenze decrescenti. Si tratta dell'ordinaria divisione in cui, dati p e q, si determinano i polinomi d e r, con r di grado inferiore al grado di q, in modo da aversi $p = dq + r$. Possiamo scrivere una funzione che restituisca tanto i coefficienti del quoziente quanto quelli del resto, oppure soltanto quelli del resto. Il resto è spesso più interessante del quoziente, ad esempio ove si voglia calcolare il massimo comune divisore tra due polinomi mediante l'algoritmo d'Euclide. Nel listato mostrato in figura 10-A e 10-B la lista dei coefficienti del quoziente è separata dalla lista dei coefficienti del resto da una barra verticale.



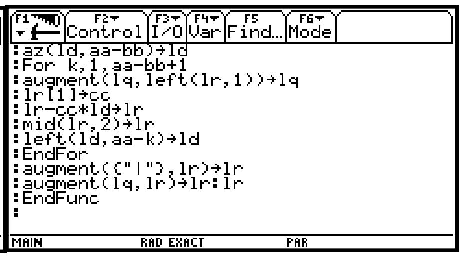


Fig. 10-A

Fig. 10-B

Si suppone che il primo termine della lista `lb` (quella che contiene i coefficienti del polinomio divisore) non sia nullo; peraltro la funzione `pdiv` non verifica tale ipotesi.

Si osservi come il linguaggio che stiamo usando disponga, in modo implicito, della divisione polinomiale mediante la funzione `propFrac`. Un esempio è mostrato in figura 11. Per un programma che esegue la divisione polinomiale senza fare uso esplicito delle liste, si veda Impedovo [6], p. 144.

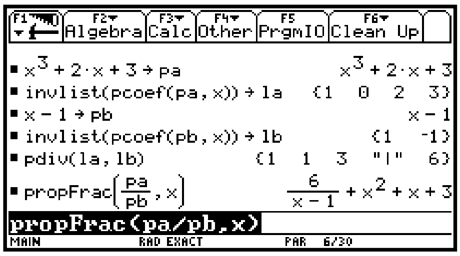


Fig. 11

Esiste un altro tipo di divisione possibile tra polinomi, che possiamo chiamare "divisione secondo le potenze crescenti". Dati p e q, anziché cercare il divisore d in modo che le potenze "alte" del prodotto dq coincidano con le corrispondenti potenze di p (come accade per la divisione ordinaria), possiamo cercare d in modo che le potenze "basse" del prodotto dq coincidano con le corrispondenti potenze del dividendo p. Un problema del genere si pone quando p e q sono i polinomi di Taylor di due assegnate funzione f e g, e si vuole calcolare il polinomio di Taylor del loro quoziente (v. bibliografia [2], p. 307).

La funzione `pdivc` seguente adempie allo scopo. Il primo termine della lista `lb`, contenente i coefficienti del polinomio divisore, viene supposto diverso da zero. Questa volta si tratta del termine noto del polinomio in questione. Il parametro k specifica quanti termini del polinomio di Taylor del quoziente devono essere calcolati.

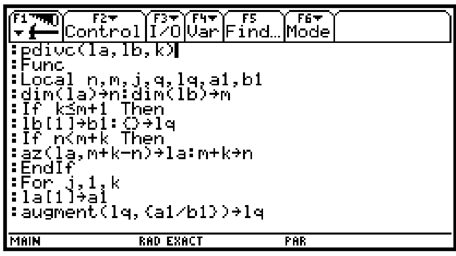


Fig. 12-A

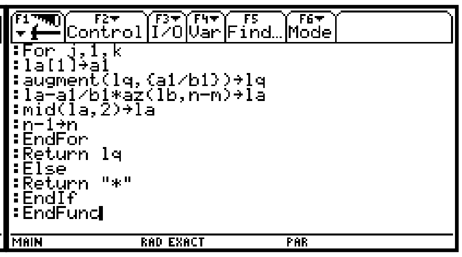


Fig. 12-B

Viene mostrato di seguito un utilizzo relativo al calcolo del polinomio di Taylor della funzione tangente; come sempre lo scopo è quello di mostrare le possibilità di programmazione mediante le calcolatrici in esame.

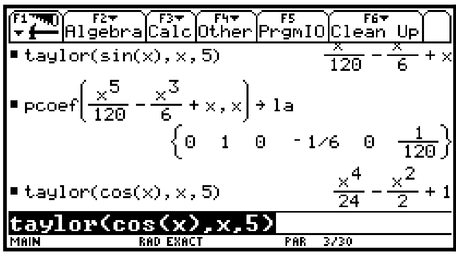


Fig. 13-A

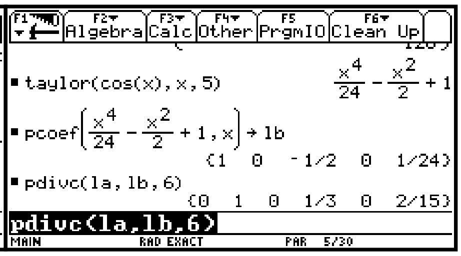


Fig. 13-B

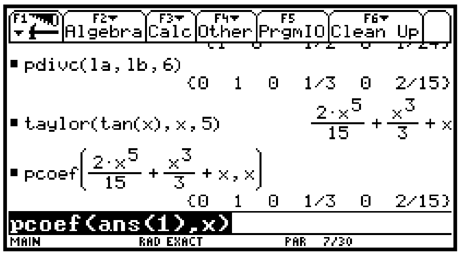


Fig. 13-C

Bibliografia

[1] Barozzi G.C., Cappuccio S.: *Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, Pitagora Editrice (Bologna), 1996;
[2] Barozzi G.C., Matarasso S.: *Analisi Matematica* 1, Zanichelli (Bologna), 1986;
[3] Childs L.N.: *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, Springer (New York), 1995;
[4] Impedovo M.: *I nuovi strumenti modificano l'insegnamento della matematica*, Lettera matematica PRISTEM, 23, p. 41-48;
[5] Impedovo M.: *Qual è la miglior funzione*, Lettera matematica PRISTEM, 30, p. 52-54;
[6] Impedovo M.: *Matematica: insegnamento e computer algebra*, Springer (Milano), 1999;
[7] Waits B., Demana F.: *Le calcolatrici simboliche*, Lettera matematica PRISTEM, 33-34, p. 92-96;

NUMERI COMPLESSI E GRAFICI DI FUNZIONI

Paolo Boieri
Dipartimento di Matematica

Premessa
In questo articolo si trattano i problemi che nascono nel tracciamento dei grafici di alcune funzioni con le calcolatrici grafiche e programmabili TI92 e TI89.
I problemi rilevati sono comuni a molti sistemi di calcolo simbolico, in particolare a Derive, e possono essere sintetizzati dicendo che, quando viene richiesto di tracciare un grafico, questi sistemi di calcolo simbolico:

1. calcolano le funzioni elementari in campo complesso, senza che l'utente possa intervenire a modificare questa opzione;
2. accettano un risultato reale per eventuali calcoli intermedi, anche quando questo è ottenuto a partire da valori complessi.

Questo comportamento del sistema di calcolo porta a grafici diversi da quelli che ci aspettiamo in campo reale, quando si utilizzano funzioni come le radici, i logaritmi e quelle che sono definite a partire dal logaritmo, come, ad esempio, le funzioni trigonometriche e iperboliche inverse; il problema invece <u>non</u> si pone invece quando utilizziamo funzioni polinomiali, razionali, esponenziali, funzioni trigonometriche e iperboliche dirette.
A questo argomento è stato dedicato un articolo più ampio (I grafici "sbagliati" di Derive, Archimede, Fasc. 4, 1996, pp. 197-207) a cui si rimanda per maggiori dettagli; in questa sede riportiamo solamente le considerazioni necessarie per una comprensione di base dell'argomento e gli esempi ottenuti con una calcolatrice TI92 Plus.
Il problema dei grafici "sbagliati" è di particolare rilevanza didattica: infatti capita abbastanza spesso di incappare in uno di questi grafici e il presentarsi di una situazione di conflitto tra la teoria che viene insegnata e il prodotto del calcolatore genera pericolose ambiguità (lo studente tende spesso a credere più nel calcolatore che nell'insegnante…).
D'altra parte, è abbastanza difficile per l'insegnante fornire una spiegazione completa ed esauriente di queste (apparenti) contraddizioni, in quanto sono

coinvolte nozioni al di fuori del curriculum tradizionale. Questo lavoro è uno strumento offerto all'insegnante che deve affrontare queste situazioni, nella speranza che fornisca lo spunto per un efficace intervento didattico.

Alcuni esempi

Iniziamo tracciando con la calcolatrice TI92 Plus alcuni dei grafici di cui illustreremo nel seguito le caratteristiche e discuteremo le problematiche.

1. Le funzioni radice

Iniziamo da due grafici, nel primo dei quali otteniamo il risultato atteso, mentre nel secondo rileviamo un comportamento inaspettato.
Si tratta delle funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 1}\ ,$$

$$f_2(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\ .$$

La prima funzione è definita per $|x|\geq 1$, è pari e non negativa; il dominio di f_2 è invece costituito dall'intervallo $I = [1,+\infty)$; in I le due funzioni coincidono.
Il grafico di f_1 ottenuto con la calcolatrice corrisponde alle aspettative, mentre quello di $f_2(x)$, oltre alla componente definita in I, ne presenta un'altra, definita per $x\leq -1$ e negativa (vedi la figura 1).
Quest'ultimo fatto è in contraddizione con la positività della funzione radice.

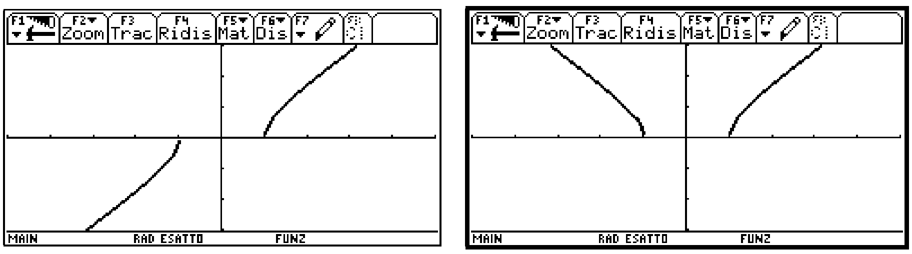


Figura 1: il grafico di $f_1(x)$ (a sinistra) e quello di $f_2(x)$ (a destra)

2. Il logaritmo

Tracciamo il grafico della funzione

$$f_3(x) = \exp(\ln x)$$

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale; la loro composizione fornisce quindi la funzione identità. Osserviamo che il dominio di f_3 è costituito dall'insieme dei reali positivi. Il grafico fornito dalla calcolatrice (invitiamo il lettore a tracciarlo) mostra invece la retta bisettrice del primo (e questo va bene) e del terzo quadrante (e questo non va bene, in quanto il logaritmo non è definito per x negative).

Il grafico della funzione

$$f_4(x) = |\ln x|$$

presenta un andamento diverso da quello previsto: oltre alla parte corrispondente a x positive, abbiamo anche una parte del grafico per x negative.

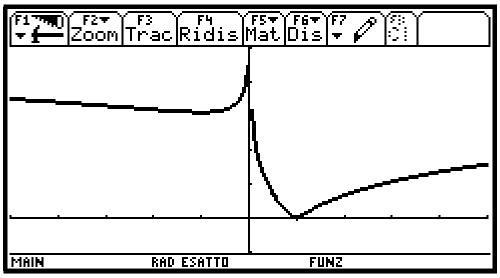


Figura 2: il grafico di $f_4(x) = |\ln x|$

3. La funzione arcoseno

Utilizzando la funzione arcoseno (oppure la funzione arcocoseno) possiamo ottenere altri esempi in cui si manifesta un comportamento anomalo.
Mentre non ci sono problemi nel grafico dell'arcoseno (il lettore controlli questa affermazione), se tracciamo il grafico di

$$f_5(x) = |\operatorname{arcsen} x|$$

osserviamo che la funzione risulta definita non solamente nell'intervallo [-1,1], ma su tutto l'asse reale.

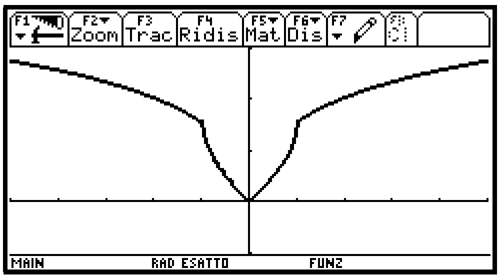


Figura 3: il grafico di $f_5(x) = |\operatorname{arcsen} x|$

Anche il grafico della funzione composta $f_6(x) = \text{sen}(\text{arcsen}\, x)$ risulta definito su tutto l'asse reale.

Che cosa "succede dentro"
Possiamo renderci conto di quali siano i comportamenti interni della macchina e i valori da essa calcolati realizzando alcuni semplici esperimenti.
Nella schermata di introduzione delle funzioni, conviene riservare il nome y1(x) alle funzioni che di volta in volta studieremo e definire
y2(x) = re (y1(x))
y3(x) = im (y1(x))
(real() e imag() per la versione inglese), scegliendo due stili grafici diversi per y2(x) e y3(x); nelle figure mostrate nel seguito y2(x) è in tratto spesso, mentre y3(x) è in tratto normale.

1. Le funzioni radice
Poniamo y1(x)=√(x) e tracciamo il grafico; possiamo osservare (la figura non è riportata per motivi di spazio) che è tutto regolare.
Tracciamo poi i grafici di y2(x) e y3(x) (vedi la figura 4).
La figura 4 ci mostra che se $x>0$ la parte reale è non nulla e quella immaginaria è nulla (nella figura il grafico della parte immaginaria si confonde con l'asse delle ascisse), mentre, viceversa, se $x<0$ la parte reale è nulla e quella immaginaria è diversa da zero.

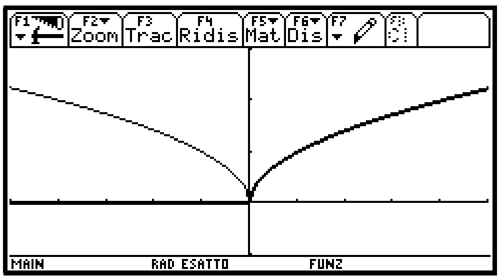


Figura 4: parte reale (tratto spesso) e parte immaginaria (tratto sottile) di $\sqrt{x}$

Soffermiamoci su questo fatto, perché è importante per tutto il seguito, richiamando alcune nozioni sulle radici di un numero complesso.
Dato un numero complesso w, che supponiamo scritto in forma trigonometrica

$$w=|w|\,(\cos\theta + i \sin\theta),$$

vogliamo determinarne le radici quadrate, vale a dire le soluzioni z dell'equazione $z^2=w$. Scrivendo anche z in forma trigonometrica

(*) $\quad z=|z|\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$,

calcoliamo z^2 e imponiamo l'uguaglianza $z^2=w$. Ricordando che $|z^2|=|z|^2$ e che arg $z^2 = 2$ arg z, si ottiene

$$w=|w|\,(\cos\theta + i \sin\theta)=|z|^2\,(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)),$$

da cui si ha

$$|z|=\sqrt{|w|}, \qquad 2\varphi = \theta + 2k\pi, \qquad k \in Z$$

e quindi

(**) $\quad \varphi = \theta/2+k\pi, \quad k \in Z.$

Questa relazione fornisce due valori distinti per φ, uno per k=0 e l'altro per k=1; in corrispondenza al primo di essi si ottiene dalla (*) la cosiddetta *radice quadrata fondamentale* o *principale* di w.

La TI92/TI89 calcola la radice quadrata fondamentale di un numero complesso.

Se $w=x$ è reale positivo, allora θ=0 e l'argomento φ della radice è nullo.

La radice di x è quindi un numero reale; la calcolatrice, dopo avere controllato che la funzione radice ci ha fornito un numero reale, traccia il grafico.

Se invece $w=x$ è negativo, allora $\theta = \pi$ e quindi, per la (**), si ha che $\varphi = \pi/2$.

La radice di x è quindi un numero immaginario puro; la calcolatrice, dopo avere controllato che non si tratta di un numero reale, non traccia il grafico.

Il grafico della funzione radice appare quindi corretto.

Se però osserviamo la figura 4 ci rendiamo conto meglio di quello che la calcolatrice ha in memoria: si tratta di un numero complesso, che per x<0 ha solo la parte immaginaria non nulla, mentre per x>0 ha solo la parte reale nulla.

Se a partire da questo numero non vengono svolti ulteriori calcoli, tutto è a posto: il meccanismo di controllo presente nel programma seleziona i valori di x per cui la funzione è reale e ne traccia il grafico, escludendo invece quelli per cui la funzione non è reale.

I guai nascono dall'effettuare ulteriori calcoli. Per vedere meglio questo fatto poniamo nell'editor funzioni dapprima y1(x)=√(x-1) e poi y1(x)=√(x+1); visualizziamo i grafici delle parti reali e immaginarie, che sono mostrati nelle due parti della figura 5.

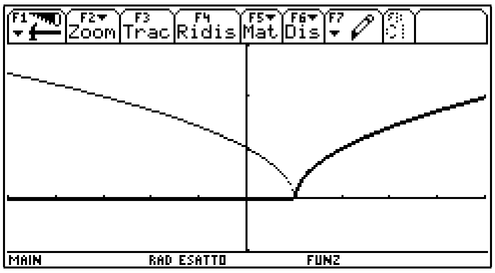


Figura 5A: parte reale (tratto spesso) e parte immaginaria (tratto sottile) di $\sqrt{x-1}$

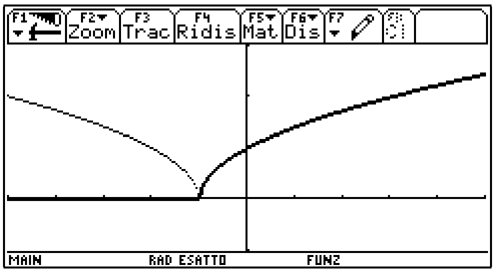


Figura 5B: parte reale (tratto spesso) e parte immaginaria (tratto sottile) di $\sqrt{x+1}$

Osservando i due grafici è facile capire quello che accade: se $x \geq 1$ entrambe le quantità sono reali e quindi il loro prodotto, che è la funzione $f_2(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$, è reale; nell'intervallo (-1,1) una di esse è immaginaria e l'altra reale; il prodotto è quindi immaginario e non viene tracciato.
Invece se $x<1$ entrambe le funzioni hanno parte reale nulla e parte immaginaria non nulla. Le parti immaginarie vengono moltiplicate, dando luogo a un valore reale negativo; questo spiega il ramo negativo del grafico della funzione $f_2(x)$:

$$f_2(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = i\sqrt{|x-1|}i\sqrt{|x+1|} = i^2\sqrt{|x-1|}\sqrt{|x+1|} = -\sqrt{|x^2-1|}$$

Perché tutto funziona invece nel calcolo di $f_1(x)$?

In $f_1(x)$ viene dapprima calcolato l'argomento della radice e poi la radice stessa; non ci sono ulteriori operazioni e il risultato è sicuro.
Possiamo quindi concludere che nel caso di radici (pari) non ci sono problemi quando si tratta del calcolo di una sola radice, mentre bisogna stare attenti quando vengono effettuate delle operazioni tra radicali, che possono dare luogo a quantità reali, anche quando i singoli radicali non lo sono.

Per il caso delle radici dispari, invitiamo a tracciare il grafico della funzione $h(x) = x^{1/3}$, della sua parte reale e della sua parte immaginaria e a interpretare i risultati ottenuti, rinviando all'articolo citato per un approfondimento.

3. Il logaritmo

Anche nel caso del logaritmo tracciamo il grafico della funzione stessa (che non presenta sorprese) e poi i grafici della parte reale e immaginaria.
Poniamo y1(x)=ln(x) e tracciamo dapprima il grafico di y1(x) e poi i grafici delle funzioni y2(x) e y3(x), riportati nella figura 6.
Dalla figura 6 osserviamo come la parte reale sia una funzione pari e coincidente con il logaritmo per valori positivi: si tratta quindi della funzione $|\ln x|$.
La parte immaginaria è invece una costante a tratti, uguale a π per $x<0$ e nulla per $x>0$.

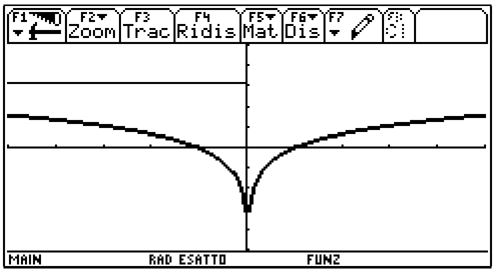


Figura 6: parte reale (tratto spesso) e parte immaginaria (tratto sottile) di $\ln x$

Per giustificare questi risultati ricordiamo che, assegnato un numero complesso w diverso da zero, si dice *logaritmo complesso* di w un numero z tale che $e^z=w$. Ponendo $z=x+iy$ e scrivendo w in forma trigonometrica come $|w|$ $(\cos\theta + i \sin\theta)$ (con $-\pi < \arg w \le \pi$), questa equazione diventa

$$e^x (\cos y + i \sin y) = |w| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

da cui

$$x = \ln |w|, \quad y = \theta + 2 k \pi$$

La prima equazione non pone problemi (il logaritmo è quello reale essendo $|w|$ reale e positivo), mentre la seconda fornisce infinite soluzioni per y; abbiamo quindi infinite determinazioni del logaritmo.
La calcolatrice fornisce la determinazione principale, che è quella che corrisponde a k=0. Quindi se w è reale positivo il logaritmo è reale (e coincide con il logaritmo elementare), mentre se w è reale negativo, il suo logaritmo ha parte reale uguale a $\ln |w|$ e parte immaginaria uguale a π.

Il grafico della funzione logaritmica è quindi tracciato solamente per x>0 e non presenta problemi; anche in questo caso dobbiamo però ricordare che il valore memorizzato è complesso (se x <0) e questo può ripercuotersi nei calcoli seguenti.
Questo avviene in particolare se tracciamo il grafico della funzione $f_4(x) = |\ln x|$, che abbiamo riportato nella figura 2.

La funzione valore assoluto che è implementata nella calcolatrice è definita in generale sui numeri complessi; dato z=x+iy essa fornisce il valore reale non negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$; osserviamo che per argomenti reali x, essa si riduce al valore assoluto reale; infatti $\sqrt{x^2} = |x|$.
Quindi per x<0 abbiamo:

$$f_4(x)=|\ln x| = |\ln |x| + i\pi| = \sqrt{\ln^2 |x| + \pi^2} .$$

Per approfondire il discorso del logaritmo, invitiamo a svolgere i seguenti esempi, osservando i grafici che si ottengono per valori negativi, e a spiegare, a partire dalla definizione di logaritmo complesso, i fenomeni osservati.

$$g_1(x) = \ln((x-1)(x+1))$$
$$g_2(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$
$$g_3(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$$
$$g_4(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

Possiamo concludere dicendo che la funzione logaritmo può presentare dei problemi nei casi in cui la sommiamo ad altre funzioni logaritmiche oppure quando ne calcoliamo il valore assoluto.

4. La funzione arcoseno

Anche l'arcoseno presenta dei problemi analoghi a quelli del logaritmo. Questo fatto può essere scontato per il docente, ma certamente non lo è per lo studente, che non sa che esiste un legame tra le due funzioni, grazie al quale l'arcoseno è definibile anche utilizzando la funzione logaritmica, È appunto questa definizione che viene utilizzata nei sistemi di calcolo simbolo.
Non potendo presentare i dettagli del discorso, può però essere utile far vedere questa parentela tracciando il grafico della parte reale e di quella immaginaria della funzione arcoseno, mostrato nella figura 7.

Nell'intervallo [-1,1] la funzione arcoseno è reale (e quindi viene disegnata dalla calcolatrice) mentre all'esterno di questo intervallo ha parte immaginaria non nulla (e quindi non viene tracciata).
Analogamente a quanto abbiamo visto per il logaritmo, la parte immaginaria entra nel calcolo del valore assoluto e quindi la funzione $f_5(x) = |\operatorname{arcsen} x|$ risulta definita su tutto l'asse reale, come abbiamo visto nella figura 3..

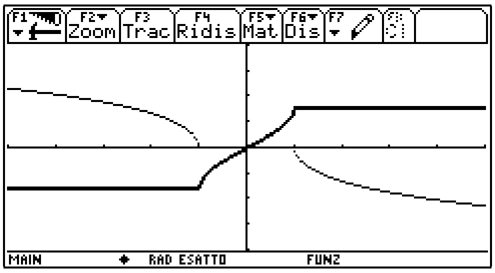


Figura 7: parte reale (tratto spesso) e parte immaginaria (tratto sottile) di arcsen x

La funzione di filtro

Gli esempi che abbiamo visto (e quelli che il lettore ha sviluppato per conto proprio) portano ad una conclusione: il problema consiste nella presenza di un numero complesso con parte immaginaria non nulla, che viene evidenziata in particolare quando:

1. si utilizza una funzione che per valori reali della variabile fornisce valori non reali (come le radici o il logaritmo);
2. si utilizza una funzione che fornisce valori reali anche per argomenti non reali della variabile (come il valore assoluto).

Per evitare ogni difficoltà è necessario evitare entrambe queste situazioni, limitandosi a introdurre delle funzioni che:

- nel primo caso vengono calcolate solo quando in corrispondenza a una variabile indipendente reale anche quella dipendente è reale;
- nel secondo caso vengono calcolate solo se la variabile indipendente è reale.

Per fare questo possiamo introduciamo una "funzione di filtro" che applicata a un numero complesso z controlla se z è reale o meno; in caso affermativo, viene restituito il valore di z, mentre se z non è reale si ottiene il valore *undef*. La scelta di utilizzare *undef* è particolarmente comoda, in quanto *undef* non causa un errore (proprio perché non fornisce alcun valore numerico) e non blocca

l'esecuzione di ulteriori calcoli; utilizzando *undef* è come se dicessimo alla calcolatrice “lascia stare e passa ad altro”.
Passiamo quindi all'ambiente di programmazione e introduciamo la funzione di filtro, che chiamiamo *flt*, il cui listato (nella versione italiana della TI92) è:

```
flt(z_)
Funz
Locale z_
If im(z_)=0 Then
re(z_)
Else
undef
EndIf
FineFunz
```

Osserviamo che il trattino dopo il nome della variabile serve a dichiarare il fatto che la variabile z è complessa (vedi il paragrafo Numeri complessi dell'Appendice B del manuale); nella versione inglese si ricordi di sostituire imag() a im() per il calcolo della parte immaginaria e real() a re() per la parte reale.
Nel caso della radice (o del logaritmo) dobbiamo evitare che la funzione radice fornisca un valore complesso; dobbiamo quindi filtrare la radice <u>dopo</u> averla utilizzata, per impedire che valori non reali da essa forniti siano utilizzati nei calcoli successivi. Si tratta quindi di sostituire $\sqrt{x}$ con $flt(\sqrt{x})$; analogamente bisogna procedere per il logaritmo.
Nel caso del valore assoluto dobbiamo invece impedire che l'argomento di questa funzione sia complesso. Dobbiamo quindi filtrare la variabile <u>prima</u> che sia calcolato; si tratta quindi di sostituire $|x|$ con $|flt(x)|$.
Se vogliamo modificare le funzioni della libreria della calcolatrice in modo da evitare grafici “sbagliati” possiamo:

- memorizzare la funzione *flt;*
- ridefinire le funzioni che danno problemi, utilizzando la funzione *flt.*

In alternativa possiamo utilizzare di volta in volta la funzione *flt* quando ci serve tracciare un grafico; ad esempio, per ottenere il grafico corretto della funzione $f_5(x) = |\operatorname{arcsen} x|$ dobbiamo immettere y1(x)=ass(flt(sin^{-1}(x))) e non semplicemente y1(x)=ass(sin^{-1}(x)).

IL PROGETTO LABCLASS CONFRONTO CON ANALOGHE ESPERIENZE ALL'ESTERO

Sebastiano Cappuccio
Istituto Tecnico Aeronautico "F. Baracca" Forlì

La disponibilità di software di elaborazione simbolica come *DERIVE* e di manipolazione geometrica come Cabri Géomètre ha da tempo messo in fermento la comunità internazionale di chi si occupa (a qualunque livello) di didattica della matematica nelle scuole secondari superiori. Il dibattito su finalità e obiettivi dell'insegnamento della Matematica e soprattutto sul modo di realizzare questi obiettivi e sulle strategie di utilizzo di tali software ha subito in questi ultimi anni ulteriore impulso grazie alla presenza di strumenti come le calcolatrici grafiche e simboliche che accomunano una potenza di calcolo paragonabile a quella di un Personal Computer a una maneggevolezza e comodità d'uso fino a qualche anno fa impensabili.
In Europa e nel mondo sono in corso varie sperimentazioni sia autonome, a livello locale, che organizzate da vari Ministeri dell'Educazione. Queste pagine, pur senza pretendere di esaurire l'argomento, vogliono presentare alcuni punti di contatto e eventuali differenze tra la sperimentazione LABCLASS attualmente in corso in Italia e altre esperienze simili che hanno luogo all'estero così come sono emerse da articoli, interventi in convegni internazionali, siti Internet e altre fonti. Saranno anche mostrati alcuni esempi di applicazioni realizzate con le calcolatrici grafiche e simboliche.

1 - Strategie di utilizzo

Le principali strategie di utilizzo delle calcolatrici simboliche sono sostanzialmente le stesse in ogni parte del mondo ed è significativo il fatto che i colleghi coinvolti nella sperimentazione LABCLASS in modo del tutto spontaneo si siano indirizzati verso queste stesse strategie:

a- la visualizzazione, in cui è l'insegnante che usa la calcolatrice con la lavagna luminosa e l'apposito display per presentare argomenti agli studenti, come una estensione della tradizionale lavagna. Citiamo qui alcuni degli esempi più diffusi: mostrare come varia il grafico di una conica al variare di uno dei suoi parametri, visualizzare il grafico di una funzione insieme a quello di alcuni suoi polinomi di Taylor di ordine via via crescente, mettere a confronto il grafico di una funzione con quella della sua derivata prima, sottoporre il grafico di una funzione a trasformazioni elementari, fare esempi di calcoli di algebra lineare per verificare varie proprietà, tabulare i valori di una funzione per esplorarne l'andamento "numerico" e introdurre il concetto di limite, mostrare alcune caratteristiche invarianti di certe costruzioni geometriche . . . Si tratta dell'uso metodologicamente meno impegnativo ma anche questo, da solo, giustificherebbe l'introduzione delle calcolatrici nelle classi. E' unanime la convinzione che l'insegnamento/apprendimento della Matematica ne risulta notevolmente migliorato dal punto di vista dell'efficacia e dell'efficienza.

b- l'uso della calcolatrice come strumento per esplorare situazioni e formulare congetture, secondo la metodologia della "scoperta guidata". L'insegnante rinuncia (almeno apparentemente) al suo ruolo di dispensatore del sapere e assume il ruolo di stimolo, di guida e di coordinamento delle ricerche degli studenti. Fondamentale diventa il lavoro degli studenti, le loro osservazioni, la loro fantasia, il loro spirito di iniziativa; la lezione frontale scompare per essere sostituita dal lavoro di gruppo, dal dialogo *inter pares*, da discussioni in classe.

Questa strategia è particolarmente seguita nelle sperimentazioni francesi (vedi ad es. [6]). Non è una metodologia conveniente dal punto di vista dell'efficienza ma, anche se applicata solo a certi argomenti e per un periodo limitato di tempo, si ritiene che abbia una straordinaria efficacia formativa.

c- l'uso della calcolatrice come supporto per la risoluzione di problemi per sollevare lo studente dalle difficoltà del calcolo e permettergli di concentrarsi sul metodo di soluzione; è significativo il fatto che, in modo del tutto indipendente, molti insegnanti di LABCLASS siano pervenuti alla stessa impostazione seguita in sperimentazioni condotte in Austria relativamente alla geometria analitica (vedi ad es. [1]): tutti i problemi elementari "classici" come la determinazione della retta passante per due punti, della retta passante per un dato punto e parallela ad una data retta ecc. sono stati tradotti in programmi o funzioni costruendo così una "libreria" che viene poi utilizzata nella risoluzione di problemi più complessi. Questa linea di azione è interessante e utile dal punto di vista operativo (gli studenti si creano una loro "cassetta degli attrezzi" che li aiuta nella risoluzione di problemi), metodologico (problemi complessi vengono suddivisi in più facili problemi che a loro volta sono già stato risolti in generale) e perfino epistemologico (lo studente diventa così, in qualche modo, artefice del suo proprio sapere e delle sue abilità).

d- Un aspetto stranamente poco esplorato (o almeno poco documentato) è quello dell'uso della calcolatrice nel sostegno degli alunni in difficoltà: ad esempio una calcolatrice simbolica può aiutare uno studente che ha basi lacunose in algebra nel risolvere equazioni e sistemi che possono intervenire nello studio di altri argomenti come la Geometria analitica o l'Analisi. L'idea serpeggia in varie sperimentazioni, ad esempio ancora in Austria, ma a quel che mi risulta qualche ricerca sistematica sull'argomento è stata condotto solo in Giappone; mancano notizie su eventuali altri ricerche, in particolare nei paesi europei.

Il Progetto LABCLASS, pur non avendo come obiettivo primario quello del sostegno agli alunni più deboli, si è inevitabilmente occupato del problema dando risultati contrastanti: secondo alcuni colleghi la reazione degli alunni meno portati per la materia è stata spesso di rifiuto; questi studenti accolgono la calcolatrice come una difficoltà in più. Al contrario i più capaci la accettano con interesse ed entusiasmo; ciò ha di fatto aumentato il divario tra questi e gli alunni più deboli.

Altri colleghi hanno rilevato un effetto del tutto contrario: sono stati proprio quegli alunni che in un insegnamento "tradizionale" avevano i risultati peggiori, a mostrare con l'uso delle calcolatrici un migliore interesse e a dare i risultati più soddisfacenti.

E' possibile che questi differenti comportamenti siano dovuti a un discriminante: la disponibilità delle calcolatrici "a tempo pieno". Infatti in tutte le classi nelle quali gli alunni deboli hanno fornito i migliori risultati gli studenti avevano la calcolatrice a disposizione anche a casa perché acquistata come "libro di testo" oppure perché fornita in prestito dalla scuola. Probabilmente ciò li ha aiutati a superare le diffidenze verso le calcolatrici e ha permesso loro di avere più tempo a disposizione per impratichirsi con il loro uso.

2 – La ricchezza di ambienti

A unanime giudizio dei colleghi coinvolti nell'esperienza LABCLASS una caratteristica delle calcolatrici TI-92 che si è rivelata molto importante anche in modo forse inaspettato è la sua grande ricchezza di ambienti e il fatto che tali ambienti possono interagire tra loro: lo stesso problema può essere affrontato in questi diversi ambienti con differenti approcci; ad esempio una funzione può essere manipolata da un punto di vista algebrico nell'ambiente Home, visualizzata dal punto di vista grafico nell'ambiente Graph, tabulata nell'ambiente Table. . . .

Questo aspetto dell'uso della calcolatrice viene messo molto in risalto anche all'estero: più avanti in queste pagine saranno mostrati alcuni esempi di interazione tra i vari ambienti realizzata a volte anche in modo un po' audace e inconsueto.

3 – I curricoli

Come è naturale, molte delle differenze nelle applicazioni delle calcolatrici tra LABCLASS e altre sperimentazioni in corso dipendono dal fatto che i curricoli nei Licei Scientifici italiani sono spesso diversi da quelli di altre nazioni. In particolare mancano quasi completamente nel materiale prodotto all'interno di LABCLASS questioni riguardanti la matematica discreta, in particolare Probabilità e Statistica e applicazioni di matematica finanziaria (calcolo di

rendite, problemi di rateizzazione...) che invece sono molto frequenti nelle scuole straniere (e non solo in quelle specialistiche, tipo i nostri Istituti Tecnici Commerciali).
Si tenga anche presente che ben diversi sono anche i carichi orari settimanali dedicati alla matematica nei vari paesi: si pensi che nelle classi finali di alcuni Licei Francesi si arriva alle otto ore di matematica alla settimana contro le tre dei Licei Scientifici Italiani! Queste differenze non sono solo quantitative ma, inevitabilmente, diventano anche qualitative.

4- Non solo calcolo simbolico

Un aspetto interessante dell'uso delle calcolatrici è il fatto che in molti Paesi si pone l'accento più sulle capacità di elaborazione numerica e grafica che su quelle di calcolo simbolico; ciò dipende da vari fattori, primo fra tutti la maggior diffusione di tali calcolatrici che sono obbligatorie per tutti gli studenti di Scuola Secondaria Superiore in quasi tutti gli ordinamenti scolastici, in particolare dei Paesi europei.
A ciò va aggiunto anche la particolare impostazione data all'insegnamento della matematica nei sistemi scolastici dei vari paesi: da questo punto di vista i paesi dell'Europa continentale si assomigliano abbastanza, mentre, ad esempio, negli Stati Uniti prevale una impostazione pragmatica, molto orientata ai problemi, presi quando è possibile della vita "reale"; anche per questo motivo gli esempi di applicazioni provenienti dagli Stati Uniti sono spesso dedicati allo studio delle Scienze ancor più che della Fisica sfruttando molto anche la possibilità di acquisire dati attraverso appositi sensori (vedi ad es. [2]).

5 – Un problema molto sentito: verifiche e esami finali

Un problema che accomuna gli insegnanti sperimentatori di LABCLASS e quelli di altri Paesi è quello delle verifiche: molto spesso nelle prove di verifica vengono sottoposti agli studenti esercizi per affrontare i quali è sufficiente aver capito e memorizzato un particolare algoritmo risolutivo o un insieme di tecniche di calcolo (ad esempio: "calcola la derivata della seguente funzione", "semplifica e scomponi in fratti semplici la seguente frazione algebrica" ecc.).
E' evidente che non è pensabile riproporre quesiti di questo tipo a studenti che hanno a disposizione una calcolatrice simbolica, anche se il saper eseguire calcoli con la calcolatrice è, in fondo, un tipo importante di abilità. Ci si trova quindi nella necessità di riformulare opportunamente i quesiti tradizionali e soprattutto di crearne dei nuovi che tengano conto della presenza di questi potenti strumenti di calcolo. Certo non è facile rinunciare a tipologie di quesiti ormai consolidate da decenni e realizzarne di nuove, ma è un impegno che non potrà essere evitato.
Un ulteriore problema nasce con gli esami finali (Esami di Stato, Abitur, Matura, Bac ecc.) quando questi sono centralizzati: l'atteggiamento delle Autorità scolastiche è vario: di norma (a parte l'Italia) le calcolatrici grafiche e

programmabili sono tollerate e spesso addirittura obbligatorie. In alcuni Paesi (ad es. la Danimarca) gli allievi sono sottoposti a due prove distinte: una senza e una con le calcolatrici. Di solito le classi che attuano una sperimentazione con le calcolatrici simboliche ricevono un tema d'esame preparato ad hoc. In Italia come tutti sanno le calcolatrici sono addirittura proibite anche se con il nuovo Esame di Stato, in particolare con la "terza prova", non mancano strumenti decentrati per esaminare gli studenti delle classi sperimentali.
Il quadro complessivo è quindi molto vario e in evoluzione. Comunque le eventuali proibizioni non devono preoccupare troppo: varie ricerche (in particolare negli Stati Uniti, ad es. presso la Iowa State University, vedi [5]) hanno riscontrato negli alunni abituati ad usare sistemi di elaborazione simbolica risultati complessivamente migliori agli esami anche quando si potevano usare solo carta e penna.

6 – Alcuni esempi

Si è detto che uno dei risultati più interessanti delle sperimentazioni è l'osservazione del fatto che con l'uso della calcolatrice gli studenti si abituano ad affrontare un problema da vari punti di vista, grazie alla ricchezza di ambienti della TI-92 e soprattutto al fatto che questi possono interagire tra loro. Questa abitudine ad operare su più fronti, a cambiare "frame" nello studio di un problema, di norma non disorienta lo studente ma, al contrario, può costituire un importante arricchimento della sua formazione.
Vedremo due esempi di questo tipo, nei quali un problema viene affrontato, risolto o interpretato usando vari ambienti: quello di calcolo Home, quello di grafica Graph e perfino quello di statistica Data Editor anche se in un contesto, per così dire, anomalo.

7 – Un esempio Francese: effetti delle approssimazioni

E' data l'espressione [1] : $\dfrac{19}{5\sqrt{2}+7}$.

Se questa viene digitata nell'ambiente di calcolo Home, viene automaticamente razionalizzata e il risultato appare sulla destra nella stessa linea; successivamente premiamo ◆ ENTER per ottenere un valore approssimato dell'espressione digitata.
Analogamente possiamo richiedere un valore approssimato dell'espressione razionalizzata, ottenendo lo stesso risultato (vedi Fig. 1).

[1] Questo esempio è preso da [4].

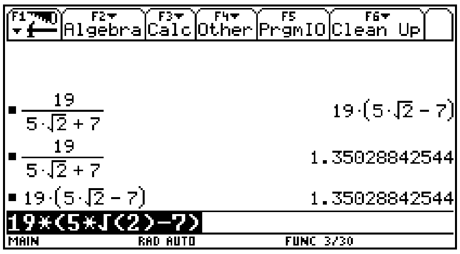


Fig. 1

Sostituiamo al termine $\sqrt{2}$ che compare nella espressione digitata il valore 1.41 e premiamo ancora ENTER; si otterrà così il valore 1.35231..., non molto dissimile da quello ottenuto in precedenza: 1.41 costituisce una "buona" approssimazione di $\sqrt{2}$.

Ripetiamo la stessa azione (approssimazione di $\sqrt{2}$ con 1.41 sull'espressione razionalizzata: ci aspettiamo lo stesso valore o almeno un valore "molto vicino" ad esso; invece.... sorpresa! Come appare in Fig. 2, otteniamo il valore 0.95 che differisce moltissimo dal valore previsto.

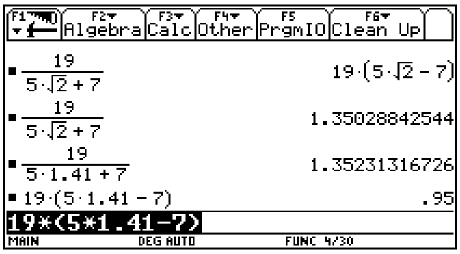


Fig. 2

A cosa è dovuto questo macroscopica differenza? Si potrebbe parlare agli studenti degli effetti devastanti della cancellazione, dovuta in questo caso alla sottrazione tra valori "quasi uguali", ma ancora più significativo è il rappresentare la situazione in un contesto grafico: per valutare l'influenza del termine radicale nelle due espressioni (quella originale e quella razionalizzata), definiamo due funzioni con x al posto di $\sqrt{2}$:

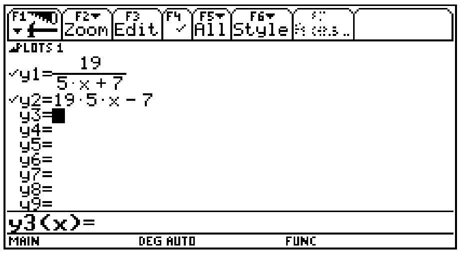


Fig. 3

E' facile per ogni studente riconoscere le funzioni: si tratta di una iperbole equilatera traslata (detta anche "funzione omografica") e di una retta.
Vediamone i grafici in Fig. 4:

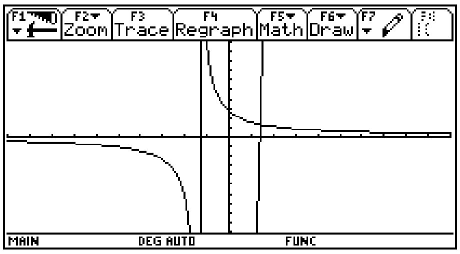


Fig. 4

Visualizziamo meglio tali grafici nella regione di piano circostante il loro punto di intersezione usando il comando Zoombox (Fig. 5):

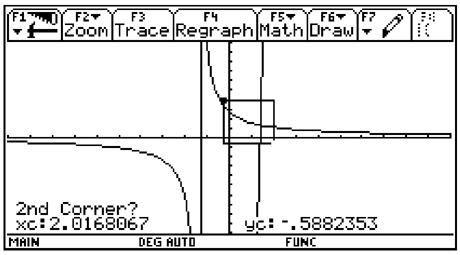


Fig. 5

Otteniamo così l'immagine riprodotta in Fig. 6:

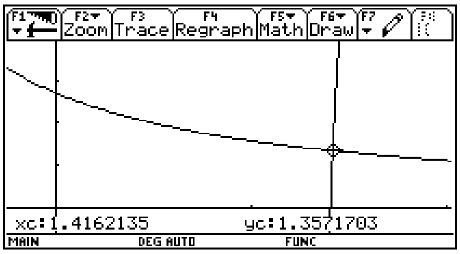


Fig. 6

Dopo aver osservato che i due grafici si intersecano nel punto di ascissa.... e richiestane la motivazione, è facile osservare che, se spostiamo il cursore grafico lungo l'iperbole dopo essere entrati in modalità Trace premendo F3, a "piccole" variazioni dell'ascissa corrisponderanno "piccole" variazioni nell'ordinata (cioè nel valore dell'espressione) mentre se muoviamo il cursore grafico sulla retta che è "quasi verticale", a "piccole" variazioni dell'ascissa corrisponderanno "grandi" variazioni dell'ordinata.
Ecco come una questione di carattere numerico può assumere un nuovo significato passando all'ambiente di grafica.

8 – Un esempio Canadese: definizione di una successione in forma chiusa

Vediamo un esempio tratto da un quesito d'esame proposto dal British Columbia Ministry of Education (Canada), presentato in [1]:

Find a formula for the general term of the sequence 8, 13, 20, 29, ...

Si chiede, in altre parole, di definire una successione di cui sono indicati i primi quattro termini come riportato nella seguente tabella:

n	a_n
0	8
1	13
2	20
3	29

E' facile vedere che, partendo da 8, ogni termine si ottiene dal precedente aggiungendo ad esso un successivo numero dispari, partendo da 5:

$$a_1 = a_0 + 5$$
$$a_2 = a_1 + 7$$
$$a_3 = a_2 + 9$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + 2n + 3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ma non ci viene chiesta la successione in forma ricorsiva, bensì il termine generale, cioè si chiede di esprimere l'*n*-esimo termine della successione direttamente in funzione di *n*, senza dover calcolare tutti i termini precedenti: come si usa dire, viene chiesta la definizione della successione *in forma chiusa* e questo non è facile da realizzare.
L'idea (piuttosto originale e un po' audace) è quella di utilizzare l'ambiente di elaborazione dei dati statistici Data-Matrix Editor.
Si inseriscono i dati noti della successione (Fig. 7) e, usando l'ambiente Plot Setup, si danno i comandi necessari per rappresentarli graficamente (Fig. 8):

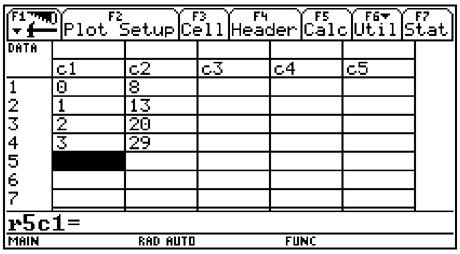


Fig. 7

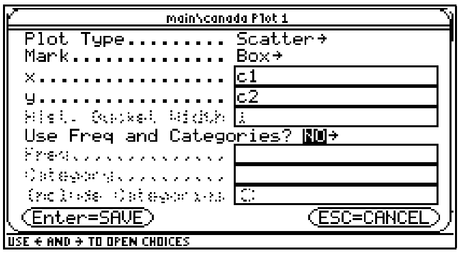


Fig. 8

I punti ottenuti, dopo aver opportunamente aggiustato la scala, sembrano appartenere ad una parabola (Fig. 9);

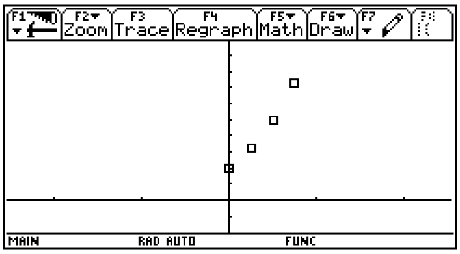


Fig. 9

Cerchiamo di individuare dunque la sua equazione come "parabola dei minimi quadrati", cioè come la parabola che meglio approssima tali punti; dopo aver premuto F5 nel campo Calculation Type selezioniamo quindi QuadReg.
L'equazione della corrispondente curva di regressione sarà memorizzata automaticamente nell'ambiente y= Editor come y1 (Fig. 10).

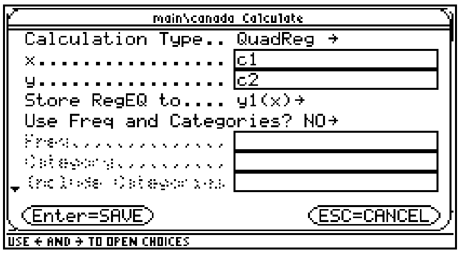


Fig. 10

Si ottiene così il risultato riprodotto in Fig. 11.

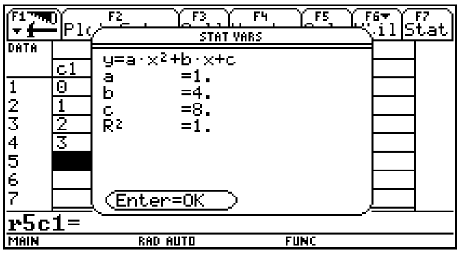


Fig. 11

Si noti che il termine R^2 , indice di correlazione, che rappresenta la “bontà della approssimazione” è uguale a 1, il che significa che la parabola ottenuta passa *esattamente* per i punti dati, come appare in Fig. 12.

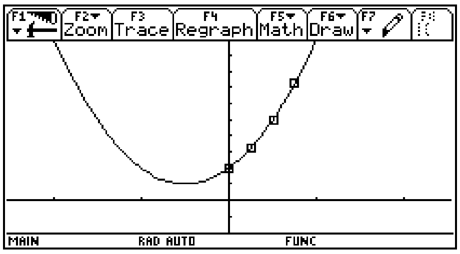


Fig. 12

La risposta al quesito proposto è quindi:

$$a_n = n^2 + 4n + 8.$$

Possiamo confermare il nostro risultato passando per una via più tradizionale:

$$a_n = 8 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) =$$

applicando opportunamente la proprietà associativa e anche aggiungendo e togliendo 1 e 3:

$$= 8 + [1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)] - 1 - 3 + (2n + 1) + (2n + 3) =$$

l’espressione tra parentesi quadra rappresenta la somma dei primi n numeri dispari che, come noto, è uguale a n^2, quindi:

$$= 8 + n^2 - 4 + 4n + 4 = n^2 + 4n + 8$$

che è proprio il risultato che prima abbiamo ottenuto per via... statistica.

Bibliografia

[1] AA. VV. Atti del *5th Conference of Austrian Center for Didactics of Computer Algebra: Recent Research on DERIVE/TI-92 Supported Mathematics Education*, Gösing 1999, http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/index.htm.

[2] AA. VV. *11th Annual International Ohio State University - T3 Summer Institute Week, Conference Proceedings*, OSU Department of Mathematics, Columbus 1998.

[3] AA. VV. *Teaching Mathematics with Derive and the TI-92*, ZKL Nr. 2, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster 1996.

[4] EGGER B., *Fonctions, Dérivation et Limites*, FRAZIER, Paris 1996.

[5] KELLER B. A. , RUSSEL C. A., *Effects of the TI-92 on Calculus Students Solving Symbolic Problems*, The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, vol. 4, No 1, 1997.

[6] TROUCHE L. *Faire des mathématiques au Lycée avec des calculatrices symboliques*, Institut de Recherche sur l'Einseignement des Mathématiques, Montpellier 1998.

COMPUTER ALGEBRA E INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Michele Impedovo

Liceo Scientifico "Galileo Ferraris" Varese

Introduzione

L'insegnamento della matematica sta vivendo negli ultimi anni un ripensamento complessivo dei propri metodi e dei propri contenuti. Non si può certo dire che, dalla riforma Gentile in poi, la matematica si sia conquistata nel nostro Paese l'immagine di una disciplina amata dagli studenti, capace di trasmettere in modo naturale curiosità, entusiasmo per lo studio e per la risoluzione di problemi, passione intellettuale. La realtà, in generale, è differente: la matematica è spesso stata disciplina privilegiata di selezione, e si può dire che essa, pur essendo insieme all'Italiano l'unica disciplina studiata nelle scuole di ogni ordine e grado, non lasci tracce significative nella preparazione culturale di chi non prosegua gli studi in corsi universitari di tipo scientifico.
La commissione dei "saggi" incaricata dal Ministero della Pubblica Istruzione di prefigurare i nuovi scenari per la scuola del 2000 ha redatto un documento poco indulgente nei confronti dell'insegnamento delle scienze e della matematica in particolare:

> *Gli insegnamenti scientifici sono ancora oggi legati in gran parte ad un apprendimento dai testi. È quindi essenziale un profondo ripensamento dei modi, spesso pedanti, con cui sono esposte le scienze in simili strumenti: si tratta insomma di rendere meno labile il linguaggio scientifico più evoluto, almeno nei suoi aspetti più elementari. In questa operazione possono essere utili i sistemi multimediali di simulazione, il cui ruolo e le cui funzioni andranno chiaramente identificati e promossi, particolarmente in rapporto all'esigenza di disporre di rappresentazioni mentali efficaci e operative.*
> *Un'attenzione particolare e profondamente innovativa sul piano metodologico va riservata all'insegnamento della matematica, che attualmente registra, soprattutto a partire dall'attuale scuola media, il maggior numero di fallimenti a cui si aggiungono un gran numero*

di esiti al limite dell'accettabilità. La ricerca sulla matematica non scolastica indica la necessità di insegnare agli studenti ad usare idee e tecniche di tipo matematico nella soluzione di problemi diversi (sia di scienze fisico-naturali sia di scienze sociali). Sembra essenziale, a questo riguardo, che bambini e ragazzi non perdano il piacere del matematizzare, non siano demotivati da eccessi di formalismo, e siano aiutati dagli insegnanti e dagli stessi compagni a pensare a percorsi alternativi di soluzione e ad utilizzare in positivo le dinamiche degli eventuali errori.

L'insegnamento tradizionale ha retto per secoli; si rivolgeva a poche persone, aveva l'ambizione di portare il discepolo sulle spalle dei giganti che l'avevano preceduto. Oggi questo obiettivo è caduto. La scuola non si rivolge più a pochi, ma deve rivolgersi a tutti, a tutti deve comunicare qualcosa che sappia innescare curiosità e desiderio di sapere.
Uno dei limiti più evidenti dell'insegnamento tradizionale della matematica è la mancanza di una *epistemologia pubblica*, di una dichiarazione di intenti che sappia essere convincente per gli allievi e connessa in modo armonico alle altre discipline; non è raro il caso di studenti che studiano, ad esempio, la fattorizzazione di un polinomio senza sapere (e alla lunga senza chiedersi) perché questo sia un tema significativo, e in quale contesto scientifico si inserisca.
L'eccesso di formalizzazione si è spesso mutato nel contrario del *rigore*: la *prescrizione* (per fare questo si deve fare così …) ha finito per prevalere, fin dalla scuola dell'obbligo, sulla ricchezza semantica.
Non è il rigore (né tanto meno la pedanteria camuffata da rigore di alcuni libri di testo) a dare significato agli oggetti matematici: è l'esperienza che si costruisce operando con essi, è il contesto in cui vengono trattati e l'insieme di problemi che essi permettono di risolvere. Soltanto quando il valore semantico di un oggetto è diventato sufficientemente ricco, allora è giunto il momento della formalizzazione. Seguire il percorso inverso, in una scuola che vuole rivolgersi a tutti, che non ha più la pretesa di "formare la futura classe dirigente", ma di formare il futuro cittadino (il quale di norma non si iscriverà al corso di laurea in matematica) si è rivelato alla lunga non solo un errore didattico, ma anche un modo per allontanare gli allievi (quindi i cittadini) dalle discipline scientifiche.
È finito il tempo in cui l'insegnante svolgeva il ruolo di riproduttore della *cultura normale* e lo studente quello di tazza vuota da riempire.
Occorre dunque ridare ai procedimenti della matematica senso e significato. Occorre diffidare dell'insegnamento puramente sintattico quando questo è prematuro. Occorre puntare ad una forte *visualizzazione* (con gli occhi e con la mente) degli oggetti matematici. Occorre rivedere con spirito critico la struttura didattica ed epistemologica della matematica, e farne partecipi gli studenti.

La computer algebra

In questo quadro è inevitabile un confronto del mondo dell'insegnamento con gli strumenti automatici di calcolo e con le nuove tecnologie.

Ai tradizionali strumenti capaci di calcolare in forma approssimata (dalla calcolatrice tascabile alla calcolatrice scientifica, dal foglio elettronico ad alcuni linguaggi di programmazione) si sono affiancati da tempo programmi che sono il risultato di un importante settore della ricerca matematica: la *Computer Algebra*.

I cosiddetti *computer algebra systems*, cioè quei software capaci di svolgere non solo calcolo numerico ma anche calcolo simbolico, sono in grado di trattare polinomi ed espressioni, fattorizzare ed espandere, calcolare derivate e integrali, definire funzioni e molto altro, il tutto in forma simbolica e con la stessa notazione usata dai matematici.

I sistemi di calcolo simbolico hanno, oltre alle funzionalità numeriche da tempo già implementate su software (rappresentazione grafica di funzioni, cartesiane, parametriche, polari, in 2D e 3D, rappresentazione di grafici a dispersione e calcolo di funzioni di regressione, risoluzione di equazioni, derivate in un punto, integrali definiti, …) quattro nuove grandi aree di funzionalità.

1. L'aritmetica esatta (con numeri razionali, reali, complessi).
2. Il calcolo algebrico simbolico per manipolare oggetti (polinomi, espressioni razionali e irrazionali, espressioni trascendenti, vettori e matrici, …) e risolvere equazioni.
3. La possibilità da parte dell'utente di definire nuove funzioni che si aggiungono alla libreria di funzioni già predefinite.
4. La programmazione, che può sfruttare tutte le funzioni di libreria, sia quelle predefinite sia quelle definite dall'utente.

Questi software, alcuni dei quali ormai di larghissimo uso (DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, solo per citarne alcuni), possono rivelarsi strumenti formidabili non solo per l'insegnamento della matematica, ma anche per avviare una riflessione critica su metodi e contenuti che l'insegnamento della matematica deve trasmettere.

L'avvento della computer algebra nella ricerca e nell'insegnamento prefigura una delle maggiori sfide per la didattica della matematica nei prossimi anni.

La computer algebra tascabile: la TI-92

Da pochissimi anni la computer algebra è disponibile su una calcolatrice di dimensioni ridotte che è un vero e proprio computer tascabile.

La TI-92 è una calcolatrice ($21\ \text{cm} \times 12\ \text{cm}$, schermo 239×137 pixel, CPU Motorola 68000, 640 Kb di RAM) dotata di tastiera *QWERTY*.

La CPU è Motorola 68000 con frequenza di clock di 10 MHz.

La TI-92 possiede circa 640 Kb di memoria: circa 188 Kb di RAM disponibili per l'utente e 384 Kb per archiviare funzioni, programmi e dati.

Usa la tecnologia *Flash*, che permette di aggiornare il software via internet e aggiungere nuove funzionalità; il materiale di aggiornamento è reperibile al sito

http://www.ti.com/calc/docs/92plus.htm.

Attraverso il cavetto fornito con la TI-92 è possibile scambiare dati con altre TI-92.

La TI-92 è collegabile ad un data-display dedicato (*View screen*) e mediante una lavagna luminosa è possibile proiettare lo schermo.

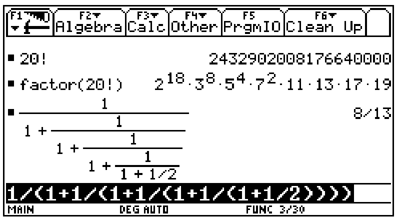
Attraverso il software *Graph Link* (scaricabile dal sito http://www.ti.com/calc/docs/calchome.html) è possibile collegare la TI-92 ad un PC, caricare e scaricare dati. È possibile catturare lo schermo della calcolatrice, copiarlo negli appunti oppure salvarlo in formato TIF.

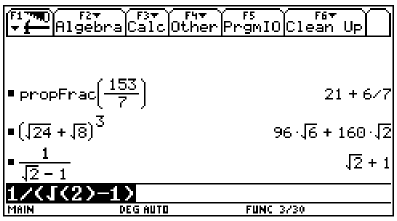
La TI-92 è una calcolatrice che ha implementati una versione di DERIVE, una versione di CABRI, un editor di funzioni (cartesiane, parametriche, polari, successioni, 3D, equazioni differenziali) con relativo ambiente grafico, un ambiente di tabulazione delle funzioni, un foglio elettronico dotato delle principali funzioni statistiche e grafiche, un text editor, un ambiente di programmazione e un ambiente per la risoluzione numerica di equazioni.
I diversi ambienti sono tutti collegati tra loro: una variabile di qualunque tipo è disponibile e visibile in ogni ambiente. Il tasto APPS (*applications*) fornisce l'elenco dei diversi ambienti e permette di spostarsi dall'uno all'altro.

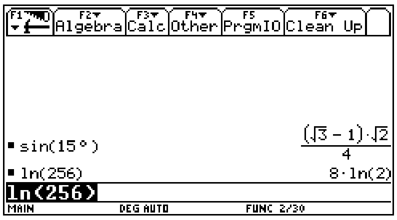
Vogliamo descrivere i diversi ambienti della calcolatrice, fornendo alcuni esempi di utilizzo.

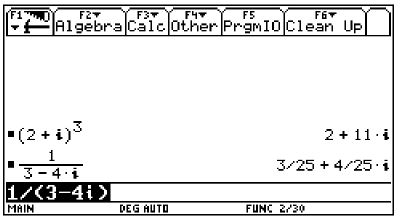
L'ambiente di calcolo: HOME

L'ambiente HOME è l'ambiente di calcolo (è una versione di DERIVE) ed è quello maggiormente utilizzato.
Le seguenti schermate offrono una panoramica di utilizzo dell'ambiente HOME.
Innanzitutto un po' di calcolo numerico in **N**, in **Q**, in **R**, in **C.**

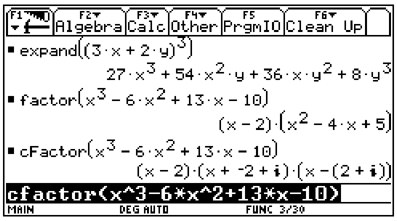


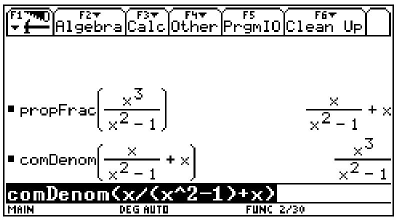




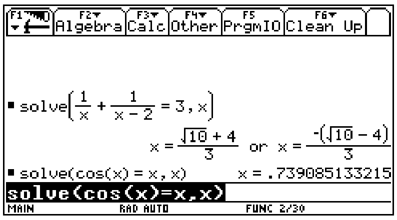


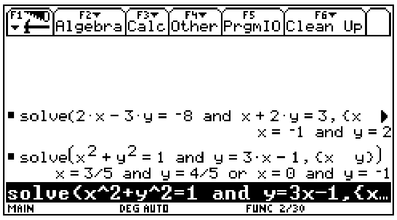
È particolarmente interessante la manipolazione algebrica polinomi ed espressioni. È possibile svolgere le operazioni algebriche più comuni: espandere e fattorizzare.



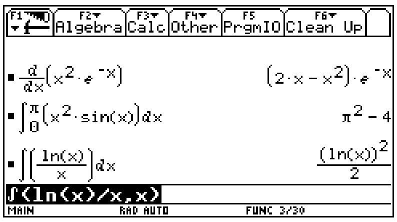


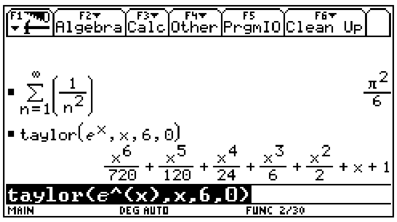
È possibile risolvere equazioni e sistemi.

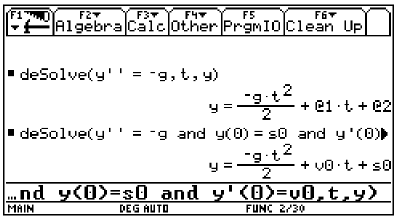


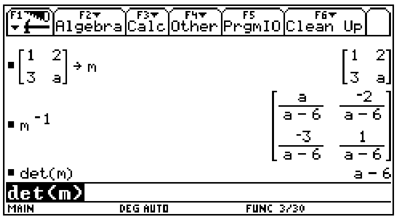


La TI-92 calcola derivate e integrali (definiti e indefiniti), serie, polinomi di Taylor, risolve equazioni differenziali in forma simbolica. Sono implementate le più imprtanti operazioni di algebra lineae.





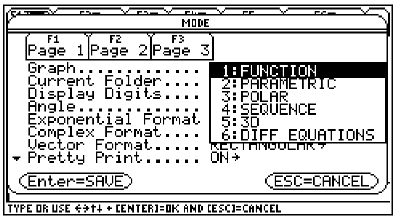




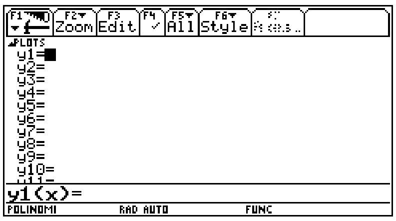
Gli ambienti di rappresentazione delle funzioni: Y=Editor, Window, Graph, Table

Sono quattro ambienti strettamente collegati l'uno all'altro.

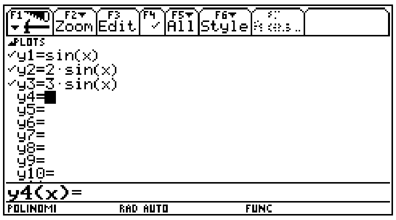
Y=Editor permette di immettere le funzioni che verranno tracciate sullo schermo grafico. È possibile immettere funzioni cartesiane, parametriche, polari. È altresì possibile rappresentare successioni, grafici in 3D, e il grafico di soluzioni di equazioni differenziali. Si sceglie la modalità di editor (e altre modalità di impostazione della calcolatrice) mediante il tasto MODE.

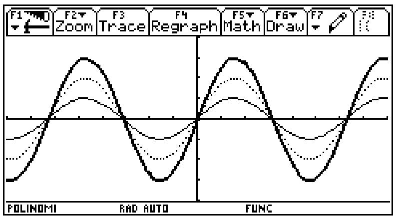


Per esempio, se scegliamo FUNCTION l'ambiente Y=Editor ha il seguente aspetto:

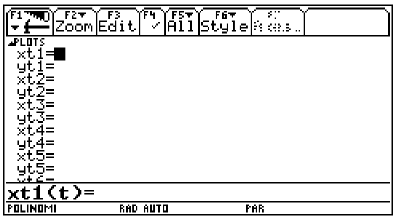


È possibile inserire fino a 99 funzioni e rappresentarle con modalità differenti in modo da poterle distinguere; la variabile indipendentemente è obbligatoriamente *x*. Il grafico è tracciato nell'ambiente Graph.

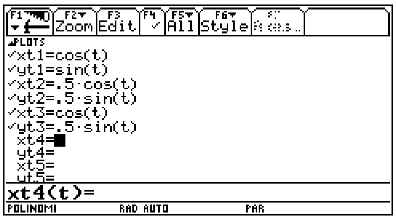


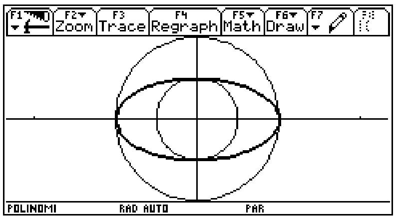


In modalità Parametric l'ambiente Y=Editor ha il seguente aspetto:

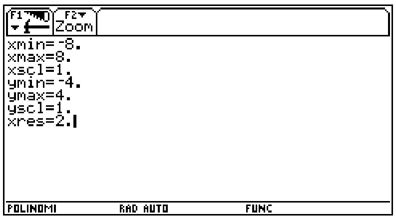


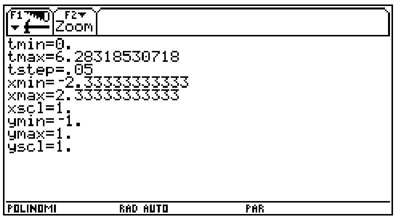
Anche qui è possibile inserire fino a 99 funzioni; l'ascissa e l'ordinata sono espresse mediante funzioni del parametro *t*.





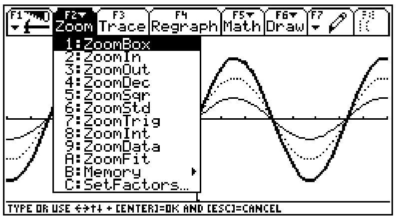
L'ambiente Window permette di impostare la visualizzazione grafica. Nelle modalità Function e Parametric ha rispettivamente il seguente aspetto.



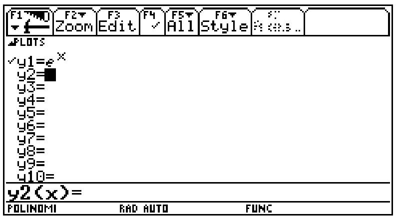


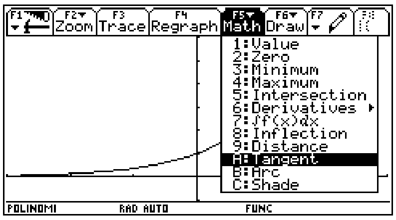
Il grafico viene tracciato nel rettangolo di visualizzazione

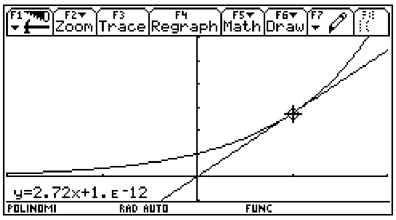
[xmin,xmax]×[ymin,ymax]; xscl e yscl determinano le unità marcate sugli assi, mentre xres determina la risoluzione. In Parametric è possibile far variare il parametro *t* tra due valori fissati tmin e tmax, con passo tstep.
L'ambiente Graph permette di tracciare il grafico delle funzioni immesse in Y=Editor. L'ambiente Graph presenta numerose opzioni: il menù Zoom (accessibile dai primi tre ambienti) offre una ricca scelta di finestre grafiche.

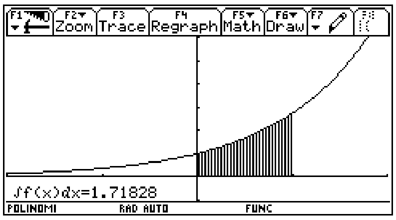


Il menù Math permette di effettuare numerose operazioni (in forma approssimata) sul grafico, per esempio tracciare la retta tangente in un punto e calcolarne l'equazione, oppure approssimare un integrale definito.

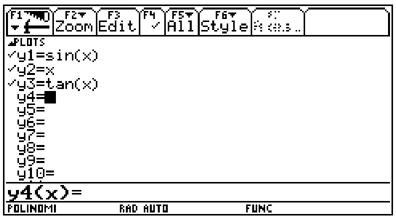


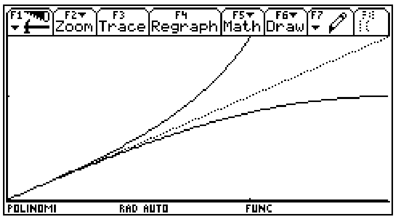


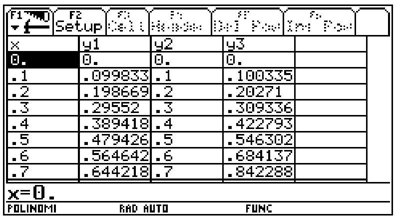




L'ambiente Table tabula automaticamente, con passo arbitrario, le funzioni immesse in Y=Editor. Ecco per esempio la tabulazione di sin(x), x, tan(x) partendo da x=0 con passo 0.1.





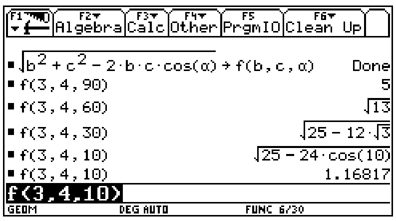


x	y1	y2	y3
0.	0.	0.	0.
.1	.099833	.1	.100335
.2	.198669	.2	.20271
.3	.29552	.3	.309336
.4	.389418	.4	.422793
.5	.479426	.5	.546302
.6	.564642	.6	.684137
.7	.644218	.7	.842288

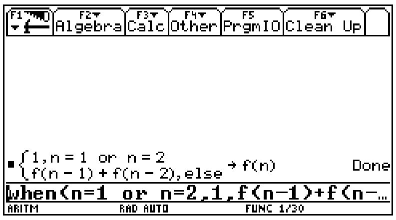
La programmazione: Program Editor

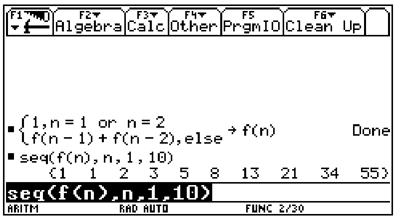
Una funzionalità importantissima è l'ambiente Program Editor; poiché la libreria di funzioni predefinite è ricchissima (circa 300 tra funzioni e comandi) la programmazione diventa molto potente e molto sintetica, sia che si implementi un semplice algoritmo sia che si lavori su programmi complessi (anche se la rapidità di calcolo non è quella di un Pentium). La TI-92 distingue tra function e program. Una function è una vera e propria funzione definita dall'utente; è possibile usare le strutture di controllo if..then..else, while..do, for..do. L'output è necessariamente un oggetto rappresentabile come output nell'ambiente Home (un numero, un'espressione, una lista, una matrice, …). Vediamo qualche esempio.

Se la funzione è particolarmente semplice è possibile definirla direttamente dall'ambiente Home; ecco per esempio una funzione che prende in ingresso le misure di due lati di un triangolo e dell'angolo compreso e fornisce in uscita la lunghezza del terzo lato.

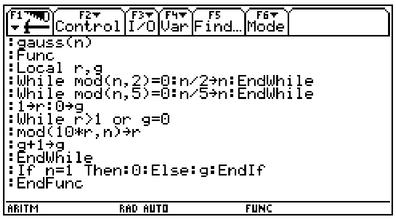


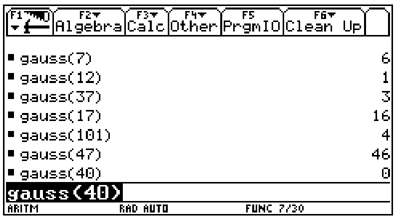
La figura seguente illustra la definizione ricorsiva della successione di Fibonacci.



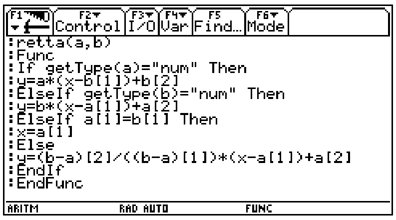


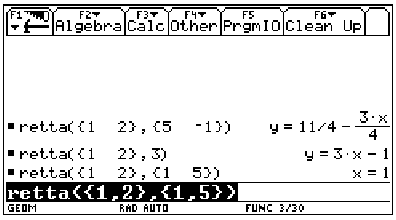
La seguente function è invece scritta in ambiente di programmazione; prende in ingresso un numero naturale *n* e fornisce in uscita il numero di cifre del periodo di una divisione per *n* (di qualunque numero primo con *n*); tale numero è chiamato il *gaussiano* di *n*.



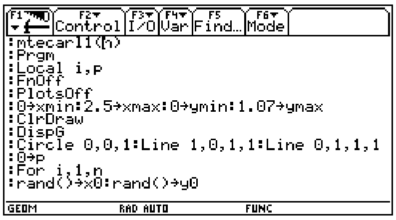


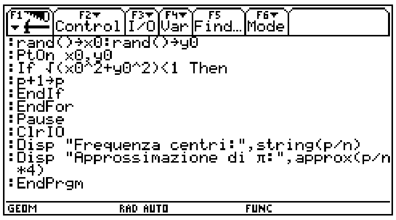
La seguente function prende in ingresso due punti oppure un punto e la pendenza e fornisce in uscita l'equazione della retta corrispondente.



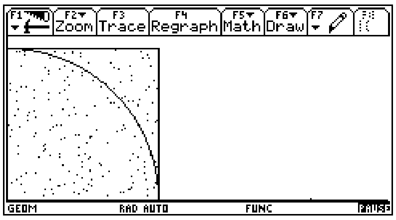


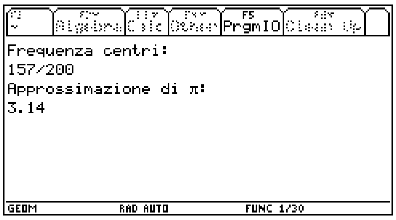
Un program è invece una struttura di programmazione più complessa, che può utilizzare tutti gli ambienti della calcolatrice, e sfruttare il fatto che i diversi ambienti sono collegati. L'output di un programma può essere un grafico, come nel seguente esempio. Il programma Montecarlo prende in ingresso un numero naturale *n* e fornisce il grafico del quadrante di cerchio inscritto nel quadrato. Vengono scelti *n* punti casuali interni al quadrato, e si controlla se sono interni anche al cerchio, nel qual caso si aumenta di 1 un contatore. Alla fine si comunica il numero di centri e la relativa approssimazione di π.





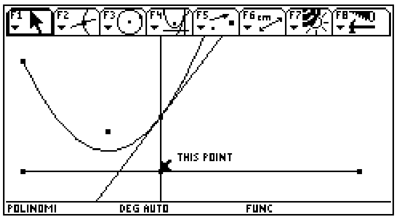
Ecco il risultato con n=200.

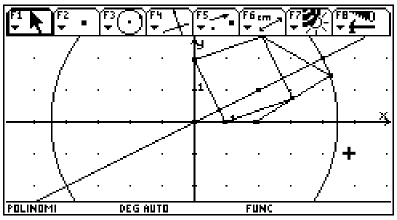




La geometria dinamica: Cabri

Un altro ambiente importante è il ben noto Geometry: si tratta di una versione di Cabri II, che supporta anche il piano cartesiano. Ecco le figure relative alla definizione di parabola come luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice, e la costruzione della figura relativa al problema 1 dell'esame di maturità scientifica PNI del 1996.



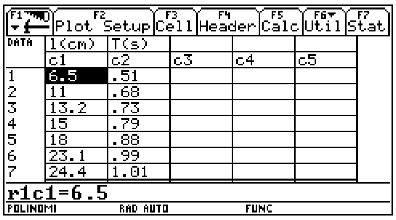


Analisi dei dati: l'ambiente Data Matrix Editor

Una delle potenzialità più interessanti della TI-92 è l'ambiente Data-Matrix Editor, una sorta di foglio elettronico che consente rapidamente di tracciare grafici di dati e di svolgere analisi statistiche. Sfruttando questo ambiente è possibile, a partire da una tabella di dati relativi a due grandezze Y e X (per esempio ottenuti da un esperimento di fisica):

- tracciare rapidamente il grafico per punti (*a dispersione*);
- ipotizzare a partire dalla distribuzione dei punti sul grafico una legge generale $Y = f(X)$.
- calcolare con il metodo dei minimi quadrati la miglior funzione di un certo tipo (lineare, quadratica, esponenziale, …) $f(X)$ che approssima i dati;
- valutare la bontà dell'ipotesi.

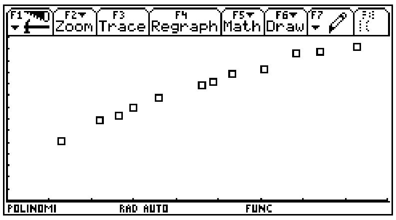
Ecco per esempio i dati relativi alle misure del periodo T di un pendolo in funzione della lunghezza L del pendolo stesso.



DATA	l(cm)	T(s)			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	6.5	.51			
2	11	.68			
3	13.2	.73			
4	15	.79			
5	18	.88			
6	23.1	.99			
7	24.4	1.01			

r1c1=6.5

Con F2 Plot Setup si ottiene il grafico a dispersione dei punti (L, T).



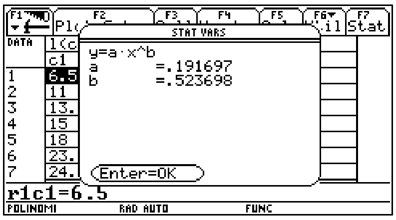
Possiamo ora formulare ipotesi sulla relazione che lega le due grandezze. Supponiamo di stabilire che si tratti di una *funzione potenza*, cioè del tipo una funzione del tipo

$$T = aL^b$$

dove a e b sono due parametri reali. La TI-92 offre la possibilità di determinare la "miglior" funzione (nel senso dei *minimi quadrati*) del tipo scelto che approssima i dati: vengono cioè calcolati i valori a e b che minimizzano la somma dei quadrati degli scarti

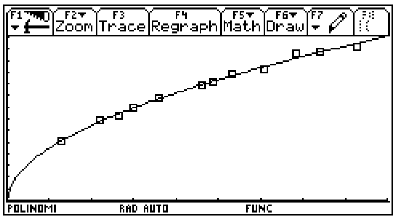
$$\sum \left(aL_i^b - T_i \right)^2 .$$

Con F5 Calc si sceglie PowerReg (regressione della *funzione potenza*).



La miglior funzione potenza che approssima i dati è

$$T = 0.19L^{0.52}.$$



Il fit è, dal punto di vista grafico, soddisfacente. La legge teorica che lega il periodo alla lunghezza di un pendolo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

cioè è effettivamente una funzione potenza del tipo $T=aL^b$, con

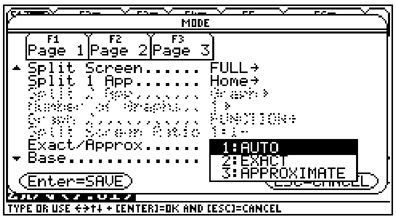
$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \approx 2.01$$

$$b = \frac{1}{2} = 0.5.$$

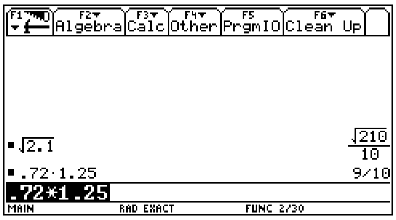
Conclusioni

La TI-92 presenta alcune caratteristiche che ne fanno uno strumento didattico molto efficace. Innanzitutto possiede, in forma integrata, diversi ambienti: calcolo, grafica, foglio elettronico, geometria, programmazione. Il fatto che tutti gli ambienti siano collegati fa sì che un problema possa essere affrontato da diversi punti di vista e con diversi strumenti, tutti utilizzabili “in parallelo”, e ciascuno di essi visibile da qualunque altro.

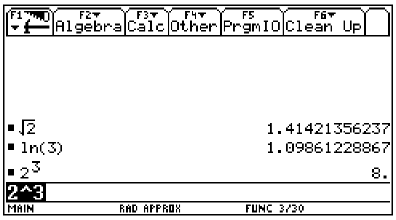
Inoltre la calcolatrice offre la possibilità di lavorare sia in forma simbolica, sia in forma approssimata. Il tasto Mode, che consente di impostare le modalità di lavoro della calcolatrice, offre la possibilità di scegliere tre diverse modalità di calcolo: Auto, Exact, Approximate.



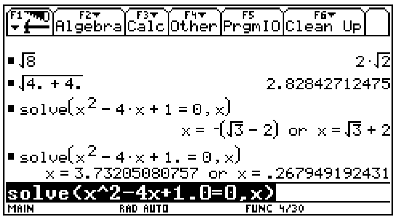
La seconda e la terza opzione consentono di avere il risultato sempre in forma simbolica (anche quando i dati in input sono numeri decimali)



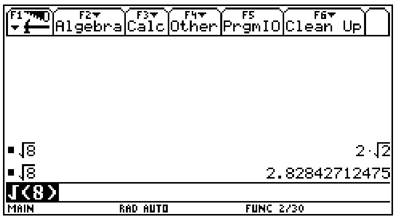
o sempre in forma approssimata (anche quando i dati sono in forma simbolica).



L’opzione Auto invece dà il risultato nella stessa forma dei dati in ingresso: in forma simbolica se non ci sono numeri decimali, in forma approssimata altrimenti.



In ogni caso è possibile forzare l’output in forma approssimata, premendo prima del tasto Enter, il tasto ♦.



Il fatto di avere sullo stesso strumento valori simbolici e valori approssimati consente all'allievo di controllare sia l'aspetto formale sia l'aspetto semantico.
Naturalmente una calcolatrice come questa deve essere usata con attenzione e con un certo spirito critico. Anche le prove di valutazione necessitano di una ovvia rivisitazione; ora che lo studente, premendo pochi tasti, può risolvere equazioni, calcolare derivate e integrali, tracciare grafici, è possibile proporre problemi più complessi e più aperti di quelli tradizionali.

STAFF DI GESTIONE DEL CORSO

Direttore: Mariangela Liverani
Coordinatore scientifico: Lucia Ciarrapico
Responsabile Ministero Pubblica Istruzione: Luigi Catalano

Relatori:

Lucia	Ciarrapico
Giulio Cesare	Barozzi
Paolo	Boieri
Sebastiano	Cappuccio

1. CALCOLO ALGEBRICO

Pierangela Accomazzo
Liceo Scientifico "A. Einstein", Torino

1. Formule equivalenti; scomposizione di un polinomio in fattori irriducibili

Classe: prima Liceo Scientifico P.N.I.
Obiettivi: comprendere le operazioni di trasformazione di un'espressione algebrica, acquisire consapevolmente abilità operative
Tempi: circa 6 ore
Strumenti: Una calcolatrice TI-92 per alunno

La classe a cui farò riferimento è composta da alunni disponibili alle proposte di lavoro, attenti al significato di tali esperienze, ma restii a distaccarsi da contesti specifici per generalizzare e astrarre.
Quando ho avuto a disposizione le calcolatrici avevo già presentato le nozioni di base relative al calcolo con monomi e polinomi e le formule dei principali prodotti notevoli (sia in fase di sviluppo che in fase di scomposizione); gli allievi mostravano tuttavia qualche difficoltà a padroneggiare le tecniche di calcolo e ricorrevano frequentemente al contesto numerico di riferimento delle formule anziché basarsi su proprietà generali delle operazioni.
Dopo una breve panoramica sulle caratteristiche della macchina, ho introdotto il comando *factor* del menu „ per risolvere problemi riguardanti la fattorizzazione di numeri naturali. Si trattava di rispondere a quesiti del tipo:
Quali tra i seguenti numeri sono cubi perfetti?
91125, 26569, 2246,1001
Indica una strategia che ti consenta, con laTI-92, di verificare se un numero è un quadrato, un cubo, una quarta potenza.
Precisa come fare per trovare le basi di tali potenze.

Ho spostato quindi il problema a formule razionali intere in cui la forma fattorizzata o la forma polinomiale evidenziava informazioni diverse sull' insieme numerico che la formula significava.

Un problema che ho posto è stato il seguente:
All'insieme **A** *appartengono tutti i numeri naturali che si possono ricavare dalla formula* $n^3 - n$ *, con* $n \in$ **N**.
Puoi descrivere gli elementi di **A** *in altro modo?*
Puoi affermare che siano tutti multipli di uno stesso numero?
Cerca di provare le tue supposizioni.

Gli allievi hanno fatto ricorso all'ambiente Table per esplorare il contenuto di **A** ed all'ambiente Home per fattorizzare alcuni elementi di **A**, osservando che tra i fattori comparivano sempre 2 e 3. Hanno quindi fattorizzato la formula iniziale, ed hanno capito che $n(n+1)(n-1)$ può essere letto come prodotto di tre numeri interi consecutivi. Di qui a dimostrare che i numeri dell'insieme **A** sono tutti multipli di 6 il passo è stato breve.

Nel proseguimento del lavoro si è posto il problema delle regole sintattiche di scrittura di un'espressione algebrica sulla TI-92 .
Ho invitato gli allievi alla seguente riflessione:
Che differenza c'è fra le regole di scrittura di un'espressione con carta e penna e le regole della TI-92?
Quali attenzioni bisogna porre nel digitare un'espressione con la TI-92 ?
Riporta sulla linea di editing della calcolatrice le seguenti espressioni; dopo aver attentamente controllato ciò che viene visualizzato sullo schermo, stila un elenco di regole di scrittura da rispettare.

$$3(a+1)\ ;\ 3a(a+1);\ 3a^2-2ab\ ;\ -3b-2a\ ;\ \frac{2b-3a}{b-a}$$

Oltre alle consuete regole legate alla scrittura di una frazione su una sola riga, i ragazzi hanno osservato che:
- va posta molta attenzione alla differenza fra meno unario · e meno binario |
- l'omissione del segno di moltiplicazione non è sempre possibile: l'espressione 2ab, per la TI-92 è diversa da $2a \cdot b$; viene segnalato un errore se si tralascia il segno · tra una lettera ed una parentesi.

E' emerso inoltre che le espressioni visualizzate erano talora riscritte in modo diverso rispetto all'immissione. E' stata questa un'ulteriore occasione per ribadire il concetto di equivalenza tra formule e per sottolineare l'importanza d'uso del simbolo = , spesso considerato dagli allievi un semplice separatore.
I ragazzi hanno fatto un po' di esperienza d'uso di queste forme diverse, rilevando come l'equivalenza tra espressione immessa ed espressione visualizzata non sia sempre semplice da riconoscere.
Nella figura seguente sono indicate alcune delle prove effettuate dai ragazzi:

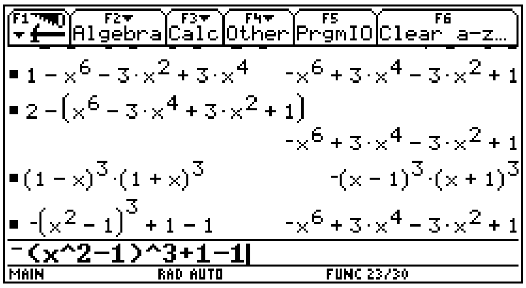


fig.1

Sono state rilevate alcune regole semplici: che la macchina privilegia l'ordine alfabetico delle variabili, che produce frazioni semplificate, ecc. Ho raccomandato l'attenzione ad indicare correttamente l'ordine di precedenza delle operazioni soprattutto nella scrittura di frazioni, e la lettura attenta dello schermo per il controllo dei dati immessi

In seguito, ho utilizzato la TI-92 per attività di consolidamento e recupero di tecniche di scomposizione in fattori di un polinomio. Era mia intenzione rinforzare l'idea di *reversibilità* dei procedimenti di calcolo, affiancando esercizi di sviluppo ad esercizi di fattorizzazione.
Lavorando con „ *factor*[2], si possono scegliere polinomi per cui la scomposizione in fattori primi avvenga in più di un passaggio. Il richiedere una motivazione del percorso evita un uso passivo della macchina da parte degli studenti. In alternativa si può usare la macchina per verificare l'equivalenza tra il risultato della fattorizzazione ed il polinomio di partenza attraverso il comando *expand* .
Ecco alcuni momenti dell'attività svolta :

I. Scomponi in fattori primi, precisando il metodo, $-x^2-4x-4$
S. Non riesco ad individuare un procedimento di scomposizione
I. Prova a vedere che risultato dà la TI-92 con il comando *factor*
S. Ottengo $-(x+2)^2$
I. Se tu dovessi ' tornare indietro', cioè sviluppare $-(x+2)^2$, in che ordine eseguiresti le operazioni ?

[2] Da notare che la TI-92 permette di scegliere l'insieme numerico di fattorizzazione. Scrivendo *factor*(x^2-2) si richiede di scomporre in **Q**: il polinomio verrà restituito nella forma in cui è stato scritto. Volendo scomporre in **R** si può modificare il comando in *factor*(x^2-2, x). Infine, per fattorizzare in **C** si può usare il comando del menu „ Complex: c*Factor*(x^2+2, x).

S. Prima svilupperei il quadrato di binomio mantenendo la parentesi, poi distribuirei il segno meno
I. Bene, scomponi procedendo in senso inverso: prima raccogli il segno meno, poi riconosci il quadrato di binomio

S. Devo scomporre $3x^4 - x^3 + 12x^2 - 4x$; senza la TI-92 ho trovato $(x^2+4)(3x^2-x)$; non so, però, se ho scomposto in fattori irriducibili.
I. Verifica con il comando *factor* applicato al polinomio di partenza: ottieni un risultato analogo al tuo?
Puoi anche usare *factor* sui singoli fattori della tua scomposizione.
In generale, quali accorgimenti puoi adottare (con e senza TI-92) per evitare di scomporre in fattori non irriducibili?

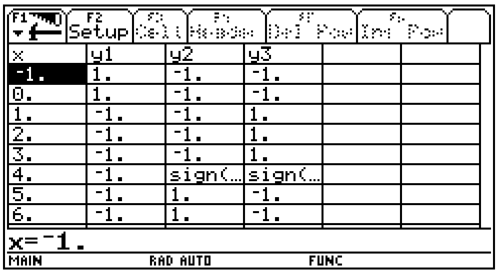
S. Ho scomposto il polinomio $81xy^8 - 16x^5$ ed ho ottenuto $x\,(4x^2+9y^4)\,(3y^2+2x)\,(3y^2-2x)$; non so se è giusto!
I. Applica al tuo risultato il comando *expand*: riconosci nel risultato un polinomio equivalente a quello di partenza?

2. Segno di un polinomio ; uso di tabelle comparative nello studio di disequazioni

Classe : seconda Liceo Scientifico P.N.I.
Tempi : circa 3 ore
Obiettivi : saper risolvere disequazioni di grado superiore al primo o fratte con la tabella dei segni, saper risolvere sistemi di disequazioni
Strumenti : una TI-92 ogni due allievi ed un viewscreen

Lo studio delle disequazioni di grado superiore al primo con la tabella dei segni dei fattori genera talvolta incomprensioni: non è sempre chiara agli allievi la distinzione fra lo studio analitico del segno dei singoli fattori e la comparazione successiva da cui nasce la risposta alla domanda che la disequazione pone.
Allo stesso modo, nella soluzione di un sistema di disequazioni, alcuni allievi confondono la tabella di intersezione (vero/falso) con la tabella dei segni (+/-).
Ho provato a comporre disequazioni di grado superiore al 1° con la TI-92.
I ragazzi sapevano risolvere disequazioni di primo grado; avevano dimestichezza con le due forme canoniche $ax > b$ e $ax + b > 0$.

Partendo da quest'ultima abbiamo tabulato i segni di alcune funzioni di primo grado, ¥ # *sign* $(1-2x)$ e ¥ # *sign* $(x-4)$. Abbiamo costruito quindi un polinomio di 2° grado componendo i precedenti con il prodotto e ne abbiamo studiato il segno: ¥ # *sign* $((1-2x)(x-4))$.
Abbiamo quindi visualizzato i risultati in ambiente Table.
Inizialmente abbiamo lavorato nelle condizioni di default, con x inizializzato a 0 ed incrementato di passo 1 .
Ho poi suggerito di dimezzare il passo di incremento della x (¥ Tblset , Δtbl : 0.5).
Si ottiene una vera e propria tabella dei segni; da notare le situazioni di non decisione in corrispondenza degli zeri dei polinomi fattori (*sign(...*)).



x	y1	y2	y3
-1.	1.	-1.	-1.
0.	1.	-1.	-1.
1.	-1.	-1.	1.
2.	-1.	-1.	1.
3.	-1.	-1.	1.
4.	-1.	sign(...	sign(...
5.	-1.	1.	-1.
6.	-1.	1.	-1.

x=⁻1.

fig. 1

Abbiamo scorso i dati, osservando il legame tra il segno del prodotto ed i segni dei singoli fattori; gli studenti hanno riportato la tabella sul quaderno nella tradizionale forma di tabella dei segni. Hanno però distinto, con colori diversi

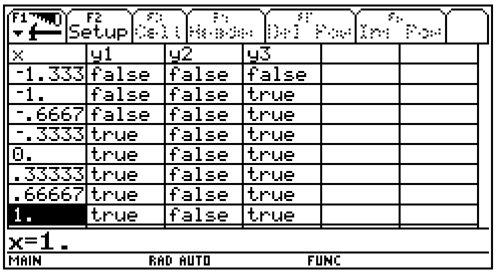
- la colonna che indica i valori di x
- le colonne che analizzano i segni dei fattori
- la colonna del risultato.

Successivamente ho dato loro da studiare, sempre con lo stesso metodo, il segno del polinomio $2x^3+x^2-3x$; ho chiesto quindi di ricavare i valori di x per i quali $2x^3+x^2-3x < 0$.

Analogamente, per risolvere un sistema di disequazioni, si è costruita con la TI-92 una tabella in cui comparivano i valori di verità/falsità di tre proposizioni aperte:

$$\begin{cases} y1 = 3x + 2 > 0 \\ y2 = 1 - x < 0 \\ y3 = 3x + 4 > 0 \end{cases}$$

Gli allievi hanno osservato che in questo caso, per individuare i capisaldi, occorreva scegliere un adeguato passo di incremento della *x*.



x	y1	y2	y3		
-1.333	false	false	false		
-1.	false	false	true		
-.6667	false	false	true		
-.3333	true	false	true		
0.	true	false	true		
.33333	true	false	true		
.66667	true	false	true		
1.	true	false	true		

fig.2

Si è inoltre sottolineato che, per poter trarre conclusioni da questa tabella, occorre conoscere a priori il numero di intervalli significativi e la loro posizione sull’asse reale.
Anche in questo caso è stata costruita sul quaderno la corrispondente tabella di intersezione di insiemi.

Nelle attività successive gli alunni si sono esercitati nella soluzione di disequazioni e sistemi di disequazioni ricorrendo alla calcolatrice per scomporre in fattori o per studiare i segni soltanto quando si presentavano casi problematici.

In sintesi: con il metodo delle tabulazioni si possono risolvere disequazioni e sistemi di disequazioni, a patto di ‘saper cercare’ le soluzioni, individuando in precedenza quali valori di *x* è opportuno visualizzare sullo schermo. Se si lavora con disequazioni frazionarie, bisogna analizzare in precedenza le situazioni che la TI-92 non risolve (zeri, casi in cui l’espressione perde di significato).

2. SCATOLE CINESI

Donata Foà
Liceo Scientifico "F.Buonarroti" Pisa

Classe: seconda scientifico sperimentale (26 alunni)
Obiettivi: capire la differenza fra numeri razionali e numeri irrazionali
Tempi: circa 16 ore
Strumenti: una macchina ogni due alunni

La necessità di introdurre i numeri reali può scaturire da molti esempi: dover risolvere un'equazione di secondo grado, risolvere un problema di geometria con lati e diagonali di un quadrato o altro; comunque è di solito male accettato il fatto che esistano numeri che non possono essere messi sotto forma di frazione.

In questa classe ho cominciato a costruire il terreno favorevole considerando la rappresentazione decimale delle frazioni al variare del denominatore; abbiamo preso in generale come numeratore il numero 1; le varianti su questo punto non sono essenziali.
Hanno iniziato a guardare cosa succedeva alle divisioni 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, ...prima in ambiente Home in modalità approssimata, poi in ambiente Table avendo messo in y=editor la funzione 1/x con valori di x interi positivi.
Hanno fatto alcune osservazioni: o le cifre si ripetevano dopo un po' oppure erano un numero finito.

Allora siamo passati a considerare i resti di tali divisioni:

prima domanda:

quanti potevano essere i resti tutti diversi fra loro? e come si calcolano?

alla seconda domanda la risposta è stata immediata: si moltiplica il resto per 10 e si continua la divisione; alla prima è stato necessario ragionarci sopra.

Una volta concluso che i resti possibili tutti diversi non potevano essere più del divisore, siamo andati in Program Editor e abbiamo fatto un programma che restituisse le cifre del quoziente e quelle dei resti:

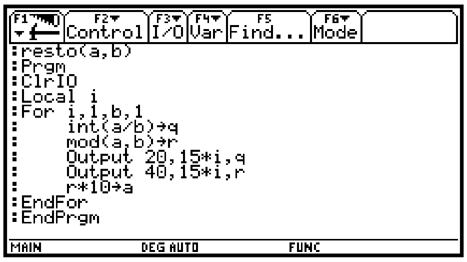
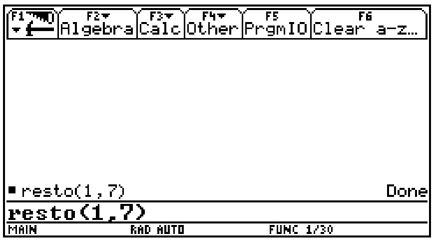


fig.1

In questo modo è risultato chiaro che i casi possibili sono soltanto due: o un numero è periodico o è decimale limitato.



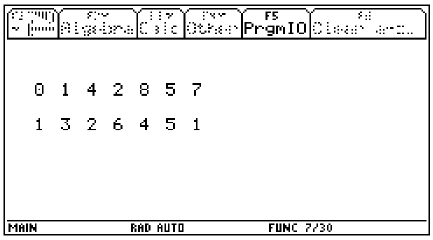


fig.2 fig.3

Come si vede il linguaggio di programmazione è molto simile al Pascal, forse un po' più semplice.

Cosa fare di numeri che non si possono scrivere come frazioni?

Abbiamo cominciato dalla radice di 2 e abbiamo introdotto l'algoritmo che permette di approssimarla con la precisione voluta; è abbastanza scomodo ripercorrere questo cammino a mano o con una macchina calcolatrice che dia solo i numeri, è facile perdersi nei numeri decimali e non vedere bene il procedimento.

Allora abbiamo provato ad usare le Liste con il comando Seq (sequence)

Visto che $\sqrt{2}$ è compreso fra 1 e 2 abbiamo suddiviso l'intervallo in dieci parti con l'istruzione Seq che costruisce una successione di numeri da un minimo a un massimo secondo una funzione assegnata, nel nostro caso 1 + k/10 con k che varia da 0 a 9;

come si vede dalla figura 1 appare la sequenza dei decimali 1.1, 1.2, 1.3 ......

(se non appare così occorre andare a modificare il tipo di numero da exact a approximate, e per fare questo battere il tasto Mode e andare fino in fondo)

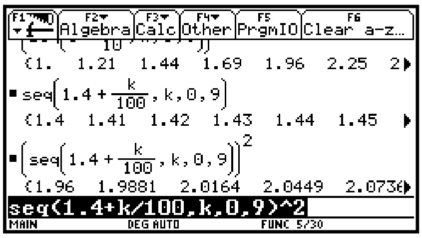


fig.2

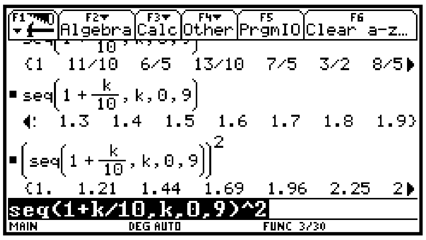


fig.3

Una volta ottenuta la sequenza dei decimali bisogna farne il quadrato per veder fra quali è compreso il 2.

Si seleziona la riga di scrittura, si digita ^2 e si ottengono i quadrati; a mano si sceglie quello approssimato per difetto e si ricomincia da capo a partire da questo: l'unica differenza, in tutta la procedura, sta nel grado di approssimazione:

seq(1.4+k/100,k,0,9) e così via fino al numero di decimali voluto

Per trovare la parte intera si può usare ancora l'istruzione seq ma per cercare fra quali quadrati è compreso il numero in questione; supponiamo di avere $\sqrt{1398}$ si può partire da 30 e andare avanti per 10 numeri:

seq(k^2, k,30,40) (*il numero limitato di numeri è consigliato solo per ragioni di schermo*)

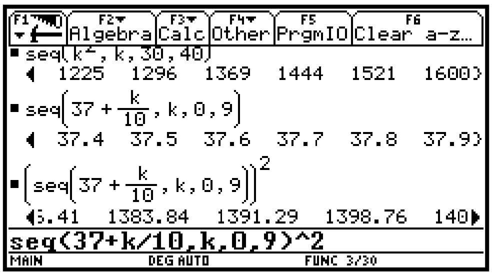


fig.4

E' evidente che questo metodo elimina tutta la parte di calcolo e permette di ricostruire la procedura anche più volte, permette di costruire suddivisioni diverse, in due parti, in tre o in quante si vuole e quindi individuare la scatola cinese come classe di equivalenza, permette di capire quante operazioni vengono effettuate nelle diverse partizioni e quale è la più veloce, induce negli studenti l'idea di algoritmo e quindi di costruire un programma che ricalchi questo procedimento.

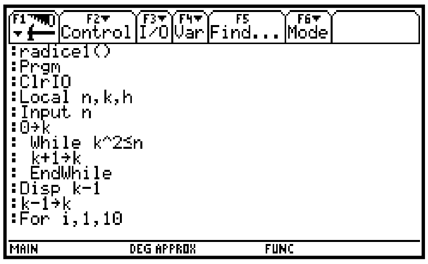


fig5

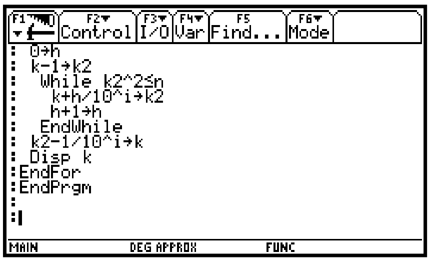


fig.6

Il programma qui allegato è stato fatto dagli studenti con un po' di aiuto soprattutto nell'uso di più variabili (k1 e k2) ma non nella costruzione dell'algoritmo. Certamente è un programma da ottimizzare ma questo non faceva parte dell'obiettivo. Il primo ciclo del while serve per trovare la parte intera della radice quadrata, il secondo trova le cifre decimali.

Gli studenti si sono mossi all'interno di questo argomento, di solito ostico, in maniera molto disinvolta e con grande interesse, giocando con i numeri, con le approssimazioni per difetto e per eccesso, facendo somme e prodotti, considerando i problemi di approssimazione correlati con le operazioni .

L'ambiente Home e l'ambiente Program Editor sono stati utilizzati in maniera integrata e costruttiva.

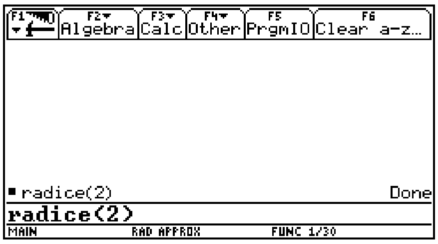


fig7

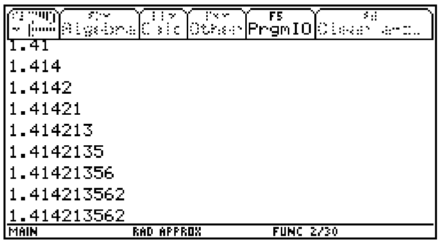


fig.8

3. EQUAZIONI NUMERICHE DI 1° GRADO

Lorenzo Santoro
Liceo Scientifico "E. Majorana" Mola di Bari (BA)

Classe: prima scientifico autonomia
Obiettivi: verificare la conoscenza nella trasformazione di equazioni
Prerequisiti: calcolo letterale
Tempi: 4 ore di cui due per la conoscenza della TI-92
Strumenti: una macchina per ogni alunno, view-screen come "lavagna"

Nell'affrontare la risoluzione di equazioni, qualche difficoltà è emersa nell'applicazione dei principi di equivalenza.

I ragazzi, utilizzando le conseguenze dei due principi di equivalenza, non incontrano difficoltà rilevanti nella risoluzione di equazioni intere (a parte gli inevitabili errori di calcolo), ma le equazioni fratte diventano spesso un vero problema (per quelle famose condizioni di determinazione che sono scritte ma non sempre interpretate).

La TI-92 dà la possibilità senza usare il comando *solve* (risolve un'equazione rispetto ad una variabile), ma facendo lavorare la macchina passo passo e indicando i passaggi uno a uno, di risolvere le equazioni usando i principi di equivalenza.

In una prima classe di scientifico sperimentale (autonomia), dopo una prima fase di introduzione all'uso della TI-92, in cui è presentato lo strumento partendo dalle prime nozioni (accensione, distribuzione tasti, passaggio ai vari ambienti etc.,…), si è passati successivamente all'esplorazione dell'ambiente " con particolare attenzione al menù „ (Algebra) relativamente ai comandi Factor, Expand, ConDenom, PropFrac, Extract. Strumento indispensabile sia nella fase di lezione guidata che di intergruppo è l'uso del viewscreen.

In ambiente " e nella riga di introduzione si digita l'equazione intera e si preme ¸ (fig. 1)

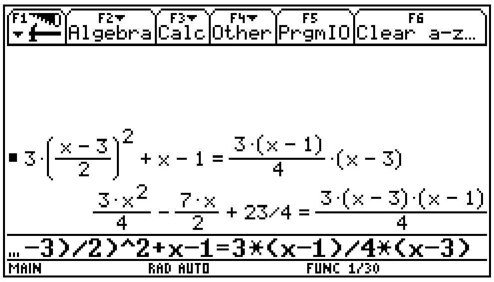


fig. 1

E' importante notare che nella parte sinistra dello schermo viene visualizzato quello che è stato digitato, questo dà la possibilità al ragazzo di controllare da solo la correttezza della digitazione.

Si utilizzano quindi i principi di equivalenza.

Se è necessario portare una equazione prima digitata nella riga di introduzione basta evidenziarla con il cursore e premere ¸ .

Si seleziona la riga di introduzione e si digita p 4 ¸ , appare (fig. 2):

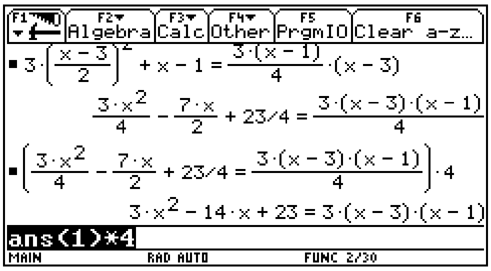


fig. 2

Questo vuol dire che entrambi i membri dell'equazione sono stati moltiplicati per 4

Successivamente sempre selezionando la riga di introduzione si digita:

ì3x^2 ¸

+12x ¸

ì23 ¸

e · 2 ¸ (nella divisione per-2 si utilizza il meno unario · , (fig. 3).

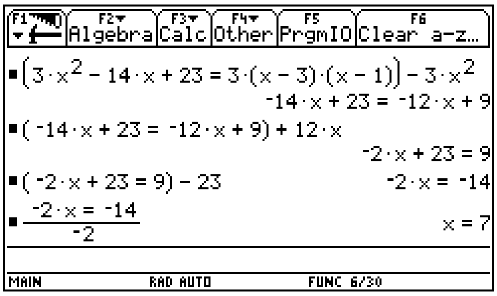


fig. 3

E’ possibile a questo punto effettuare velocemente la verifica della soluzione ottenuta utilizzando il comando Í (with) che si ottiene digitando 2 K (fig.4).

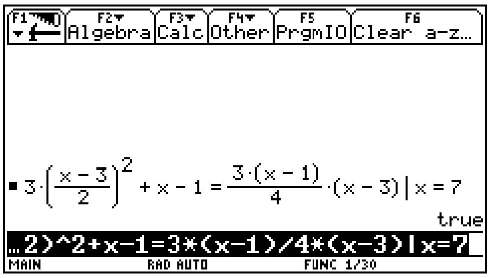


fig. 4

Consideriamo l’equazione fratta: (fig. 5)

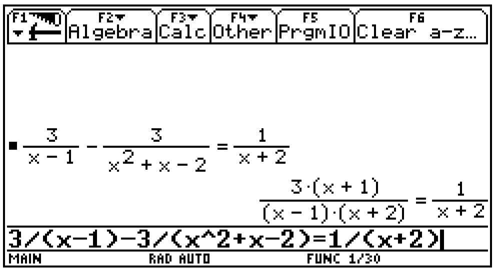


fig. 5

Applicando successivamente i principi di equivalenza e digitando p (x-1) p (x+2) ¸ si ottiene l’equazione intera da cui si ricava la soluzione ì2 (fig.6).

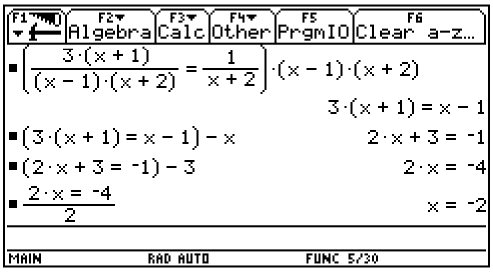


fig. 6

Bisogna verificare che il valore travato sia soluzione dell'equazione fratta.

Selezionando „ Ò left (equazione) ¸ si ottiene la parte sinistra di una equazione e utilizzando, successivamente il comando Í si ottiene: (fig. 7)

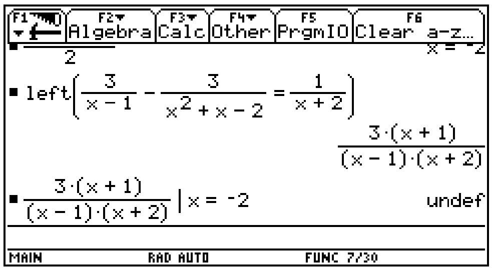


fig. 7

Ripetendo lo stesso procedimento per la parte destra dell'equazione utilizzando il comando right si conclude che la soluzione –2 non è accettabile per l'equazione frazionaria.

Conclusioni

Ritengo opportuno riportare qui di seguito le seguenti osservazioni:

- La totalità dei ragazzi ha applicato correttamente i principi di equivalenza sull'equazioni numeriche intere;
- Qualche difficoltà è emersa nella verifica dell'equazione fratta. Alcuni hanno sostituito il valore trovato nell'equazione, ottenendo come risposta "true" (fig. 8);

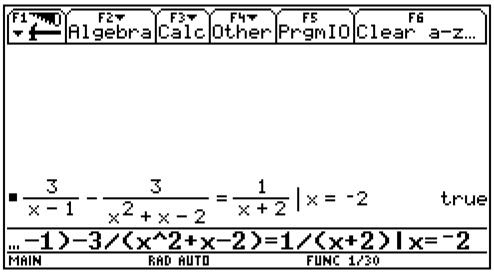


fig. 8

- E' sorta una discussione sul perché di queste risposte apparentemente contraddittorie. Dopo vari tentativi di spiegazione (è da notare che tutti partecipavano alla discussione-verifica sulla macchina, anche i più lenti o con qualche difficoltà nella scomposizione di polinomi) qualcuno ha azzardato l'ipotesi che, poiché le due espressioni a primo e secondo membro perdono entrambe di significato per $x=-2$ ("undef" per la calcolatrice), il "true" si riferisce all'uguaglianza undef=undef. Infatti portando a primo membro $\frac{1}{x+2}$ e uguagliando a 0, il risultato è "false" (cioè undef=0). Quindi la calcolatrice, quando valuta l'equazione seguita da $\mid x=-2$, prima sostituisce e poi valuta l'uguaglianza dei due membri, come dimostrano le seguenti schermate (fig. 9)

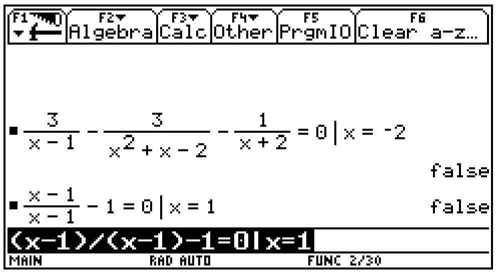


fig. 9

  Quindi il valore -2 deve essere sostituito non nell'intera uguaglianza ma separatamente nei due membri dell'uguaglianza;
- Senza l'occasione della macchina queste situazioni difficilmente si sarebbero presentate, i ragazzi sono consapevoli che la macchina li aiuta nei calcoli ma contemporaneamente li costringe ad entrare più nel merito delle questioni.

Nella verifica i ragazzi hanno verbalizzato tutti i passaggi fatti con la macchina.

4. UNA INTRODUZIONE AI SISTEMI LINEARI IN DUE INCOGNITE

Donata Foà
Liceo Scientifico "F.Buonarroti" Pisa

Classe: seconda scientifico sperimentale (26 alunni)
Obiettivi: capire cosa vuol dire risolvere un sistema di due equazioni in due incognite
Tempi: circa 12 ore
Strumenti: una macchina ogni due alunni

Non è stata fatta nessuna lezione frontale sui sistemi, non sono state date definizioni, gli studenti non hanno a disposizione il piano cartesiano se non per ricordi della scuola media.

Ho iniziato proponendo alcuni problemi banali del tipo: in un pollaio ci sono conigli e galline, ci sono 50 teste e 120 zampe; quanti sono i conigli e le galline? se le teste rimangono 50 come può variare il numero delle zampe? Si possono avere 135 zampe?

I passi sono stati:

tradurre il problema in equazioni,

risolverle in funzione di y (usare il comando solve + variabile)

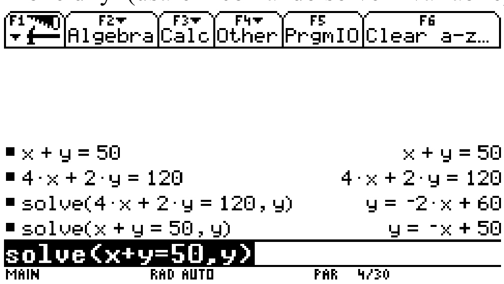


fig.1

Premere Apps , selezionare y = editor e digitare le funzioni ottenute;

Poi in Table (fig.4) osservare i dati nel caso 50, 120;

trovare, se ci sono, valori uguali della y1 e della y2 nella stessa riga, capire cosa vuol dire. (Discussione).

Aggiungere alle due y di editor una terza funzione y3=y1-y2, a cosa serve?

Variare il numero delle zampe assegnando valori a scelta (ad es: 60, 80, 100, 150, 200, 250); capire cosa può succedere; (Discussione)

Andare in ambiente Graph (fig.3): capire che ogni funzione di editor rappresenta una retta, interpretare il punto di incontro, controllare, al variare delle zampe, se il risultato è accettabile o no e perchè.

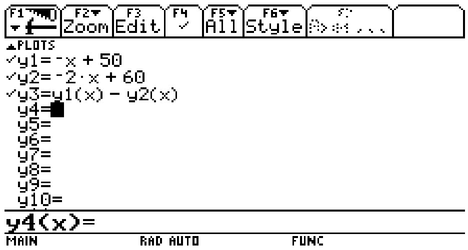


fig.2

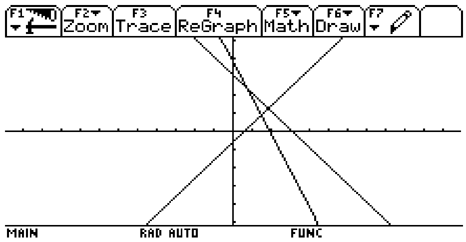
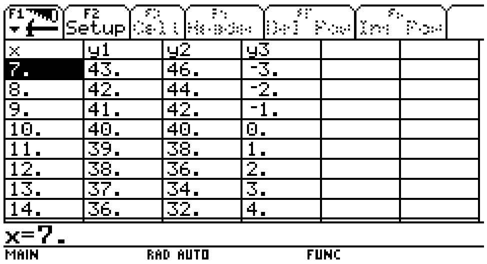


fig.3



x	y1	y2	y3
7.	43.	46.	-3.
8.	42.	44.	-2.
9.	41.	42.	-1.
10.	40.	40.	0.
11.	39.	38.	1.
12.	38.	36.	2.
13.	37.	34.	3.
14.	36.	32.	4.

x=7.

fig.4

Tutto questo percorso è durato circa tre ore ed è stato esclusivamente sperimentale; altri problemi dello stesso tipo sono serviti a consolidare alcune abilità sulla macchina e soprattutto a capire numericamente e geometricamente cosa vuol dire risolvere un sistema;

A questo punto, in Home, abbiamo descritto passo passo le operazioni necessarie per trovare la soluzione, abbiamo usato il comando with e usato la tecnica della combinazione lineare.

Abbiamo provato a risolvere il sistema $3x - 2y = 1$ $5x + y = 3$ (fig.5)

abbiamo seguito tutte le stesse strade che si percorrono manualmente senza fare errori di calcolo e essendo costretti a evidenziare le operazioni e quindi il processo logico;

Solve(5x+y =3,y) appare la funzione scritta $y = -5x + 3$

Solve(3x-2y =1| y= −5x +3,x) appare la soluzione in x. Il comando | (with) (sulla tastiera 2nd k) vuol dire "con la condizione assegnata" ovvero con la y uguale a quella espressa nella uguaglianza precedente; il dover specificare rispetto a quale variabile si risolve è importante e significativo.

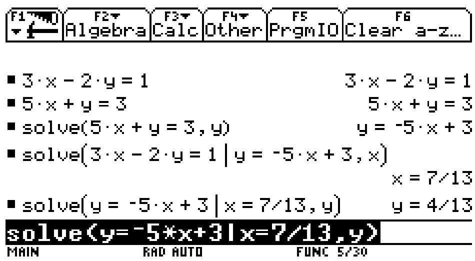


fig.5

E' stato interessante anche far vedere che si può operare col metodo di riduzione moltiplicando opportunamente le due equazioni e sommandole fra loro: per far questo abbiamo seguito i seguenti passi:

selezionare la 5x+y=3,

moltiplicarla per 2: si è ottenuta un'equazione in cui le y hanno lo stesso coefficiente;

espandere l'espressione con il comando Expand;

selezionare quest'ultima espressione e digitando + (3x − 2y=1) (*appare la scritta ans(1) che indica il contenuto dalla risposta precedente*) si ottiene la somma membro a membro in cui è scomparsa la y;

non resta che dividere il risultato per 13 per ottenere la soluzione in x; per la y basta utilizzare il comando Solve e risolvere una qualsiasi delle due equazioni con la condizione che x=7/13 rispetto alla x.

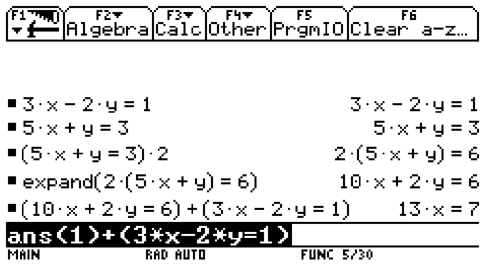


fig.6

Per studenti un po' più grandi che hanno già parlato di trasformazioni, di vettori e matrici si possono appunto usare le matrici:

digitare [3,-2;5,1]->matrice (*la matrice del sistema*)

[1;3]->vett (*il vettore dei termini noti*)

simult(matrice,vett) : restituisce il risultato del sistema sotto forma di vettore [7/13; 4/13]

La virgola separa gli elementi nella stessa riga, il punto e virgola separano le righe.

Anche senza assegnare la matrice o il vettore a delle variabili si può procedere per esteso:

simult([3,-2;5,1],[1;3]

Nella riga sopra compaiono scritte esplicitamente la matrice e il vettore (sulla sinistra) e il risultato (sulla destra).

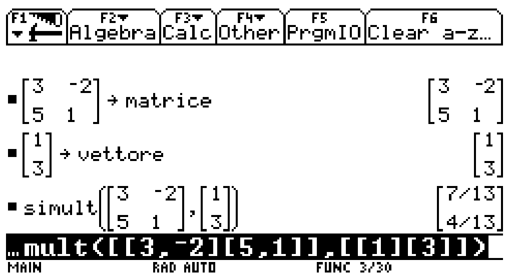


fig.7

Immagino che quando si ha a che fare con una parabola passante per tre punti questa sia la via più conveniente.

Abbiamo anche dato qualche definizione e sistemato le procedure ma senza esagerare (la discussione sulla risolubilità di un sistema è stata rimandata a dopo la verifica).

Problemi emersi durante il lavoro:

1) Non so se l'anticipare in maniera informale l'equazione delle rette nel piano sia positivo per il seguito, non vorrei che le dessero già per studiate e non so come prenderanno il fatto di ricominciarle da capo alla fine dell'anno.

2) Io mi diverto molto, una parte della classe anche, ma una parte è ancora diffidente (soprattutto quelli "bravi"), non vorrei perderne alcuni pur recuperandone altri.

Quella che segue è la verifica che è stata proposta agli studenti con la possibilità di lavorare insieme e di discutere.

Verifica strutturata a coppie; (un'ora)

$2x + y = 3$
$x - y = 4$

$2x + y = 3$
$x + y/2 = 3/2$

$2x + y = 3$
$4x + 2y = 8$

Per ognuno di questi sistemi (separatamente) andate in ambiente Table e fate la tabella;

aggiungete in y=editor la funzione $y3 = y2 - y1$

Che differenze noti analizzando la colonna y3?

Fate il grafico di tutti e tre i casi (separatamente) e interpretate quello che appare; cercate di trarne tutte le possibili deduzioni.

Fra questi sistemi ce n'è uno che ha una sola soluzione: trovatela utilizzando:

a) il comando with

b) la possibilità di moltiplicare (dividere) un'equazione per un numero e sommarla (sottrarla) all'altra in modo da mandar via un'incognita; usate ans().

c) con carta e penna come meglio credete.

Nel seguente sistema
$135x - 27/8y = 9$
$-5/6x + 7y = 28/5$
quale dei metodi che conosci ti conviene usare?

5. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI 2° GRADO

Sandra Cini
Liceo scientifico "F. D'Assisi" -Roma

Classe: seconda di corso tradizionale
Obiettivi: comprensione del significato di radice di un'equazione e studio del segno di un trinomio di 2° grado
Prerequisiti: teoria dei radicali quadratici; nozioni di geometria analitica con particolare riferimento alla parabola; conoscenza degli ambienti
% '
Tempo: dieci ore
Metodi: metodo della scoperta guidata
Strumenti: TI-92 (una macchina ogni due alunni); lavagna luminosa con view screen; schede con proposta di lavoro; libro di testo

Utilizzo la lavagna luminosa ed il viewscreen ed invito gli alunni a seguire e ripetere sulle loro calcolatrici ciò che faccio. Dapprima mostro come il comando 3 permette di evidenziare una finestra di dialogo attraverso la quale è possibile modificare le impostazioni di modo correnti; con $\boxed{\text{F2}}$ ed il tasto @ è possibile scorrere l'elenco e scegliere l'impostazione desiderata confermando ogni volta. In questo modo dividiamo lo schermo in due parti che possono interagire.

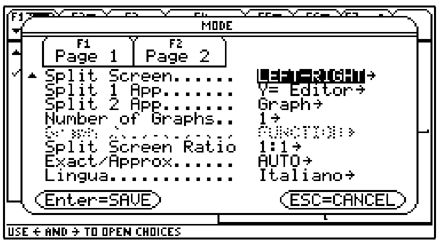


fig. 1

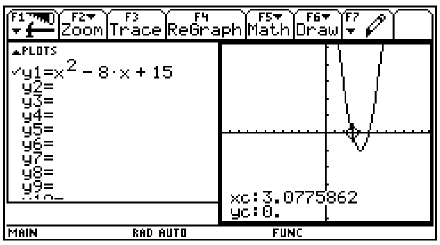


fig. 2

Accediamo all'ambiente # e introduciamo la funzione $y = x^2 - 8x + 15$; mediante i tasti 2 a passiamo all'ambiente % ed analizziamo il grafico della funzione considerata per mezzo dei tasti … e @ che consentono al cursore di descrivere la curva (fig. 2). Propongo quindi il seguente lavoro.

SCHEDA DI LAVORO

Esplora i seguenti grafici:

$y = x^2 + 4x + 5$	$y = -x^2 + 3x - 6$	$y = 4x^2 + 4x + 1$
$y = -x^2 - 2x - 1$	$y = x^2 - 5x + 6$	$y = -x^2 - 6x - 8$

Che posizione hanno nel piano cartesiano le diverse parabole ?
Quale ascissa hanno i loro punti di ordinata nulla?

Passiamo ora ad analizzare insieme il grafico della funzione $y = 4x^2 - 16x + 15$; cerchiamo i valori delle ascisse dei punti di ordinata nulla, ma esplorando con il cursore notiamo che il grafico è poco leggibile perché tali punti risultano troppo vicini. Attivando … e scegliendo dal menu la voce `ZOOM BOX` seguita da ENTER mostro come è possibile "inscatolare" ed ingrandire la parte che ci interessa osservare (fig. 3).

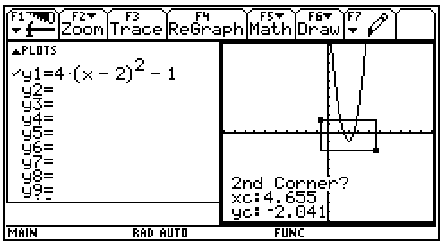


fig. 3

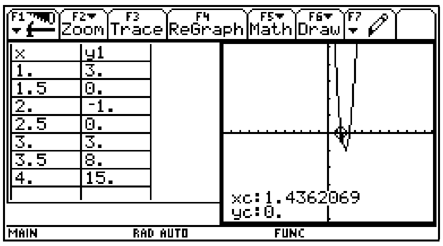


fig. 4

Le ascisse dei punti considerati risultano $x_1 = 3/2$ *e* $x_2 = 5/2$. Infatti algebricamente :

$4x^2 - 16x + 15 = 0$ $\qquad$ $4\,(x-2)^2 - 1 = 0$ $\qquad$ $(x-2)^2 = 1/4$

$x - 2 = 1/2$ *or* $x - 2 = -1/2$ $\qquad$ *cioè* $x_1 = 3/2$ *e* $x_2 = 5/2$

Verifichiamo ulteriormente i risultati trovati premendo 2 a ; così dall'ambiente # possiamo passare a quello ' dove osservare la tabella dei valori della funzione (fig. 4). Faccio notare che il passo della tabella può essere modificato a piacimento attivando una finestra di dialogo mediante il comando & .

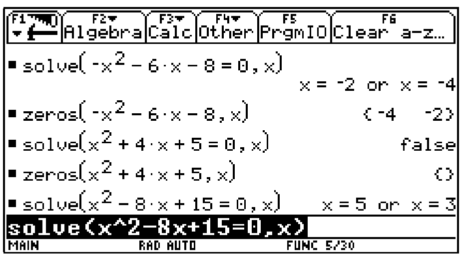
SCHEDA DI LAVORO

In base a quanto hai appreso fino ad ora prova a risolvere le seguenti equazioni:

$x^2 + 4x + 5 = 0$	$-x^2 - 2x - 1 = 0$
$-x^2 + 3x - 6 = 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$
$4x^2 + 4x + 1 = 0$	$-x^2 - 6x - 8 = 0$

Sei sempre in grado di trovare la soluzione?
Quante soluzioni può avere una equazione di secondo grado?
Da cosa dipende il numero di esse?

Attraverso il tasto $\boxed{\texttt{MODE}}$ apriamo la finestra di dialogo e torniamo alla condizione di schermo intero scegliendo dal menu la voce `FULL` e l'ambiente [`HOME`] . Attiviamo il menu di algebra con $\boxed{\text{F2}}$ e scegliamo la funzione `SOLVE` introducendo la seguente istruzione: `solve` ($-x^2-6x-8=0$,x) otterremo così la soluzione dell'equazione data.



La funzione `zeros` dello stesso menu fornisce anch'essa le soluzioni di una equazione ma il suo formato è diverso `zeros(-x`^{2}`-6x-8,x)` $\boxed{\text{ENTER}}$

Possono ora essere verificati i risultati ottenuti nell'ultima scheda di lavoro.

L'impostazione della TI-92 per eseguire il lavoro della prossima scheda è quella indicata in figura 1.

SCHEDA DI LAVORO

Esplora il grafico delle seguenti funzioni:

$y = x^2 - 2x + 5$ $\quad$ $y = x^2 - 4$ $\quad$ $y = x^2 - 2x - 3$

$y = x^2 - 6x + 9$

$y = -x^2 + 6x - 9$ $\quad$ $y = -x^2 + 2x - 5$ $\quad$ $y = -x^2 + 2x - 3$

$y = 3x^2$

Dall'ambiente # passa all'ambiente ' e, dopo aver posto la tabella al passo 0.5, scorrila attentamente; disegna sul tuo quaderno il grafico di ogni funzione ed evidenzia gli intervalli di valori della x per i quali la y assume segno positivo o negativo.

Quali sono i valori della x in corrispondenza dei quali la y cambia segno?

Per quali valori della x risultano vere le seguenti diseguaglianze?

$-x^2 + 2x - 5 < 0$ $\quad$ $-x^2 + 6x - 9 > 0$ $\quad$ $-x^2 + 2x - 3 < 0$

$-9x^2 < 0$

$-4x^2 + 8x - 3 > 0$ $\quad$ $4x^2 - 8x > 0$ $\quad$ $x^2 - 6x + 9 < 0$

$x^2 - 6x + 9 > 0$

$x^2 - 2x - 3 < 0$ $\quad$ $x^2 - 4 < 0$ $\quad$ $x^2 - 2x + 5 > 0$

$3x^2 < 0$

Attraverso il tasto 3 apriamo la finestra di dialogo e torniamo alla condizione di schermo intero scegliendo dal menu la voce FULL e l'ambiente " ; dal menu ALGEBRA scegliamo solve e introduciamo la seguente istruzione:
solve (x^2- 2x + 5>0, x). La TI-92 restituisce x^2-2x>-5 .

Proviamo ancora con solve (x^2-4>0, x) ed otteniamo x^2>4.

Ovviamente la calcolatrice non è in grado di risolvere disequazioni di secondo grado.

Invito quindi gli alunni a proporre altri metodi per la risoluzione di disequazioni in modo da verificare i risultati ottenuti.

Considerazioni: La verifica effettuata contemporaneamente alla scoperta guidata ha messo in luce che gli alunni hanno acquisito più velocemente del previsto conoscenza e competenza dell'argomento trattato, ma hanno altresì mostrato qualche difficoltà di rielaborazione quando posti di fronte a nuove tipologie di problemi.

6. ESPLORARE, CONGETTURARE, DIMOSTRARE: DUE PROBLEMI DI GEOMETRIA

Pierangela Accomazzo
Liceo Scientifico "A. Einstein", Torino

Classe: seconda Liceo Scientifico P.N.I.
Obiettivi: saper formulare una congettura coerente con un insieme di dati ; saper dimostrare la propria tesi
Tempi: circa 8 ore
Strumenti: una TI-92 ogni due studenti

Gli allievi avevano studiato in precedenza le proprietà dei quadrilateri nell'ambito della geometria euclidea ed avevano affrontato alcune dimostrazioni sull'argomento; conoscevano la teoria relativa al teorema di Talete, ma non avevano svolto ancora esercizi in proposito. In ambito cartesiano sapevano lavorare su segmenti (pendenza, lunghezza, punto medio) e su rette (equazione, intersezione).
Avevano pratica del software Cabri - géomètre 1, che usavano in laboratorio di Informatica.

Ho proposto loro il seguente problema aperto:
Costruisci un generico quadrilatero ABCD.
Indica con M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.
Costruisci il quadrilatero MNPQ ; si tratta di un quadrilatero particolare?
MNPQ può essere un rettangolo, o un rombo o un quadrato?
Formula una congettura sulle caratteristiche di MNPQ in relazione alla particolare forma di ABCD.
Dimostra le tue affermazioni con le proprietà della geometria euclidea.

La costruzione del disegno con la TI-92 è molto semplice: con $\boxed{\text{APPS}}$ 8 New, assegnato un nome al file, si entra in ambiente Geometry; ci si serve quindi dei comandi $\boxed{\text{F2}}$ *segment* ed $\boxed{\text{F4}}$ *midpoint* per avere la figura richiesta.
Muovendo i punti del quadrilatero ABCD si ottiene ancora una figura che mantiene le relazioni geometriche richieste: si può quindi dire di avere a disposizione un'intera classe di figure che rispondono ai requisiti del problema.

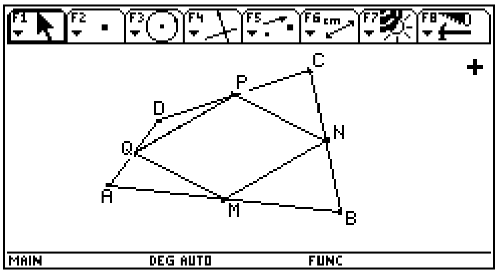


fig. 1

Gli studenti, lavorando a coppie, hanno individuato abbastanza agevolmente la relazione di parallelismo tra i lati di MNPQ. Alcuni hanno ritenuto opportuno introdurre la misura di alcuni lati (si ottiene con ˆ *distance*) che, pur con qualche imprecisione legata alle modalità di misura di Cabri, dava un'idea della congruenza fra segmenti. Più difficile è stata invece la ricerca delle condizioni di ABCD che davano origine ad un particolare parallelogrammo MNPQ: alcuni allievi si sono fermati a situazioni particolari, affermando ad es. che

- perché MNPQ sia un rombo, ABCD deve essere un rettangolo
- perché MNPQ sia un rettangolo, ABCD deve essere un rombo.

In questi casi è stato utile 'muovere' i vertici di ABCD mostrando situazioni più generali che davano origine a particolari quadrilateri interni.

Il dimostrare che MNPQ è un parallelogramma non ha dato difficoltà: alcuni studenti hanno intuito l'utilità di tracciare la diagonale AC ed hanno comunicato ai compagni la scoperta.

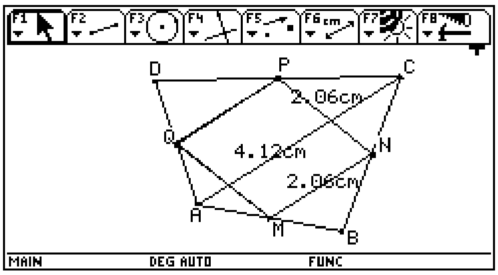


fig. 2

Questa modifica grafica ha facilitato la scoperta di relazioni tra lati di MNPQ e diagonali di ABCD ed ha fatto sì che alcuni allievi riformulassero le congetture relative alla seconda parte del problema. Per poter individuare più facilmente le situazioni particolari, qualche gruppo ha ritenuto opportuno introdurre la misura di lati o angoli che dava un'idea per la ricerca della congruenza.

L'attività si è conclusa con una discussione in cui si mettevano in comune gli elementi acquisiti e quelli dubbi; gli allievi hanno quindi stilato individualmente una dimostrazione che io ho ritirato e corretto.

A distanza di una settimana ho proposto un altro problema:

E' dato il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC. Costruisci sui cateti, esternamente ad ABC, i due quadrati ASTC e APQB.
In che relazione sono i punti Q, A, T ?
In che relazione sono le rette PB ed SC ?
Di che natura è il quadrilatero PBCS ? Può essere un parallelogramma?
Dimostra le tue affermazioni scegliendo l'ambiente della geometria euclidea o l'ambiente della geometria analitica.

Inizialmente è stata costruita una figura di questo tipo, lavorando sull'ambiente 'euclideo' di Cabri.

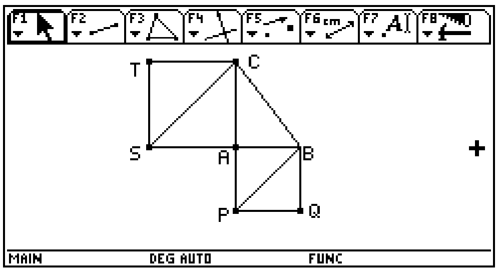


fig. 3

Alcuni allievi hanno scelto di 'immergere' la figura in un piano cartesiano (Š *format coordinate-axes rectangular*), rilevando le coordinate di alcuni punti.

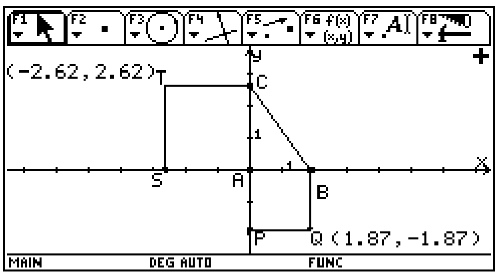


fig. 4

Ho preferito non introdurre la verifica automatica dell'allineamento o del parallelismo che Cabri2 prevede († *check property*). Anche questa attività si è conclusa con un'ampia discussione e con la correzione delle dimostrazioni prodotte individualmente.
Ha fatto seguito una verifica individuale in cui ogni allievo aveva a disposizione una TI-92 su cui erano state memorizzate le figure relative alle due attività di gruppo.

Per concludere: Cabri2 su personal computer è certo più agile nel dragging e più incisivo nella grafica rispetto all'analogo software della TI-92. Quest'ultimo ha, tuttavia, il grosso pregio della disponibilità immediata durante le lezioni e della possibilità d'uso durante le verifiche individuali.

7. LABORATORIO DI GEOMETRIA

Donata Foà
Liceo Scientifico "F.Buonarroti" Pisa

Classe: seconda liceo scientifico sperimentale (26 alunni)
Obiettivi: affiancare alla geometria assiomatica una geometria sperimentale e costruttiva
Strumenti: una macchina per ogni alunno

Usare Cabri come approccio alla geometria delle trasformazioni è stato per me un esperimento per due motivi: primo perché era la prima volta che lo usavo in assoluto, secondo perché Cabri (soprattutto Cabri1) era tradizionalmente considerato più adatto per la geometria euclidea, per le costruzioni con riga e compasso, anziché per le trasformazioni del piano.

Gli alunni hanno iniziato questo percorso sulle TI-92 alla fine dell'anno, quando già avevano dimestichezza con la macchina e dopo aver lavorato un paio di ore in laboratorio con lo schermo grande e un vero mouse.

Lo scopo che mi prefiguravo era il seguente: introdurre gli studenti nell'ambiente della geometria senza che questo costituisse uno scoglio, un trauma; far sì che le dimostrazioni, che pure andavano fatte, non costituissero un blocco monolitico di logica deduttiva, ma fossero il naturale sbocco di esperienze individuali, più o meno corrette, ma sempre motivanti per il solo fatto di esistere; costituissero insomma il momento della discussione delle loro proposte e della risistemazione assiomatica.

Siamo partiti da problemi affrontabili solo con i ricordi della scuola media che coinvolgessero però la nozione di distanza dal momento che questo è il concetto portante delle isometrie:

1) Primo punto: sono assegnati tre segmenti nel piano:

AB di lunghezza 3.80 cm, CD di lunghezza 4.40 cm e EF di lunghezza 4.14 cm. Costruire il triangolo che ha per lati tre segmenti uguali a questi. Usare i comandi: trasporto di misura e compasso.

Secondo punto: ora cambia le misure dei tre segmenti (puoi farlo trascinando uno degli estremi dei segmenti) e siano AB=4.40 CD=1.73 EF=2.43. Osserva cosa succede.

Terzo punto: cambia ancora le misure AB=4.40 CD= 1.50 EF=6.17. Osserva cosa succede e cerca di dedurre tutte le condizioni che devono soddisfare i tre segmenti

affinché il triangolo si possa formare.

2) Un'isola è a forma di poligono non regolare (puoi considerare un triangolo per semplicità) il cui perimetro è 30 Km. Le barche non possono allontanarsi più di 6 miglia dalla costa; costruisci il settore di mare in cui si possono muovere; quanto vale l'area? e se si estende a 12 miglia il permesso di navigazione come varia l'area della parte navigabile? Scrivi le procedure che usi e le deduzioni che fai.

Gli alunni hanno reagito molto bene all'operazione di "dragging", ne hanno capito l'importanza per la validazione delle proprietà delle figure, hanno fatto gli errori necessari e utili; hanno imparato a verbalizzare le procedure.

Col procedere nello studio delle isometrie (simmetria assiale, simmetria centrale) e delle figure con simmetrie ci siamo fermati sul problema di Erone e le sue varianti;

Il problema iniziale era così formulato:

Data una retta e due punti che appartengono allo stesso semipiano trovare il cammino più breve per andare da un punto all'altro toccando la retta.

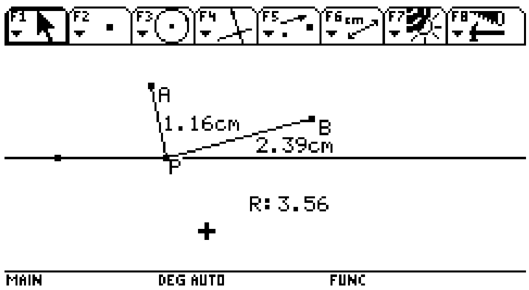


fig.1

La fig. 1 mostra la costruzione del percorso al variare del punto sulla retta.

La prima risposta che hanno dato è stata: il punto sulla retta deve essere la proiezione di uno dei due punti; la seconda: il punto medio delle due proiezioni. Tutto questo con giustificazioni alquanto discutibili ma non per questo inutili. Allora abbiamo inserito le distanze e il calcolo della somma delle due distanze. E' risultato chiaro che le risposte precedenti non trovavano nessuna convalida con le misure; quindi si doveva trovare un'altra strada, ma quale?

Il suggerimento di considerare il punto simmetrico è venuto da me (vedi fig. 2); a questo punto al variare del punto sulla retta alcuni hanno capito in che punto la somma delle distanze era più piccola ma non erano ancora convinti che fosse l'unico punto possibile. Allora abbiamo costruito la tabella in ambiente Data Matrix con l'istruzione F6 Collect Data, Define Entry, Store Data.

A questo punto al variare del punto sulla retta alcuni hanno capito in che punto la somma delle distanze era più piccola ma non erano ancora convinti che fosse l'unico punto possibile.

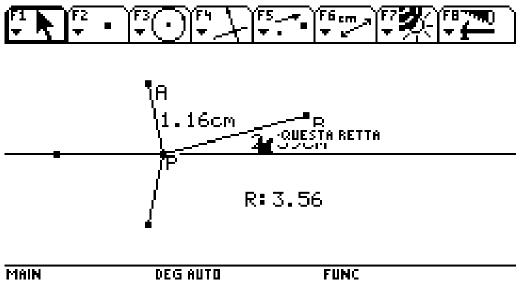


fig.2

Allora abbiamo costruito la tabella in ambiente Data Matrix con l'istruzione F6 Collect Data, Define Entry, Store Data.

In F8 abbiamo digitato Data View ed è comparso lo schermo diviso in due come in fig. 3;

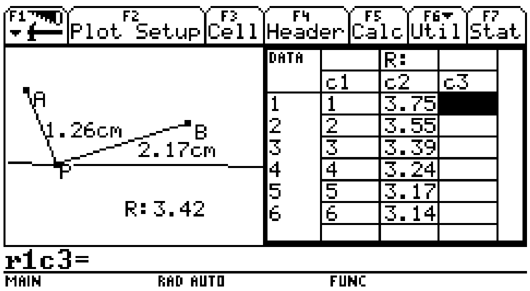


fig.3

al variare del punto, dalla posizione di una proiezione a quella dell'altra, con l'istruzione Store Data si riempiva la colonna c1 e dopo 8 prove abbiamo analizzato i dati; prima abbiamo inserito una colonna vuota c1 in cui abbiamo messo 1,2,3,4,5,6,7,8 per poter fare un plot con due variabili, poi abbiamo definito il plot con c1 in x e c2 in y a abbiamo fatto il grafico: i punti appartenevano ad una figura dotata di minimo (non hanno ancora la geometria analitica e la parabola) e questo minimo corrispondeva proprio al punto in cui il segmento fra il simmetrico del primo e il secondo tagliava la retta. (vedi fig. 4).

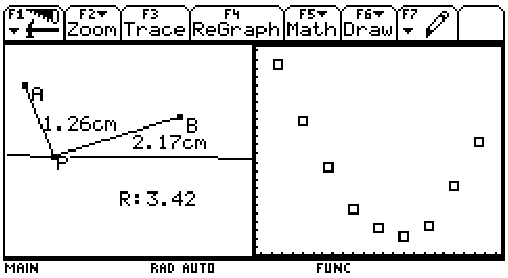


fig.4

A questo punto la dimostrazione del perché il minimo si aveva in quell'intersezione è risultata quasi ovvia sulla base della disuguaglianza triangolare.

Certo tutto poteva essere fatto senza la macchina ma elementi come: la presa dei dati, le congetture giuste o sbagliate, l'uso di un grafico che mostra un minimo, l'uso delle misure sperimentali, tutto questo poteva essere fatto solo con la macchina ed è questo che ha stimolato il coinvolgimento dei ragazzi e ha fatto sì che la dimostrazione finale fosse accettata con una piena disponibilità.

Le successive varianti sono state le seguenti:

1) Dato un angolo e due punti interni ad esso trovare il percorso minimo per andare da A a B toccando i due lati (fig. 5)

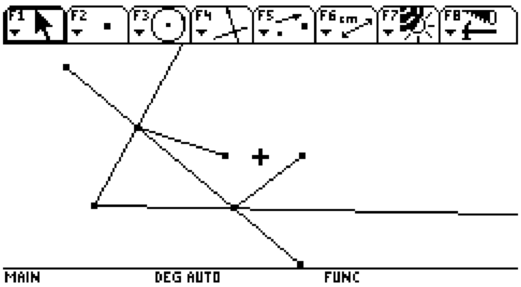


fig.5

2) Dato un quadrato e un punto su uno dei lati trovare il percorso minimo per tornare allo stesso punto toccando tutti i lati. (fig. 6)

Gli esempi che sono stati utilizzati sono : il biliardo e gli specchi

Questo problema è stato scomposto in due fasi:

la prima in cui si chiedeva:

dati due punti P e Q su due lati opposti di un quadrato qual è il percorso minimo per andare da P a Q e quindi da Q a P?

la seconda: come deve essere scelto Q affinché tale minimo percorso parta da P e ritorni in P.

La soluzione è unica o varia al variare di P? Quanto è lungo il minimo cammino rispetto al lato del quadrato?

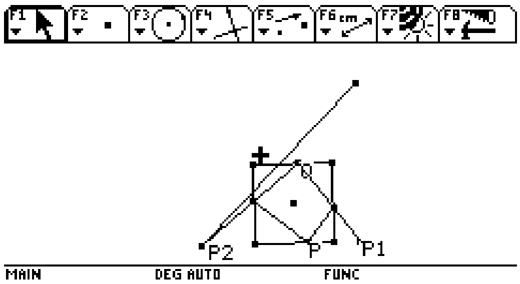


fig.6

Lo studio di triangoli e parallelogrammi con simmetrie, il rapporto di proiezione e i teoremi di Pitagora e di Euclide hanno completato questo percorso attraverso la geometria.

Considerazioni complessive:

Una prima considerazione interessante mi sembra la seguente: di solito quando si disegna a mano un triangolo isoscele si cerca automaticamente di fare due lati uguali, ma quando si usa Cabri la cosa più semplice e più significativa è costruire un triangolo con una simmetria assiale, partendo proprio dalla definizione. Lo stesso se si deve tracciare un parallelogramma: la costruzione di due lati opposti uguali e paralleli è estremamente complessa mentre l'uso di una simmetria centrale è agile e significativa. Naturalmente questo può essere un vantaggio o uno svantaggio a seconda del tipo di strada che si intraprende.

La seconda osservazione riguarda la reazione degli studenti: si sono divertiti e questo mi sembra già un successo.

La terza riguarda il loro modo di lavorare in classe anche durante le verifiche: sono scomparse le copie; ognuno (tranne un paio di alunni) ha lavorato con la propria testa in maniera diversa l'uno dall'altro, verbalizzando le procedure messe in atto. Sono scomparsi gli "impliciti", la delega alla comprensione dell'insegnante. C'è insomma molta più chiarezza nella esposizione delle procedure e questo implica una maggiore chiarezza nella sistemazione dei concetti.

8. SIMULAZIONE DEL LANCIO DI DUE DADI

Donata Foà
Liceo Scientifico "F.Buonarroti" Pisa

Classe: prima indirizzo scientifico (25 alunni)
Obiettivi: utilizzare la macchina per fare una congettura sulla probabilità dell'evento somma di due dadi e la frequenza relativa
Tempi: 12 ore
Strumenti: una macchina ciascuno
Prerequisiti: definizione di probabilità e calcolo di probabilità di eventi indipendenti

Ho cominciato con questo argomento a far lavorare gli studenti con la macchina e questo ha portato alla necessità di descrivere almeno nelle linee essenziali i diversi ambienti. La classe è di livello piuttosto alto, vivace e curiosa, e ha seguito il percorso divertendosi e cogliendo lo spirito del lavoro.

Questa è la scheda di lavoro proposta agli studenti,

Il lavoro è stato compiuto da loro ma sotto la mia guida, attraverso il view screen e la lavagna luminosa.

Scheda di lavoro

Gli 'ambienti' presenti nella macchina sono quelli indicati nella fig.1

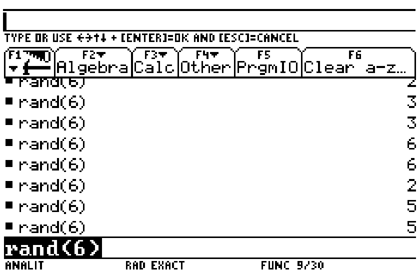


fig.1

fig.2

1) L'ambiente Home è l'ambiente di calcolo e consiste in una riga in cui si scrivono le istruzioni , una parte sinistra dello schermo dove appare ciò che è stato digitato e in una parte destra in cui vengono effettuati i calcoli; noi

vogliamo simulare il lancio di un dado, anzi di due dadi. Gli eventi devono essere i numeri da 1 a 6 e devono essere casuali.

Esiste una funzione che si chiama *rand* (random vuol dire a caso) che opera nel seguente modo: *rand()* genera a caso un numero fra 0 e 1, *rand(6)* genera a caso un numero fra 1 e 6.
In generale *rand(n)* produce un numero a caso fra 1 e *n*. (fig.2)

2) Possiamo procedere così molte volte però andare avanti di lancio in lancio equivale a gettare manualmente i dadi; possiamo fare meglio istruendo la macchina a generare un'intera sequenza di numeri a caso, magari di 10 numeri o di 50 o anche di 100.

L'istruzione è la seguente: *Seq(rand(6),n,1,10)*

Impariamo a leggerla e a interpretarla:

Seq vuol dire sequenza, successione, insieme di numeri messi in certo ordine;

dentro la parentesi occorre definire il tipo di numeri che vogliamo mettere in sequenza, in questo caso i numeri a caso fra 1 e 6, e quanti ne vogliamo, in questo caso 10.

La *n* che compare prima dell'1 vuol dire “per *n* che va da 1 a 10”

Sullo schermo appaiono 10 numeri in una parentesi graffa.

battete Enter più volte; cosa notate?

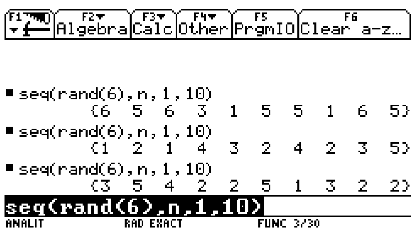


fig.3

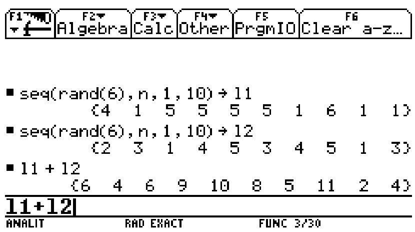


fig.4

I 10 numeri che appaiono nella parentesi graffa costituiscono una ‘lista’ cioè un insieme ordinato di numeri; nella figura 4 abbiamo messo la prima sequenza in una variabile che chiamiamo l1 e la seconda in l2 attraverso il comando STO (*to store* vuol dire immagazzinare) accanto alla barra spaziatrice.

se volete sapere quale è il terzo numero basta scrivere nella riga di scrittura l1[3], per il decimo l1[10].

Le liste si possono sommare fra di loro, il primo elemento col primo elemento e così via.

Però anche avere liste di dieci numeri a caso, anche se si possono sommare, è solo un primo passo per la simulazione di tanti lanci.

3) Dall'ambiente Home dove vi trovate andate su APPS, selezionate Data/Matrix Editor, poi Enter, infine selezionate New e poi Enter: vi viene chiesto il tipo: lasciate Data, il Folder: lasciate Main, il nome: chiamatelo ‘dadi’ e poi Enter due volte.

Entrate in un ambiente fatto di righe e di colonne: è l'ambiente dove si inseriscono gli esiti dei lanci e dove si elaborano i risultati.

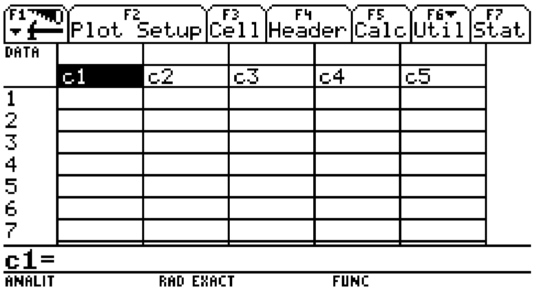


fig.5

Il cursore vi permette di andare in giro per la scacchiera; posizionatevi su c1 e pigiate Enter: nella riga di editing in basso dovete scrivere l'istruzione che genera una sequenza di numeri a caso fra 1 e 6 come avete fatto in Home: *seq(rand(6),n,1,50)* (qui possiamo fare contemporaneamente 50 o anche più lanci).

Se si vuole il lancio di un secondo dado occorre metterlo nella seconda colonna c2; quindi, posizionandovi col cursore su c2, battete Enter e scrivete la stessa istruzione.

Ora le due colonne sono piene di 50 numeri fra 1 e 6 prodotti a caso.

Se vogliamo la somma dei due dadi occorre andare su c3 e scrivere nella riga di editing c1+c2.

Ora nella terza colonna ci sono numeri compresi fra 2 e 12.

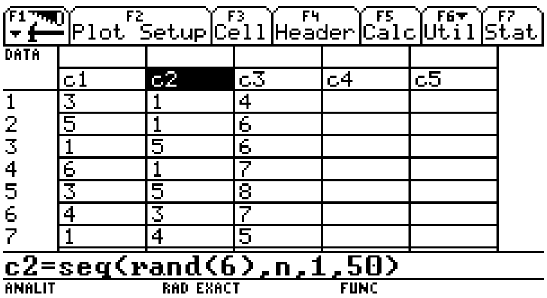


fig.6

4) Come fare a sapere quanti lanci hanno dato come risultato 2, 3, 4, 5, ,....12?

Andate su F2 (Plot setup) e poi su F1 (Define). (fig.7 e 8)

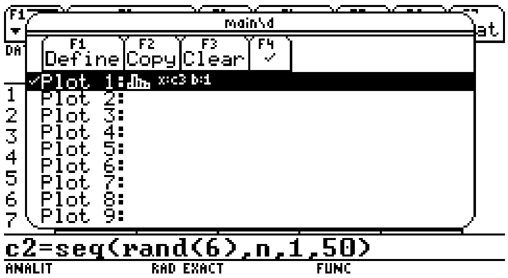


fig.7

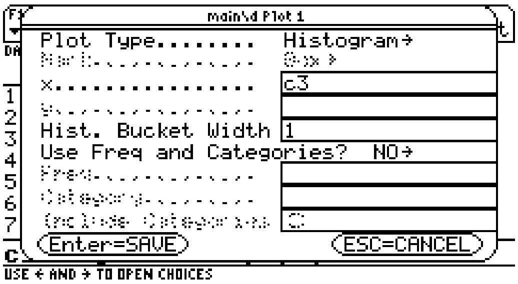


fig.8

Si apre una finestra in cui vi viene chiesto il di selezionare il tipo di Plot: scegliete Histogram e poi Enter due volte.

5) Digitare Apps per cambiare ambiente e andare in ambiente Graph (grafico), su F2 selezionate Zoom Data e pigiate Enter.

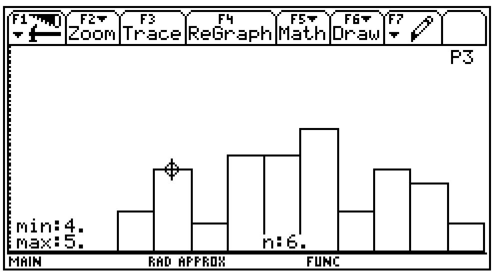


fig.9

Dovrebbe apparire un grafico a scale.

Se questo non accade vuol dire che c'è un problema di scala per cui le colonnine non entrano nello schermo;

In questo caso pigiate Apps Window Editor e scrivete le dimensioni che ritenete ragionevoli per lo schermo: per la x serve un intervallo da 1 a 13 e per la y sarà necessario avere un intervallo da 0 a 20.

Quando vi appare il grafico pigiate F3 e vedrete comparire un cerchietto lampeggiante che potete spostare col cursore: se lo spostate cambiano i numeri dello schermo.

Cosa indicano i numeri che compaiono?

6) Per ogni numero, da 2 a 12, scrivete quanti eventi avete ottenuto.

Ripetete l'operazione almeno 10 volte e, sul quaderno, sommate le frequenze dei vari lanci in modo da aver simulato 500 lanci.

7) In ambiente Home, utilizzando la macchina come una normale calcolatrice, sommate i numeri che ciascuno di voi ha ottenuto per le uscite possibili: 2,3,4,….12

Dovreste totalizzare circa 10000 lanci e per ogni evento somma avrete un numero che rappresenta la frequenza assoluta.

8) In Data Matrix Editor aprite un nuovo file e chiamatelo freq.

Inserite in c1 i possibili esiti dei lanci, ovvero gli eventi possibili;

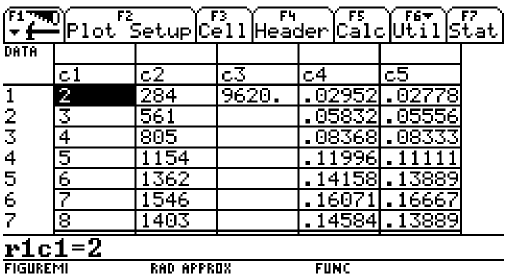
in c2 il numero di uscite che avete ottenuto per ogni evento;

in c3 il numero totale dei lanci;

in c4 fai il rapporto fra il numero di volte che avete ottenuto i singoli eventi e il numero totale dei lanci;

in c5 inserite la probabilità di ciascun evento "somma" calcolata come sapete fare come rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

I dati in figura rappresentano quello che avete ottenuto su 9620 lanci



	c1	c2	c3	c4	c5
1	2	284	9620.	.02952	.02778
2	3	561		.05832	.05556
3	4	805		.08368	.08333
4	5	1154		.11996	.11111
5	6	1362		.14158	.13889
6	7	1546		.16071	.16667
7	8	1403		.14584	.13889

Fig.10

9) Adesso vogliamo vedere in un grafico a dispersione XY che relazione c'è fra i rapporti che stanno in c4 e le probabilità che stanno in c5;

andate in Window Editor e sistemate i parametri dello schermo in modo che si veda qualcosa: tenete conto che gli esiti sono numeri compresi fra 2 e 12, mentre i rapporti sono compresi fra 0 e 0.2

10) Ritornate nel file di Data Matrix e andate in Plot Setup, selezionate Plot2 poi F1 Define e inserite i dati che volete rappresentare, questa volta in un grafico a dispersione, Scatter, o meglio xyline:

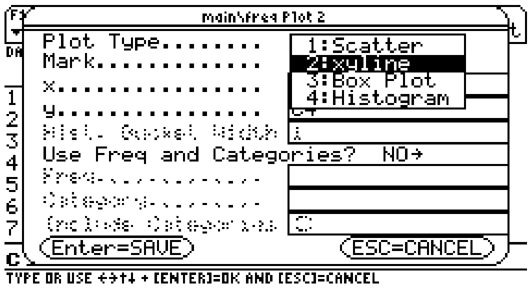


fig.11

in x inserite c1, in y c4;

Fate la stessa cosa selezionando Plot3 con la differenza che questa volta in y mettete c5

Adesso potete andare in Graph e vedere cosa succede.

Questo è il grafico relativo ai 9620 lanci

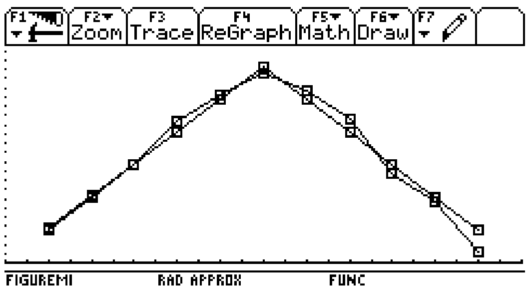


Fig.12

Sulla base del percorso che avete seguito rispondete alle seguenti domande:

1) Quali deduzioni vi sembra di poter ricavare da questo grafico?

2) Se doveste simulare il lancio di tre dadi come vi comportereste potendo utilizzare la macchina?

3) Quale pensate che sia l'evento più probabile nel lancio di tre dadi?

4) Se doveste simulare il lancio di due monete come potreste utilizzare il procedimento che avete seguito per i due dadi?

5) Come potreste valutare sperimentalmente se è maggiore la probabilità che escano facce uguali o facce diverse?

Alcune considerazioni:

1) Trattandosi di una prima, nella fase finale del lavoro e della discussione degli esercizi, mi sono limitata a discutere le loro intuizioni in maniera un po' ingenua, senza addentrarmi in campi più delicati del tipo: è proprio vero che al crescere del numero dei lanci la frequenza relativa tende alla probabilità o questo fatto è solo più probabile?
E' vero che su un grande numero di lanci il numero di uscite di testa o croce tende allo stesso numero?
Le risposte a quesiti di questo genere non sono adatte ad una prima, ma possono essere un buon punto di partenza per un approfondimento negli anni successivi.

2) L'uso della macchina è risultato indispensabile per introdurre questo secondo approccio alla probabilità, e l'integrazione dei diversi ambienti è emersa in tutta la sua potenzialità. L'unico punto un po' faticoso, dal punto di vista didattico, è stato il sovrapporsi di un gran numero di informazioni nuove; la tendenza degli studenti è stata quella di porre più attenzione alla propria macchina anziché alle istruzioni date coralmente a tutti, con conseguente dispersione del lavoro; ma credo che sia un fatto inevitabile con ragazzi così piccoli e alla prima esperienza.

9. FUNZIONI ED EQUAZIONI

Nicoletta Nolli
Liceo Scientifico "G. Aselli" Cremona

Classe: terza Liceo scientifico P.N.I.

Obiettivi:
- conoscere ed utilizzare gli ambienti `Y=Editor`, `Home`, `Table` e `Graph` della TI-92
- determinare le proprietà del grafico di una funzione (insieme di definizione, zeri, segno, monotonia, continuità)
- costruire grafici di funzioni con tecniche grafiche
- risolvere e discutere equazioni e disequazioni, anche irrazionali e modulari all'interno dello studio di funzioni

Tempi: 20 ore + 80' di verifica finale

Strumenti:

11 calcolatrici per i ragazzi (1 calcolatrice ogni due alunni), 1 calcolatrice per l'insegnante, 1 viewscreen, 1 lavagna luminosa, libro di testo

Metodi:

L'attività si è articolata in **sette fasi** che hanno alternato diverse modalità di lezione e diverse modalità di utilizzo della calcolatrice: lezioni dialogate nelle quali ho utilizzato la calcolatrice con il viewscreen, lezioni guidate nelle quali i ragazzi con la calcolatrice hanno seguito le mie indicazioni , lavori di gruppo ed esercitazioni nelle quali i ragazzi liberamente hanno utilizzato la calcolatrice

DESCRIZIONE DELLE FASI PIÙ SIGNIFICATIVE DELL'ATTIVITÀ

1° Fase

Due ore di lezione in cui ho usato la calcolatrice con il viewscreen . I ragazzi non conoscono il funzionamento della calcolatrice.

CONTENUTI :
- insieme di definizione, zeri e segno di una funzione
- passaggio da $y = f(x)$ a $y = -f(x)$ e $y = |f(x)|$ sia dal punto di vista del grafico che da quello dell'equazione
- passaggio da $y = f(x)$ a $y = f(x+h)$ e $y = f(x)+k$
- funzioni definite a tratti

Vengono inserite nell’ambiente `Y=Editor` successivamente le funzioni:

$$y1(x) = \frac{1}{x-2}, \quad y2(x) = \sqrt{x+1}, \quad y3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y4(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

e di ognuna viene visualizzato il grafico nell’ambiente `Graph.` Chiedo alla classe di determinare l’insieme di definizione della prima funzione:

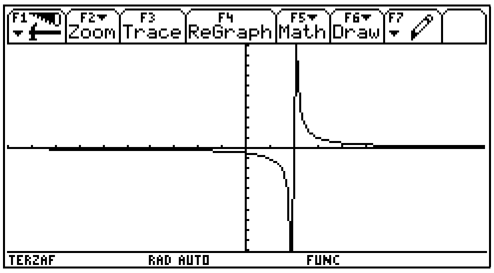
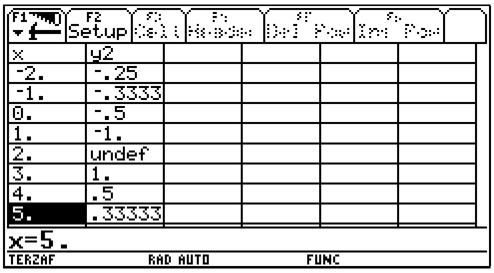


fig.1

alcuni ragazzi rispondono tutto R, mentre una ragazza interviene notando lo “strano tratto verticale” che sembra esserci in corrispondenza di x=2 e propone di calcolare alcuni valori della funzione. Presento allora l’ambiente `Table` , che permette di tabulare una funzione, ed evidenzio che la calcolatrice in corrispondenza di x=2 restituisce “`undef`”.



x	y2
-2.	-.25
-1.	-.3333
0.	-.5
1.	-1.
2.	undef
3.	1.
4.	.5
5.	.33333

x=5.

TERZAF RAD AUTO FUNC

fig.2

Dopo una animata discussione sul perché nel grafico compaia il “tratto verticale”, ritengo necessario motivare algebricamente i risultati ricavati partendo dall’espressione analitica della funzione. Si procede allo stesso modo per le altre tre funzioni; intanto il clima nella classe si è animato: gli interventi dei ragazzi diventano sempre più frequenti proponendo modi di procedere diversi.

Rappresento i grafici di $y3(x)$ e $y4(x)$ e le rispettive tabulazioni:

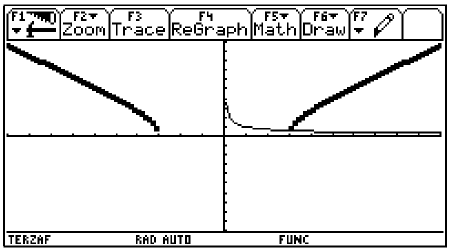
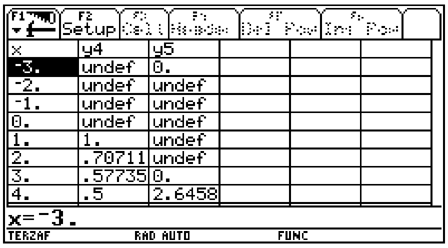


fig. 3



x	y4	y5
-3.	undef	0.
-2.	undef	undef
-1.	undef	undef
0.	undef	undef
1.	1.	undef
2.	.70711	undef
3.	.57735	0.
4.	.5	2.6458

x=-3.

TERZAF RAD AUTO FUNC

fig. 4

Il confronto del grafico e poi del valore della terza funzione in x=0 e della quarta funzione in x=–3 o x=3 è particolarmente interessante: un ragazzo riesce a motivare la differenza e quindi a generalizzare il calcolo dell'insieme di definizione nel caso di una funzione irrazionale fratta e nel caso di una funzione irrazionale intera. I risultati "intuiti" con l'uso della calcolatrice vengono sempre motivati dall'analisi dell'espressione algebrica della funzione.

Si passa quindi ad analizzare per ciascuna funzione gli zeri ed il segno. Nel cercare gli zeri della prima funzione una ragazza propone di tabularla per valori molto grandi di x: non è sicura che il grafico della funzione tocchi l'asse x. Anche in questo caso richiedo ai ragazzi una motivazione algebrica delle conclusioni che possono solo essere intuite con la calcolatrice.
Inserisco quindi in ambiente `Y=Editor` le seguenti espressioni

$$y5(x) = -y1(x) \qquad \text{e} \qquad y6(x) = \frac{1}{2-x}$$

e ne visualizzo il grafico. Sia il legame algebrico tra le equazioni che quello tra i grafici è individuato da tutta la classe senza difficoltà. Un ragazzo chiede di effettuare la stessa trasformazione anche sulle altre funzioni.

Vengono quindi introdotte le funzioni

$$y10(x) = |x| \qquad \text{e} \qquad y11(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, else \end{cases}$$

(nella riga di comando si digita `y10(x)=abs(x)` e `y11(x)=when(x>0,x,-x)`, il confronto tra i grafici e la tabulazione delle due funzioni offre lo spunto per ripassare il concetto di modulo. Inserendo la funzione

$$y12(x) = |y1(x)|$$

e visualizzando contemporaneamente i grafici di $y1(x)$ e $y12(x)$ viene ricavato il legame tra i due grafici. A questo punto un ragazzo propone di riscrivere la funzione $y12(x)$ in modo analogo alla $y11(x)$ e propone questa scrittura

$$y13(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, x>0\\ -\dfrac{1}{x-2}, else\end{cases}$$

Si passa a fare il grafico di $y12(x)$ e di $y13(x)$ e con stupore di una parte della classe si nota che i due grafici non sono uguali:

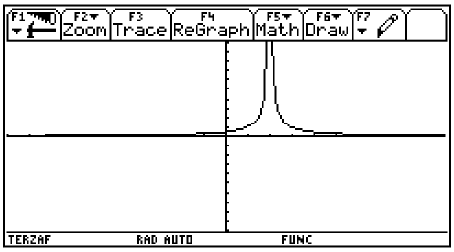


fig.5

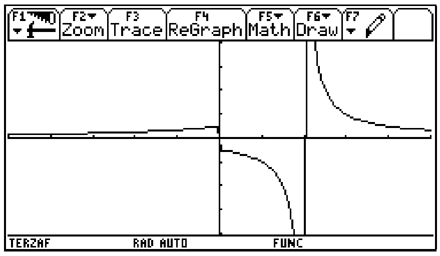


fig.6

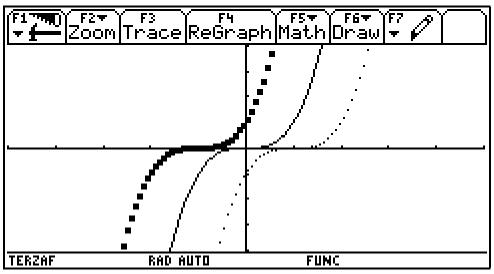
Dopo un po' di discussione, che comporta il riesame del significato del modulo, viene proposta da parte dei ragazzi la scrittura corretta.

L'attività procede, abbastanza velocemente, con l'esame delle seguenti funzioni:

$$y14(x)=x^3\ ,\quad y15(x)=x^3+1,\quad y16(x)=x^3-1,$$

$$y17(x)=(x+1)^3,\quad y18(x)=(x-1)^3,\quad y19(x)=(x-2)^3-1$$

Anche in questo caso le considerazioni degli alunni sono significative. Molti propongono altre funzioni per controllare le intuizioni espresse durante la discussione. Il legame algebrico tra la $y14(x)$ e la $y17(x)$ e $y18(x)$ non viene colto in modo immediato ma dopo ampia discussione.



La lezione condotta con l'uso della calcolatrice e del viewscreen è risultata molto più interessante e dinamica (i ragazzi sono stati invitati ad esprimere un parere alla fine della lezione). Ai ragazzi è piaciuta molto la possibilità di verificare con rapidità congetture ed esplorare situazioni nuove.
I tempi rispetto ad una lezione normale si sono accorciati, la partecipazione della classe è stata nel complesso più attiva e si è avuto un coinvolgimento maggiore anche degli studenti meno brillanti.
L'attività ha inoltre offerto lo spunto per riflettere sui limiti dello strumento e sulla necessità di interpretare e motivare i risultati ottenuti.

4° Fase
Un ora di lavoro di gruppo (5 gruppi con 4/5 ragazzi per gruppo), due ore di intergruppo in cui ragazzi presentano il loro lavori e i risultati vengono sistematizzati.
I ragazzi possiedono una discreta dimestichezza con gli ambienti `Y= Editor`, **`Graph`** e `Table` della calcolatrice.
CONTENUTI :

- insieme di definizione, zeri e segno di una funzione
- passaggio da $y = f(x)$ a $y = f(-x)$ e $y = f(|x|)$ sia dal punto di vista del grafico che da quello dell'equazione

Scopo dell'attività è di rinforzare alcuni concetti presentati nelle lezioni precedenti e soprattutto di "scoprire" il legame algebrico tra le equazioni di alcune funzioni e le trasformazioni geometriche che ne legano i grafici.
Questo è il testo della proposta di lavoro assegnata:

PROPOSTA DI LAVORO n.1
Tempo: 1h

Siano date le funzioni:

$$y1(x) = x^2 - x - 6 \qquad \text{e} \qquad y2(x) = \frac{6-2x}{x-4}$$

1. Tracciane il grafico e determinane l'insieme di definizione, gli zeri e il segno.
2. Traccia il grafico delle funzioni:

$$y3(x) = x^2 + x - 6 \qquad \text{e} \qquad y4(x) = \frac{2x+6}{x-4}$$

   a) Deduci dai grafici delle quattro funzioni quale trasformazione geometrica lega $y3$ a $y1$ e $y4$ a $y2$

b) Ricava il legame algebrico tra le equazioni di $y3$ e $y1$, e quello tra $y4$ e $y2$.

3. Traccia il grafico delle funzioni:

$$y5(x) = x^2 - |x| - 6 \qquad \text{e} \qquad y6(x) = \frac{6 - 2|x|}{|x| - 4}$$

a) Deduci dai grafici delle quattro funzioni quale trasformazione geometrica lega $y5$ a $y1$ e $y6$ a $y2$

b) Ricava il legame algebrico tra le equazioni di $y5$ e $y1$, e quello tra $y6$ e $y2$.

Solo due gruppi presentano la risoluzione completa ed esatta della proposta di lavoro. Le difficoltà maggiori si sono riscontrate nell'esprimere il legame algebrico tra le equazioni, più che nell'individuare le trasformazioni nei grafici (tutti i gruppi hanno saputo rispondere ai punti a) della proposta). In generale il terzo punto della proposta è stato quello che ha creato più difficoltà. I due gruppi che hanno risposto in modo corretto a tutta la proposta di lavoro hanno utilizzato la calcolatrice in modo "intelligente": oltre a graficare le funzioni hanno utilizzato l'ambiente `Table` per confrontare i valori assunti dalle funzioni in corrispondenza degli stessi valori di *x* e l'ambiente `Y=Editor` per controllare le deduzioni sui legami algebrici che avevano fatto. Un gruppo per esempio ha inserito in `Y=Editor` la scritta `y7(x)=y1(abs(x))` e ha confrontato i grafici di `y5(x)` e `y7(x)`.

Una attività di questo tipo ha messo in risalto come l'utilizzo 'critico' dello strumento offra agli studenti un mezzo in più per verificare congetture e controllare risultati, ma allo stesso modo ha evidenziato difficoltà in chi si limita a 'riportare' i risultati della calcolatrice senza interpretarli.

Alla fine dell'intera attività è stata fatta una verifica nella quale ciascun alunno aveva a disposizione una calcolatrice.

Gli esiti della verifica sono stati soddisfacenti (anche se nelle previsioni potevano essere migliori): più della metà della classe ha raggiunto la piena sufficienza, si sono registrati poche gravi insufficienti ed alcuni risultati di ottimo livello.

Il testo della verifica è il seguente (a fianco di ogni esercizio è esplicitato il punteggio relativo) il tempo a disposizione di 80':

Verifica di matematica

1. Considera la funzione di equazione $y = \dfrac{|x-1|(x^2-4)}{x^2-x}$; tracciane il grafico, determinane insieme di definizione, segno, zeri. La funzione è continua in R? In caso di risposta negativa quali condizioni cadono? È imitata? È pari o dispari? Motiva tutte le risposte.

p. 20

2. Traccia il grafico della funzione di equazione $y = f(x) = x^2 + 4x + 3$. Da questo deduci quelli delle funzioni $y = \dfrac{1}{f(x)}$, $y = \sqrt{f(x)} + 2$ e di ognuna determina insieme di definizione, zeri ed eventuali estremi.

p. 20

3. Considera le funzioni

$$y = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2+x} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{3x + x^2 + 2}$$

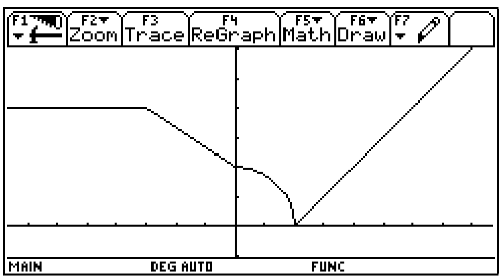
e tracciane i grafici. Di ognuna determina l'insieme di definizione e il segno.

p.13

4. Traccia il grafico della funzione di equazione $y = |x-1| - |x| - |x-3| + x$ e riscrivila come funzione definita a tratti.

p.15

5. Scrivi l'equazione della funzione il cui grafico è rappresentato in figura:



p.10

6. Risolvi l'equazione $\sqrt{3-x} = 2x+1$ e rappresenta graficamente le soluzioni. Risolvi l'equazione algebricamente e confronta i risultati ottenuti.

p.12

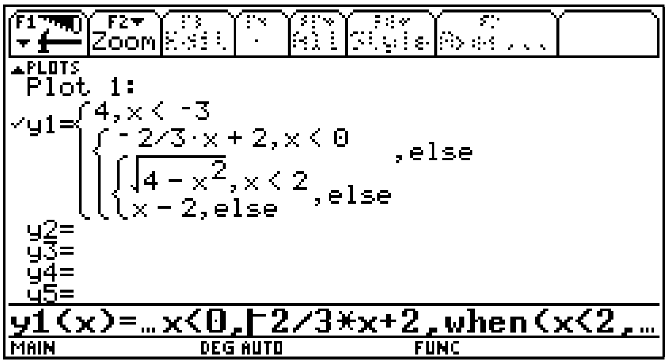
7. Che tipo di procedimento proponi per risolvere una disequazione del tipo: $2\cos(x) - 3 > 0$?

p.10

I ragazzi che hanno raggiunto una discreta dimestichezza nell'utilizzo dell'istruzione **`when`** della calcolatrice, hanno verificato la correttezza della risposta al quesito n.5 digitando in ambiente `Y=Editor` la seguente funzione:

```
y1(x)=when(x<-3,4,when(x<0,-2/3*x+2,when(x<2,√(4-
x^2),x-2)))
```

che la calcolatrice ha restituito nella forma:



10. DALLA RISOLUZIONE DI DISEQUAZIONI ALLA GEOMETRIA ANALITICA: SPUNTI ANALITICI E GRAFICI

Nora Tamburro
Liceo Scientifico “E.Majorana” Isernia

Classe: terza ad indirizzo tradizionale
Obiettivi: risolvere disequazioni algebriche, riconoscere trasformazioni geometriche, risolvere problemi di geometria analitica
Tempi: quattro unità orarie di lavoro in classe per ciascuna attività
Strumenti: calcolatrici TI-92, lavagna luminosa, viewscreen

La calcolatrice è stata utilizzata, in una prima fase, dall’insegnante come “lavagna” con viewscreen per proporre un determinato argomento e dagli alunni per seguire le istruzioni dell’insegnante; in una seconda fase, dagli alunni come lavagna per presentare le loro soluzioni ai problemi proposti. Ogni alunno ha potuto utilizzare una calcolatrice. Obiettivi dell’esperienza sono stati: 1) quello di ottenere un maggior coinvolgimento degli alunni nel processo di apprendimento; 2) quello di ottenere una comprensione migliore degli argomenti affrontati; 3) quello di offrire un aiuto a quegli alunni che presentavano difficoltà nel calcolo. Gli ambienti utilizzati sono stati: `Home`, `Y=Editor`, `Graph`, `Table`, `Data Matrix Editor`. Dopo un inizio difficoltoso dovuto ad una preparazione di base carente e a difficoltà nell’uso della calcolatrice, la situazione è via via migliorata. Dall’analisi dei risultati conseguiti dagli alunni si evidenzia, per i più dotati, un netto miglioramento delle capacità logico-deduttive ed osservative, e, per i meno dotati, un accresciuto interesse per la disciplina, una maggiore attenzione e miglioramento nell’apprendimento.

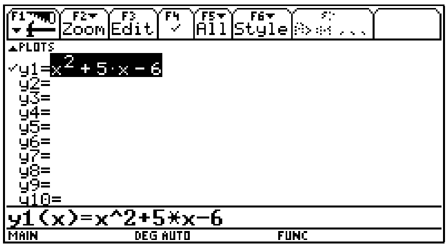
Esempi di attivita’ svolte

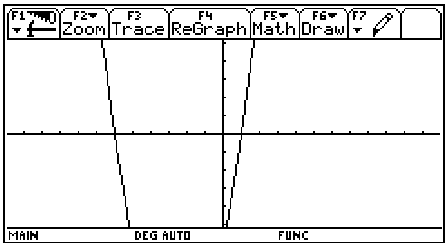
1. Risoluzione di disequazioni di secondo grado, fratte, di grado superiore al secondo

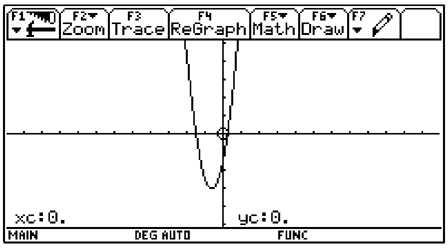
ESEMPIO N. 1: $x^2 + 5x - 6 > 0$

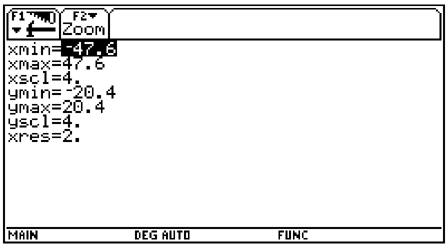
Si considera il sistema : $\begin{cases} y = x^2 + 5x - 6 \\ y > 0 \end{cases}$

In ambiente `Y=EDITOR` si digita $y = x^2 + 5x - 6$, si passa all'ambiente `GRAPH`. Se il sistema di riferimento non è monometrico, si digita „ `y (ZOOMDEC)`. Se il grafico della funzione non è contenuto tutto nello schermo si digita „ ª `(ZOOMOUT)`, si fissa il centro, quindi si preme ¸ . Il grafico risulta rimpicciolito di un fattore 4, lo si può vedere richiamando l'ambiente `WINDOW`: tutte le variabili risultano moltiplicate per 4 .



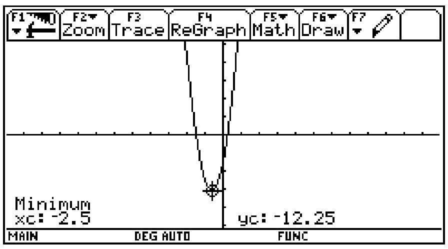




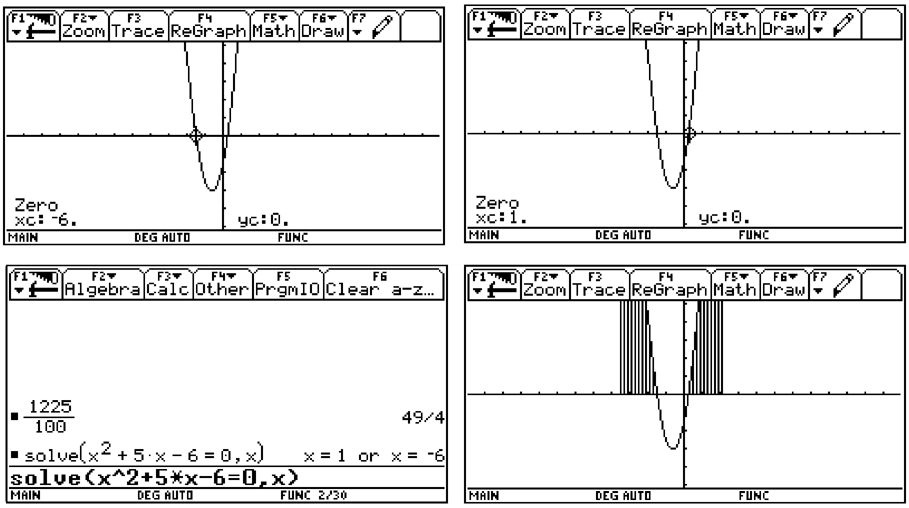


Il grafico ottenuto è quello di … una parabola … di vertice …. In questo caso il vertice è il punto più basso. Per determinarlo si può utilizzare ‡ `MATH` ª (`MINIMUM`). Lo si digita e compare scritto `LOWER BOUND`? (estremo inferiore ?). Viene richiesto l'intervallo contenente l'ascissa del punto in questione.

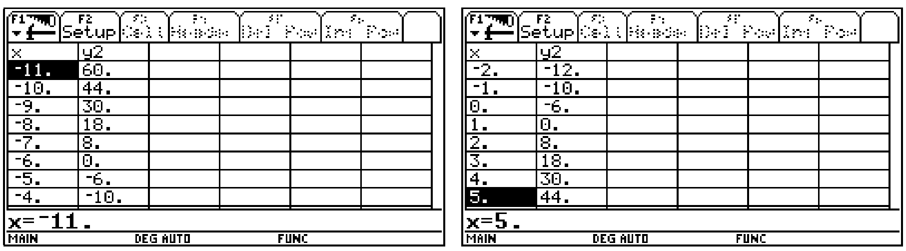
Ci si sposta con il cursore a sinistra del punto e si preme ¸ , compare scritto `UPPER BOUND` ? (estremo superiore?) ci si sposta con il cursore a destra del punto e si preme ¸ . Viene evidenziato il vertice e le sue coordinate che sono $x = -2.5$ e $y = -12.25$ che corrispondono alle frazioni $-5/2$ e $-49/4$ (in `HOME` si digita 25/10 e 1225/100 e si preme ¸). Le intersezioni della parabola con l'asse *x*



sono gli zeri del trinomio $x^2 + 5x - 6$. Per determinarli si digita ‡ ©(ZERO). Si fissano gli estremi degli intervalli in cui sono contenute le ascisse di tali punti e si ottiene –6 e 1. Per determinare tali valori si può, in HOME, calcolare le soluzioni dell'equazione : $x^2+5x-6 = 0$, digitando:solve(xñ+5x-6=0,x).

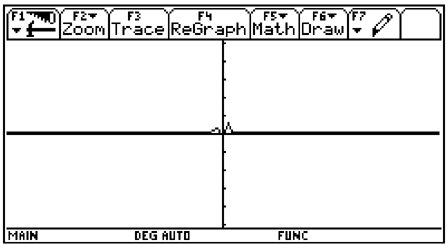


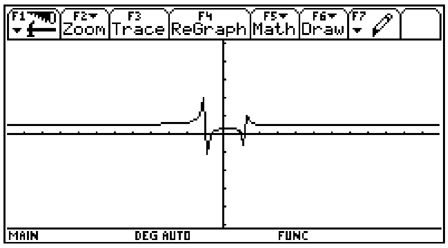
A questo punto si osserva che il grafico della parabola è tagliato in due dall'asse x, la parte al di sopra è quella per cui $y > 0$, cioè $x^2 + 5x - 6 > 0$. I punti del grafico che si trovano al di sopra dell'asse x devono avere l'ascissa o minore di –6 o maggiore di 1, pertanto le soluzioni della disequazione sono tutte quelle per cui $x < -6$ o $x > 1$. Se si va in ambiente TABLE (si illustra brevemente tale ambiente) si possono leggere le coordinate dei punti del grafico e si vede che per $x>1$ o per $x<-6$ la y è maggiore di zero.



ESEMPIO N. 2 : $\dfrac{3x^2 - x - 2}{6x^2 - x - 7} < 0$

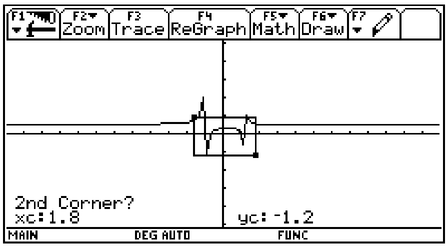
In Y=EDITOR si digita: $y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{6x^2 - x - 7}$, passando in ambiente GRAPH, si nota che il grafico non è molto chiaro. Utilizzando le opzioni del menu ZOOM si opera un ingrandimento.

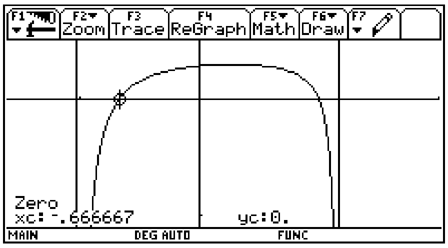




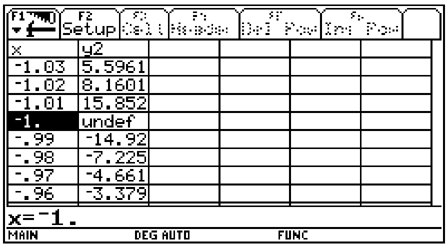
Si nota che ci sono 4 intersezioni con l'asse x, si digita „ ¨ (ZOOMBOX), compare la scritta : 1 st corner ? (il primo angolo?). Ci si sposta con il cursore a sinistra della prima intersezione, si preme ¸ , poi a destra dell'ultima e poi in basso fino a che non si delinei un rettangolo che contenga le 4 intersezioni. Si preme ¸ .

Viene ingrandita la parte di grafico contenuta nel rettangolo.

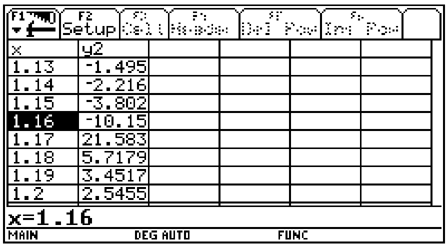




Si nota che le quattro intersezioni, in realtà, sono due. Digitando ‡ © e fissando gli estremi degli intervalli in cui sono contenute le ascisse di tali punti, si trova che tali ascisse valgono rispettivamente –0.666667, che corrisponde a –2/3 (lo si ricava dall'ambiente HOME), e 1. Le altre due "intersezioni", non determinabili graficamente, utilizzando il tasto funzione … TRACE, risultano essere comprese tra –1.025 e –0.99 e 1.15 e 1.18, rispettivamente, e si vede come la y passa da valori negativi a valori positivi improvvisamente. Ciò risulta anche, e meglio, dallo ambiente TABLE dove, variando i parametri di impostazione („ SETUP), si possono avere valori numerici della x e della y con più cifre decimali.



x	y2
-1.03	5.5961
-1.02	8.1601
-1.01	15.852
-1.	undef
-.99	-14.92
-.98	-7.225
-.97	-4.661
-.96	-3.379



x	y2
1.13	-1.495
1.14	-2.216
1.15	-3.802
1.16	-10.15
1.17	21.583
1.18	5.7179
1.19	3.4517
1.2	2.5455

(A questo punto si può introdurre il concetto di limite, spiegare cosa è un asintoto) Che le intersezioni siano due deriva dalla proprietà che una frazione è uguale a zero solo se il numeratore è uguale a zero e il numeratore, in questo caso, è un trinomio di secondo grado che può avere al massimo due zeri. Le altre due "intersezioni" sono gli zeri del denominatore che sul grafico, in questo caso particolare, con questo tipo di calcolatrice e quando la funzione passa improvvisamente da valori positivi a valori negativi e viceversa, può sembrare che siano "rappresentati" da due rette parallele all'asse y, cosa che in realtà non è. Ciò comporta un' analisi critica del grafico, un confronto con le conoscenze che si hanno, la ricerca di altre strade per trovare la soluzione. Risolvendo in HOME, si ottiene che i valori che annullano il numeratore sono $-2/3$ e 1, quelli che annullano il denominatore sono -1 e $7/6$, che genera il numero decimale periodico 1.1(6). Analizzando il grafico si trovano le soluzioni della disequazione iniziale:

$$-1<x<-2/3 \qquad 1<x<7/6.$$

ESERCIZI DA SVOLGERE seguendo l'impostazione precedente :

$(2-x)(1+x)(x+3) >0$

$x^4 - 7x^2 - 18 \le 0$

ecc…

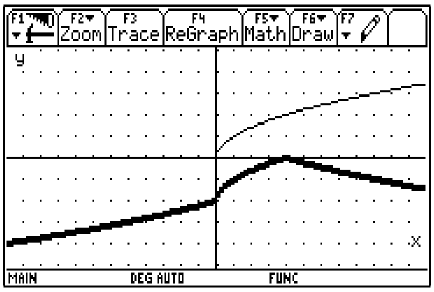
2. Trasformazioni di funzioni

Prerequisiti: conoscenza delle traslazioni e delle simmetrie.

ESERCIZIO : Data la funzione di equazione : $y = \sqrt{x}$

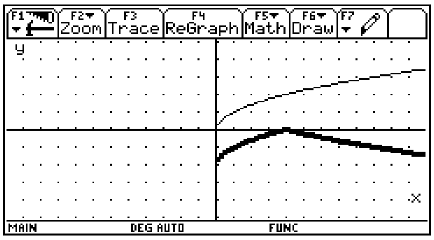
Indicare i passaggi e le trasformazioni geometriche utilizzate per ottenere la funzione di equazione : $y = -\left|\sqrt{x} - 2\right|$

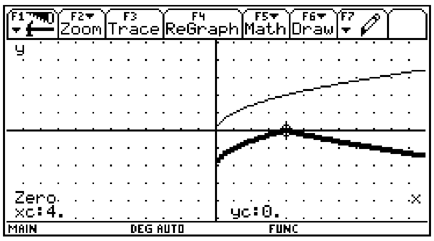
Indichiamo con `f1` la prima funzione, con `f2` la seconda.
In ambiente `GRAPH` si seleziona ƒ o quindi % `ORDER 1:SEQ`. Ciò permette che i grafici siano tracciati in successione. In ambiente `Y=EDITOR` si scrivono le equazioni delle due funzioni. In ambiente `GRAPH` viene tracciato il grafico delle due funzioni. Si sceglie lo stile del tracciato premendo ˆ in `Y=EDITOR` e selezionando, per ciascuna funzione, uno stile diverso.

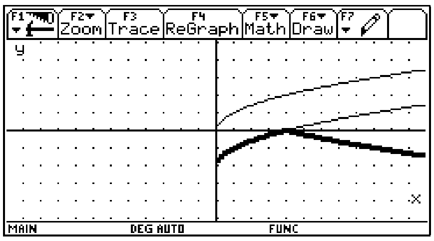


Si nota che il grafico della funzione `f2` è errato perché una parte del grafico compare nel terzo quadrante. Ciò presuppone $x < 0$ mentre, invece, $x \geq 0$. Si risolve l'inconveniente premendo 2 [K]e scrivendo $x>0$, di seguito alla equazione della funzione, nella riga di introduzione.

Si confrontano i due grafici. Il grafico di `f2` è composto di due parti. E' presente un punto angoloso la cui ascissa si può determinare selezionando ‡ :`zero.`







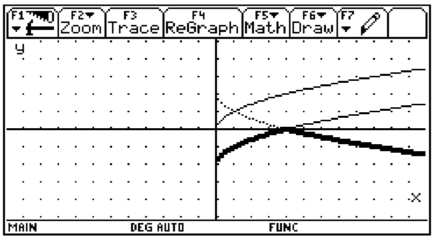
Se si considera la funzione di equazione: $y = \sqrt{x} - 2$
che chiamiamo `f3` (in `Y=EDITOR` si seleziona ˆ `STYLE 6:PATH`) si vede che il suo grafico si sovrappone al grafico della funzione `f2` nel primo tratto di questo. Se ne deduce che la prima parte del grafico di `f2` si ottiene mediante una traslazione di vettore τ`(0;-2)` del grafico di `f1`. La seconda parte appare essere

simmetrica, rispetto all'asse x, del tratto di grafico di `f3` che si trova a destra del punto (4;0). Infatti, considerando la funzione di equazione :

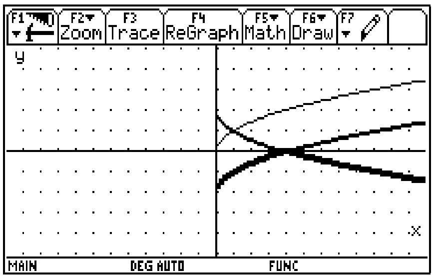
$$y = -\left(\sqrt{x} - 2\right)$$

che chiamiamo `f4`, il suo grafico si sovrappone al tratto in questione, anzi si nota che il grafico di `f2` si ottiene dall'unione dei simmetrici dei due tratti di grafico, appartenenti, il primo, alla funzione di equazione:

$$y = -\left(\sqrt{x} - 2\right)$$



e il secondo alla funzione di equazione: $y = \sqrt{x} - 2$



Se si considera la funzione di equazione:

$$y = \left|\sqrt{x} - 2\right|$$

si vede che il suo grafico coincide perfettamente con i due tratti considerati.

A questo punto non rimane che operare una simmetria rispetto all'asse *x*. La funzione che si ottiene è :

$$y = -\left|\sqrt{x} - 2\right|$$

3. Geometria analitica della retta

Prerequisiti: conoscenza del calcolo dell'area di un triangolo mediante il determinante di una matrice.

ESERCIZIO :

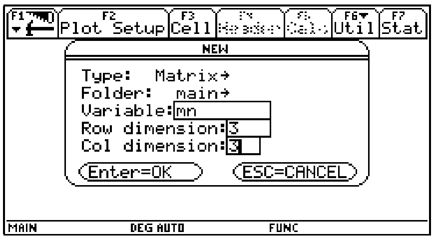
Dato il triangolo di vertici A(5;0), B(1;2), C(-3;-2), determinare le lunghezze delle altezze e le loro equazioni.

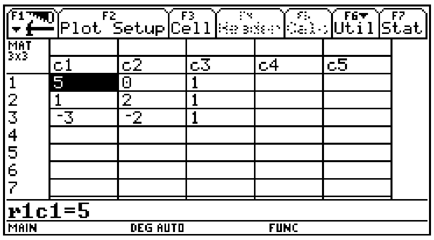
Il problema è stato risolto volutamente in modo tradizionale, utilizzando l'ambiente `HOME`, per far sì che gli alunni capiscano la struttura del problema e

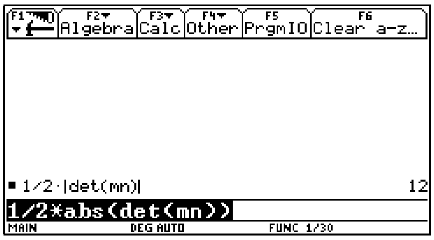
usino procedimenti a loro noti. In un secondo tempo, allorché si sia acquisita una certa familiarità con l’uso della calcolatrice, si può pensare di sfruttare meglio le sue potenzialità e velocizzare il procedimento di risoluzione definendo opportune funzioni.
Le altezze si calcolano dividendo il doppio dell’ area per ciascuna base.
Si può calcolare l’area utilizzando le coordinate dei vertici:

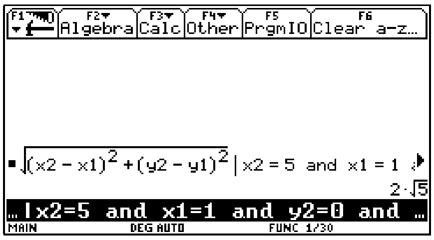
$$\text{AREA} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Premere O { : DATA/MATRIX EDITOR, selezionare NEW, TYPE 2: MATRIX, variable: mn, row dimension:3,col dimension:3
Premere ¸ , appare la tabella in cui inserire i numeri. In HOME scrivere:
$\frac{1}{2}$ * abs(det(mn)), premere ¸ e compare il risultato.

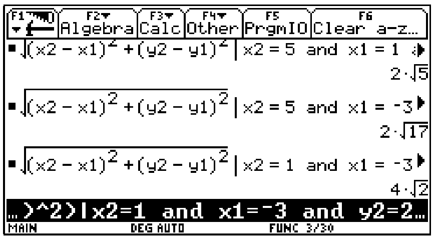


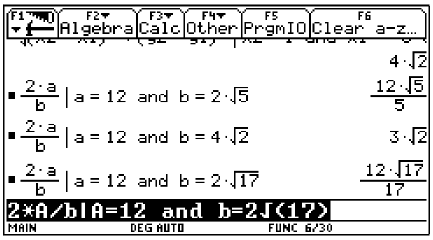




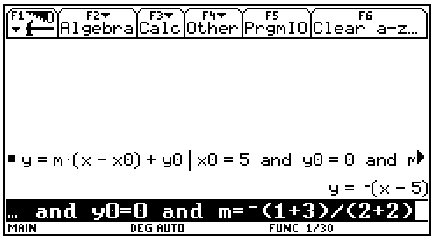


Si calcola quindi la lunghezza delle basi. In HOME si scrive la formula della distanza di due punti con le condizioni per le *x* e le *y*, si preme ¸ e si ha il risultato. Cambiando le condizioni si hanno le lunghezze di tutti e tre i lati.

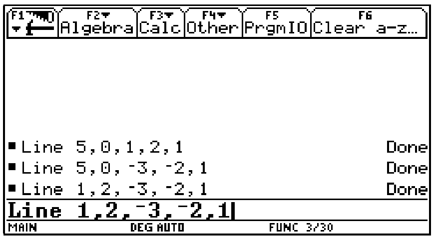


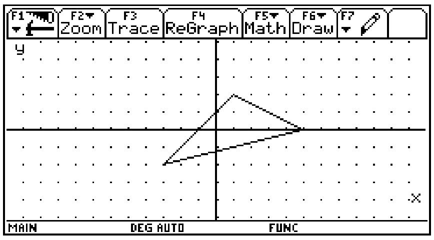


Si calcolano le altezze. Le equazioni delle altezze si ricavano utilizzando l'espressione: `y-y0 =m(x-x0)` e il coefficiente angolare utilizzando la formula: `-(x2-x1)/(y2-y1)`, quindi in `HOME` si scrive `y=m(x-x0)+y0` con le condizioni per la `x0`, la `y0` e la `m`.

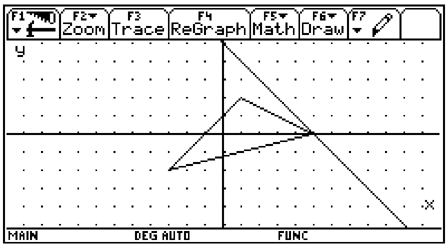
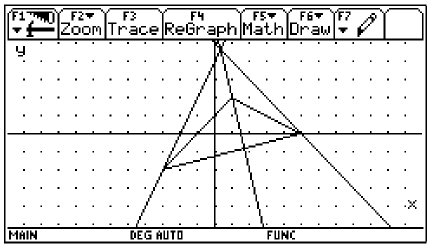


Si disegna il triangolo ABC utilizzando lo schermo dei grafici. In `HOME` scrivere: `LINE 5,0,1,2,1`. Premere ¸ . Viene tracciato il segmento che unisce i punti (5;0) e (1;2). Si ripete per gli altri lati del triangolo.

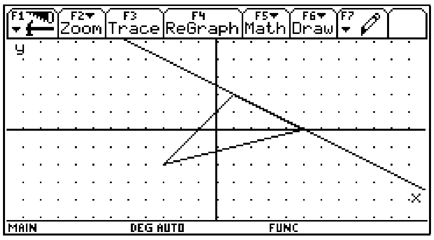




Sempre in `HOME` scrivere : `DRAWSLP 5,0,-1`. Premere ¸ . Viene tracciata la retta passante per il punto (5;0) e di coefficiente angolare –1, cioè una delle altezze. Si ripete per le altre.

Lo schermo dei grafici diventa utile per quegli alunni che trovano difficoltà nel calcolo del coefficiente angolare di una retta. Gli si fa tracciare il segmento che unisce due punti tramite il comando: `LINE x1,y1,x2,y2,1`, quindi la retta che contiene tale segmento, tramite il comando: DRAWSLP `x1,y1,(y1-y2)/(x1-x2).` Se il comando viene scritto correttamente la retta si sovrappone al segmento.



11. IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Fernando Ilari
Liceo Scientifico "E. Majorana" Latina

Classe: quarta liceo scientifico sperimentazione Brocca
Obiettivi: Conoscere ulteriori funzioni della TI-92, interpretare goniometricamente il coefficiente angolare m
Prerequisiti: Conoscenza elementare della macchina (4 ore di apprendistato svolte)
Tempi: 60' effettivi (due ore scolastiche se includiamo il tempo necessario per la sistemazione e il riordino delle attrezzature)
Metodi: ***Lezione frontale, lavoro individuale***
Strumenti: calcolatrici (in rapporto 1:1), lavagna luminosa, viewscreen e la scheda allegata

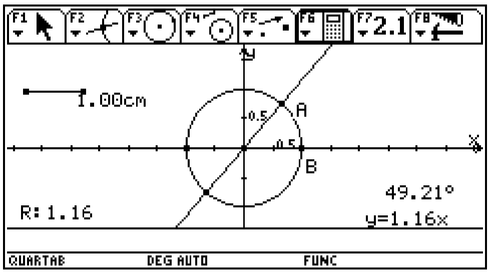
L'attività presentata è stata proposta all'inizio dell'esperienza LabClass; la scelta dell'argomento, già noto alla classe, è stata dettata dal fatto che la dimestichezza con la macchina non aveva ancora raggiunto un livello accettabile e quindi, presentando un tema conosciuto, sarebbe stato facilitato il compito agli alunni. Un'attività del genere può, per la sua semplicità, essere riproposta, eventualmente con poche modifiche, anche ad alunni delle classi terze e seconde. L'ambiente prescelto è l'ambiente Geometry nel quale vengono richieste le acquisizioni delle seguenti abilità: disegnare rette, cerchi e individuare coordinate ed equazioni.

Ai ragazzi viene presentata la seguente scheda, e vengono invitati a seguire rigorosamente i punti nell'ordine indicato; in caso di difficoltà, l'alunno richiede l'intervento dell'insegnante.

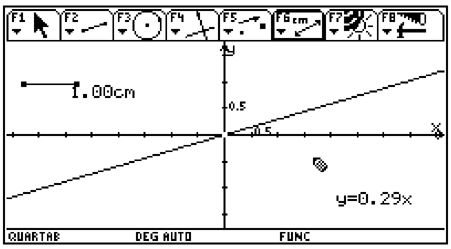
Scheda lavoro
I simboli indicati dentro i riquadri indicano i tasti da premere.

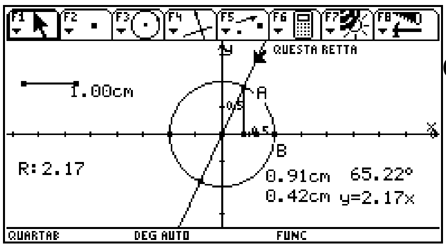
1. O n e qui si inserisce il *path* (folder) e il *name* (variable) del file; (per creare una nuova directory, è necessario spostarsi in ambiente Home e pigiare in sequenza i tasti † Ò inserendo il nome della cartella: la presenza della scritta Done testimonia l'avvenuta operazione; per esempio, memorizzare il file di nome *coeffang* nella directory *quartaB).*

2. Š o assi coordinati 2:RECTANGULAR (attiva gli assi coordinati).
3. „ y (disegna una retta passante per l'origine e nei quadranti dispari).
4. ˆ z (visualizza l'equazione della retta, posizionandoti sulla stessa).
5. … ¨ (rappresenta una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario).
6. ˆ z (visualizza l'equazione della circonferenza (deve essere $x^2+y^2 = 1$), altrimenti cancella (Š m) la circonferenza e ripeti dal punto 5). Per creare una circonferenza puoi anche seguire questa procedura: „ z (crea il segmento che poi assumerai come raggio), ˆ ¨ (misura il segmento, spostando eventualmente un estremo se la lunghezza non è pari a quella desiderata), † n (indicando il raggio e il centro) e infine ˆ z (controlla l'equazione della circonferenza).



7. „ ª (determina l'intersezione fra retta e circonferenza).
8. ‰ m (segna l'angolo α di vertice l'origine e per estremi un punto dell'asse x e l'intersezione fra retta e circonferenza).
9. ˆ ª (misura l'ampiezza dell'angolo e sposta (,)la misura in un punto dove non dà fastidio).





0. ˆ

d

10. ˆ { (vedi quanto vale e a chi corrisponde il valore di tan(α)).
11. Con la , sposta la retta e ripeti il punto 9, avendo cura prima di cancellare la precedente risposta R:… con Š m.

Esercizi

1. Ripetere la procedura considerando però l'angolo che ha un estremo nel terzo quadrante.
2. Costruire i segmenti che rappresentano le proiezioni sugli assi del punto intersezione fra circonferenza e retta, e calcolare il valore del rapporto y/x. (Suggerimento: perpendicolare dal punto all'asse x, intersezione della perpendicolare con l'asse x, conferma del punto intersezione, segmento verticale, segmento orizzontale, nascondi retta perpendicolare, misura segmento verticale, misura segmento orizzontale).

Commento

Presentando un argomento che ai ragazzi è già noto, e quindi più facilmente controllabile, ho cercato di superare quella naturale difficoltà che, malgrado un breve (4 ore in due pomeriggi non consecutivi) periodo di precedente apprendistato generale sulla macchina, comunque era presente in tutti.
La scelta fatta di dettagliare i comandi può sembrare inutile, c'è già il manuale, ma la scheda è stata molto apprezzata dagli alunni; l'aver posto alla fine alcuni esercizi, ha consentito di eliminare i tempi morti cui sarebbero naturalmente andati incontro i più bravi. Importante è stata anche la scelta di lavorare, in questa fase, praticamente sempre nello stesso ambiente (Geometry). A questa esercitazione non ha fatto seguito alcuna verifica diretta.

12. STUDIO DI UN FASCIO PROPRIO DI RETTE

Maria Angela Chimetto
Liceo Scientifico "G. B. Quadri" Vicenza

Classe: Terza liceo scientifico-tecnologico Brocca
Obiettivi: comprendere il significato del parametro nell'equazione di un fascio proprio di rette
Prerequisiti: equazione di una retta; concetto di fascio proprio di rette e di rette base e punto base di un fascio
Tempi: un'ora di lezione
Metodo: lezione frontale interattiva
Strumenti: una calcolatrice per ogni alunno; calcolatrice, view-screen e lavagna luminosa per l'insegnante

Questo lavoro è rivolto ad una classe terza, indirizzo Scientifico-tecnologico Brocca ed è stato svolto a conclusione dell'unità didattica dedicata alla retta, nel quadro della geometria analitica.

Ci si è posto il problema di generalizzare la soluzione di un classico esercizio (o almeno di una parte di esso), cioè l'analisi un fascio proprio di rette ad un parametro. L'argomento è stato presentato in modo classico e la macchina è stata usata per rappresentare graficamente, al variare del parametro, le rette del fascio e per abbreviare i calcoli algebrici. Visto però che il procedimento è assolutamente meccanico, ho pensato di trasformarlo in un programma, che ho "mostrato in esecuzione" alla classe, usando così la calcolatrice come "lavagna", per vivacizzare un po' la lezione.

La reazione degli studenti è stata decisamente positiva , e ho visto interessate al lavoro anche alcune alunne, di solito scettiche nei confronti di calcolatori e calcolatrici.

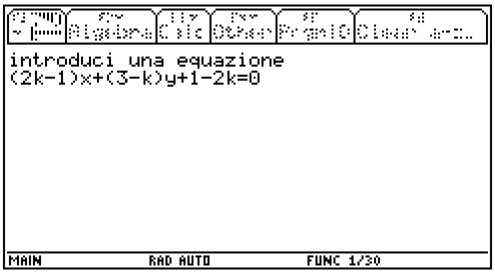
Il prossimo anno mi propongo di far ricostruire il programma, nelle sue parti, agli alunni.

Le fasi sono elencate qui di seguito:

- **introduzione dell'equazione della retta**

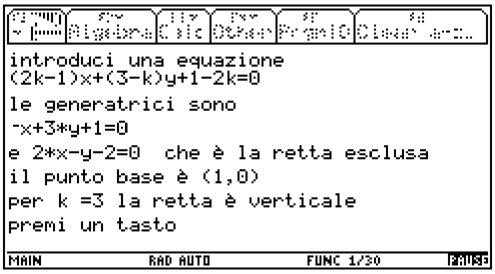
```
fasci()
¨inserimento dell'equazione
```

```
ClrIO
InputStr "introduci una equazione  ",fascio
expr(fascio)»fascio
left(fascio)-right(fascio)=0»fascio
```



- **riconoscimento degli elementi base e del valore del parametro per il quale la retta è parallela all'asse delle ordinate**

```
¨ricerca di elementi base
fascio|k=0»rettab1
fascio-rettab1|k=1»esclusa
inters(rettab1,esclusa)»pbase
pbase[1]»xx
pbase[2]»yy
string(xx)»xs
string(yy)»ys
Disp "le generatrici sono ",string(rettab1)
Disp  "e  "&string(esclusa)&"    che  ä  la  retta
esclusa"
Disp "il punto base ä ("&xs&","&ys&")"
¨ricerca dell'eventuale retta parallela all'asse y
equvett(fascio)[2]»coeffy
If inString(string(coeffy)'"k")≠0 Then
right(solve(coeffy=0,k))»kv
Disp "per k ="&string(kv)&" la retta ä verticale"
EndIf
Disp "premi un tasto"
Pause
```



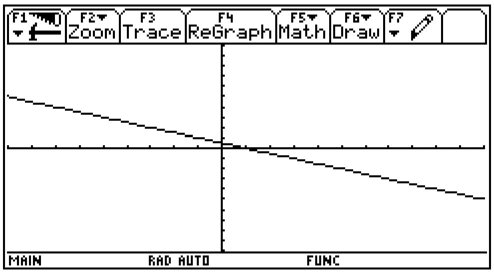
- **grafico di alcune rette del fascio**

il grafico, dopo essere stato visualizzato, viene salvato tramite il comando `StoPic (nomegrafico)`

```
¨visualizzazione di alcuni grafici
¨definizione dei parametri di finestra grafica
setMode("Graph","FUNCTION")
FnOff
xx-10»xmin
xx+10»xmax
1»xscl
yy-10»ymin
yy+10»ymax
For j,1,5,1
      If j=kv   Then
           LineVert xx
    Else
           fascio|k=j»fascioj
           right(solve(fascioj,y))»fascioj
           fascioj»#("y"&string(j))(x)
EndIf
    StoPic #("pic"&string(j))
EndFor
```

Questa parte del programma permette di visualizzare il grafico delle rette per k=1,2,3,4,5.

Per k=1, il risultato è il seguente (il sistema non è monometrico)



Ovviamente il programma potrebbe essere modificato per visualizzare rette corrispondenti ad altri valori del parametro. Nel caso in cui la retta sia parallela all'asse delle *y* essa viene ugualmente visualizzata.

- **semplice animazione e quindi interpretazione del ruolo del parametro nell'equazione**

  (questa parte visualizza i grafici, uno di seguito all'altro).

```
¨animazione del fascio
CyclePic "pic",5,0.5,1,1
For j,1,10
  DelVar #("pic"&string(j))
EndFor
DelVar fascio,rettab1,esclusa,pbase,xx,yy,xs,ys,
fascioj,coeffy,kv,
EndPrgm
```

N.B. Vengono utilizzate due funzioni: una, di nome `equvett` ricava la lista dei coefficienti delle incognite e del termine noto della retta; l'altra `inters` calcola le coordinate dell'intersezione tra due rette incidenti.

```
equvett(equ)
(equ)
Func
Local a,b,c
left(equ)-right(equ)»equ
equ|x=0 and y=0»c
equ-c|y=0 and x=1»a
equ-c|x=0 and y=1»b
Return {a,b,c}
EndFunc

inters(retta1,retta2)
Func
Local mat1,mat2,v1,v2,sol
equvett(retta1)»v1
equvett(retta2)»v2
[[v1[1],v1[2]][v2[1],v2[2]]]»mat1
[[ªv1[3]][ªv2[3]]]»mat2
simult(mat1,mat2)»sol
matülist(sol)»sol
Return sol
EndFunc
```

Il programma funziona solo con fasci propri di rette, ma ovviamente può essere migliorato: Si può prevedere, nella prima parte, una serie di istruzioni che riconosca se l'equazione di primo grado ad un parametro rappresenta in realtà una sola retta (cioè se `rettab1` e `esclusa` sono linearmente dipendenti) e nel caso in cui questo non accada se si tratta di un fascio proprio o improprio.

13. L'ELLISSE CHE NON C'E'

Roberto Cagnacci
Liceo Scientifico "A. Vallisneri" Lucca

Classe: Terza liceo scientifico sperimentazione PNI
Obiettivi: Analizzare casi particolari di ellissi, portare gli alunni a riflettere e verificare i risultati ottenuti.
Tempi: Due ore per la lezione da cui parte tutto. Due ore per la sistemazione dei concetti appresi
Prerequisiti: L'equazione dell'ellisse con centro nell'origine; conoscenza dell'uso della macchina
Metodi: Lavoro individuale e discussione collettiva
Strumenti: Una macchina TI-92 per ogni alunno, lavagna luminosa, view screen

L'articolo è il racconto fedele di una lezione in classe partita con delle intenzioni e degli obiettivi e sviluppatasi in modo del tutto inaspettato grazie alla presenza della macchina che, essendo pronti a cogliere le occasioni, permette di raggiungere obiettivi non programmati ma assai produttivi rendendo la lezione flessibile e partecipata dagli alunni.

Per fare alcune osservazioni sulle proprietà dell'ellisse propongo agli alunni degli esercizi che portano a casi particolari o che addirittura non ammettono soluzione con l'obiettivo di portarli a riflettere. Tutto procede secondo il solito tran tran fino a che dico di trovare l'ellisse con centro l'origine che passa per i punti

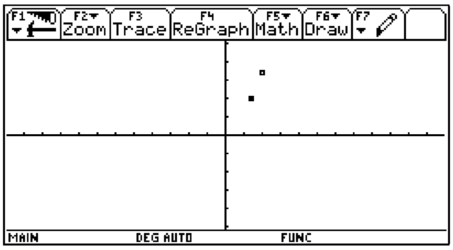
$$A(\sqrt{2};2)\ e\, B(2;2\sqrt{3})$$

Tutti gli alunni partono dall'equazione canonica , sostituiscono, poi, per risolvere il sistema lo trasformano in un sistema di primo grado che ammette come soluzione la coppia (1;-1/4). A questo punto qualche alunno, anche per essere il primo che ci arriva mi presenta la soluzione.

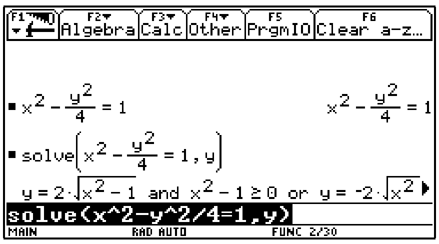
$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

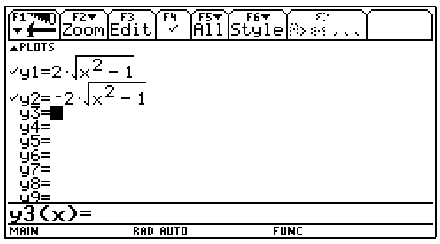
Lo guardo male: lui sa che io so che è un impulsivo quindi comincia a riflettere; intanto arrivano anche gli altri e comincia a farsi strada l'ipotesi che i coefficienti sono dei quadrati, quindi positivi, per cui abbiamo sbagliato i calcoli………oppure l'ellisse non c'è.

Un rapido controllo grafico della posizione dei punti convince quasi tutti dell'asserto: una ellisse con centro nell'origine non può materialmente passare da quei punti.

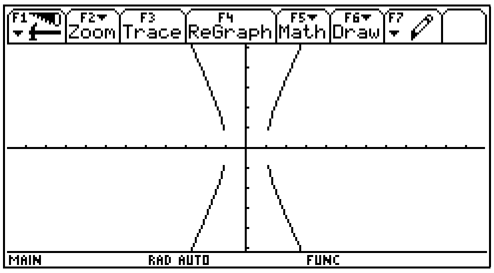


Sto per passare ad altro quando un alunno sottovoce al compagno di banco: "..che curva sarà?…" Colgo la palla al balzo e dico di controllare con la macchina. Inseriamo l'equazione in ambiente `HOME` diamo il comando `solve` rispetto ad *y*, copiamo il risultato in `Y=EDITOR` separando la parte positiva da quella negativa ottenendo così due funzioni la parte positiva e la parte negativa della curva.





Le grafichiamo ottenendo



A questo punto la frase che viene fuori è che sono due parabole…..osservo che sono un po' troppo dritte per i miei gusti…..sarà lo schermo…..se controllassimo con il Derive che ha una risoluzione migliore…..Ora devo dire che uno degli alunni ha una vera e propria predilezione per l'ambiente TABLE lo attiva sempre anche quando non gli serve a niente….e infatti lo sta osservando già da un po' senza dirci niente ad un certo punto la spara "….la *y* è quasi il doppio della *x*…"

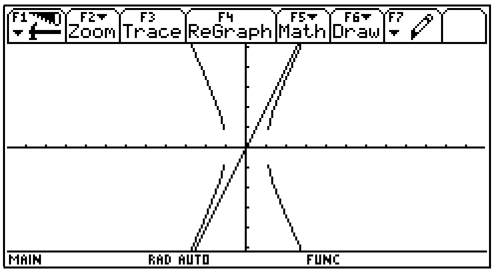
x	y1	y2
0.	undef	undef
1.	0.	0.
2.	3.4641	-3.464
3.	5.6569	-5.657
4.	7.746	-7.746
5.	9.798	-9.798
6.	11.832	-11.83
7.	13.856	-13.86

x=0.

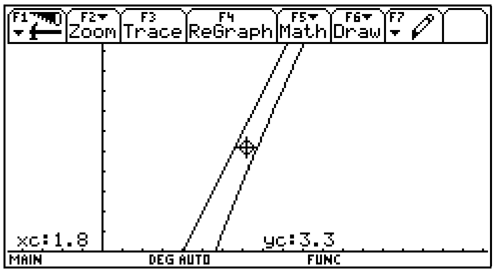
MAIN RAD AUTO FUNC

Domando: " $y = 2x$ che cosa è " …….una retta……

Proviamo a metterla sul grafico



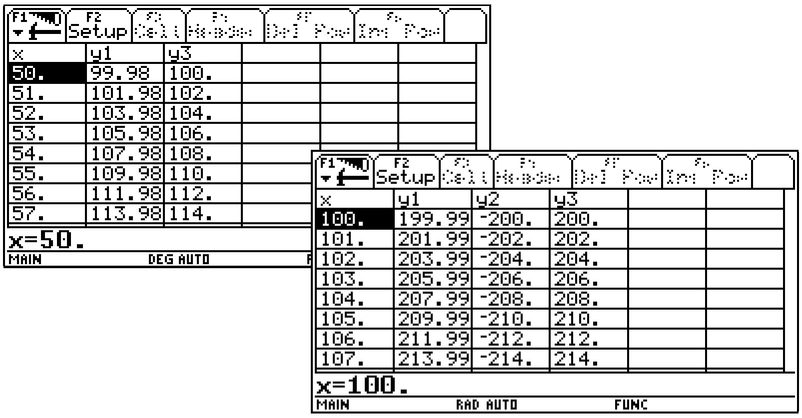
Ingrandiamo limitandoci alla parte che ha sia la *x* che la *y* positiva tanto è simmetrica



Che cosa vi sembra che succeda?

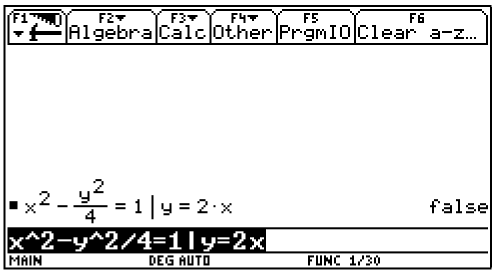
A mano a mano che la *x* aumenta la curva si avvicina alla retta

Andiamo a vedere sulla tabella



Si incontreranno mai?

Proviamo col sistema



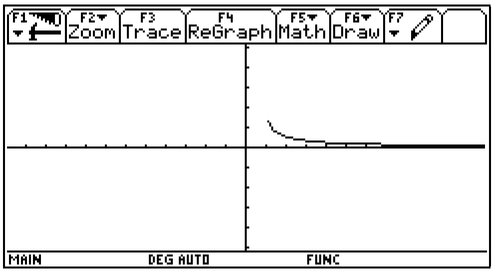
No

Ad un certo punto si allontaneranno di nuovo?

Questo non possiamo dirlo ma sembrerebbe di no

Come si può verificare?

Vediamo come si comporta la differenza tra la retta e la funzione.



Tende a 0 man mano che la x aumenta.

Proviamo a dimostrarlo?……………………

Conclusioni

Ero partito per una lezione tranquilla: praticamente una esercitazione con obiettivi solo di rafforzamento delle conoscenze. La presenza della macchina in mano ai ragazzi mi ha permesso una lezione di tutt'altro tipo da cui sono venuti fuori l'equazione dell'iperbole e il concetto di asintoto. Questo ultimo molto forte ma nato in modo naturale.

La successiva dimostrazione teorica che qui è stata omessa, perché conosciuta, è venuta abbastanza naturale: nei ragazzi addirittura mi è parso di notare una certa curiosità ed i conti che tutti conoscono non sono sembrati così pesanti.

14. UN'ELLISSE CON IL FUOCO ALL'INFINITO: RICOSTRUZIONE DI UN MODELLO DI HILBERT

Giorgio Ravagnan, Liceo Scientifico "G. B. Benedetti" Venezia
Geraldo Vettorazzo, I.R.R.S.A.E. Veneto Mestre-Venezia

Classe: terza Liceo Scientifico P.N.I.
Obiettivi: analisi di relazioni tra coniche diverse
Prerequisiti: nozioni elementari sulle coniche, utilizzo degli ambienti `Home` e `Data Matrix/ Editor` nella `TI-92`
Tempi: quattro ore di attività in classe
Metodi: lezione frontale e lavori di gruppo utilizzando interattivamente più ambienti nella calcolatrice per la ricostruzione ed analisi del modello di Hilbert

Abbiamo proposto agli studenti di una classe terza di Liceo Scientifico, a conclusione dello studio delle coniche, l'obiettivo di costruire un modello analitico con la `TI-92` che ripercorresse, magari in un contesto diverso, quel "passaggio con continuità" da un tipo di conica all'altra (ellisse, parabola e iperbole), presente nella definizione originaria di Apollonio. Nel Trattato di Apollonio infatti le curve sono prodotte, secondo un approccio meccanico geometrico, come sezioni di un cono indefinito a due falde con un piano di cui si può variare opportunamente la giacitura rispetto alla direzione dell'asse del cono. Se una definizione analitica delle coniche come luoghi geometrici del piano, costruita a partire da un fuoco e una direttrice per le tre curve, ripropone dal punto di vista algebrico tale "continuità", meno immediato risulta compiere questo "passaggio" se si utilizzano per l'ellisse e l'iperbole le usuali definizioni costruite invece a partire da due fuochi. Si può però, in questo caso, seguire ad esempio una proposta di Hilbert[i] d'individuazione della parabola, in un intorno opportuno del vertice, *con un'operazione che ricorda concettualmente il passaggio al limite*, a partire da un'ellisse, quando (cfr. fig. 1) un fuoco F_1 ed il vertice contiguo V (coincidente con quello della parabola) vengono mantenuti fissi, mentre il secondo fuoco F_2 viene portato ad una distanza sempre più grande dal primo[ii].

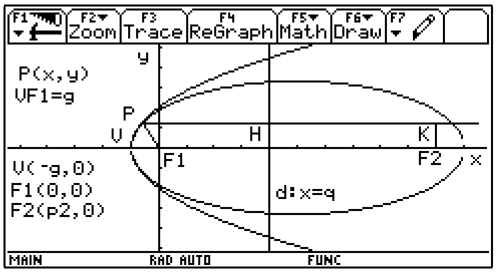


fig. 1

La definizione di ellisse come luogo geometrico porta, se P è un generico punto dell'ellisse, alla classica equazione

$$\mathbf{PF_1 + PF_2 = 2a.}$$

Nel caso proposto da Hilbert in questa equazione, oltre alla posizione del punto P, è presente però anche una seconda variabile, la posizione del fuoco F_2.

E' stato proposto alla classe il problema di:

1. evidenziare la presenza della *seconda variabile* F_2 nell'equazione
   soluzione ricavata: dopo aver posto $VF_1 = g$

$$\mathbf{PF_1 + PF_2 = F_1F_2 + 2}\boldsymbol{g}$$

2. dare significato in termini di approssimazione al "portarsi all'infinito" di F_2
   soluzione ricavata: quando il punto P è tale che $PF_1 \cong g$ (*cioè in un intorno del vertice* V) si può approssimare $PF_2 \cong PK$ (cfr. fig. 1).
   L'equazione diventa

$$\mathbf{PF_1 + PK \cong F_1F_2 + 2}\boldsymbol{g}$$

3. eliminare la *seconda variabile* F_2 (che, al pari di K, perde fra l'altro, a "passaggio" avvenuto, la sua *realtà* matematica), per ottenere finalmente l'equazione cartesiana della "curva limite" avente come uniche variabili le coordinate cartesiane *x*, *y* del punto P generico.
   soluzione ricavata: gli studenti hanno proposto inizialmente l'eliminazione del termine $\mathbf{F_1F_2}$ *presente in entrambi i membri* dell'equazione precedente ($PK = PL + LK$ con $LK = F_1F_2$, dove L è l'intersezione di PK con l'asse delle ordinate).

L'equazione, a slittamento avvenuto del secondo fuoco all'infinito, diventa

$$\mathbf{PF_1 + PL = 2}\boldsymbol{g}$$

L'analisi dell'equazione risulta agevole se P si trova nel secondo o terzo quadrante. Ma se l'intorno "opportuno" del vertice V in cui si vuole studiare l'approssimazione si estende anche negli altri quadranti l'equazione cartesiana ricavabile $y = \pm 2\sqrt{g(g - |x|)}$ perde di significato in campo reale per $|x| > g$ e di aderenza al contesto geometrico per $0 < x < g$ (la parabola avrebbe la concavità rivolta nel verso del semiasse negativo delle ascisse).

Quest'ultima difficoltà è stata superata con gli studenti osservando che il punto L poteva essere sostituito dal punto H, intersezione di PK con una retta d, parallela all'asse delle ordinate, di equazione $x = q$ con $q > 0$. Tale retta, fissate queste condizioni, può essere prefissata a piacere.

L'intero procedimento in questo caso diventa

$$\begin{aligned}
&\mathbf{PF_1 + PK \cong F_1F_2 + 2}\boldsymbol{g}\\
&\mathbf{PF_1 + PH \cong F_1F_2 - HK + 2}\boldsymbol{g}\\
&\mathbf{PF_1 + PH \cong} \boldsymbol{q} \mathbf{+ 2}\boldsymbol{g}
\end{aligned}$$

Cioè se $F_2 \to +\infty$ l'arco di ellisse, con P tale che $PF_1 \cong g$, tende a diventare un arco del luogo geometrico definito da

$$\mathbf{PF_1 + PH =} \boldsymbol{q} \mathbf{+ 2}\boldsymbol{g}$$

Questo luogo corrisponde ad una parabola secondo la definizione utilizzata da Hilbert, dove la retta d: $x = q$ non è però la direttrice della parabola relativa alla definizione classica. La corrispondenza del luogo ad una parabola è stata comunque verificata facilmente poiché (cfr. fig. 1) l'equazione

$$\mathbf{PF_1 + PH =} \boldsymbol{q} \mathbf{+ 2}\boldsymbol{g}$$

diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} + |x - q| = q + 2g$$

che, esplicitando la variabile y e considerando soltanto l'arco di parabola nel primo e secondo quadrante, si riduce a

$$y = 2\sqrt{g(x+g)}$$

Tale esplicitazione è stata svolta in ambiente `Home` con il comando <`Solve`>, tenendo conto che, operando in un intorno del vertice V, si può porre $x < q$ scegliendo, fra le soluzioni proposte dalla `TI-92` quella con ordinata positiva. Le condizioni poste dalla macchina sono verificate, date le condizioni iniziali.

Ma che cosa significa approssimare una parabola tramite ellissi, operando in un intorno opportuno del vertice? Per rispondere a questa domanda, è stata analizzata al variare del parametro c, che descrive la semidistanza focale nell'ellisse, la bontà dell'approssimazione in intorni più o meno grandi del vertice.

L'equazione iniziale dell'ellisse

$$\mathbf{PF_1 + PF_2 = F_1F_2 + 2}\boldsymbol{g}$$

può essere scritta in forma analitica come segue, utilizzando i parametri c e g precedentemente definiti:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2c)^2}=2(c+g)$$

equazione in cui si può esplicitare, in ambiente `Home` con il comando <`Solve`>, la variabile y. L'espressione relativa ai valori positivi di y, una volta ricavata, è stata copiata come funzione `y1(x)` nell'ambiente `Y=Editor`. Parimenti sono state inserite come `y2(x)` l'equazione della parabola precedentemente ottenuta e come `y3(x)` e `y4(x)` due funzioni costanti corrispondenti ai parametri c e g.

`y1(x)` $= \left|\dfrac{1}{c+g}\right|\sqrt{-(2c+g)g(x+g)(x-2c-g)}$

`y2(x)` $= \sqrt{4g(x+g)}$

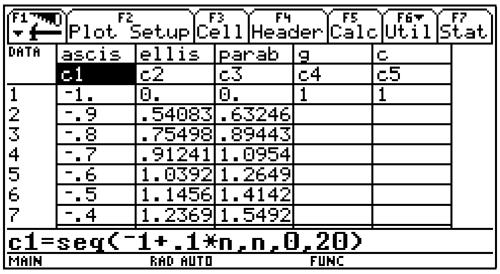
`y3(x)` $= c$

`y4(x)` $= g$

In classe, per una visualizzazione grafica, sono stati assegnati in ambiente `Home` dei valori iniziali ai parametri c e g (ad esempio $\mathbf{1 \to}\boldsymbol{c}$, $\mathbf{1 \to}\boldsymbol{g}$).

Le quattro funzioni inserite sono state utilizzate per la costruzione di un *foglio di lavoro* nell'ambiente `Data/Matrix Editor`. Questo foglio permette di confrontare, dal punto di vista sia numerico sia grafico, le ordinate delle funzioni $y1(x)$ e $y2(x)$, che rappresentano gli archi di ellisse e di parabola nel primo e nel secondo quadrante al variare delle ascisse, in un intorno del vertice comune alle due coniche.

Nell'ambiente `Data/Matrix Editor` abbiamo creato (cfr. fig. 2) una nuova variabile di tipo `Data` in cui risulta inserita in colonna `c1` la lista di valori possibili per le ascisse a partire dall'ascissa del vertice (se si sceglie 1 come valore del parametro g allora $x_V = -1$).



DATA	ascis	ellis	parab	g	c
	c1	c2	c3	c4	c5
1	⁻1.	0.	0.	1	1
2	⁻.9	.54083	.63246		
3	⁻.8	.75498	.89443		
4	⁻.7	.91241	1.0954		
5	⁻.6	1.0392	1.2649		
6	⁻.5	1.1456	1.4142		
7	⁻.4	1.2369	1.5492		

c1=seq(⁻1+.1*n,n,0,20)

MAIN RAD AUTO FUNC

fig. 2

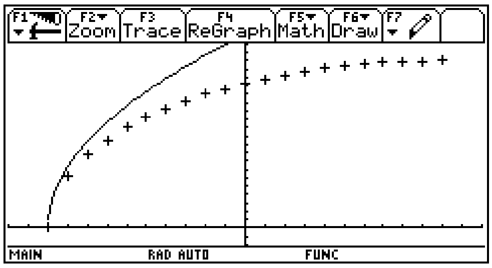


fig. 3

Tale lista può essere generata con l'istruzione `<seq>`: la successione viene data dai valori dell'espressione $-1+0.1\times n$ quando la variabile n assume tutti i valori interi compresi tra 0 e 20. Il valore 0.1 assume il significato di passo di incremento che può essere modificato a piacere.

In seconda colonna ponendo c2 = y1(c1) sono state costruite le ordinate lungo l'ellisse, in terza colonna ponendo c3 = y2(c1) le ordinate lungo la parabola. In quarta e quinta colonna ponendo c4 = y4(c1) e c5 = y3(c1) sono visualizzati rispettivamente nelle celle r1c4 e r1c5 i valori attuali dei parametri[iii] *g* e *c* che possono essere eventualmente successivamente modificati in ambiente Home.

Osservazione

L'ambiente Data/Matrix Editor pur essendo un "foglio elettronico" di ridotte potenzialità e mirato all'analisi di dati statistici, può però, operando opportunamente sulla definizione delle colonne, relazionare una colonna ad un'altra ed interagire con gli altri ambienti (Home e Y=Editor), aumentando così le proprie capacità di lavoro. Vengono così recuperate alcune funzionalità gestite dagli studenti nei fogli elettronici usuali tramite la possibilità (non presente nell'ambiente Data/Matrix Editor) di copiare formule, con riferimenti assoluti o relativi, da una cella all'altra.

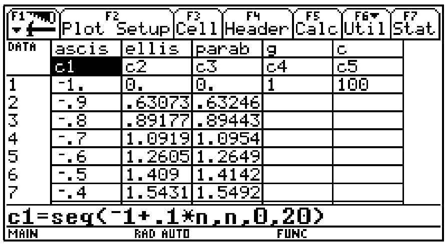
Il grafico in fig. 3 è stato costruito, nel primo e nel secondo quadrante, disegnando per punti l'ellisse (<Plot Setup> con „ ad esempio in Plot1, <Define> con ƒ come tipo Scatter, con ascissa in colonna c1 ed ordinata in colonna c2). Con tratto continuo viene disegnata invece la parabola opportunamente selezionata con † in Y=Editor. In questo modo, quando si passa in ambiente Graph per disegnare i grafici, è possibile visualizzare sempre a pieno schermo l'intorno destro dell'ascissa del vertice in esame che è stato definito con l'istruzione <seq>, se si seleziona „ o:ZoomData.

Nell'intorno destro dell'ascissa del vertice, definito dalla lista assegnata tra $x = -1$ e $x = 2$, si osserva la divergenza tra l'arco di parabola e l'arco di ellisse, divergenza che è stata analizzata dagli studenti in dettaglio, a livello numerico, esplorando la tabella di fig. 2 e confrontando i valori corrispondenti di ordinate (ellisse-parabola) sulla medesima riga.

E' stata calcolata con gli studenti, a conferma per altra via della divergenza tra gli archi delle due curve, l'eccentricità dell'ellisse, in base ai valori scelti per *c* e *g*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{c+g} = \frac{1}{2}$$

Secondo l’analisi, precedentemente svolta, della proposta hilbertiana ci si attendeva che la divergenza si riducesse assegnando ad esempio a *c* il valore 100 (cfr. fig. 4 e 5).



DATA	ascis	ellis	parab	g	c
	c1	c2	c3	c4	c5
1	⁻1.	0.	0.	1	100
2	⁻.9	.63073	.63246		
3	⁻.8	.89177	.89443		
4	⁻.7	1.0919	1.0954		
5	⁻.6	1.2605	1.2649		
6	⁻.5	1.409	1.4142		
7	⁻.4	1.5431	1.5492		

c1=seq(⁻1+.1*n,n,0,20)

MAIN RAD AUTO FUNC

fig. 4

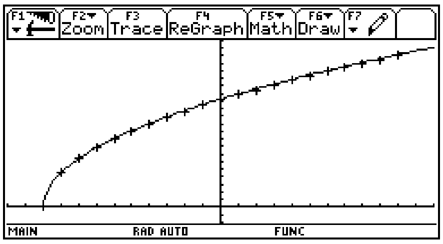


fig. 5

A controprova della buona approssimazione ottenuta in questo caso, e visualizzata nella rappresentazione grafica di fig. 5, si è verificato che l’eccentricità si avvicinava all’unità (nuovo valore: e =100/101).

Abbiamo cosi constatato, come ci eravamo prefissati, la possibilità di approssimare una conica con l’altra, ma era importante sottolineare in classe come l’ellisse resti comunque una curva chiusa e l’approssimazione tra le due curve sia valida solo in un opportuno intorno del vertice. Ciò è stato visualizzato variando l’ampiezza dell’intorno del vertice, portando da 20 a 300 l’escursione della lista che definisce la colonna `c1` delle ascisse (cfr. fig. 6). E’ stata in effetti ritrovata a partire da un’ascissa più avanzata la divergenza tra le due curve (cfr. fig.7) e analizzata sul piano quantitativo esplorando la tabella di fig. 6.

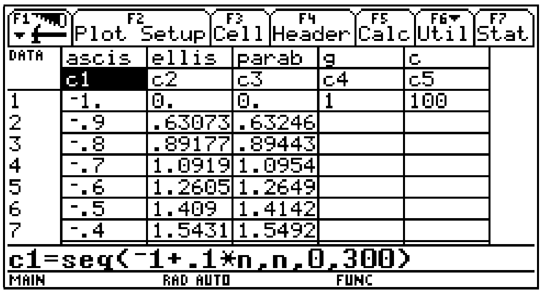


fig. 6

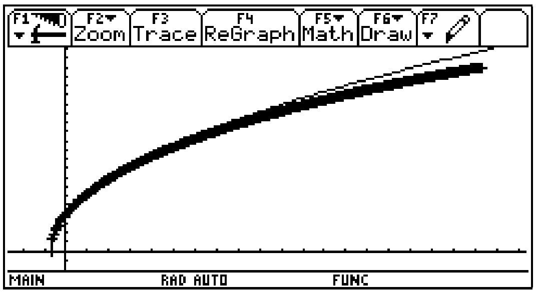


fig. 7

L'utilizzo dell'ambiente statistico `Data/Matrix Editor` (e dell'istruzione <seq> abbinata alla rappresentazione grafica `ZoomData` di una "nuvola di punti") ha permesso, in definitiva, di ben focalizzare ogni volta l'intorno in esame e di analizzarlo quantitativamente in modo sempre più approfondito, variando il passo dell'istruzione <seq>. Questa tecnica tipica dell'indagine statistica, non è stata però scelta per una particolare dimensione discreta del problema, ma per sfruttare le potenzialità tecniche dello strumento `Data /Matrix Editor` nella costruzione ed esplorazione del modello proposto.

A conclusione di quest'attività, svolta in classe in circa quattro ore di presentazione del problema e di costruzione e analisi con gli studenti del modello, sono stati proposti alcuni esercizi, da risolvere esplorando il foglio di lavoro e variando opportunamente i parametri in gioco.

Esempi di esercizi assegnati:

- Per dei valori prefissati di *c* e *g* determinare il massimo intorno destro, a *estremo superiore intero*, dell'ascissa del vertice in cui l'ordinata lungo l'ellisse può essere approssimata dall'ordinata lungo la parabola a meno di un valore ε prefissato.
- Fissati un valore di *g* e un intorno destro dell'ascissa del vertice in cui l'ordinata lungo l'ellisse può essere approssimata dall'ordinata lungo la parabola a meno di un valore ε prefissato, determinare il *minimo valore intero* di *c* che permetta il verificarsi di tale approssimazione.

---

[i] D. Hilbert e S. Cohn-Vossen, Geometria intuitiva, Boringhieri, Torino, p. 7 .

[ii] Cfr. G. Ravagnan e G. Vettorazzo, Spunti per una trattazione unitaria delle coniche in: Epsilon, Paravia, Torino, n. 10, settembre 1991, pp.26-29, in cui viene affrontato anche il caso della costruzione della parabola come caso limite dell'iperbole.

[iii] L'inserimento, ad esempio in colonna `c4`, di una funzione costante visualizza il valore costante della funzione solo nella prima cella (`r1c4`) senza riproporlo nelle celle sottostanti.

15. COSTRUZIONE DI UNA LIBRERIA DI FUNZIONI PER LA GEOMETRIA ANALITICA

Giorgio Ravagnan
Liceo scientifico "G. B. Benedetti" Venezia

Classe: terza Liceo Scientifico P.N.I.
Obiettivi: costruzione di funzioni per risolvere problemi
Prerequisiti: nozioni elementari di programmazione
Tempi: tre ore di lezione per impostare l'attività, lavoro in itinere durante lo sviluppo della geometria analitica
Metodi: lezione frontale, lavori individuali e di gruppo di programmazione di funzioni (`function`) in ambiente `Program Editor`

Nel corso dell'anno scolastico ho costruito, assieme agli alunni di una classe terza di Liceo Scientifico, un archivio di funzioni per la geometria analitica. L'obiettivo per gli studenti era quello di crearsi da soli, tramite la programmazione, degli strumenti di calcolo automatico che espandessero, in modo però mirato alla tematica geometrica, la libreria di funzioni (menù `Algebra`) presente nell'ambiente `Home` della calcolatrice `TI-92`. Inizialmente, in tre ore di lezione, sono state presentate alcune funzioni di esempio per evidenziare alcuni comandi del linguaggio di programmazione particolarmente funzionali e delle possibili scelte sintattiche (i punti ad esempio sono rappresentati come liste $\{x, y\}$; le rette si analizzano più facilmente se poste in forma esplicita: $y = mx + q$ oppure $x = k$). Successivamente le restanti funzioni dell'archivio sono state costruite assieme in classe o analizzando proposte elaborate a casa dagli studenti, man mano che procedeva lo studio della geometria analitica. L'ambiente di programmazione (`Program Editor`) è particolarmente amichevole, poiché la sintassi e le istruzioni predefinite possono essere introdotte utilizzando il menù a tendine con i tasti funzionali e il catalogo generale di comandi (tasto Ø). Il linguaggio inoltre è strutturato in modo simile al *Pascal*, linguaggio conosciuto dagli studenti già dal biennio, prerequisito non indispensabile, ma che in questo caso ha semplificato l'avvio del lavoro. Le funzioni richiedono variabili d'ingresso, dichiarate in fase di programmazione nell'intestazione, e restituiscono un valore (se non c'è indicazione esplicita nel listato, normalmente viene automaticamente restituito l'ultimo valore calcolato).

Le funzioni più semplici, come la seguente funzione `pendenza`, possono venir costruite più velocemente in ambiente `Home`.

Esempio 1: la funzione pendenza

Il simbolo » indica l'assegnazione e viene inserito con il tasto Â

```
(b[2] – a[2]) / ([b[1] – a[1]) » pendenza(a,b)
```

Per funzioni più complesse si utilizza invece l'ambiente di programmazione (`Program Editor`).

Esempio 2: la funzione retta

Determina l'equazione di una retta passante per due punti o per un punto ma di pendenza assegnata. In quest'ultimo caso l'ordine di inserimento in chiamata del punto e della pendenza è indifferente, poiché la pendenza viene selezionata analizzando il tipo delle variabili inserite.

```
retta(a,b)
Func
If getType(a)="NUM" Then
   y=expand(a*(x – b[1])+b[2])
ElseIf getType(b)="NUM" Then
   y=expand(b*(x – a[1])+a[2])
ElseIf a[1]=b[1] Then
   x=a[1]
Else
y=expand(pendenza(a,b)*(x–a[1])+a[2])
EndIf
EndFunc
```

Un aspetto tecnico, che si è rivelato interessante e funzionale alla costruzione di funzioni operanti su oggetti quali rette e curve, consiste nella possibilità di svolgere in programmazione (nell'ambiente `Program Editor`) del calcolo simbolico, utilizzando come variabili e manipolando ad esempio equazioni e coefficienti. Questa caratteristica, evidenziata negli esempi seguenti, arricchisce e sostituisce, con maggiori potenzialità, il lavoro tradizionale (ad esempio in un corso P.N.I.) di programmazione in *Pascal*, attività più orientata in genere al calcolo numerico. La costruzione delle funzioni assomiglia, per certi versi, dal punto di vista tecnico, alla costruzione di programmi sulle stringhe, ma, per il tipo di procedure che si utilizzano, porta a riflettere dal punto di vista logico e procedurale sulla struttura algebrica e geometrica degli oggetti matematici in esame, tant'è che a volte alcune funzioni sono state costruite con gli studenti contemporaneamente all'introduzione di nuove procedure, formule e equazioni matematiche, mentre altre sono state costruite a casa come ripensamento e sviluppo analitico dei nuovi oggetti matematici introdotti.

Esempio 3: la funzione esplicit

Esplicita l'equazione di una retta se possibile rispetto alla y, altrimenti rispetto alla x. Nella costruzione di funzioni che lavorano su rette può essere comodo utilizzare le equazioni delle rette scritte come $y = mx+q$ oppure come $x = k$, cioè in forma esplicita. La chiamata di esplicit permette però, nelle varie funzioni, di inserire in partenza o di costruire rette con equazioni di qualsiasi tipo, anche implicite. Tramite i comandi `left` e `right` si possono selezionare le espressioni a 1° o a 2° membro di un'equazione. Si osservi che il confronto relativo alla condizione dell'`if` viene compiuto tra variabili di tipo stringa; operando invece con variabili di tipo espressione si possono generare errori.

```
esplicit(rr)
Func
If string(left(solve(rr,y)))="y" Then
   solve(rr,y)
Else
   solve(rr,x)
EndIf
EndFunc
```

Esempio 4: la funzione distrel

Serve come base per il calcolo, tramite ulteriori funzioni, della distanza punto-retta e delle bisettrici degli angoli formati da due rette non parallele. Calcola a partire da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ e da un punto di coordinate (x_0, y_0) la formula:

$$\frac{a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In chiamata è indifferente se si inserisce prima il punto o la retta. La funzione `esplicit`, utilizzata all'interno della funzione `distrel`, permette di inserire equazioni di rette scritte in forma qualsiasi.

```
distrel(rr,pp)
Func
Local app,a,b,c
If getType(rr)="LIST" Then
   rr»app
   pp»rr
   app»pp
EndIf
esplicit(rr)»rr
If string(left(rr))="x" Then
   ªright(rr)»c
   1»a
   0»b
Else
   solve(rr|x=0,y)»c
   right(c)»c
   solve(rr|x=1,y)»a
   right(a)-c»a
   ª1»b
EndIf
(a*pp[1]+b*pp[2]+c)/(§(a^2+b^2))
EndFunc
```

La funzione `distrel` evidenzia anche, con la chiamata di `esplicit` la possibilità, sfruttata anche negli esempi 5 e 6 seguenti, di costruzione, *per assemblaggio di funzioni di base*, di funzioni che risolvono problemi più complessi, costruzione risultata a volte più semplice e divertente da gestire per gli studenti, ma in ogni caso utile perché porta ad individuare e codificare procedure risolventi di problemi geometrici e quindi a rinforzare le capacità di costruire percorsi risolutivi.

Per calcolare ad esempio la distanza punto-retta, è di immediata costruzione *per assemblaggio* la seguente funzione **distrett.**

```
distrett(rr,pp)
Func
abs(distrel(rr,pp))
EndFunc
```

La seguente fig. 1 evidenzia l'utilizzo e la diversità, in esecuzione, tra le due funzioni.

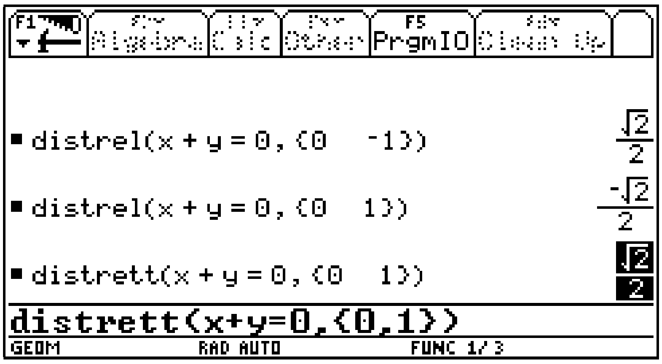


fig. 1

Esempio 5: le funzioni bisett 1, 2

La funzione `bisett1` calcola l'equazione della bisettrice di uno dei due angoli formati da due rette, è una funzione di assemblaggio.

```
bisett1(rr1,rr2)
Func
Local rr
distrel(rr1,{x,y})=distrel(rr2,{x,y}) » rr
esplicit(rr)
EndFunc
```

La funzione `bisett2` è analoga, ma lavora con la seguente assegnazione:

```
distrel(rr1,{x,y})=-distrel(rr2,{x,y}) » rr
```

calcolando la bisettrice del secondo angolo formato dalle due rette.

La seguente fig. 2 evidenzia l’utilizzo, in esecuzione, di entrambe le funzioni.

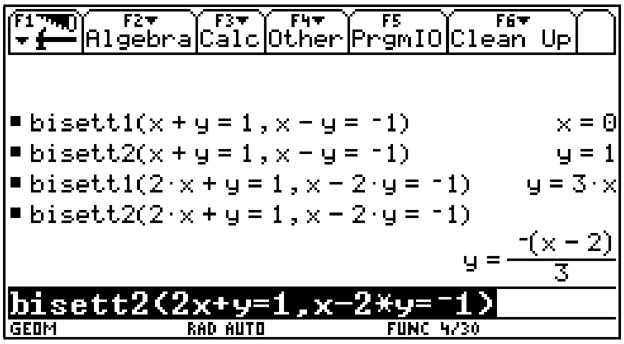


fig. 2

Esempio 6: le funzioni inexcen 1, 2, 3, 4

Calcolano, operando sempre sui vertici relativi ai punti `a` e `b`, l’incentro o uno degli excentri possibili di un triangolo. Si differenziano tra loro a seconda che utilizzino `bisett1` o `bisett2` .

```
inexcen1(a,b,c)
Func
Local rr1,rr2
bisett1(retta(a,b),retta(b,c)) » rr1
bisett1(retta(a,b),retta(a,c)) » rr2
inters(rr1,rr2)
EndFunc

Inexcen2(a,b,c)
Func
Local rr1,rr2
bisett1(retta(a,b),retta(b,c)) » rr1
bisett2(retta(a,b),retta(a,c)) » rr2
inters(rr1,rr2)
EndFunc
```

`Inexcen3,4` costruite in modo analogo, calcolano gli altri risultati possibili.

Nella seguente fig. 3 l'esecuzione di `inexcen1` fornisce uno dei possibili excentri (intersezione della bisettrice di un angolo interno al triangolo con la bisettrice di un angolo esterno) mentre `inexcen2` fornisce l'incentro del triangolo, come si può stabilire analizzando la posizione dei punti ottenuti.

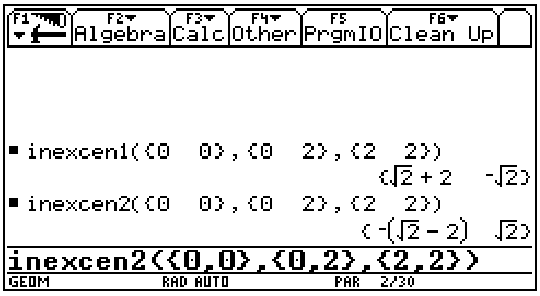


fig. 3

Il riconoscimento dell'incentro e/o dell'excentro può essere effettuato anche disegnando (cfr. fig. 4) il triangolo ed i punti determinati in ambiente `Graph`: si scrivono in `Y=Editor` in modalità parametrica (3 *f* `Graph...PARAMETRIC`) le equazioni dei lati del triangolo con il parametro t variabile tra tmin = 0 e tmax = 1 (si può impostare con $). I punti invece sono disegnati come `plot` di un `data` costruito in ambiente `Data/Matrix Editor` inserendo in colonna `c1` le ascisse ed in colonna `c2` le ordinate dei punti incentro ed excentro. Il sottomenù a tendina relativo a ‰, in ambiente `Graph`, permette poi di aggiungere "a mano libera" ad esempio le due bisettrici che individuano l'excentro determinato.

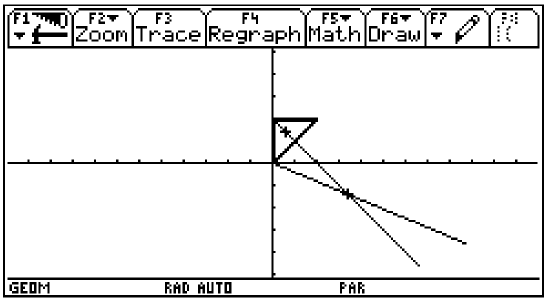


fig. 4

La possibilità di “incastrare o connettere” funzioni, è risultata inoltre importante perché la costruzione di un archivio strutturato (come una *Unit* in *Pascal*, ma con meno problemi sintattici di implementazione, dato che qualsiasi funzione memorizzata può essere utilizzata direttamente all’interno di altre) evidenzia reti logiche di collegamento tra diverse formule e diversi problemi, contribuendo così a sviluppare un metodo più ragionato di lavoro. Per analizzare la struttura dell’archivio gli studenti hanno infine redatto una tabella a doppia entrata che indicava per ogni funzione tutte le funzioni chiamate durante la sua esecuzione.

Come si può notare anche dalla semplice funzione `pendenza`, ma è un aspetto più consistente nell’esempio seguente, il linguaggio sintattico utilizzato nei comandi e in programmazione facilmente è di tipo vettoriale o matriciale. In una scansione del programma che preveda uno studio successivo dell’algebra lineare, l’abitudine al linguaggio, acquisita in ambito geometrico in cui la dimensione vettoriale è di forte pregnanza intuitiva ed utilità, e l’attenzione agli aspetti sintattici in fase di implementazione di procedure, possono favorire una miglior comprensione delle proprietà e dell’operatività algebrica in un contesto, l’algebra lineare appunto, spesso complesso nell’identificazione del significato semantico di uno svolgimento analitico.

Si verifica infatti talvolta, operando con strumenti informatici come la `TI-92`, un’interazione dinamica tra sintassi e semantica e un’inversione del rapporto tra teoria e applicazione. Ad esempio nello studio svolto successivamente in classe di argomenti di statistica (costruzione di un *foglio di lavoro* in ambiente `Data/Matrix Editor` per l’analisi della dipendenza statistica) alcuni studenti, pur non essendo ancora stato affrontato l’intero tema dell’algebra lineare, sono riusciti, lavorando da soli, a costruire un programma per il calcolo dell’indice *chi quadrato*. Hanno implementato la tabella a doppia entrata delle frequenze assolute come matrice e, consultando il manuale della calcolatrice come dizionario di comandi, hanno realizzato l’algoritmo necessario tramite calcolo di matrici trasposte e operazioni tra matrici.

Esempio 5: la funzione parab3pt

Calcola l’equazione della parabola passante per 3 punti non allineati. Il comando `simult` risolve un sistema operando su due variabili: la matrice dei coefficienti e il vettore colonna dei termini noti (pensati, questi ultimi, a 2° membro).

```
Parab3pt (a,b,c)
Func
Local mat
simult([[a[1]^2,a[1],1] [b[1]^2,b[1],1]
     [c[1]^2,c[1],1]], [[a[2]] [b[2]] [c[2]]])»mat
```

```
y = mat[1,1]*x^2+mat[2,1]*x + mat[3,1]
EndFunc
```

Una funzione simile (`circo3pt`) può essere ovviamente costruita per la circonferenza, anche se sono possibili altre soluzioni, secondo un approccio geometrico, come si può vedere dal seguente esempio, proposto da alcuni studenti.

Esempio 6: la funzione circassi
Calcola l'equazione della circonferenza passante per 3 punti non allineati per via geometrica, *assemblando* funzioni note.

```
circassi(a,b,c)
Func
Local a,b,c,ce,r
circocen(a,b,c) » ce
dist(ce,a) » r
expand((x-ce[1])^2+(y-ce[2])^2-r^2=0)
EndFunc
```

Per lavorare più agilmente nella risoluzione di problemi, gli studenti hanno costruito, con un programma `geom` simile a quello qui presentato, un *menù personalizzato* del proprio archivio di funzioni che, una volta eseguito in `Home` il programma, può essere attivato (o disattivato) con il tasto Ù , in sostituzione del menù usuale dell'ambiente `Home`.

Esempio 7: il programma geom e il menù personalizzato
La struttura `custom` costruisce con il comando `title` i menù principali, associati automaticamente ai vari tasti funzionali, e con il comando `item` i sottomenù a tendina. Il listato evidenzia quindi i nomi delle varie funzioni costruite assieme agli studenti, anche se non tutte sono state descritte in questo lavoro. La schermata, presentata in fig. 5, visualizza invece il menù attivato in ambiente `Home`.

```
geom()
Prgm
Custom
Title "RETTA"
     Item "retta("
     Item "rettapar("
```

```
     Item "rettaper("
     Item "inters("
     Item "esplicit("
     Item "bisett1("
     Item "bisett2("
     Item "parall("
     Item "coeffang("
     Item "tgangolo("
Title "PUNTI"
     Item "allinea("
     Item "dist("
     Item "distrett("
     Item "asse("
     Item "ptomedio("
     Item "pendenza("
     Item "distrel("
Title "TRIANGOLI"
     Item "mediana("
     Item "ortocen("
     Item "circocen("
     Item "baricen("
     Item "areatria("
     Item "inexcen1("
     Item "inexcen2("
     Item "inexcen3("
     Item "inexcen4("
Title "CONICHE"
     Item "circo3pt("
     Item "circassi("
     Item "circcrag("
     Item "parab3pt("
     Item "ellip2pt("
EndCustm
EndPrgm
```

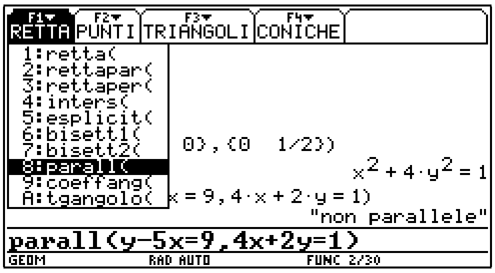


fig. 5

Quest'attività, di costruzione ed utilizzo della libreria di funzioni, ha portato facilmente, nel lavoro quotidiano di risoluzione dei problemi, a discutere in classe piuttosto delle procedure che dei calcoli, individuando se possibile anche procedure alternative. L'archivio è stato utilizzato dagli studenti anche nei compiti in classe, facilitando dal punto di vista tecnico la risoluzione di esercizi, ma anche responsabilizzando gradualmente gli studenti nell'organizzazione espositiva, dovendo, infatti, confrontare il linguaggio matematico usuale cui erano abituati con la struttura sintattica delle calcolatrici, spesso da loro stessi definita per l'esecuzione delle funzioni implementate.

Ogni studente, utilizzando la calcolatrice, ha trovato il proprio personale equilibrio tra procedure e calcolo manuali da un lato e procedure programmate e calcolo automatico dall'altro. Nella discussione in classe e nella correzione dei compiti si è cercato per alcuni problemi, più che altro per evidenziare e misurare le potenzialità della calcolatrice e della libreria costruita, di elaborare uno svolgimento interamente con la `TI-92`, come si può vedere nei seguenti esempi. Tale esercizio sintattico ha portato comunque talvolta, in occasione di problemi più complessi, a focalizzare, schematizzandole, procedure matematiche e ad individuare percorsi risolutivi più incisivi o più sintetici.

Esempio 8: La risoluzione automatica di un esercizio sulla circonferenza

Problema: Determinare la circonferenza, circoscritta al triangolo isoscele ABC, sapendo che la base AB, di misura $6\sqrt{2}$, sta sulla retta $x - y - 4 = 0$ e che il vertice C ha coordinate (- 1, 5).

Risoluzione: Si determina la retta per C perpendicolare alla base AB e successivamente per intersezione il punto medio della base. Quindi, operando con un "compasso analitico", si determinano i vertici restanti del triangolo che permettono di completare la risoluzione (cfr. fig. 6 e fig. 7).

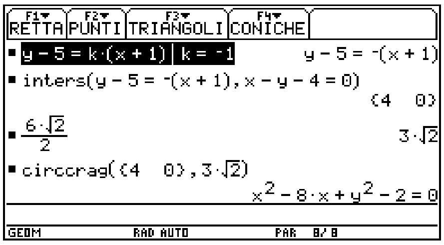


fig. 6

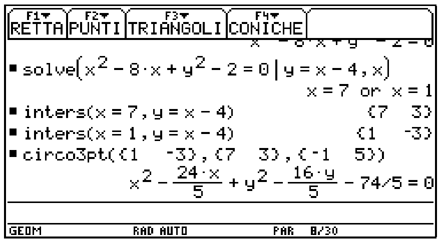


fig. 7

La fig. 8 seguente evidenzia il triangolo ABC, individuabile durante lo svolgimento.

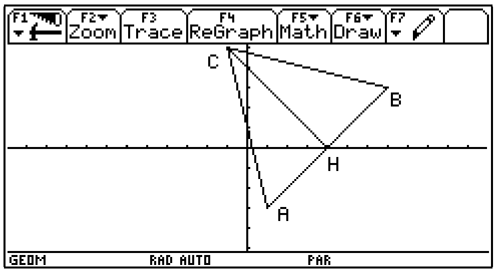


fig. 8

Può essere, anche in questo caso, disegnato facilmente in ambiente `Graph`, una volta determinati i tre vertici, scrivendo in `Y=Editor` in modalità parametrica le equazioni dei lati con il parametro t variabile tra tmin = 0 e tmax = 1. Il sottomenù a tendina relativo a ‰, in ambiente `Graph`, permette poi di aggiungere "a mano libera" testo e segmenti per completare la figura.

Esempio 9: La risoluzione automatica di un esercizio sull'ellisse

<u>Problema</u>: Determinare l'ellisse, riferita ai propri assi, e passante per i punti $A(3,2)$, $B(5,0)$. Detti P e P' i punti di intersezione della tangente alla curva in A con le tangenti condotte per gli estremi dell'asse maggiore, verificare che le rette PF e $P'F'$ (con F e F' fuochi) si intersecano sulla normale alla curva nel punto A. Scrivere infine l'equazione della circonferenza di diametro PP' e verificare che passa per i fuochi.

<u>Risoluzione</u>: Si calcola l'equazione dell'ellisse (cfr. fig. 9) tramite la funzione **ellip2pt**, che determina l'equazione di una ellisse o di un'iperbole centrata

nell'origine e passante per due punti assegnati. Si utilizza la funzione `simult` per risolvere un sistema lineare. La soluzione viene fornita sotto forma di matrice, i cui elementi vengono utilizzati come coefficienti per scrivere l'equazione della conica.

```
Ellip2pt(a,b)
Func
Local mat
simult([[a[1]^2,a[2]^2][b[1]^2,b[2]^2]],[[1][1]])    »
mat
mat[1,1]*x^2+mat[2,1]*y^2=1
EndFunc
```

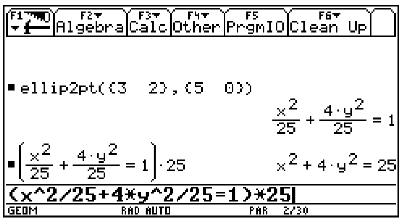


fig. 9

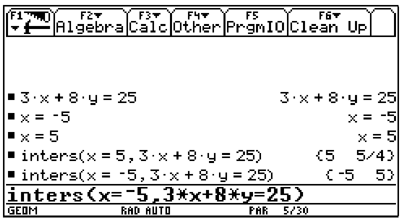


fig.10

In fig. 10 l'equazione della tangente all'ellisse nel punto *A* viene scritta utilizzando le formule di *sdoppiamento* (dato che il punto appartiene alla conica) e, dopo aver inserito le equazioni delle tangenti nei due vertici, si trovano i punti *P* e *P*' richiesti.

In fig. 11 si calcolano i fuochi e in fig. 12 si determinano le equazioni delle rette *PF* e *P'F'*.

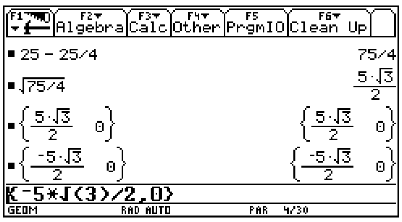


fig. 11

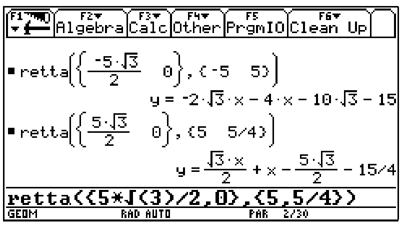


fig.12

In fig. 13 e fig. 14 si calcola il punto d’intersezione delle rette *PF* e *P’F’* e si verifica l’appartenenza di tale punto alla normale alla curva nel punto *A* (si noti che la verifica avrebbe esito positivo anche lavorando con le rette *PF’* e *P’F*).

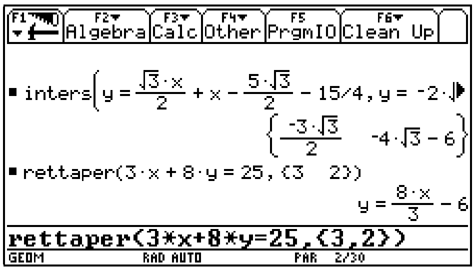


fig. 13

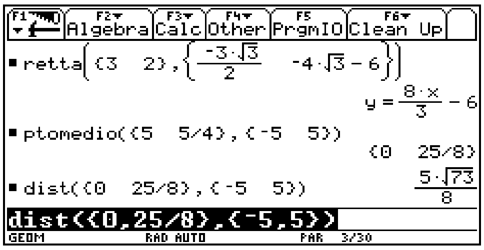


fig. 14

Sempre in fig. 14 si calcolano il centro ed il raggio della circonferenza richiesta, la cui equazione viene determinata in fig. 15 tramite la seguente funzione **circrag**

```
circrag(ce,r)
Func
Local ce,r,app
If getType(r)="LIST" Then
 R » app
 Ce » r
 App » ce
EndIf
expand((x-ce[1])^2+(y-ce[2])^2-r^2=0)
EndFunc
```

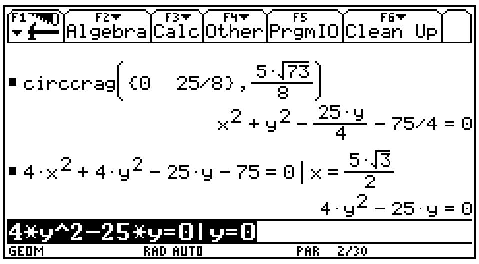


fig. 15

Conclude infine l'esercizio (cfr. fig. 15 e fig. 16) la verifica del passaggio della circonferenza per uno dei due fuochi.

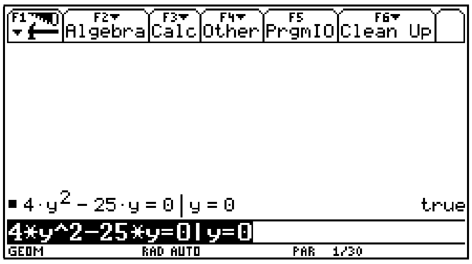


fig. 16

16. FUNZIONI CIRCOLARI

Fernando Ilari
Liceo Scientifico “E. Majorana” Latina

Classe: quarta liceo scientifico sperimentazione Brocca
Obiettivi: Approfondire i vari ambienti TI-92
Prerequisiti: Conoscenza elementare della macchina; concetto di seno e coseno di un angolo
Tempi: 8 ore effettive (dieci ore-scuola) compresa la verifica finale
Metodi: lezione frontale, lavoro individuale
Strumenti: calcolatrici (in rapporto 1:1), lavagna luminosa, viewscreen e la scheda allegata

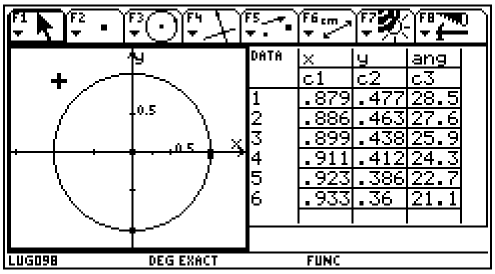
1. Funzioni circolari

La prima parte della lezione è stata sviluppata interagendo continuamente con i ragazzi; in questa fase si è rivelato indispensabile l'utilizzo del viewscreen. La calcolatrice è quindi risultata utile come lavagna attiva, potendo soddisfare in tempi rapidissimi le curiosità e sciogliere i dubbi che venivano manifestati. La scheda traccia è stata consegnata ai ragazzi all’inizio della lezione evitando così che venissero distratti dal fatto di dover prendere appunti.

Scheda lavoro

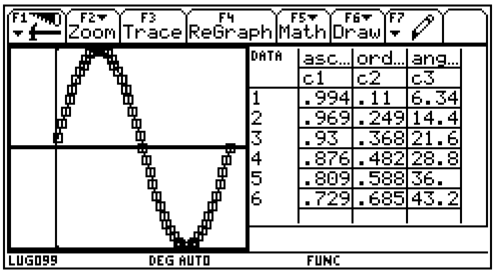
1. Richiamare, con i tasti 2 |, il menù Var-Link data; posizionarsi con il cursore su `sysdata`, e, se presente, pigiare in sequenza ƒ ¨ ¸ J per tornare in Home, altrimenti utilizzare solo il tasto J .
2. Entrare nell'ambiente Geometry (O n `new` (o `current`).Se programma viene creato per la prima volta (new), allora si deve specificare la directory (folder) e nome del file (variable), altrimenti (open) basta cercarne il nome nella schermata che appare).

3. Con i tasti Š o si può accedere ad un menù, riportato nella figura precedente, con il quale si possono impostare i parametri preferiti. Per modificare l'impostazione di default della scala (5mm), prendere un punto sull'asse orizzontale e trascinarlo fino ad ottenere la scala desiderata; tutto verrà modificato in conformità.
4. Disegnare la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario: „ z (creo il segmento che poi assumerò come raggio), misurare, con i tasti ˆ ¨ , il segmento spostando eventualmente un estremo se la lunghezza non è pari a quella desiderata, † n (indicando il raggio e il centro) e infine ˆ z (controllo l'equazione della circonferenza).
5. Prendere „ © un punto sulla circonferenza chiedendone ˆ z le coordinate (Posso spostare la scritta, pigiando la manina e contemporaneamente il tasto direzionale).
6. Segnare un angolo ‰ m di vertice (0;0) e con un estremo nel punto (1;0), misurandone l'ampiezza ˆ ª .
7. Raccogliere i dati ˆ m © evidenziando nell'ordine l'ascissa, l'ordinata del punto mobile e l'ampiezza dell'angolo.
8. Posizionare ‚ il punto individuato in 4 nei pressi del punto di coordinate (1;0). Animare il punto ‰ ª trascinandolo ‚ nella direzione opposta a quella di moto. Maggiore è il trascinamento, più veloce è l'animazione.
9. Tabellare i dati O { current ƒ ¨ caricamento variabile sysdata.
10. Con il comando Š Ò si aprono 2 finestre, a sinistra il grafico e a destra i valori tabulati delle coordinate del punto mobile e dell'angolo corrispondente.
11. Posizionandosi nella prima casella di ogni colonna, è possibile darle un titolo. Con il tasto Š ê si ritorna all'ambiente Geometry.



In ambiente Data/Matrix Editor O { si può predisporre „ il tipo di grafico da visualizzare definendolo ƒ in termini di Plot type, di Box, di valori di ascissa (indicare la colonna corrispondente (c1, o c2 ecc.) e di ordinata (idem). Confermato con ¸ quanto scelto, si passa ¥ R alla pagina grafica.

Volendo visualizzare simultaneamente due finestre, si attiva con il tasto 3 la finestra di dialogo da dove, con il tasto „ , si imposta il tipo di suddivisione (orizzontale o verticale) e quali due applicazioni si andranno a visualizzare. Con 2 O passo da una finestra all'altra e con 2 G ritorno allo schermo pieno.



Esercizi

Esaurita la fase precedente, i ragazzi, hanno svolto, singolarmente o in gruppo, i seguenti esercizi:

1. Predisporre il grafico con le coordinate x in ascissa e y in ordinata. Che legame fra di esse puoi ricavare?
2. Predisporre una colonna con il calcolo di ascissa/ordinata e poi un'altra con il calcolo di ordinata/ascissa e rappresentare i due grafici, mantenendo in ascissa l'ampiezza dell'angolo; che cosa noti riportando i grafici del seno e del coseno sullo stesso piano cartesiano?
3. Per alcuni angoli, i grafici ricavati alla prima domanda si comportano in modo “strano”; che spiegazione riesci a dare?
4. Con una procedura analoga a quella descritta nella scheda traccia, calcola le variazioni e disegna il grafico della tangente goniometrica di un angolo definita come l'ordinata del punto di incontro della tangente geometrica, condotta nell'origine dell'arco alla circonferenza cui essa appartiene, con il prolungamento del raggio passante per l'estremo dell'arco.

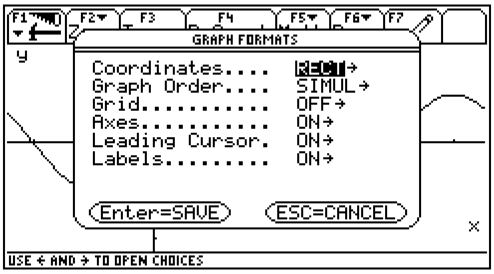
   Tutti gli esercizi sono stati poi discussi in classe.

2. Trasformazioni di una funzione goniometrica

Ai ragazzi è stata fornita la scheda che dovevano riconsegnare dopo due ore. Sono stati dati chiarimenti operativi. Gli ambienti interessati sono stati Y-Editor per scrivere il testo della funzione e Graph per visualizzarne il grafico.

Scheda lavoro

1. In ambiente Y-editor (¥ W) immettere la funzione y = sin(x).
2. Visualizzarne il grafico (¥ R) adattando opportunamente la scala con „ m o con „ ¨ .
3. Se necessario impostare (ƒ o) il formato del grafico secondo quanto indicato in figura.



4. Immettere le seguenti funzioni, ogni volta disegnando solo la prima e l'ultima (utilizzare il tasto † per indicare quali funzioni si vogliono rappresentare): y=–sin(x), y=sin(x+45), y=sin(x) + 1, y=2sin(x), y=sin(2x) e raccogliendo ogni volta i seguenti dati:

	y= sin(x)	y= -sin(x)	y= sin(x+45)	y= sin(x)+1	y= 2sin(x)	y= sin(2x)
Intestazione asse x ‡ ©						
Dominio						
Codominio						
Spostamento verticale						
Spostamento orizzontale						
Dilatazione ascisse e/o ordinate						
Contrazione ascisse e/o ordinate						
Altre osservazioni						

N.B. E' preferibile, anziché ogni volta riscrivere la funzione seno, chiamarla con l'etichetta che la TI-92 le assegna; es.: data y1=sin(x) per introdurre y=sin(2x) si digita y2(x)=y1(2x), per y=sin(x+5) si digita y3(x)=y1(x+5) etc

Esercizi

1. Ripetere quanto sopra per y = cos(x) e per y = tan(x) formulando ipotesi generali.
2. Ripetere quanto sopra per y = sin(kx) con k = -2, - ½, 3 e trovare il periodo della funzione.
3. Disegnare sul foglio, assegnando valori a piacere ai parametri A, B, C e D, il grafico della funzione y = Asin(Bx+C)+D rispetto al grafico base; verificare l'esattezza del ragionamento utilizzando la TI-92.
4. Ricavare graficamente le funzioni goniometriche di 90±x 180±x 270±x 360-x
5. Ricavare il periodo delle funzioni y = sin(kx), y = cos(kx), y = tan(kx) assegnando a k valori a piacere.

L'attività proposta è stata molto coinvolgente; ogni alunno ha eseguito con diligenza il compito assegnatogli e pressoché tutti sono rimasti nei tempi previsti. La visione del grafico, ottenuta immediatamente, ha molto aiutato nel formulare ipotesi che il più delle volte si sono rivelate esatte.

Resta aperto il problema dell'utilizzo della calcolatrice limitato alle sole ore in classe; in assenza dell'insegnante, che interveniva nei momenti di stallo, l'attività avrebbe subito rallentamenti e qualche alunno si sarebbe arreso; la soluzione possibile, ma di non facile attuazione, è di prestare, per periodi limitati, le TI-92 agli alunni affinché acquistino pratica specialmente con gli ambienti interessati dalla lezione programmata.

A questa esercitazione ha fatto seguito una simulazione di compito in classe con l'utilizzo della TI-92, con la quale mi proponevo di verificare i seguenti

Obiettivi: abilità nell'uso della calcolatrice
saper analizzare un grafico, ricavandone gli elementi necessari
risolvere equazioni e disequazioni per via grafica

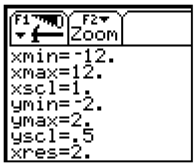
Durata: 1 ora

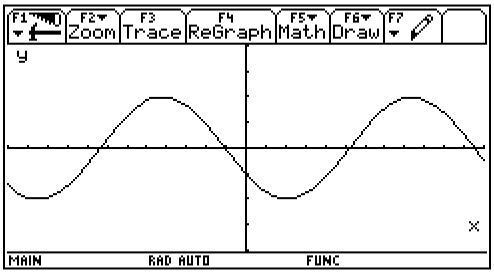
Calcolare gli zeri della funzione $y=\sin(3x-\pi/4)+1/2$ nell'intervallo $[-\pi;\pi]$ provando poi a ritrovarli sia per via algebrica che per via grafica.
Risolvere la seguente disequazione $2\sin x -3\cos x-2<0$ nell'intervallo $[-\pi;\pi]$ motivando la risposta

Fra le seguenti espressioni, quattro sono equivalenti due a due; utilizzando un ambiente opportuno individuarle, e per le altre due che non sono equivalenti, effettuare una opportuna modifica affinché lo diventino.

$$2\sin x\cos x\,;\; 1-2\cos^2 x\,;\; \sin(2x)\,;\; \sin^2\frac{x}{2}\,;\; \cos(2x)\,;\; \frac{1-\cos x}{2}$$

Predisponendo la finestra di visualizzazione ¥ ā come indicato nel riquadro a destra, provare a ricavare l'espressione analitica della funzione il cui grafico è riportato nella figura





Commento

Anche se la prova era senza voto, la novità di doversi cimentare utilizzando uno strumento prima di allora (ma anche dopo) disponibile solo in classe, ha creato negli alunni molta apprensione. Io sono stato molto elastico, aiutando gli alunni in difficoltà (*non ricordo come…* oppure *dove sono andato a finire e come faccio a tornare indietro*), ma ho notato che la calcolatrice, per la sua complessità, ha, almeno in questa prova, danneggiato più che aiutato i ragazzi, e senz'altro è stata più cattiva con i più deboli, dilatando di fatto le differenze esistenti nella classe.

Fra i quattro esercizi, il meno gettonato, forse anche per mancanza di tempo, è stato l'ultimo. La correzione è stata fatta in classe, collegialmente, commentando i vari percorsi seguiti dagli alunni, rianalizzando i passi necessari per un corretto utilizzo della macchina.

Resta in positivo il fatto che la calcolatrice, al di là delle difficoltà di utilizzo, si è rivelata di notevole aiuto, potendo fornire in tempi brevi notevoli quantità di esempi, risultando anche da stimolo alla curiosità dei ragazzi, velocizzando e arricchendo anche il lavoro dell'insegnante.

17. ANALISI DEL GRAFICO DI FUNZIONI

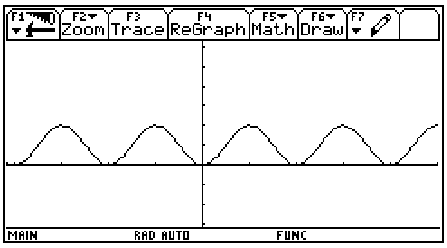
Anna Cristina Mocchetti
Liceo Scientifico "Ettore Majorana" Rho (Mi)

Classe: quarta liceo scientifico sperimentazione Brocca
Obiettivi: saper riconoscere i passi per la determinazione di una funzione composta; saper analizzare grafici; acquisire dimestichezza con lo strumento (TI-92); sviluppare il senso critico
Tempi: due unità orarie di lavoro in classe
Metodi e strumenti: lezione dialogata; uso di TI-92 in rapporto 1 a 1; libro di testo
La lezione:
Col comando O e la scelta <2> entriamo in Y= Editor per inserire le funzioni

F_1: $y = (sin(x))^2$ ed F_2: $y = sin(x^2)$

Col comando O e la scelta <4> tracciamo i due grafici: vediamo che sono grafici differenti.

<u>*Osservazione*</u>: per entrare in Y=Editor possiamo usare la combinazione di tasti ¥ W e per tracciare i grafici la combinazione ¥ R



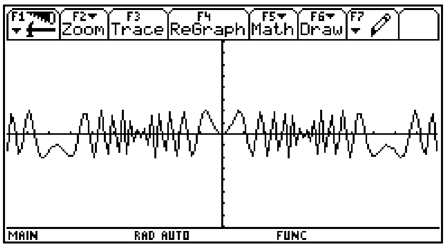


fig.1 F_1: $y = (sin(x))^2$ fig.2 F_2: $y = sin(x^2)$

Mentre $\mathbf{F_1}$ è positiva o nulla su tutto l'asse reale, $\mathbf{F_2}$ assume valori positivi e valori negativi.

Riflettiamo allora sull'espressione delle due funzioni e ai passi che un esecutore deve compiere per determinare y una volta preso il valore della variabile indipendente.

F_1: è il quadrato del seno di x				
x	$\rightarrow$	$sin(x)$	$\rightarrow$	$(sin(x))^2$

F_2: è il seno del quadrato di x				
x	$\rightarrow$	x^2	$\rightarrow$	$sin(x^2)$

Dalla descrizione di ciascuna possiamo dedurne le caratteristiche, già messe in risalto dai grafici tracciati:

F_1: l'ultima operazione dell'esecutore è il quadrato di un numero reale, che risulta positivo per tutti i valori del numero diversi da zero, nel qual caso, la funzione si annulla.
Inoltre, poiché $sin(x)$ è minore di 1, lo è anche il suo quadrato e pertanto F_1 è limitata: l'Insieme Immagine è IM = $\{y \in R: 0 \leq y \leq 1\}$.
Il grafico ci mostra una funzione simmetrica rispetto all'asse y, caratteristica che possiamo giustificare con i passaggi: $-sin(x) = sin(-x)$ da cui

$(sin(-x))^2 = (-sin(x))^2 = (sin(x))^2$

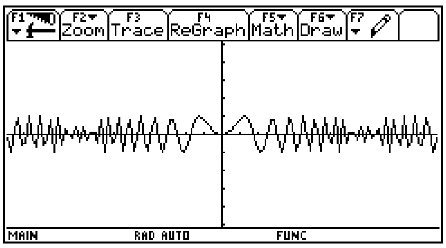
Concludiamo che la **F_1** è una funzione pari.

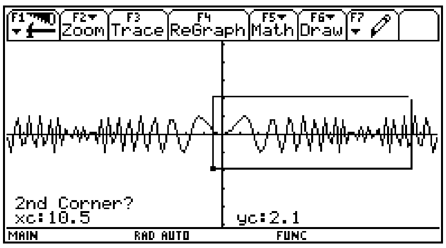
F_2: l'ultima operazione dell'esecutore è il calcolo del seno di un numero reale: la funzione F_2 è limitata e l'Insieme Immagine è IM = $\{y \in R: -1 \leq y \leq 1\}$.
Il grafico ci mostra una funzione simmetrica rispetto all'asse y, caratteristica che possiamo giustificare con i passaggi:

$$(x)^2 = (-x)^2 \quad \text{da cui} \quad sin(x^2) = sin((-x)^2)$$

Concludiamo che la **F_2** è una funzione pari.

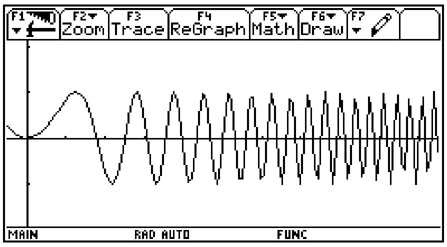
Il lavoro non è certo terminato qui: il grafico della funzione $y = sin(x^2)$ ha incuriosito molto gli alunni che hanno cominciato a porre domande soprattutto dopo aver dal menu „ < ZOOM> scelto l'opzione <4>:





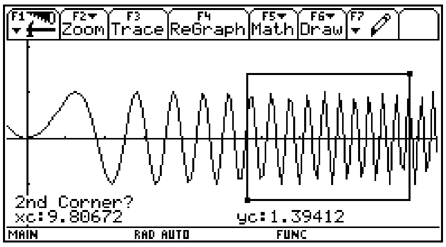
Il grafico è cambiato rispetto a quello ottenuto inizialmente (vedi fig.2) e sembra che vi siano punti di massimo con ordinata inferiore a 1 e punti di minimo con ordinata maggiore di -1.

Dal menu „ <ZOOM> scegliamo <1>: inquadriamo la parte di grafico che ci fa dubitare e diamo ¸ :
Otteniamo così:

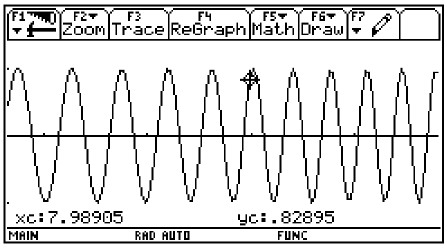


E ancora sembra che vi siano punti di massimo con ordinata inferiore a 1 e punti di minimo con ordinata maggiore di -1.

Ripetiamo il procedimento per ingrandire la parte di grafico a destra nello schermo:

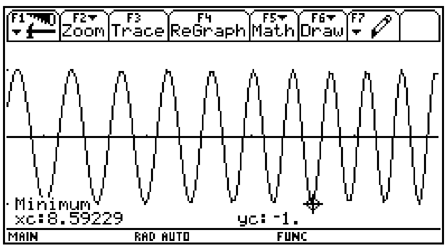


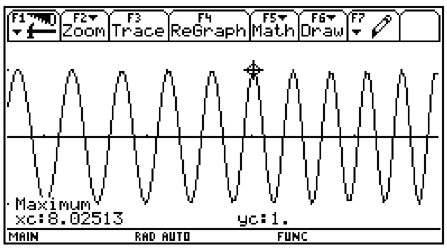
Otteniamo così:



Il nuovo grafico ci mostra un insieme immagine limitato; possiamo verificare che non vi sono massimi minori di 1, né minimi maggiori di -1 con diversi procedimenti:

- facendo scorrere sul grafico il cursore libero e leggendo le coordinate dei punti che copre,
- in modo più corretto determinando i massimi e i minimi della funzione scegliendo <4> e in seguito <3> dal menu ‡ < MATH>





- tracciando nello stesso riferimento le rette y = 1 e y = -1 e determinando le intersezioni con la funzione $\mathbf{F_2}$

Con carta e penna, calcoliamo ora i valori della variabile indipendente per cui si hanno le ordinate massime e minime, tenendo conto della simmetria già verificata:

risolviamo l'equazione $sin(x^2)=1$ che ci dà $x^2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

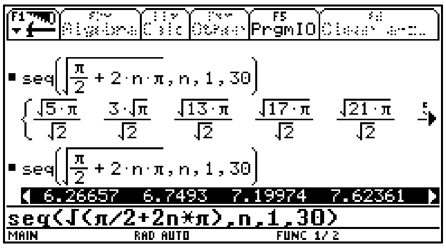
con $k \geq 0$ da cui $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$.

Gli alunni si chiedono che numeri sono quelli appena determinati; non vogliamo approssimarli uno ad uno attribuendo a *k* un valore alla volta; torniamo allora allo schermo base (lo possiamo fare con il comando O e poi <1> oppure con 2 J oppure con ¥ Q)

Introduciamo:

$$seq\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)},n,1,30\right)$$

e facciamo calcolare i valori approssimati con il comando ¥ ¸ oppure con la successione di comandi: 3 „ e la scelta Exact/approx….. 3 Approximate.



I valori ottenuti costituiscono una successione crescente, ma la differenza tra un termine e il precedente va diminuendo; ci convinciamo di questo, facendo calcolare alla TI-92 la differenza tra uno di questi valori e quello che lo precede con la sequenza delle differenze:

$$seq\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)},n,1,30\right):$$

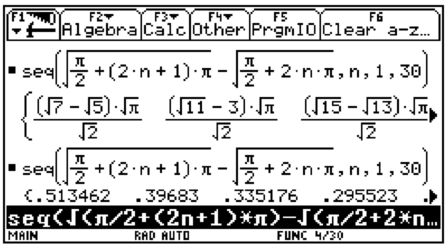


fig.3

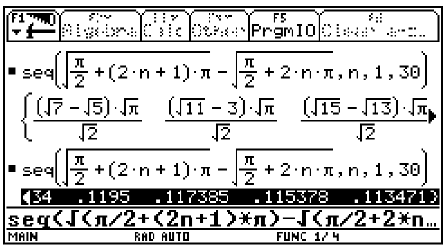
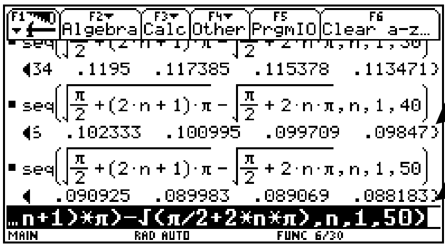


fig.4

Nella fig.3 compaiono i primi termini della sequenza richiesta, nella fig.4 gli ultimi quattro termini su 30 elementi richiesti

e infine gli ultimi quattro termini su 40 e poi su 50.



Notiamo che i termini di questa successione tendono a zero; le ascisse dei punti di massimo della funzione, all'aumentare di n, si avvicinano sempre di più.

La stessa questione si pone alla richiesta della ricerca degli zeri della funzione; tenendo conto della simmetria già verificata, risolviamo l'equazione

$sin(x^2) = 0$ che ci dà $x^2 = k\pi$ con $k \geq 0$ da cui $x = \sqrt{k\pi}$

La ricerca degli zeri della funzione porta inevitabilmente a chiedersi come si comporta la successione di tali valori: gli alunni ripetono il procedimento precedente e capiscono che la funzione continua ad oscillare intersecando l'asse delle ascisse in punti che, all'aumentare di n, vanno avvicinandosi sempre più.

Conclusione: gli alunni, oltre ad aver acquisito dimestichezza con alcuni comandi della TI-92, hanno imparato a porsi domande di fronte al grafico tracciato di una funzione, a cercare di formulare risposte, a verificarle con strumenti algebrici oppure a indagare ulteriormente servendosi dello strumento.

18. VISUALIZZAZIONE DI SUCCESSIONI

Anna Cristina Mocchetti
Liceo Scientifico Statale "Ettore Majorana" Rho (Mi)

Classe: quarta scientifico con sperimentazione Brocca
Obiettivo: rappresentare l'andamento della successione delle differenze costruita con lo studio della funzione $y = sen(x^2)$
Metodo: lavoro autonomo degli alunni su scheda fornita dall'insegnante
Strumenti: TI-92 (in rapporto 1 a 1); manuale della TI-92
Tempi: una unità oraria

Con riferimento all'analisi del grafico della funzione $y = sen(x^2)$ e alla successione delle differenze i cui termini sono stati costruiti per 50 valori di n e visualizzati nella fig.1, possiamo notare che costituiscono una successione decrescente.

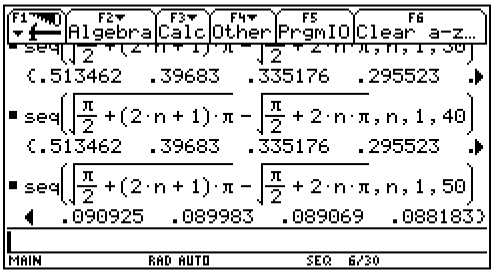


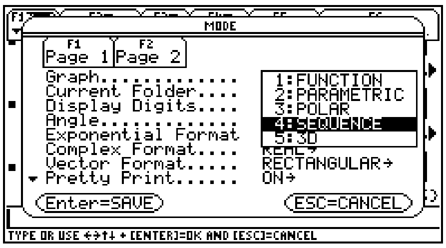
fig.1

Ci proponiamo di visualizzare in un grafico, che riporta in ascissa i valori di n e in ordinata le differenze, l'andamento della successione.

Scheda di lavoro: Segui i passi che ti indico e trai le opportune conclusioni:

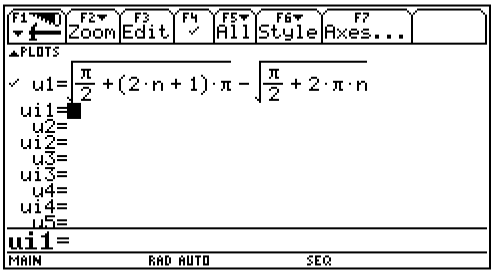
Premi il tasto 3 e imposta il modo Graph su 4: SEQUENCE muovendo il cursore verso destra; ¸ e poi ancora ¸ per ritornare a "

Entra in Y EDITOR con la combinazione di tasti: ¥ W

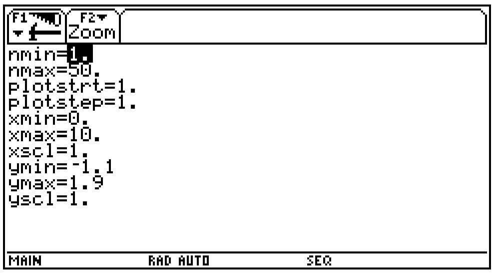


Scrivi il generico termine della successione che vuoi visualizzare in u1=

Puoi scegliere lo stile di rappresentazione degli elementi della successione premendo ˆ e poi <3>



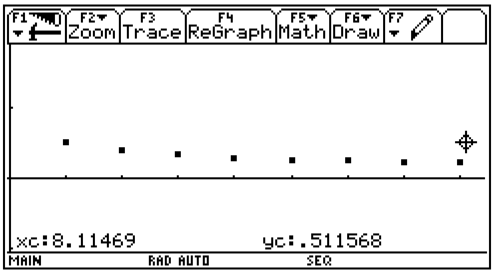
Ora se vuoi definire il numero di termini da rappresentare devi accedere alla finestra di Window Editor: ¥ E per impostare le variabili opportune:



nmin, nmax contengono i valori minimo e massimo di n con cui calcolare i termini della successione. (Per questo primo lavoro cambia solamente questi parametri e per ulteriori approfondimenti consulta il manuale a pag.237).

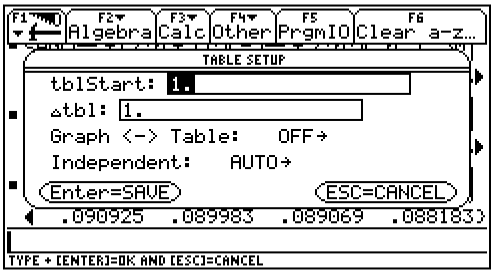
Con questi passi hai istruito la TI-92 affinché rappresenti il grafico degli elementi della successione: vai quindi in modalità grafica: ¥ R.

Anche in questo caso con „ <ZOOM> puoi visualizzare meglio i punti.



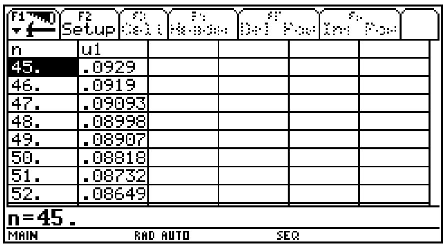
Puoi anche costruire una tabella nella quale siano elencati gli elementi della successione:

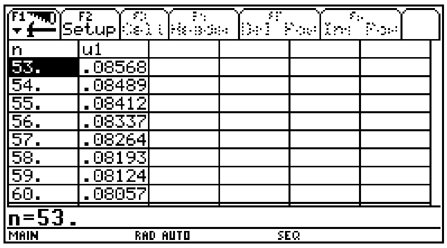
Con ¥ T : apri la finestra nella quale puoi impostare la costruzione della tabella: in tblStart inserisci 1, il valore nmin assegnato in Window Editor; in Δtbl inserisci 1, l'incremento di n e poi premi ¸ .



Quando premi la combinazione di tasti ¥ Y compare la tabella con i primi 8 valori della successione; tenendo premuto 2 e il cursore verso il basso visualizzi una "pagina" alla volta della tabella.

Gli elementi sono comunque pochi per capire l'andamento della successione; modifica tblStart accedendo alla finestra di impostazione tabella con ¥ T.
Prova ad inserire 45 e visualizza due pagine: otterrai le seguenti tabelle





Prova ancora, inserendo 100 o 500.

Completa il tuo lavoro rispondendo alla questione:
“Gli elementi della seconda colonna ti permettono di enunciare qualche caratteristica della successione ottenuta?”

19. ESPONENZIALI E LOGARITMI

Roberto Ricci-Liceo Scientifico “Righi” Bologna
Anna Maria Rossini-Liceo Scientifico“L.daVinci” Casalecchio-Bo

Classi: Quarta classe di Liceo Scientifico, una di ordinamento e una PNI
Obiettivi: Scoprire le funzioni esponenziali e logaritmiche a partire da problemi concreti, saper passare alternativamente dal problema alla formalizzazione e viceversa, costruire grafici di funzioni esponenziali e logaritmiche e saperli interpretare anche per la risoluzione di equazioni e disequazioni
Prerequisiti: Familiarità con gli ambienti `Home`, `Y=Editor`, e `Graph`
Tempi: 24 ore

Le attività in classe si sono svolte, in modo coordinato tra i due insegnanti, a partire da dicembre fino a metà febbraio circa, dedicando 12 ore alla presentazione dei contenuti organizzata talvolta in attività individuale o di coppia con calcolatrice grafica e con schede, talvolta con lezione frontale con l'ausilio del view-screen; le altre ore sono state dedicate al necessario lavoro di esercitazione nonché di valutazione scritta e orale in classe.

La prima verifica scritta è stata svolta sulla base di uno stesso testo, mentre la seconda, sui logaritmi, qui non riportata, differiva leggermente.

I risultati delle prove scritte non differiscono tra le due classi, né differiscono significativamente dalle altre prove sostenute dalle classi nel corso dell'anno. Positiva la valutazione della partecipazione al lavoro in classe.

1. Funzione esponenziale

La funzione esponenziale è stata introdotta attraverso problemi stimolo la cui traccia di soluzione prevede un uso significativo della calcolatrice. Ci sembra opportuno descrivere sinteticamente l'esperienza citando alcune parti delle schede, in riquadro.

> *Un capitale di 1000 euro è depositato in banca a un tasso d'interesse composto del 2% annuo.*
>
> Qual è il capitale dopo un anno ? ………………………
> Qual è il capitale dopo due anni ? ………………………

Si vuole trovare come varia nel tempo il capitale depositato:

1. in ambiente " inserisci il capitale iniziale;
2. la combinazione di tasti 2 Ì memorizza il valore precedentemente calcolato nell'ambiente "
3. calcola il capitale dopo un anno: Ì (1)+ Ì (1)∗2/100;
4. applica la stessa formula premendo successivamente solamente il tasto `ENTER`.

Ricerca della struttura formale della legge matematica:

1. in ambiente " inserisci la lettera *c* che designa il capitale iniziale;
2. indicato con *p* il tasso percentuale, calcola il capitale dopo un anno:
3. Ì (1)+ Ì (1)∗*p/100*;
4. applica la stessa formula;
5. la macchina semplifica: $c(1+p/100)^n$ per n = 1, 2, 3, 4,… e così via

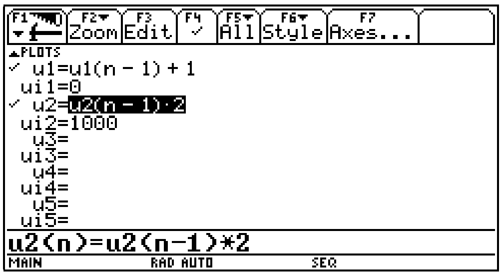
A partire da un nuovo problema nel quale cambia solamente il contesto, si propone un diverso uso della calcolatrice.

Una cellula si riproduce duplicandosi mediamente nell'arco di un giorno. Come varierà nel tempo una popolazione di 1000 cellule?

Adegua a questo i passi seguiti per il problema precedente fino a scrivere una formula che esprima sinteticamente questa variazione.

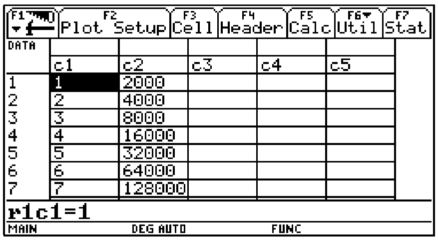
Esegui ora:

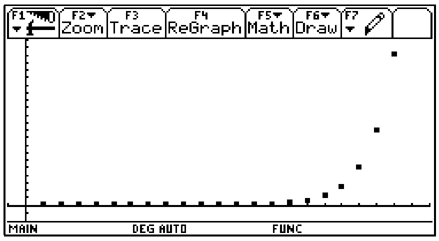
1. seleziona l'opzione `3 /GRAPH/SEQUENCE;`
2. passa in ambiente # per definire la sequenza dei giorni u1(n)=u1(n−1)+1, ui1=0 e la variazione del numero di cellule u2(n)=u2(n−1)∗2, ui2=1000; una tale definizione, che si dice ricorsiva, è apparentemente un circolo vizioso dal momento che i valori della sequenza sono calcolati sulla base dei suoi stessi valori; aver assegnato un valore iniziale rende tuttavia effettivamente calcolabili tutti quei valori;
3. in ambiente ' si ottiene automaticamente la tabella;
4. in ambiente # con l'opzione `% /ZOOMFIT` si ottiene il grafico
5. eventualmente in ambiente $ modifica opportunamente i parametri della finestra grafica in particolare per gli estremi della y, cioè `ymin` e `ymax`.



Procedendo con metodo non ricorsivo:

1. tra le applicazioni O , seleziona l'ambiente DATA/MATRIX/EDITOR;
2. seleziona New e attribuisci un nome, a tua scelta, a Variable confermando due volte con ¸ ;
3. inserisci in colonna c1 (posizionando il cursore proprio dove vedi l'etichetta c1 e premendo ¸) la formula SEQ(k,k,1,21) e in colonna c2 la formula 1000∗2^c1;
4. per costruire il grafico con „ (PlotSetup) seleziona Plot1 e con ƒ (Define) scegli le seguenti opzioni: Plot Type:Scatter, Mark:Square, x:c1, y:c2;
5. per visualizzare il grafico entra in ambiente % .





Si passa dunque a un problema che giustifichi la necessità di estendere la funzione esponenziale a valori della variabile indipendente non interi, dando così significato all'elevamento a potenza con esponente razionale e irrazionale. A questo scopo risulta comodo l'uso dei comandi di " seguiti da ¥ ¸ per ottenere approssimazioni, con numero di cifre decimali da impostare eventualmente con 3 Display Digit.

Successivamente si introducono alcune proprietà caratteristiche dei grafici delle funzioni esponenziali.

Una popolazione di 1 miliardo di individui ha un tasso annuale di natalità di n/100 e un tasso di mortalità di m/100. Come evolve nel tempo il numero d'individui?

Ripetendo i passi seguiti per il problema di pagina 1, opportunamente adeguati a questo diverso problema, descrivi l'evoluzione di questa popolazione nel tempo in relazione ai parametri *n* ed *m* con una formula: …………………………..

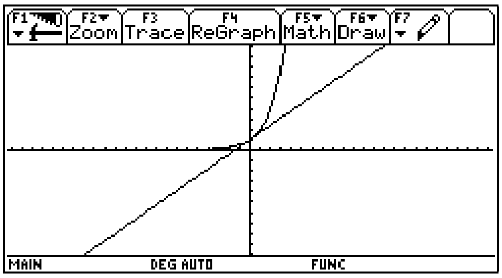
Ora poni n=3, m=1 e disegna a fianco il grafico
Poni n=1, m=5 e disegna a fianco il grafico
Poni n=m=2 e disegna a fianco il grafico
Se $n > m$ la popolazione …………… (cresce o decresce?)
Se $n < m$ la popolazione …………… (cresce o decresce?)
Se $n = m$ la popolazione …………… (? ? ?)
Se $n > m$ la base della potenza è ………..…(maggiore o minore?) di 1.
Se $n < m$ la base della potenza è …………. (maggiore o minore?) di 1.

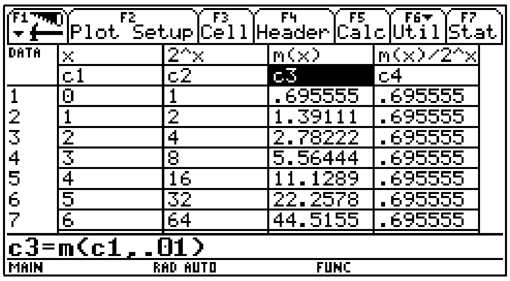
Dopo le definizioni e le proprietà delle funzioni esponenziali, viste soprattutto in termini di risoluzioni di equazioni e disequazioni, si passa alla introduzione del numero *e* sia attraverso un problema di interessi composti sia, eventualmente, attraverso lo studio della pendenza delle curve esponenziali. Infatti la calcolatrice consente di calcolare rapidamente valori di successioni come pure la pendenza in ogni punto di un grafico, come descritto nella scheda seguente.

Inserirai ora una funzione, da indicare con *f(x)*; costruirai la funzione *m*(*x*,*h*) "tasso di variazione in *x* con incremento *h*"; approssimerai la pendenza del grafico di *y=f(x)* nel punto *x*=1 per valori decrescenti di *h*:

1. in ambiente " introduci la funzione 2^x Â f(x);
2. introduci in generale il *rapporto incrementale*: (f(x+h)−f(x))/h Â m(x,h);
3. in ambiente # poni y1(x)=f(x) e y2(x)=m(0,0.1)∗x+1;
4. con l'opzione % /ZOOMSQR traccia il grafico di y1 e quello di y2, retta che, con buona approssimazione, possiamo ritenere tangente alla curva nel punto di coordinate (0,1) ;
5. torna in ambiente # , diminuisci il valore assegnato all'incremento h;
6. ripeti alcune volte i punti 4 e 5;
7. torna in ambiente " , calcola una sequenza di tassi di variazione in 0 con valori dell'incremento h sempre più piccoli: seq(m(0,10^(ÿk), k, 1, 10);
8. in conclusione osservi che:………………………………………………

Riportando i valori in DATA/MATRIX/EDITOR si osserva che i tassi di variazione locali -approssimati- di 2^x, ad esempio, costituiscono a loro volta una funzione esponenziale di base 2, come si può vedere dal rapporto costante c3/c2.





DATA	x	2^x	m(x)	m(x)/2^x
	c1	c2	c3	c4
1	0	1	.695555	.695555
2	1	2	1.39111	.695555
3	2	4	2.78222	.695555
4	3	8	5.56444	.695555
5	4	16	11.1289	.695555
6	5	32	22.2578	.695555
7	6	64	44.5155	.695555

c3=m(c1,.01)

MAIN RAD AUTO FUNC

È stato presentato successivamente un ampio repertorio di problemi ed esercizi.

VERIFICA

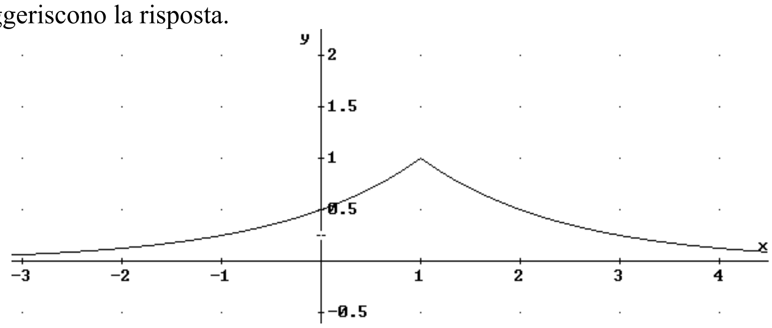
<u>con uso della calcolatrice grafica</u>

1. Su “Quattroruote”, in riferimento alla valutazione di un’auto, compaiono in una tabella questi valori:

ANNO d'immatricolazione:	1997	1996	1995	1994	1993	1992	1991	1990
VALORE dell’usato nel '98:	19.7	17.6	15.7	14.1	12.5	11.1	9.8	8.7

Quale legge esprime il valore dell'usato in funzione dell'anno di immatricolazione? Quanto vale nel '98 un’auto immatricolata nel 1988?

2. Determina l’espressione analitica di una funzione appropriata per il grafico qui rappresentato. A partire da una opportuna funzione elementare, descrivi le successive trasformazioni o operazioni con la calcolatrice che suggeriscono la risposta.



3. Risolvi in modo grafico e/o approssimato la disequazione $x + 2 - 3^x \geq 0$.

<u>senza uso della calcolatrice grafica</u>

1. Inventa un problema la cui soluzione si ricavi dall'equazione $y=2000\cdot(0,15)^x$

2. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

$a)\ 3^{2x} - 8\cdot 3^3 - 9 = 0 \qquad b)\ \dfrac{2^{x-1} - 4}{2^{2x-2} + 1} \leq 0$

3. Rappresenta il grafico della funzione $y = \left|2^{x+3} - 1\right|$ e utilizzalo per stabilire l’esistenza e il numero delle soluzioni del sistema $\begin{cases} y = \left|2^{x+3} - 1\right| \\ y = k \end{cases}$

2. Funzione logaritmo

Per introdurre la funzione logaritmo è comodo sfruttare le potenzialità grafiche e tabulari della calcolatrice.

Realizza il grafico della funzione *y1(x)* = $(2.4)^x$, scegli una opportuna finestra e disegnalo qui sotto.

In ambiente ' puoi vedere una tabella della funzione. Il grafico visualizza punti che hanno per coordinate coppie di valori della tabella; si tratta di "punti" grossolani, perché in realtà lo schermo della calcolatrice grafica è un piano analogo ad un foglio quadrettato.

In ambiente `DATA/MATRIX EDITOR` inserisci in colonna c1 valori per x da –5 a 5 con incremento 0.1, in colonna c2 la formula (2.4)^c1 (usa la funzione `seq`); passa in „ `PLOTSETUP`, ƒ `DEFINE`, definisci poi come `Plot1`: tipo `Scatter`, come `Mark` seleziona `Square`, come x: c1 e come y: c2; poi definisci in `Plot2` selezionando un diverso `Mark` (es. `Box`) e indica x: `c2` e y: `c1`.

In ambiente % puoi vedere ora anche alcuni punti del grafico della relazione inversa di y1(x) (in questo caso è una funzione dal momento che la funzione esponenziale è invertibile, poiché iniettiva).

In ambiente % puoi scegliere anche ˆ /`DrawInv` per disegnare il grafico della relazione inversa di y1(x) (la calcolatrice va automaticamente in ambiente " , allora digita `DrawInv y1`(x)).

Qual è il dominio della funzione inversa ? ……………………………

A partire dall'ambiente # disegna il grafico della funzione y2(x) = x e osserva che è la bisettrice del I e III quadrante solo in un sistema monometrico. (Ad esempio in ambiente $ poni `xmin`= –5 e `xmax`= 5 e poi seleziona `ZOOMSQR`.)

Da notare che il comando `DrawInv` fornisce il grafico della relazione inversa, offrendo così l'opportunità di riflettere con gli alunni sulla distinzione tra funzione inversa e relazione inversa.

In ambiente DATA/MATRIX EDITOR inserisci in colonna c1 valori per x da –5 a 5 con incremento 0.2, in colonna c2 la formula *e*^c1 e in colonna c3 la formula ln(c2).
Cosa noti?……………………………………………….

Ripeti l'operazione inserendo in colonna c2 la formula ln(c1) e in colonna c3 la formula e^c2. Cosa noti?……………………………..……………………..

Introduci in ambiente " le espressioni $\ln(e^x)$ e $e^{\ln(x)}$ e premi ¸
Cosa ottieni ? …………………………
Come puoi semplificare le funzioni $\ln(e^x)$ e $e^{\ln(x)}$? ……..………………
Qual è il dominio di $\ln(e^x)$? ……………… e di $e^{\ln(x)}$?…………………..…….
Realizza ora con la calcolatrice i grafici di $\ln(e^x)$ e di $e^{\ln(x)}$
Cosa osservi?……………… ……………………………………………..…

Si nota la discrepanza tra le aspettative e quanto fornisce la calcolatrice; ciò è dovuto al fatto che l'ambiente numerico nel quale noi operiamo è quello dei *numeri reali*, mentre la calcolatrice opera nell'ambito dei *numeri complessi*.

Le proprietà dei logaritmi, i problemi e gli esercizi su equazioni e disequazioni logaritmiche sono state poi affrontate in modo sostanzialmente tradizionale, con scarso uso della calcolatrice. Così pure gli approfondimenti conclusivi su ordini di grandezza e concetto di informazione.

La calcolatrice risulta ancora utile per affrontare problemi dove si chiede di individuare una legge di variazione, grazie ai comandi del menu ‡ CALCULATION TYPE dell'ambiente DATA/MATRIX EDITOR per la regressione dei tipi LINREG, EXPREG, LNREG, o POWERREG.

20. MATRICI E DETERMINANTI

Fernando Ilari
Liceo Scientifico "E. Majorana" Latina

Classe: quarta liceo scientifico sperimentazione Brocca
Obiettivi: Conoscere ulteriori funzioni della TI-92 e operare con le matrici
Prerequisiti: Conoscenza elementare della macchina; generalità sulle matrici
Tempi: Durata prevista per questa attività: 4 ore più la verifica
Metodi: Lezione frontale, lavoro individuale
Strumenti: calcolatrici (in rapporto 1:1), lavagna luminosa, viewscreen e la scheda allegata

Il calcolo matriciale, introdotto da Cayley (1858), è andato progressivamente nel tempo assumendo un'importanza sempre crescente, sia perché è parte integrante delle conoscenze matematiche richieste nei più svariati campi (matematica, statistica, sociologia etc.) sia perché l'utilizzo di procedure automatiche ha consentito di velocizzare la trattazione di argomenti per i quali il calcolo, lungo e ripetitivo, costituiva un peso notevole in ambito scolastico. Lo studio delle matrici e dei determinanti agevola, per esempio, la trattazione dei sistemi lineari, soprattutto se sviluppato utilizzando appropriati strumenti di calcolo.

Nella prova scritta di matematica all'esame di stato di alcuni indirizzi sperimentali sono stati assegnati problemi la cui risoluzione prevedeva una conoscenza attenta e puntuale del calcolo matriciale.

L'esemplificazione che viene qui presentata costituisce un approccio all'argomento per il quale si è rivelato utile l'uso della TI-92.

La prima parte della lezione è stata sviluppata dall'insegnante, presentando in sequenza i comandi necessari per lo svolgimento della lezione; in questa fase si è rivelato necessario l'utilizzo del viewscreen; i ragazzi intervenivano saltuariamente, più che altro per chiedere chiarimenti e per rispondere ad eventuali domande del docente.

La calcolatrice è quindi risultata utile come lavagna dinamica, evitando anche il calo dell'attenzione da parte dei ragazzi, in quanto la lezione è scivolata via riducendo al minimo i tempi morti necessari per scrivere sulla lavagna tradizionale .

La scheda allegata, divisa in due parti, scheda istruzione e scheda operativa, è stata consegnata ai ragazzi per procedere più speditamente.

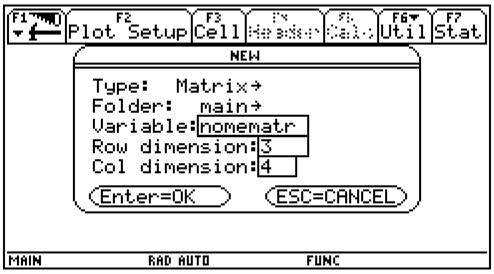
Scheda Istruzione

Come immettere una matrice

A) In ambiente Home digitando fra parentesi quadre tutta la matrice, ogni riga a sua volta fra parentesi quadre e memorizzando il tutto con un nome valido; es.: [[2,3][4,5]] Â A1 memorizza in A1 la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

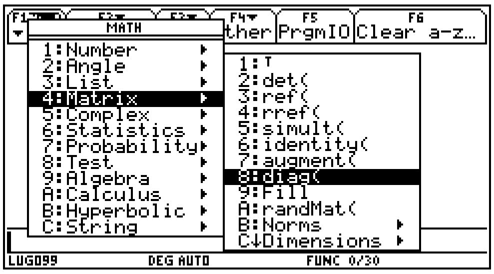
B) L'immissione dei dati può anche avvenire nel seguente modo [2,3;4,5] Â A1.

C) in ambiente Data Matrix Editor (O {) inserendo tutte le informazioni richieste (vedi figura a fianco) e poi digitando nelle caselle gli elementi della matrice.



Operazioni fra matrici

Si utilizzano gli ordinari simboli + - * / ^ che legano i nomi con i quali sono state memorizzate le matrici.



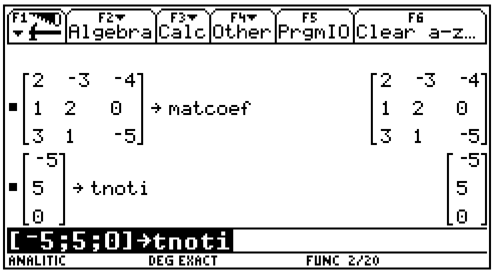
Per le operazioni fra matrici che coinvolgono però gli elementi che occupano posti di pari riferimento si utilizzano i simboli .+ .- .* ./ .^ (sono dette operazioni punto).

Partendo dall'ambiente Home, si passa al menu Math (2 z) entrando nel sottogruppo 4: Matrix Ď (si esplode la lista dei comandi muovendosi con il mouse verso destra; i comandi non commentati non interessano direttamente la lezione):

T	Restituisce la trasposta di una matrice; si digita in ambiente Home il nome della matrice, poi dal menù Math si sceglie 4 e poi 1.
Det(	Restituisce il determinante di una matrice quadrata *det(nomematrice).*
Ref(	Trasforma la matrice data in triangolare superiore *rref(matrice).*
Rref(	Metodo di eliminazione per risolvere sistemi lineari *rref(matrice completa).*
Simult(	Restituisce un vettore colonna che contiene le soluzioni di un sistema di equazioni lineari *simult(matrice dei coefficienti,vettore dei termini noti).*
Identity(	Restituisce la matrice identità di ordine *n identity(n).*
Augment(	Restituisce una nuova matrice aggiungendo matrice2 a matrice1 come nuove colonne *augment(matrice1,matrice2).*
RandMat(	Restituisce una matrice di ordine n, composta da numeri interi compresi fra –9 e 9.

Per esempio, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=-5 \\ x+2y=5 \\ 3x+y-5z=0 \end{cases}$$



utilizzando le potenzialità della calcolatrice. Immessa, in ambiente Home, la matrice dei coefficienti (matcoef) e il vettore colonna dei termini noti (tnoti), utilizzando il comando `simult`, si ottiene immediatamente la soluzione, come si nota dalla schermata a fianco

Esaurita la fase di istruzione, ai ragazzi è stata fornita la seguente scheda, invitandoli a procedere da soli e a ipotizzare risposte, appuntando il tutto sul quaderno. Alla fase operativa è poi seguita una fase di discussione e di sintesi dei risultati.

Scheda operativa

Una matrice si dice quadrata quando il numero delle righe è uguale al numero delle colonne. Questo numero si chiama ordine della matrice. Immetti una matrice quadrata di ordine 3, indicandola con A3 e un'altra, analoga, chiamandola A4.

Immetti una matrice 2 x 3, indicandola con la sigla R3.

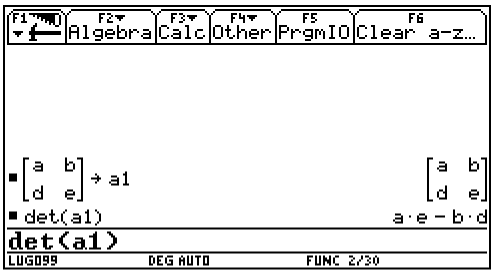
Immetti una matrice 3 x 2, indicandola con la sigla R4.

Immetti la matrice identità, indicandola con I

1. Esegui alcune somme e/o sottrazioni fra due delle matrici date per volta.
2. Moltiplica per un numero qualsiasi una delle due matrici di ordine 3.
3. Moltiplica per un numero qualsiasi una delle due matrici rettangolari.
4. Calcola la trasposta di una matrice di ordine 3.
5. Calcola la trasposta di una matrice rettangolare; cosa noti?
6. Esegui le operazioni indicate: $(A^T)^T$; $(\lambda*A)^T$ con λ numero qualsiasi ;$(A + B)^T$.
7. Esegui il prodotto A3*A4, e poi, in sequenza, R3*R4, A3*R4, A3*R3.
8. Inserisci una matrice quadrata di ordine 3 e la sua simmetrica.
9. Inserisci due matrici diagonali e verifica che il loro prodotto è ancora una matrice diagonale.
10. Inserisci due matrici triangolari T1 e T2 e verifica di che tipo è sia la loro somma che il loro prodotto.
11. Effettua il prodotto delle due matrici A3 e A4 e verifica se vale la proprietà commutativa.
12. Inserisci una matrice A5, di ordine 3; verifica se (A3*A4)*A5=A3*(A4*A5).
13. Verifica se A*I = I*A e nota a cosa è uguale il risultato.
14. Verifica che $(AB)^T = B^T A^T$.
15. Si definisce inversa (A^{-1}) di una matrice A quella matrice (se esiste è unica), tale che, moltiplicata con la matrice data, restituisce la matrice identità I.

In simboli $A^{-1}*A = A*A^{-1} = I$.

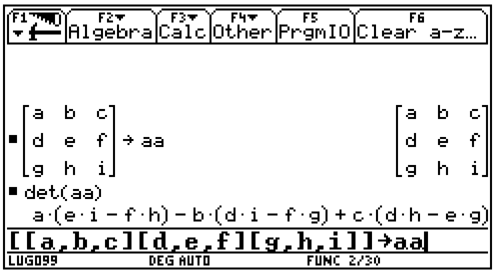
Calcola l'inversa di una matrice di ordine 2 indicandola con A6.



i) Azzera tutto il contenuto della memoria 2 | .

ii) Analizziamo il determinante di una matrice di ordine 2, immettendo prima valori numerici qualsiasi e poi a, b, c, d. Se immettendo numeri, non si riesce a capire quale regola viene applicata, risulta invece tutto più chiaro se utilizziamo lettere al posto dei numeri.

iii) Per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3, procediamo allo stesso modo; risulta chiaro quale è la regola generale (Sarrus e/o Laplace).



Dopo aver lavorato in classe seguendo quanto riportato nella scheda precedente e aver sviluppato il concetto di rango di una matrice, ho proposto la seguente

Verifica

Per cancellare tutto il contenuto della memoria, premere 2 { ƒ ¨ ; in questo modo si ritorna alle impostazioni fornite dal produttore.

Dati iniziali

$$U=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k-1 & 0 \\ k & 2k-2 & 2k-2 \end{pmatrix} \qquad W=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Si definisce matrice nulla una matrice con tutti zeri*; esegui il seguente prodotto $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; quanto vale? Cosa deduci dal risultato che ottieni?
2. Per quali valori di k si ha $|U|=0$?
3. Quale è il rango di W, e perché?
4. Calcola il determinante di D e quello della matrice che ottieni da D scambiando fra di loro 2 righe qualsiasi; che succede?
5. Calcola il determinante di B dopo aver moltiplicato una riga per un valore diverso da zero e da ±1 a tua scelta; cosa noti?
6. Calcola $|T|$ dove T = D x B; che legame c'è fra questo risultato e quello dei determinanti di A e di B?
7. Calcola il determinante di una matrice diagonale di ordine 3; cosa noti?

8. Calcola il determinante di 3B; cosa noti?
9. Discuti il rango di U al variare di k.
10. *Si chiama matrice idempotente ogni matrice che coincide con il suo quadrato*. D è idempotente?
11. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per (1;0) (2;-1) (-1;3).
12. Sapendo che a·b = a·d (con a,b,d $\in$R, a$\neq$0) implica che b = d, la stessa implicazione sarebbe valida se al posto di a,b e d sostituissi le matrici A, B e D?

Commento

Questa prova, somministrata per una durata effettiva di 100 minuti, ha evidenziato risultati relativamente confortanti, se confrontati con il rendimento mediamente superiore della classe nelle precedenti prove senza calcolatrice.

I ragazzi si sono in parte lamentati per l'eccessivo numero degli esercizi, ma soprattutto del fatto che, non avendo potuto utilizzare a casa la calcolatrice, non avessero acquisito quella dimestichezza con i comandi che potesse evitare loro il continuo ricorrere al manuale o agli appunti in loro possesso; questa consultazione, a volte affannosa, li ha di fatto un poco deconcentrati. La tabella seguente sintetizza i risultati in termini di voto

Voto	…-4)	[4 - 5)	[5 - 6)	[6 - 7)	[7 - 8)	[8 - …
Frequenza	**3**	**3**	**2**	**4**	**3**	**1**

Al termine del lavoro relativo alle matrici e determinanti, malgrado gli esiti non pari alle aspettative, ritengo che si possano trarre le seguenti conclusioni:

- i ragazzi hanno conosciuto ulteriori funzioni della TI-92 e hanno consolidato l'abitudine a porsi domande, a tentare di rispondere ad esse eliminando ansie da calcolo di qualsiasi tipo.
- nella verifica, l'ufficialità della stessa li ha resi insicuri, e il non aver acquisito piena conoscenza dei comandi della macchina li ha costretti ad una ricerca spesso affannosa sugli appunti, che erano a loro disposizione, a scapito dell'esito finale; un maggior allenamento con la macchina, anche fuori della scuola, avrebbe sicuramente ovviato a tante incertezze.

21. LUOGHI GEOMETRICI

Nicoletta Nolli
Liceo Scientifico "G.Aselli" Cremona

Classe: quarta liceo scientifico P.N.I.
Obiettivi:
- conoscere ed utilizzare l'ambiente `Geometry` della TI-92
- costruire nel piano luoghi geometrici
- individuare la natura del luogo attraverso il suo grafico
- dimostrare la natura del luogo per via sintetica o analitica

Prerequisiti:
- conoscenza delle elementari istruzioni dell'ambiente `Geometry`
- conoscenza delle coniche definite come luoghi geometrici

Tempi:11 ore
Strumenti:
22 calcolatrici per i ragazzi (1 per ogni alunno), 1 calcolatrice per l'insegnante, 1 viewscreen, 1 lavagna luminosa.
Metodi:
L'attività si è articolata in tre fasi distinte: nella prima ho utilizzato la calcolatrice con il viewscreen per richiamare la definizione di luogo geometrico e per mostrare come nell'ambiente `Geometry` sia possibile "disegnare" luoghi geometrici; nella seconda i ragazzi, divisi in 5 gruppi, hanno lavorato su una proposta di lavoro e hanno presentato i risultati del lavoro alla classe; nella terza la classe era divisa in 3 gruppi, ogni gruppo ha lavorato su una proposta di lavoro diversa e ha presentato i risultati alla classe. Ogni alunno aveva a disposizione una calcolatrice che durante i lavori di gruppo poteva utilizzare liberamente.

DESCRIZIONE DELLE FASI DELL'ATTIVITÀ
Vengono presentati i seguenti contenuti:
- ripasso delle principali istruzioni dell'ambiente `Geometry`
- concetto di luogo geometrico
- l'istruzione Luogo dell'ambiente `Geometry`
- costruzione di un luogo geometrico.

1° Fase
Un ora e trenta minuti di lezione in cui l'insegnante usa la calcolatrice con il viewscreen, trenta minuti in cui i ragazzi utilizzano singolarmente la calcolatrice per ripetere la costruzione fatta dall'insegnante.

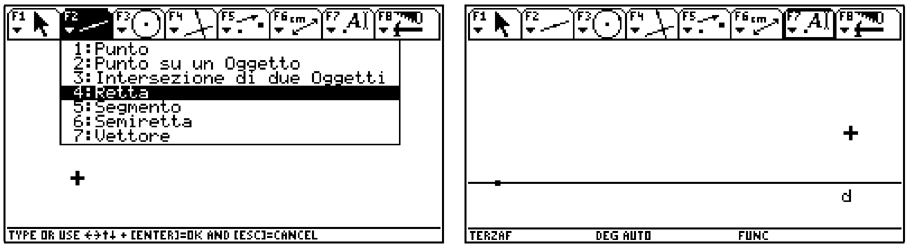
Viene proposto alla classe il seguente problema:

<u>Situazione</u>
Siano dati, una retta *d* e un punto F non appartenente a *d*. Per ogni punto R di *d* si consideri il punto P di intersezione della retta *r* per R e perpendicolare a *d* con l'asse *t* del segmento FR

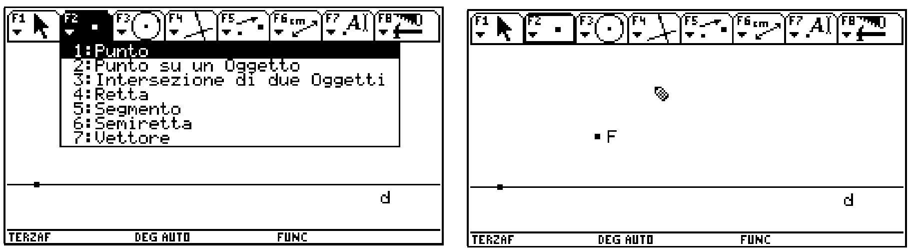
<u>Proposta di lavoro</u>
a) Determinare il luogo descritto da P quando R varia su *d*
b) Individuare come varia il luogo al variare del punto F nel piano

Costruisco il luogo chiedendo di volta in volta ai ragazzi quali istruzioni utilizzare. Si procede eseguendo i seguenti passi:

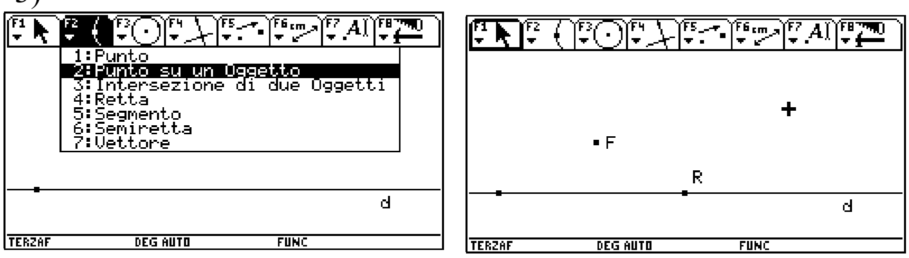
1)



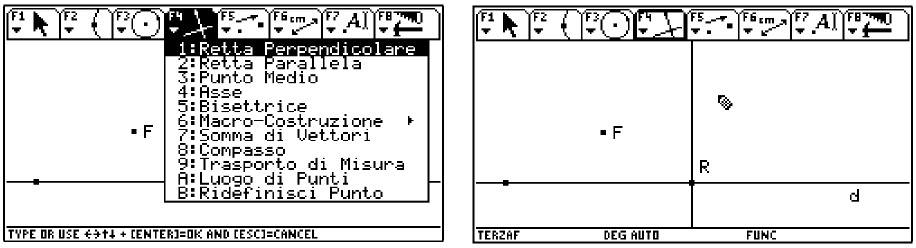
2)



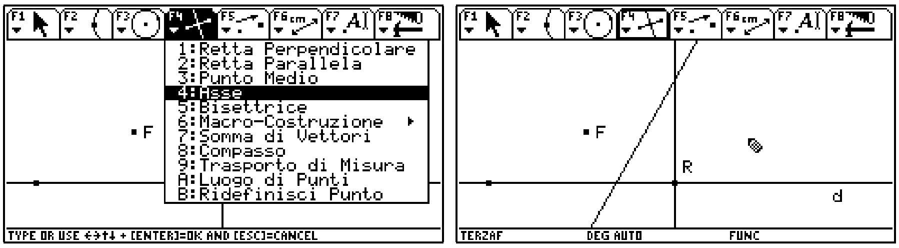
3)



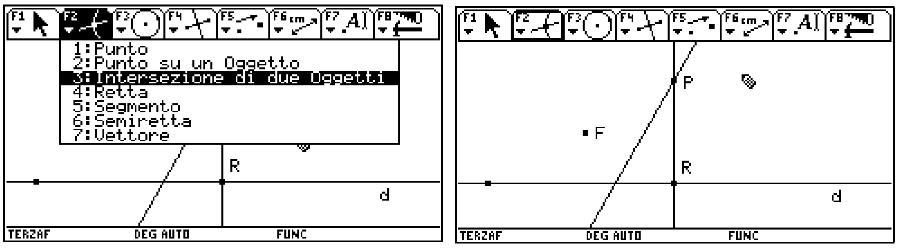
4)


1:Retta Perpendicolare
2:Retta Parallela
3:Punto Medio
4:Asse
5:Bisettrice
6:Macro-Costruzione
7:Somma di Vettori
8:Compasso
9:Trasporto di Misura
A:Luogo di Punti
B:Ridefinisci Punto
F
R
d
TERZAF
DEG AUTO
FUNC

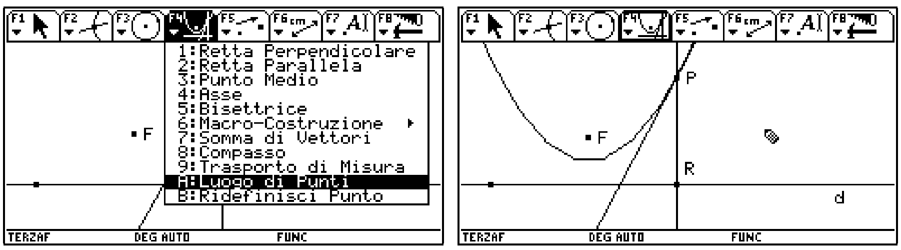
5)


1:Retta Perpendicolare
2:Retta Parallela
3:Punto Medio
4:Asse
5:Bisettrice
6:Macro-Costruzione
7:Somma di Vettori
8:Compasso
9:Trasporto di Misura
A:Luogo di Punti
B:Ridefinisci Punto
F
R
d
TERZAF
DEG AUTO
FUNC

6)


1:Punto
2:Punto su un Oggetto
3:Intersezione di due Oggetti
4:Retta
5:Segmento
6:Semiretta
7:Vettore
R
d
P
F
TERZAF
DEG AUTO
FUNC

7)


1:Retta Perpendicolare
2:Retta Parallela
3:Punto Medio
4:Asse
5:Bisettrice
6:Macro-Costruzione
7:Somma di Vettori
8:Compasso
9:Trasporto di Misura
A:Luogo di Punti
B:Ridefinisci Punto
F
P
R
d
TERZAF
DEG AUTO
FUNC

Dopo aver costruito il luogo chiedo alla classe di individuarne la natura e di motivare la risposta con una dimostrazione. Spostando il punto F nel piano, purché non appartenga alla retta *d*, il luogo viene ridisegnato e quindi è facile dedurre che, pur rimanendo una parabola, la curva modifica la concavità. La motivazione della natura del luogo è per molti alunni immediata: la distanza di P da F è uguale alla distanza di P da R in quanto P si trova sull'asse del segmento FR.

2° Fase

Due ore di lavoro di gruppo, due ore di intergruppo.
Ai gruppi viene assegnato il seguente lavoro:

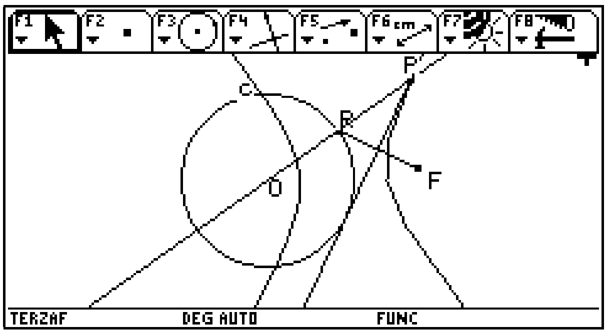
<u>Situazione</u>

Siano dati, in un piano, una circonferenza *c* di centro O e un punto F non appartenente a *c*. Per ogni punto R di *c* si consideri il punto P di intersezione della retta OR con l'asse del segmento FR.

<u>Proposta di lavoro</u>

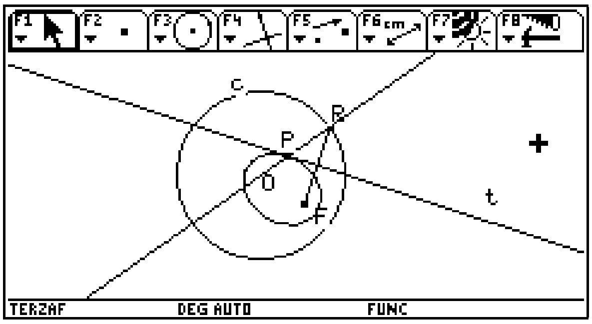
a) Costruire il luogo descritto da P quando R varia su *c*.
b) Individuare come varia il luogo al variare del punto F nel piano.
c) Dimostrare in modo sintetico o analitico la natura del luogo individuato al primo punto .

Tutti e cinque i gruppi al termine del lavoro di gruppo presentano la seguente costruzione:



Solo tre gruppi riescono a dimostrare sinteticamente che il luogo è un'iperbole evidenziando che $\overline{PO} - \overline{PF} = \overline{PO} - \overline{PR} =$ raggio della circonferenza. Un gruppo pensa di associare ai segmenti le loro misure per evidenziare ulteriormente che $\overline{PO} - \overline{PF}$ è costante.

Due gruppi riescono anche a trovare che se il fuoco si trova all'interno della circonferenza il luogo diventa un'ellisse :



e lo dimostrano sinteticamente evidenziando che $\overline{PO}+\overline{PF}=\overline{PO}+\overline{PR}$=raggio della circonferenza.
Nessun gruppo dimostra la natura del luogo per via analitica.

3° Fase
Due ore di lavoro di gruppo, tre ore di intergruppo.
La classe viene divisa in tre gruppi, ciascun gruppo lavora su una proposta diversa.

1° Gruppo:

Situazione
Siano dati, in un piano, una circonferenza di centro O e due rette *r* ed *s* passanti per O e perpendicolari tra loro. Indicato con Y uno dei due punti di intersezione tra la retta *r* e la circonferenza *c*, si consideri un generico punto C appartenente alla circonferenza e si indichi con X la proiezione ortogonale di detto punto sulla retta *s*. Sia P il punto di intersezione della retta *t* passante per X e Y con la retta *q* passante per O e C.

Proposta di lavoro
a) Costruire il luogo descritto da P quando C varia su *c*.
b) Individuare come varia il luogo al variare del raggio della circonferenza.

2° Gruppo:

Situazione
Siano dati, in un piano, un segmento AB e un punto P non appartenente ad AB tale che AP sia perpendicolare a PB.

Proposta di lavoro
a) Costruire il luogo descritto da P.
b) Dimostrare in modo sintetico o analitico la natura del luogo costruito.

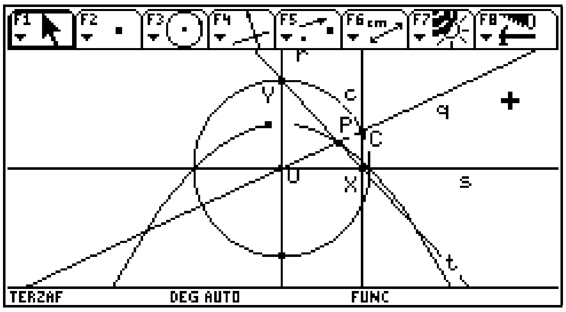
3° Gruppo

Situazione
Siano dati, in un piano, una circonferenza *c* di centro O e un suo raggio OA. Si consideri un punto generico B della circonferenza e il triangolo OAB. Sia P il punto di intersezione delle mediane del triangolo OAB.

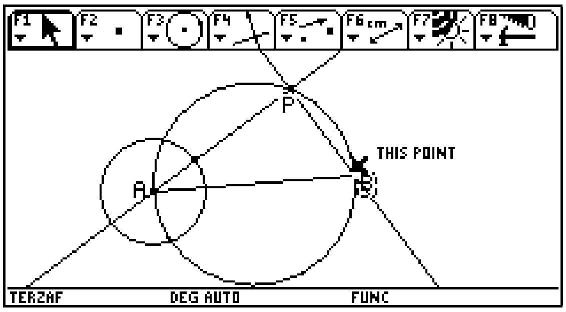
Proposta di lavoro
a) Costruire il luogo descritto da P quando B varia su *c*.
b) Individuare come varia il luogo al variare del raggio della circonferenza.

Ecco le costruzioni dei tre gruppi:

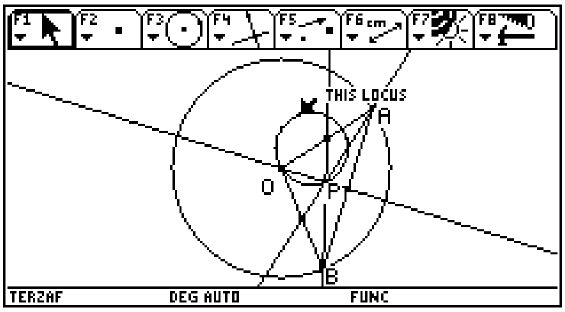
1° Gruppo



2° Gruppo



3° Gruppo



Durante l'esposizione dei gruppi la discussione è molto animata: molti ragazzi chiedono chiarimenti ai loro compagni sulle costruzioni effettuate. Il secondo gruppo presenta una dimostrazione per via sintetica della natura del luogo, mentre il primo gruppo tenta (anche se la proposta di lavoro non lo richiedeva) una dimostrazione per via analitica che risulta però un po' confusa e con qualche errore di calcolo.

L'attività ha favorito in modo molto evidente la partecipazione e la discussione in classe. La possibilità di costruire e di modificare le figure ha favorito l'attenzione e la risoluzione delle proposte di lavoro. La necessità di costruire le figure attraverso le proprietà e le relazioni esplicitate nel testo degli esercizi ha costretto i ragazzi ad una attenta lettura del testo (cosa che non sempre si riesce ad ottenere!) ed ha aiutato nella fase successiva di dimostrazione.

Utilizzare l'ambiente Geometry della calcolatrice può, per certi versi, risultare più faticoso che utilizzare Cabrì in laboratorio di informatica (la gestione del mouse risulta più semplice del tasto cursore della calcolatrice, i luoghi geometrici vengono ridefiniti con molta lentezza rispetto a quanto accada usando Cabri sul computer), ma sicuramente avere a disposizione uno strumento per ogni alunno, organizzare le lezioni in classe in modo dinamico utilizzando lavagna, viewscreen per le presentazioni senza dipendere da un orario di laboratorio consente di far partecipare ciascun alunno in modo più coinvolgente e fa risparmiare parecchio tempo.

22. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE LINEARI

Anna Maria Anconelli, Paola Dirani, Enrica Pirazzini
Liceo Scientifico "G. Ricci Curbastro" Lugo

Classe: quarta liceo scientifico: sperimentazione P.N.I.
Obiettivi: acquisire una conoscenza più consapevole delle trasformazioni lineari; operare con maggior abilità con il calcolo matriciale
Tempi: 2 ore per la premessa sulle coniche più 8 ore, comprese 3 ore per le esercitazioni e la verifica
Metodi: lezione frontale
Strumenti: calcolatrice (rapporto 1:1), view-screen e le pagine di questa scheda
Prerequisiti: conoscenza delle trasformazioni lineari, conoscenza del calcolo matriciale, elementi di programmazione in Turbo Pascal, conoscenza elementare della TI-92

Il calcolo matriciale e le trasformazioni lineari sono argomenti che spesso non vengono apprezzati dagli studenti a causa della pesantezza del calcolo. Questa difficoltà, unita al fatto che la disponibilità di tempo è sempre molto limitata, fa sì che i due argomenti non vengano sviluppati adeguatamente con un congruo numero di esercizi.
La semplicità di calcolo algebrico e matriciale della TI92 permette di superare questi problemi.

Lo spunto per l'applicazione è partito dalla risoluzione del quesito n. 2 proposto per l'esame di maturità sperimentale PNI 1994 (di cui riportiamo sotto il testo) in cui vengono esaminati molti aspetti e applicazioni delle trasformazioni lineari, ma che presenta lungaggini di calcolo. L'esercizio era già stato sviluppato in classe e lo si è riesaminato con l'aiuto della TI92.
Poiché alcuni quesiti riguardavano la trasformazione di coniche, lo studio delle trasformazioni lineari è stato preceduto da un'introduzione sulla rappresentazione grafica di funzioni e di coniche che ha richiesto due ore.

Grafico di funzioni:

- attivare Y = Editor (¥ #)
- digitare la funzione da graficare
- attivare il video grafico (¥ %)

oppure si può ottenere lo stesso risultato digitando in "

Graph x^3-2x+1,x

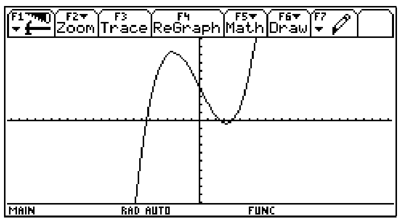
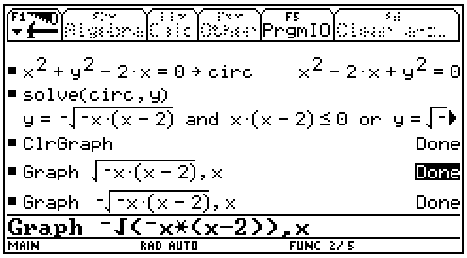


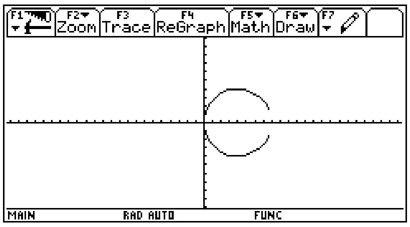
Grafico di una circonferenza

La circonferenza è rappresentata da un'equazione di 2° grado nelle variabili *x* e *y* e non da una funzione, quindi per disegnarla dobbiamo prima ottenere le due funzioni che rappresentano la semicirconferenza inferiore e superiore.
<u>Esempio</u> : vediamo come si disegna la circonferenza
$x^2 + y^2 - 2x = 0$\\



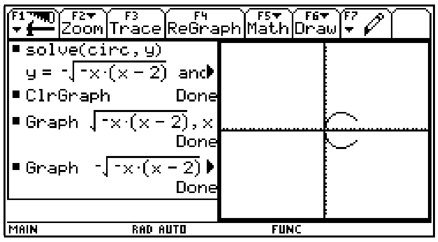
Se si omette il comando † z (Other ClrGraph) la calcolatrice può dare errore a causa di definizioni dovute a grafici precedenti.

Se il grafico non è soddisfacente modificare con gli Zoom, che si attivano premendo „ { (ZoomStd), impostare lo schermo alle impostazioni di Default e cioè $-10 < x < 10$ e $-10 < y < 10$.
ZoomSqr imposta lo schermo in modo che circonferenze e quadrati siano rappresentati nelle giuste proporzioni.



ZoomIn e ZoomOut rimpiccioliscono o ingrandiscono lo schermo rispetto ad un punto.

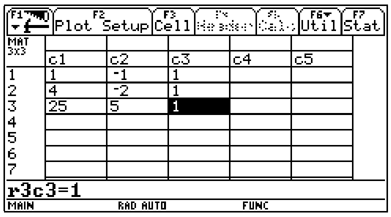
È possibile dividere lo schermo in due parti e vedere contemporaneamente la finestra di " e quella di % . La sequenza per dividere lo schermo è:
3 [Split Screen][Left-Right] ¸
Per tornare allo schermo intero
3 [Split Screen][Full] ¸



Calcolo matriciale:
per inserire una matrice si può procedere in due modi:

1- attivare Data/Matrix Editor, selezionare [New][Matrix] e seguire le istruzioni
2- da " digitare: [[a,b,c][d,e,f][g,h,i]]→ mat

per i vettori colonna si procede come per le matrici con un solo elemento per riga

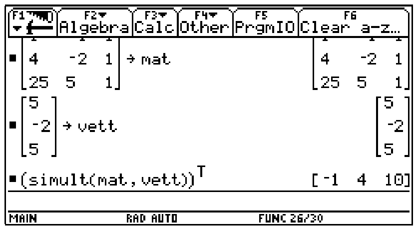


Applicazione:
Determinazione dell'equazione di una parabola passante per tre punti assegnati, es. (x1,y1), (x2,y2), (x3,y3): sostituendo nell'equazione della parabola y = a x^2 + bx + c
si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a\,x1^2 + b\,x1 + c = y1 \\ a\,x2^2 + b\,x2 + c = y2 \\ a\,x3^2 + b\,x3 + c = y3 \end{cases}$$

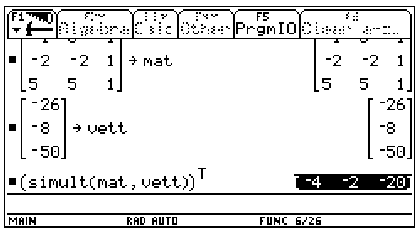
Per risolvere il sistema si assegnano i coefficienti delle incognite ad una matrice (mat), i termini noti ad un vettore colonna (vett): la funzione **Simult(mat,vett)** determina il vettore delle soluzioni.

$$\begin{vmatrix} x1^2 & x1 & 1 \\ x2^2 & x2 & 1 \\ x3^2 & x3 & 1 \end{vmatrix} \to mat \qquad \begin{vmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{vmatrix} \to vett$$



Per la circonferenza si ha il sistema :
$x1^2 + y1^2 + a\,x1 + b\,y1 + c = 0$
$x2^2 + y2^2 + a\,x2 + b\,y2 + c = 0$
$x3^2 + y3^2 + a\,x3 + b\,y3 + c = 0$
quindi:

$$\begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix} \to mat \qquad \begin{vmatrix} -(x1^2 + y1^2) \\ -(x2^2 + y2^2) \\ -(x3^2 + y3^2) \end{vmatrix} \to vett$$



A lato dei rispettivi calcoli sono riportati due esempi relativi alla determinazione dell'equazione di una parabola e di una circonferenza passanti per i punti:
A (-1; 5)   B (-2 ; -2)   C (5 ; 5)

Sono stati anche sviluppati due semplici programmi, privi di controlli, per determinare le equazioni di una circonferenza e di una parabola ad asse verticale, date le coordinate di tre punti.

Programma per la determinazione dell'equazione di una circonferenza	Programma per la determinazione dell'equazione di una parabola

```
Circeq()
Prgm
ClrIO

Disp "Inserire le coordinate "
Disp "dei tre punti"

Input "x1 ",x1
Input "y1 ",k1
Input "x2 ",x2
Input "y2 ",k2
Input "x3 ",x3
Input "y3 ",k3

[[x1,k1,1][x2,k2,1][x3,k3,1]]→mat
[[x1^2+k1^2][x2^2+k2^2][x3^2+k3^2]]
→vett
simult(mat,vett) →r
Disp "x^2+y^2+"&string(r[1])&"x
+"&string(r[2])&"y+"&string(r[3])&"=
0"

EndPrgmr()
```

```
Pareq()
Prgm
ClrIO

Disp "Inserire le coordinate "
Disp "dei tre punti"

Input "x1 ",x1
Input "y1 ",k1
Input "x2 ",x2
Input "y2 ",k2
Input "x3 ",x3
Input "y3 ",k3

[[x1^2,x1,1][x2^2,x2,1][x3^2,x3,1]]→m
at
[[k1][k2][k3]]→vett
simult(mat,vett) →r
Disp "y="&string(r[1])&"x^2
+"&string(r[2])&"x+"&string(r[3])

EndPrgmr()
```

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE LINEARI

Quesito : Si consideri la trasformazione T che muta i punti A(1,0),B(0,1),C(-1,0) di un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, rispettivamente nei punti A'(0,1), B'(2,-1), C'(0,-1).
Si studi la natura di T e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione ed il rapporto fra le aree dei triangoli corrispondenti ABC e A'B'C' .
Detta K la circonferenza per i punti A, B, C e P la parabola di equazione:
$y = -2x^2 + 1$, si dimostri che i loro punti comuni sono vertici di un triangolo equilatero. Si considerino le figure K' e P' ottenute da K e P mediante la trasformazione T e la figura Q' ottenuta trasformando il quadrato Q circoscritto a K e con i lati paralleli agli assi coordinati.
Avvalendosi della trasformazione T si dica la natura di K', P' e Q' ecc.....

Nella scheda si useranno come esempio i dati del quesito suddetto.

Determinazione dell'equazione della trasformazione

Dati i punti A(x1,y1) B(x2,y2) C(x3,y3) e i corrispondenti A'(xx1,yy1) B'(xx2,yy2) C'(xx3,yy3)
Si vogliono determinare i coefficienti della trasformazione lineare di equazione:

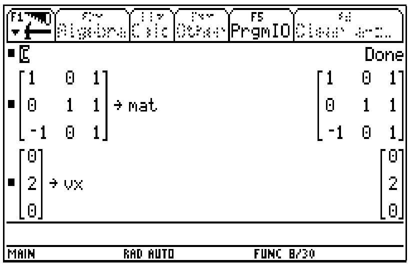
$$\begin{cases} X' = ax + by + p \\ Y' = cx + dy + q \end{cases}$$

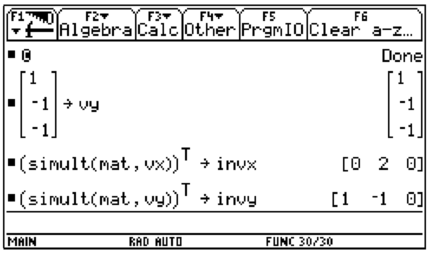
Sostituendo le coordinate delle tre coppie di punti si ottengono i sistemi lineari:

$$\begin{cases} a\,x1 + b\,y1 + p = xx1 \\ a\,x2 + b\,y2 + p = xx2 \\ a\,x3 + b\,y3 + p = xx3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c\,x1 + d\,y1 + q = yy1 \\ c\,x2 + d\,y2 + q = yy2 \\ c\,x3 + d\,y3 + q = yy3 \end{cases}$$

I due sistemi possono essere risolti con il calcolo matriciale. La matrice dei coefficienti si otterrà come segue:
[[x1,y1,1][x2,y2,1][x3,y3,1]] → mat
[[xx1][xx2][xx3]] → vx
[[yy1][yy2][yy3]] → vy
simult(mat,vx) → tx

simult(mat,vy) → ty.
I vettori *tx* e *ty* riportano i coefficienti della trasformazione e precisamente:
tx = { a,b,p} e
ty = { c,d,q }



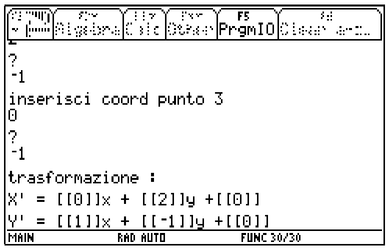


Ovviamente si è fatto notare che l'inserimento della matrice poteva essere effettuato anche con Data/Matrix Editor.
Si nota che il procedimento è semplice, quindi si considera l'opportunità di costruire un programma che, inserite le coordinate dei punti, restituisca le equazioni della trasformazione.
Il programma è stato chiamato **eqtrasf** e se ne riporta sotto il listato insieme con le videate dell'esecuzione.

```
Programma eqtrasf   : determina
l'equazione di una trasformazione
date le coordinate di tre coppie di
punti corrispondenti

eqtrasf()
Prgm
ClrIO

Disp "Inserire le coordinate "
Disp "dei tre punti"

Input " x1 ",x1
Input " y1 ",k1
Input " x2 ",x2
Input " y2 ",k2
Input " x3 ",x3
Input " y3 ",k3
```

```
Disp " Inserire le coordinate"
Disp " dei tre punti corrispondenti "
Input "x x1 ",xx1
Input " yy1 ",yy1
Input " xx2 ",xx2
Input " yy2 ",yy2
Input " xx3 ",xx3
Input " yy3 ",yy3
[[x1,k1,1][x2,k2,1][x3,k3,1]]
→mat
 [[xx1][xx2][xx3]] →vx
[[yy1][yy2][yy3]] →vy
simult(mat,vx) →sol1
simult(mat,vy) →sol2
```

```
Sol1[1] →a
sol1[2] →b
sol1[3] →p
sol2[1] →c
sol2[2] →d
sol2[3] →q

Disp "trasformazione :"
Disp "X' = "&string(a)&"x +
"&string(b)&"y +"&string(p)
Disp "Y' = "&string(c)&"x +
"&string(d)&"y +"&string(q)

DelVar xk,yk,x,k,xx,kk,vx,vy,sol1,sol2

EndPrgm
```



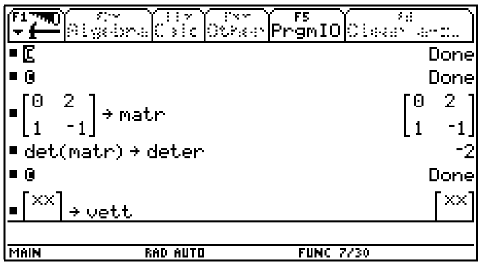
Studio della trasformazione

$$\begin{cases} X' = ax + by + p \\ Y' = cx + dy + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} X' = 2y \\ Y' = x - y \end{cases}$$

- **Calcolo del determinante**

[[a,b][c,d]] → matr
det(matr) → deter



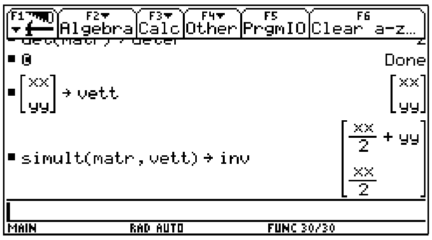
- **Trasformazione inversa**: La trasformazione inversa serve per trovare le trasformate di funzioni.

  Si ricava risolvendo rispetto a x e y il seguente sistema: $\begin{cases} ax + by = X' - p \\ cx + dy = Y' - q \end{cases}$

- **Punti uniti**: si ottengono risolvendo il sistema

[[xx-p][yy-q]] → vett
simult(matr,vett) → inv

$$\begin{cases} x(a-1)+by=-p \\ cx+y(d-1)=-q \end{cases}$$

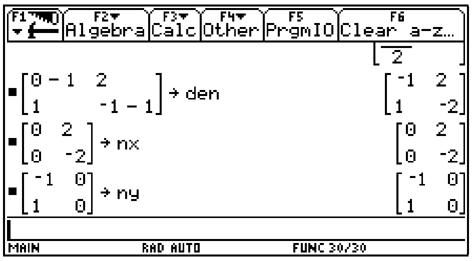


Si risolve e si discute col metodo di Cramer

$$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix} \to den \qquad \begin{vmatrix} -p & b \\ -q & d-1 \end{vmatrix} \to nx \qquad \begin{vmatrix} a-1 & -p \\ c & -q \end{vmatrix} \to ny$$

se $den \neq 0$ si ha un punto unito (nx/den ; ny/den)
se $den = 0$ e nx ≠ 0 nessun punto è unito
se $den = 0$ e nx = 0 si ha una retta unita di equazione x(a-1) + by = -p

Quindi si procede :
[[a-1,b][c,d-1]] → den
[[-p,b][-q,d-1]] → nx
[[a-1,-p][c,-q]] → ny
det(den) → den1
det(nx) → nx1
det(ny) → ny1



```
trasf()
Prgm

DelVar a,b,c,d,p,q,xx,yy,x,y,tx,ty
ClrIO
©inserimento trasformazione
Disp " trasformazione"
Disp "X' = ax + by +p "
Disp "Y' = cx + dy +q "
Input " a = ",a
Input " b = ",b
Input " p = ",p
Input " c = ",c
Input " d = ",d
Input " q = ",q
a*d-b*c→deter
Disp "determinante ="&string(deter)
If deter=0 Then
      Disp "non è una affinita'"
      Else
       If deter>0 Then
           Disp "affinita' diretta"
        Else
        Disp "affinita' inversa"
       EndIf
      Disp "rapporto aree
"&string(abs(deter))

If a^2+c^2=b^2+d^2 and a*b+c*d=0
Then
Disp " similitudine"
Disp "rapporto proporzionalita' ="
Disp string(√(abs(deter)))
If abs(deter)=1 Then
       Disp "isometria"
   EndIf
EndIf
Disp "premi Enter"
Pause
```

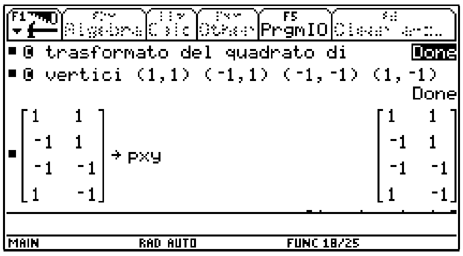
```
© trasformazione inversa
[[a,b][c,d]] →mat
[[xx-p][yy-q]] →vett
simult(mat,vett) → inv
Disp " "
Disp "trasformazione inversa"
Disp " "
Disp "x = "&string(inv[1])
Disp "y = "&string(inv[2])
Disp "premi Enter"
Pause
Disp " "
Disp "punti uniti"
Disp " "
x*(a-1)+b*y=-p→eq1
c*x+(d-1)*y=-q→eq2
[[a-1,b][c,d-1]] →den
[[-p,b][-q,d-1]] →nx
[[a-1,-p][c,-q]] →ny
det(den) →den1
det(nx) →nx1
det(ny) →ny1
If den1≠ 0 Then
   nx1/den1→pux
  ny1/den1→puy
  Disp "p.unito : ("&string(pux)&";"
  &string(puy)&")"
   Else
    If nx1=0 Then
     Disp "retta di punti uniti :
"&string(eq1)
     Else
      Disp " nessun punto unito"
    EndIf
EndIf
Disp "premi Enter"
Pause
```

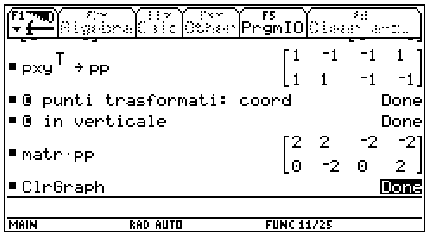
```
1→px[1]
1→py[1]
-1→px[2]
1→py[2]
-1→px[3]
-1→py[3]
1→px[4]
-1→py[4]
1→px[5]
1→py[5]
ClrGraph
```

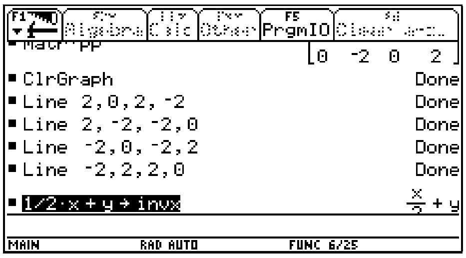
```
For i,1,4
 Line px[i],py[i],px[i+1],py[i+1]
EndFor
For i,1,5
 px[i]*a+py[i]*b+p→tx[i]
 px[i]*c+py[i]*d+q→ty[i]
EndFor
For i,1,4
 Line tx[i],ty[i],tx[i+1],ty[i+1]
EndFor
EndPrgm
```

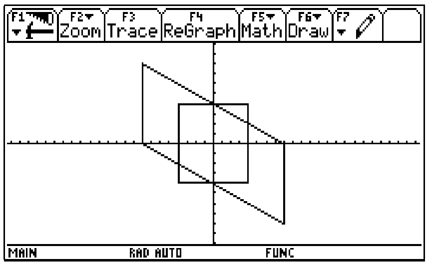
- **Trasformazione del quadrato Q**

La TI92 permette di determinare rapidamente le coordinate dei punti trasformati. Per trasformare un punto basta moltiplicare la matrice della trasformazione per il vettore delle coordinate del punto e sommare il vettore dei termini noti.
In questo caso particolare si osserva che il vettore dei termini noti è nullo quindi il procedimento può essere semplificato moltiplicando la matrice della trasformazione per la trasposta della matrice formata dalle coordinate dei punti.
Il parallelogramma risultante può essere tracciato utilizzando la funzione **line** .



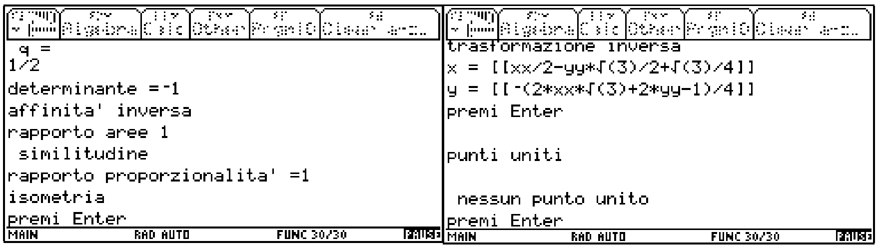






Esecuzione del programma **trasf** per la trasformazione:

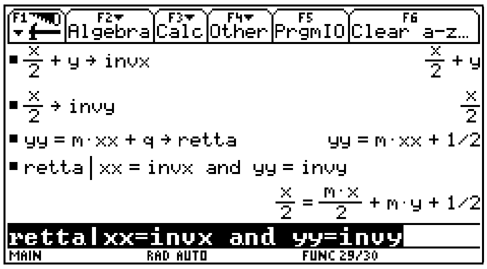
$$\begin{cases} X' = 1/2x - \sqrt{3}/2y \\ Y' = -\sqrt{3}/2x - 1/2y + 1/2 \end{cases}$$



- **Rette unite**: per trovare le eventuali rette unite si utilizza la trasformazione inversa per trovare la trasformata di una generica retta e si mettono poi a confronto il risultato e la retta di partenza.

Si considera **l'affinità inversa**

$$\begin{cases} x = a'xx + b'yy + p' \\ y = c'xx + d'yy + q' \end{cases}$$



che si definisce come segue :
a' x + b' y + p' → invx
c' x + b' y + q' → invy
e si considera la retta generica così definita:
yy = m xx + q → retta
per trasformarla basta richiamare la retta **con** xx=invx e yy = invy, cioè :
retta | xx= invx and yy=invy
si potrà poi operare sull'equazione risultante.

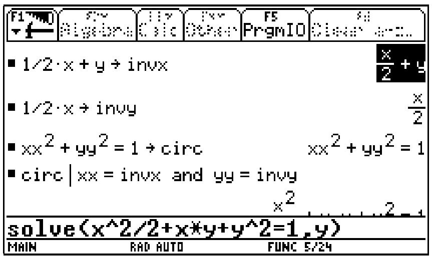
- **Trasformazione e grafico di coniche**

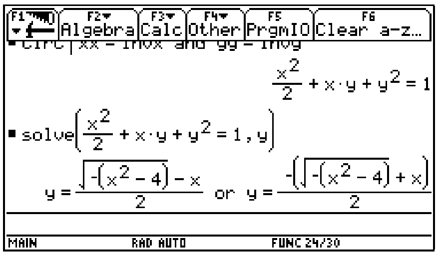
Per trasformare le coniche si procede in maniera analoga a quanto fatto per trasformare la retta, cioè :
definita la funzione inversa come visto sopra, si considerano le coniche richieste dal quesito.

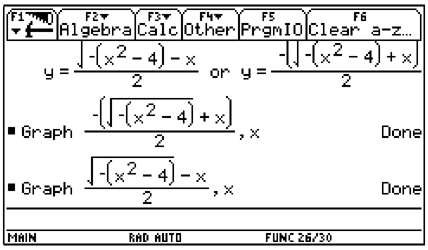
Per comodità si procede con l'esempio numerico:
$1/2\ x + y \to$ invx
$1/2\ x \to$ invy

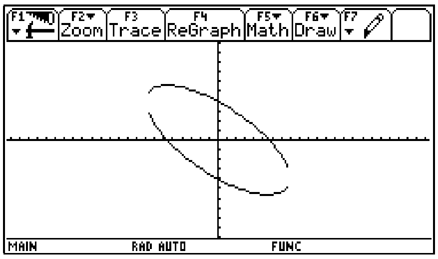
xx^2 + yy^2=1 $\to$ circ
circ | xx=invx and yy=invy
risulta : $1/2\ x^2 + x\ y + y^2 = 1$

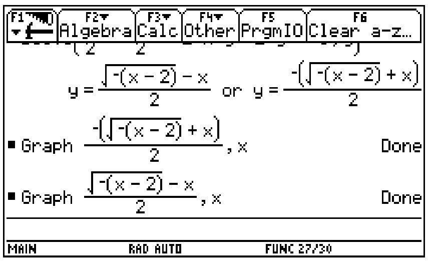
Per il grafico occorre risolvere l'equazione della circonferenza trasformata rispetto ad y e si ottengono due funzioni, corrispondenti a due semiellissi che possono essere graficati singolarmente con la funzione graph.
Analogamente si procede per la parabola.

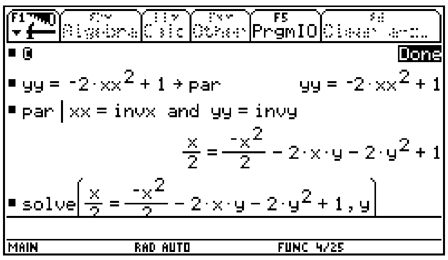


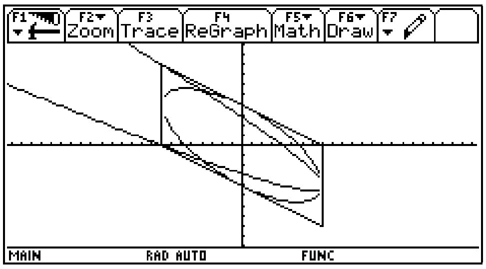












- **Scomposizione di similitudini**

In seguito all'esecuzione di esercizi relativi alle similitudini si è pensato di sviluppare un programma per scomporre le similitudini in trasformazioni elementari che consentano di disegnare poligoni simili mediante l'uso dello strumento **Geometry**.

Pertanto è stato sviluppato un programma che, inserita l'equazione di un'affinità, verifica se è una similitudine e, se la risposta è positiva, fornisce coefficiente di dilatazione e angolo di rotazione.

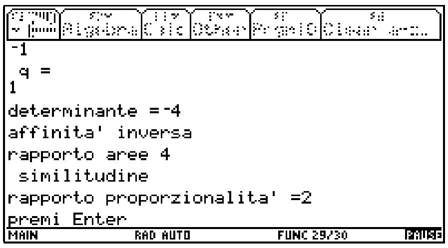
```
Simil( )
Prgm

DelVar a,b,c,d,p,q,xx,yy,x,y,tx,ty
ClrIO
©inserimento trasformazione
Disp " trasformazione"
Disp "X' = ax + by +p "
Disp "Y' = cx + dy +q "

Input " a = ",a
Input " b = ",b
Input " p = ",p

Input " c = ",c
Input " d = ",d
Input " q = ",q
```

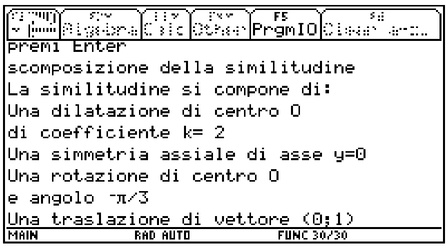
```
a*d-b*c→deter
Disp "determinante
="&string(deter)
If deter=0 Then
      Disp "non è una affinita'"
      Else
       If deter>0 Then
             Disp "affinita' diretta"
        Else
        Disp "affinita' inversa"
       EndIf
      Disp "rapporto aree
"&string(abs(deter))
EndIf
```

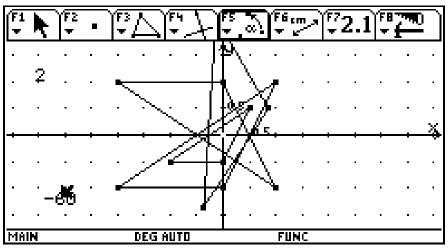
```
√(abs(deter))→k
If a^2+c^2=b^2+c^2 and
a*b+c*d=0 then
       Disp "similitudine"
       Disp "rapporto proporzionalita'
="&string(k)
      If k=1 then
         Disp "Isometria"
     EndIf
Disp "premi Enter"
Pause

Disp "scomposizione della
similitudine"
tan⁻¹(-b/a) →alfa
If deter<0 Then
          180+alfa→alfa
EndIf
```

```
Disp "La similitudine si compone
di :"
Disp "Una dilatazione di centro O"
Disp "di coefficiente k=
"&string(k)
If deter < 0 Then
Disp " Una simmetria assiale di
asse y=0 "
EndIf
Disp "Una rotazione di centro O "
Disp "e angolo "&string(alfa)
Disp "Una traslazione di vettore
("&string
(p)&";"&string(q)&")"
Else
Disp "non e' una similitudine"
EndIf
EndPrgm
```

Applicazione del programma **simil** alla trasformazione lineare: $\begin{cases} X' = x - \sqrt{3}y \\ Y' = -\sqrt{3}x - y + 1 \end{cases}$







I ragazzi, che avevano prima eseguito i calcoli manualmente, hanno molto apprezzato la semplicità di calcolo consentita dalla TI 92. Le difficoltà concettuali sono state minime, inizialmente vi sono state lentezze nell'uso della tastiera e dei menù dovute alla mancanza di pratica nell'uso della calcolatrice però questo problema è stato risolto facendo utilizzare le macchine anche a domicilio. Per quel che riguarda la programmazione, inizialmente la costruzione dei programmi è stata proposta agli alunni, poi però sono state spiegate le procedure elaborate dall'insegnante.
Come conclusione e verifica è stato chiesto ai ragazzi di risolvere con i nuovi strumenti gli esercizi che già erano stati proposti nella verifica scritta sulle trasformazioni lineari.

Testo della verifica:

1) Si consideri la trasformazione T che muta i punti V(0;2) , A(1;0) , D(-1;0) rispettivamente nei punti V'(-2;6) , A'(1;0) , D'(-1;0).
   - Si studi la natura di T e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione.
   - Si consideri il quadrato K di vertici A(1;0) , B(1;2) , C(-1;2) , D(-1;0) si determini la figura K', trasformata di K in T e si calcoli il rapporto fra le aree. Rappresentare graficamente.
   - Si consideri la parabola P di vertice V passante per i punti A e D e si determini la conica P' sua trasformata in T. Si classifichi P'.
   - Si consideri l'equazione della circonferenza C inscritta nel quadrato K e si determini la conica C' sua trasformata in T. Si classifichi C'.
   - Si determinino i punti intersezione di P' e C'.
2) Si consideri la trasformazione lineare T che muta i punti A(1;1) , B(0;1) , C(-1;0) rispettivamente nei punti
$$A'(\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+2) \quad B'(-1;\sqrt{3}) \quad C'(-\sqrt{3}+1;-2)$$
   Si studi la trasformazione ottenuta e si determinino i punti uniti.
   Si determinino inoltre i vertici del parallelogramma corrispondente al quadrato di vertici A(1;1) , D(-1,1) , E(-1,-1) , F(1,-1).
3) Si determini l'equazione della circonferenza passante per i punti (4;7) , (5;0) , (-3;6);
   si trovi la sua trasformata nell'affinità $T = \begin{cases} X' = x - y \\ Y' = 2x \end{cases}$

   si dia una rappresentazione grafica approssimata della conica trasformata.

23. UN APPROFONDIMENTO DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Antonio Travaglini
Liceo Scientifico "G.Galilei" Lanciano Ch

Classe Quarta Liceo scientifico sperimentale PNI
Obiettivi (usare la `TI-92` per):
- recuperare gli alunni più deboli dando loro un punto di appoggio per superare le difficoltà;
- abituare gli studenti a scegliere la strategia risolutiva più adatta al problema;
- risolvere problemi sulle successioni e sulle progressioni.
- usare la `TI-92` per far acquisire i concetti di successione e di progressione

Tempi di attuazione:
sei ore.
Argomenti trattati:
successioni e progressioni geometriche.
Metodologia:
- uso del `view screen` per l'esposizione e i richiami dei concetti fondamentali;
- uso di una macchina `TI-92` per ogni studente per un lavoro autonomo che rispetti i tempi di apprendimento di ciascuno;
- scoperta guidata di leggi e proprietà con eventuali discussioni sulle difficoltà incontrate dall'alunno.

PRIMA LEZIONE (due ore).
Obiettivo: dopo aver spiegato le caratteristiche delle successioni: convergenti, divergenti e indeterminate, si mostra l'andamento della successione $\mathbf{a_n = (3n+1) / (2n+3)}$.
Strumenti utilizzati: `view screen` e calcolatrice grafica `TI-92`.

Da quanto si vede sullo schermo, figura 1 e 2 si può notare la scrittura della successione.
Per visualizzare questa schermata bisogna eseguire i seguenti comandi:
3 imposta il modo % su SEQUENCE e poi ˎ e ancora ˎ .

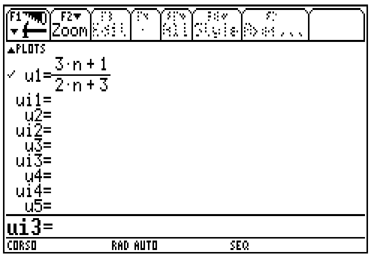


fig 1

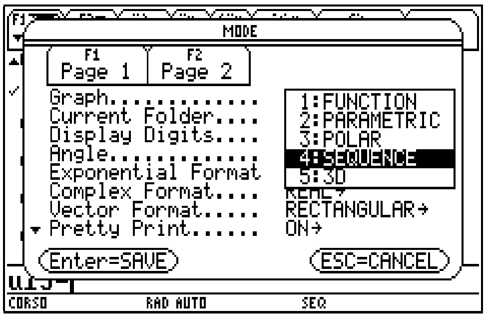


fig 2

Successivamente si digita `Y=EDITOR`:

♦**W** per digitare la successione. Si preme **F6** e poi **3** per definire lo stile della rappresentazione. Si definisce poi il numero dei termini da rappresentare aprendo la finestra `Window Editor`: ♦**E** dove si possono impostare le opportune variabili, vedi figura 3.

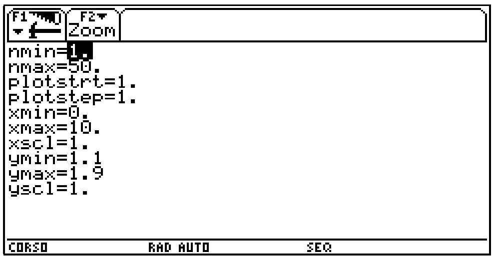


fig 3

Così facendo si dà l'opportunità alla `TI-92` di rappresentare il grafico degli elementi di una successione. Andando in modalità grafica: ♦**R** e usando **F2** **`Zoom`** si visualizzano i punti, vedi figura 3 bis.

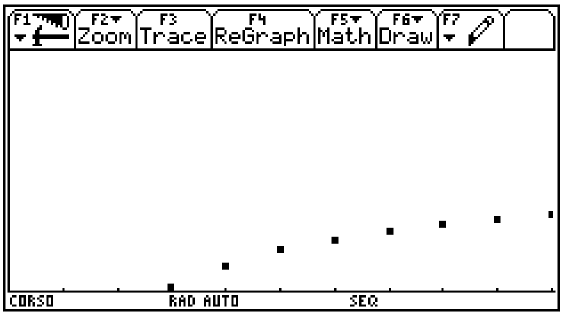


fig. 3 bis

Si costruisce una tabella nella quale sono elencati gli elementi della successione, operando nel modo seguente:

♦**T**: si apre una finestra nella quale si può impostare la costruzione fig. 7 della tabella, si inseriscono i valori, come in figura 4, e poi si pigia ¸ .

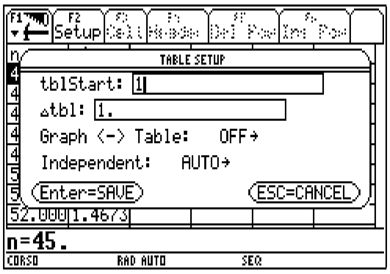


fig. 4

Con ♦**Y** compare una tabella con i primi 8 valori della successione, premendo `2nd` il cursore verso il basso si possono visualizzare gli altri valori della tabella, come mostra la figura 5.

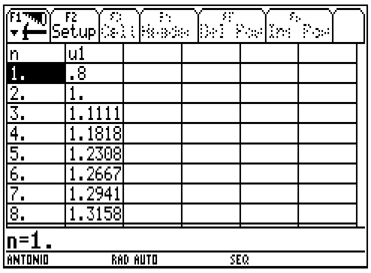
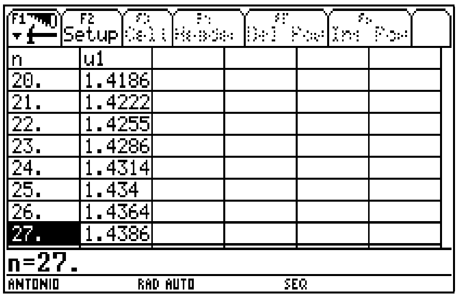


fig. 5

Procedendo sempre tenendo premuto `2nd` e il cursore verso il basso si possono visualizzare altre pagine, oppure con ♦**T** si riapre la finestra nella quale si può inserire il valore di 200 a `tblStart` e ottenere la seguente schermata, nella quale si nota che all'aumentare d i n la successione si avvicina al valore di 1,5. Si tratta di una successione convergente. (Figure 6 e 7)

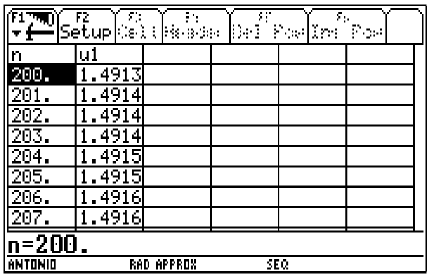


n	u1
20.	1.4186
21.	1.4222
22.	1.4255
23.	1.4286
24.	1.4314
25.	1.434
26.	1.4364
27.	1.4386

n=27.

ANTONIO RAD AUTO SEQ

fig.6



n	u1
200.	1.4913
201.	1.4914
202.	1.4914
203.	1.4914
204.	1.4915
205.	1.4915
206.	1.4916
207.	1.4916

n=200.

ANTONIO RAD APPROX SEQ

fig. 7

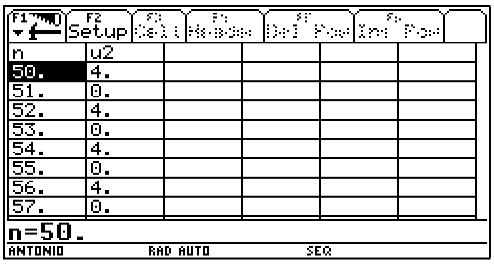
Esercizio proposto

Studiare le successioni :

a) $\mathbf{a_n = (n^2-2) / n}$;

b) $\mathbf{b_n = (n + (-1)^{n} * n) / (n / 2)}$.

1. Rappresentare tali successioni sullo schermo e descrivere tutte le sue caratteristiche.
2. Costruire le relative tabelle variando opportunamente i valori iniziali di `tblStart`.



n	u2
50.	4.
51.	0.
52.	4.
53.	0.
54.	4.
55.	0.
56.	4.
57.	0.

n=50.

ANTONIO RAD AUTO SEQ

3. Dire a quale successione si riferisce la seguente tabella.

SECONDA LEZIONE (parte di programmazione grafica) due ore
Obiettivo: uso dell'ambiente di programmazione per strutturare sottoprogrammi e programmi utili alla risoluzione di un dato problema.
Strumenti utilizzati:
`view screen` e calcolatrice grafica `TI-92`.
Si propone il seguente problema :

> Dato un triangolo equilatero di lato *L* si divida ogni lato in tre parti uguali e si costruisca su ogni segmento centrale − dopo averlo cancellato − verso l'esterno (oppure verso l'interno) un triangolo di lato L/3. Reiterando questo procedimento, studiare le successioni costituite dai perimetri e dalle aree delle figure che così si ottengono.

Premessa metodologica:

> Per risolvere il problema con la `TI-92` si usa l'ambiente di programmazione e si strutturano alcuni programmi che, usati come sottoprogrammi, permettono di visualizzare le figure richieste. I sottoprogrammi hanno i seguenti nomi: `schermo`, `posiz`, `avanti`, `indietro`, `destra`, `sinistra` e i due programmi principali si chiamano `triangof` e `triangin`. (Tutto il soft qui presentato è stato realizzato direttamente in classe. Proficua è stata la partecipazione degli alunni).

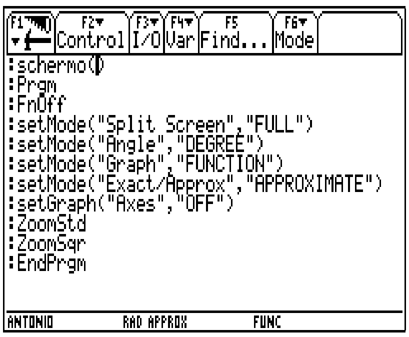


fig. 1

Il sottoprogramma `schermo` della fig.1 prepara il display della TI-92 per l'esecuzione dei successivi programmi. Infatti si predispone la calcolatrice con i comandi: `MODE`, `Split Screen`, `FULL`; si misurano gli angoli in gradi con i comandi: `MODE` , `Angle`, `DEGREE`; si cancellano gli assi coordinati con i comandi: `MODE`, `Axes`, `OFF`, si imposta il calcolo approssimato con i comandi: `MODE`, poi ancora con `Exact/Approx`, `APPROXIMATE` e si modifica infine la scala grafica da `ZoomStd` a `ZoomSqr`.

Il sottoprogramma `posiz` fig. 2 è quello che inizia il disegno nella posizione e nella direzione desiderata. I sottoprogrammi `avanti` e `indietro` di figura 3 e 4 disegnano le linee di lunghezza L, da sinistra verso destra e viceversa.

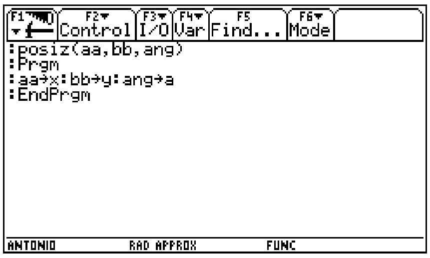


Fig. 2

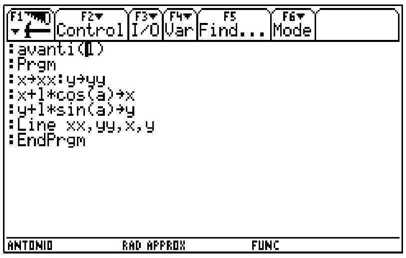


fig. 3

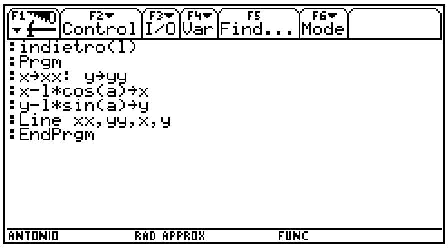


fig. 4

I sottoprogramma `destra` e `sinistra` di figura 5 e 6 modificano l'inclinazione di una linea verso orario o antiorario di un angolo dato.

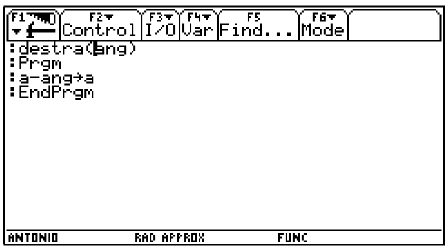


fig. 5

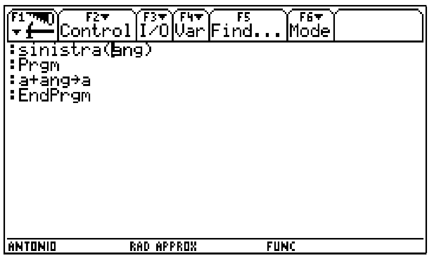


fig .6

I programmi `triangof` e `triagin` disegnano le figure richieste dal testo del problema proposto agli alunni rispettivamente verso l ' esterno e verso l'interno. Vedi figure 7 e 8.

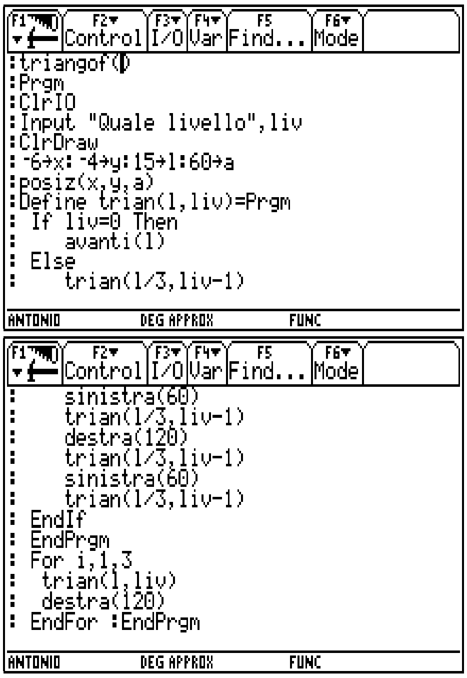


fig. 7

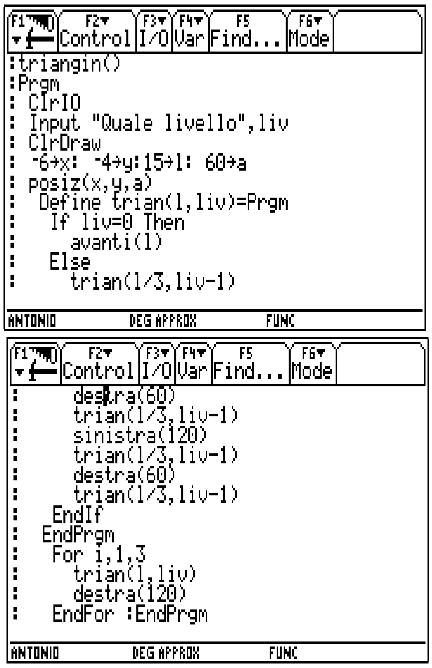


fig.8

Il programma `triangof` visualizza le varie figure a diversi livelli di complessità. Le figure 9-10-11-12 rappresentano le modificazioni successive per triangoli *esterni*.

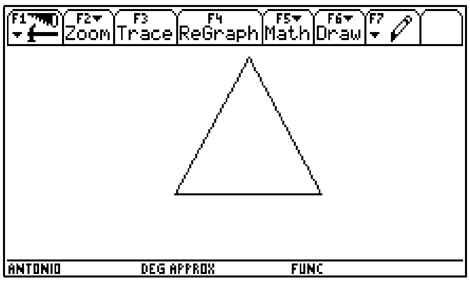


fig. 9

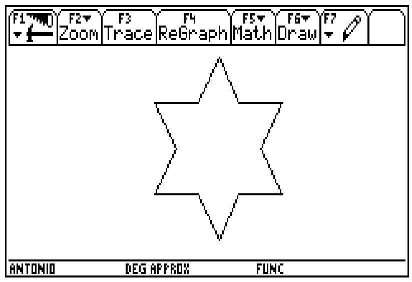
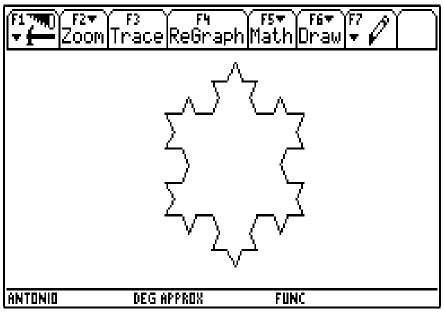


fig. 10



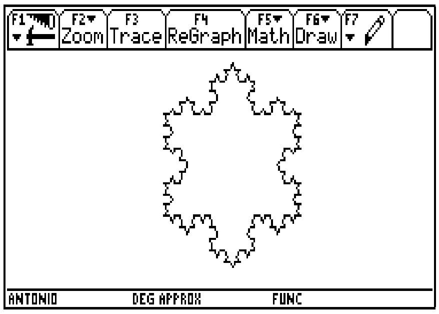
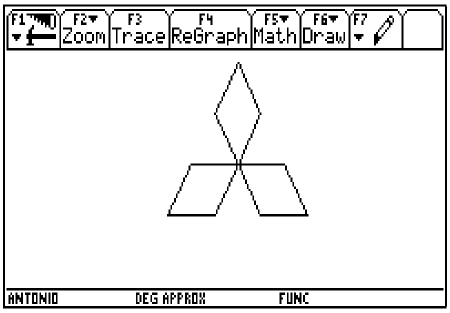


fig.11 fig.12

Le figure 13-14 mostrano i primi due livelli di complessità per triangoli *interni.*



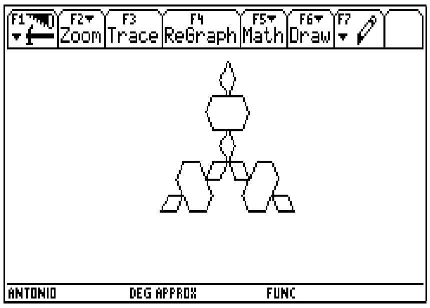


fig.13 fig.14

SECONDA LEZIONE (parte seconda analitica) due ore.

Obiettivi: abituare gli studenti a scegliere la strategia risolutiva più adatta per risolvere problemi sulle progressioni geometriche.

- Si studia la successione dei perimetri delle figure ottenute dalla costruzione per *triangoli esterni*.

Il perimetro P_0 del primo triangolo è 3 avendo ipotizzato L=1. Il perimetro P_1 della seconda figura sarà : $P_1 = 4 * (1/3 + 1/3 + 1/3) = 4$, essendo ogni lato del triangolo diviso in quattro segmenti di lunghezza 1/3 , cioè $P_1 = (4/3) * P_0$.
Il perimetro P_2 della terza figura sarà : $P_2 = 16 * (1/9) * 3$, essendo ogni lato del triangolo diviso in sedici segmenti di lunghezza (1/3):3 =1/9, cioè $P_2 = (4/3)^2 * P_0$; ragionando allo stesso modo il perimetro P_3 della quarta figura sarà :

$P_3 = (4/3)^3 * P_0$. Dopo n passaggi successivi si ottiene $P_n = (4/3)^n * P_0$.
Studiando questa successione si nota che il rapporto di ogni termine con il suo precedente è sempre costante è vale 4/3, quindi si tratta di una progressione geometrica di ragione q>1, che al tendere di n all'∞ , diverge all'∞. I ragazzi hanno colto il risultato, per i non addetti ai lavori, paradossale (confronta figure 15,16,17,18).

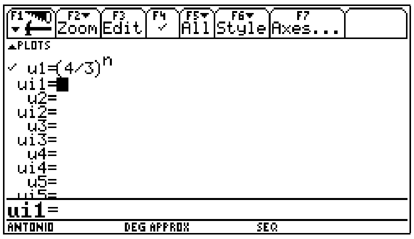


fig. 15

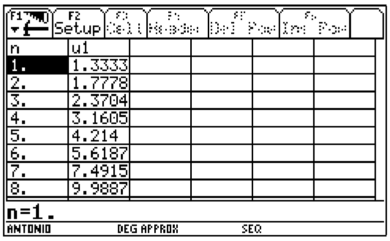


fig. 16

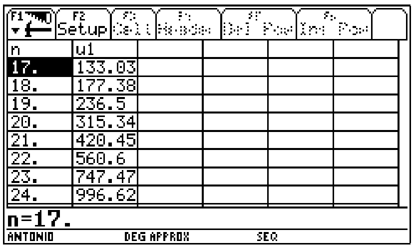


fig. 17

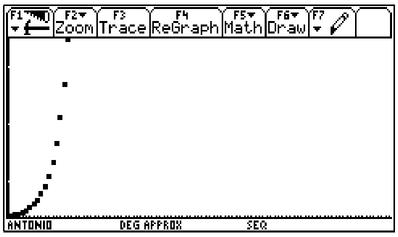


fig. 18

Si studi ora la successione delle aree delle figure ottenute dalla costruzione per *triangoli esterni*.
L'area del primo triangolo è $A_0 = \sqrt{3}/4$ essendo il il lato L=1 e l' altezza $\sqrt{3}/2$.
L'area della seconda figura sarà $A_1 = \sqrt{3}/4 + (1/3 * \sqrt{3}/6) * (1/2) * 3$, essendo il lato 1/3 e l ' altezza $\sqrt{3}/6$ e 3 il numero dei triangoli aggiunti .
Cioè $A_1 = \sqrt{3}/4 + (\sqrt{3}/4) * (1/3)$, ossia: $A_1 = (\sqrt{3}/4)*(1 + 1/3)$. L'area della terza figura sarà :
$A_2 = \sqrt{3}/4 + (\sqrt{3}/4)*(1/3) + [(1/9)*(\sqrt{3}/18)]*(1/2)*4*3$, essendo il lato 1/9 e l'altezza $\sqrt{3}/18$, 4 sono i triangoli aggiunti per ogni lato e 3 il numero dei lati . Cioè:
$A_2 = (\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4*3) + (4\sqrt{3}/4*3^3)$, ossia:

$A_2 = (\sqrt{3}/4)*[1+(1/3) + (4/3^3)]$, ragionando allo stesso modo l 'area della quarta figura sarà : $A_3 = (\sqrt{3}/4)*[1+ (1/3) + (4/3^3) + (4^2/3^5)]$ ossia :

$A_3 = (\sqrt{3}/4)*\{1+ (1/3)*[1 +4/3^2 + 4^2/3^4]$. Continuando allo stesso modo l 'area della n-esima figura sarà :

$A_n = (\sqrt{3}/4) * \{1 + (1/3)[1 + 4/9+ 4^2/9^2 + ….. +4^{n-1}/9^{n-1}]\}$.

I termini $1 + 4/9 + 4^2/9^2 + ….. + 4^n/9^n$ costituiscono una progressione geometrica di ragione $q = 4/9$ la cui somma è 9/5, essendo $S_\infty = a_1/ (1-q)$ cioè $S_\infty=1/(1 - 4/9)$, di conseguenza $A_\infty = (\sqrt{3}/4)\ [1+ (1/3)\ (9/5)]$, ossia: $A_\infty = (\sqrt{3}/4)*(8/5)$, cioè il valore finale è gli 8/5 del valore iniziale (confronta figure 19,20,21,22).

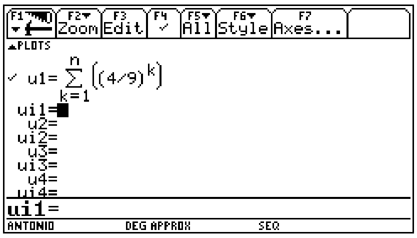


fig. 19

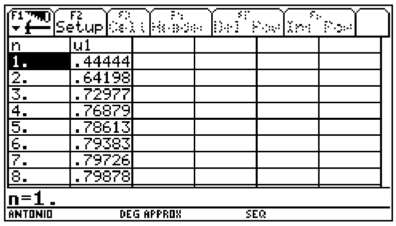


fig. 20

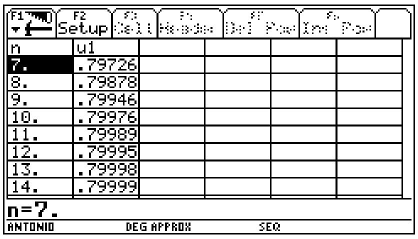


fig. 21

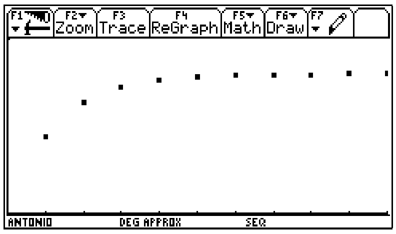


fig. 22

Al termine di queste lezioni gli alunni hanno acquisito i concetti di successione convergente, divergente e indeterminata. Raggiunto una maggiore dimestichezza con i comandi della TI-92 e inoltre hanno appreso in parte a porsi domande sia riguardo al grafico dei punti della successione, sia di fronte alla tabella dei valori (a ipotizzare risposte e a verificarle).

24. SUCCESSIONI E INTRODUZIONE AL CONCETTO DI LIMITE

Chimetto Maria Angela
Liceo Scientifico "G.B.Quadri" Vicenza

Classe: quarta liceo Scientifico-Tecnologico Brocca
Obiettivi: comprendere il significato di limite di una successione
Prerequisiti: progressioni aritmetiche e geometriche; funzioni esponenziali e logaritmiche
Tempi: dieci ore, otto di lezione più due di verifica finale
Metodi: lezione frontale, lavoro individuale, discussione con la classe
Strumenti: una calcolatrice per ogni alunno; calcolatrice, lavagna luminosa e viewscreen per l'insegnante

La calcolatrice grafica e simbolica si presta molto bene allo studio delle successioni, da molti punti di vista diversi.

L'argomento successioni è un argomento che attraversa "in verticale" il curriculum di matematica in ogni grado di scuola. E` concettualmente di fondamentale importanza, perché è in un certo senso "concreto". Infatti i primi elementi di una successione si possono calcolare e visualizzare direttamente ed è naturale la ricerca di ritmi e regolarità. Tuttavia anche la riflessione sulle successioni più comunemente usate costringe all'approccio con concetti astratti. La successione ha infiniti elementi, quindi le verifiche non sono sufficienti: è necessario ricorrere alle dimostrazioni.

Ho utilizzato le TI-92 per affiancare la trattazione e principalmente per l'esplorazione e la formulazione di congetture, in particolare lavorando a costruire una serie di "esperienze matematiche" sulle quali fondare il concetto di limite di una successione, che intendo far precedere a quello di limite di una funzione. Dalla riflessione sul lavoro svolto (in cui ho utilizzato la TI-92 in modo parziale, affiancandola al lavoro "carta e penna") ho tratto anche ulteriori spunti di approfondimento per attività future. Le esperienze qui presentate sono state realizzate in una classe quarta liceo scientifico-tecnologico Brocca. Si tratta di una classe nella quale ho insegnato a partire dalla terza, che presentava alcuni alunni in difficoltà rispetto alla matematica, ma soprattutto nella quale la maggioranza degli alunni non mostrava particolare interesse per la materia.

In questa classe il tema successioni è stato trattato in due momenti successivi; in un primo momento, seguendo sostanzialmente l'iter concordato a Lugo, ho utilizzato le progressioni aritmetiche e geometriche di ragione positiva, per giungere alla conoscenza del comportamento della successione delle potenze di un numero positivo. Tale successione è poi stata estesa alla funzione esponenziale per analogia con la successione dei multipli di k, che si estende alla funzione lineare $y=kx$. In questa fase progressioni aritmetiche e geometriche sono state utilizzate come modelli per la soluzione di problemi. La formula per la somma dei primi n elementi di una progressione geometrica è stata ricavata e utilizzata, ma non si è insistito sul limite. La terminologia e il formalismo relativi alle successioni sono stati usati per lo più in modo intuitivo.

La seconda parte, che è quella qui descritta, è stata sviluppata in un secondo momento e a questo punto erano già presenti i concetti di esponenziale e logaritmo.

Alla parte del lavoro qui descritta sono state dedicate in tutto otto ore, comprensive di interrogazioni.

La verifica finale è stata di tipo "classico". L'argomento della verifica era in realtà "problemi sulle successioni". Durante tale verifica agli alunni è stata lasciata la calcolatrice, ma non sono stati inseriti esercizi pensati appositamente per essa.

I risultati sono stati non esaltanti , ma complessivamente sufficienti. C'è da dire però che gradualmente, nel corso dell'anno, ho notato un progressivo miglioramento dell'interesse e del profitto di classe e un atteggiamento più attivo in classe durante le ore di Matematica.

1. Studio e esplorazione di successioni.

A partire dall'esame di successioni già note (la successione dei numeri naturali, dei pari, dei multipli di un numero naturale) si riflette sulla formula che genera una successione (direttamente).

Si calcolano (a mente o con carta e penna) i primi (cinque, dieci,…) elementi della successione:

- dei numeri pari
- dei dispari
- dei quadrati
- delle potenze n-esime di un numero
- dei fattoriali

Quest'ultimo esempio ci introduce in modo naturale all'idea di successioni in cui ogni termine si calcola a partire (in modo esplicito o implicito) dal precedente, e quindi alle successioni definite per induzione.

Così si analizzano le successioni date precedentemente, per vedere se si possono generare per induzione. Il lavoro sulle successioni definite per induzione non viene sviluppato con l'uso delle calcolatrici grafiche, che peraltro permetterebbe interessanti approfondimenti: mi propongo di sperimentarli il prossimo anno.

2. Successioni definite in modo diretto

Si usa la calcolatrice per definire in ambiente " successioni in modo diretto, attraverso il comando `seq(formula, indice, inizio, fine)`.

Attività:

a. Costruisci, utilizzando il comando `seq(2n+1,n,0,9)` i primi dieci elementi della successione dei numeri dispari.

b. Attraverso l'uso dello stesso comando costruisci i primi dieci elementi delle seguenti successioni:

$(-1)^n$

2^n

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$(-1.5)^n$

$\frac{n+1}{n}$

$(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

c. Date le seguenti successioni, individuate attraverso i loro primi elementi, trova una formula che le generi e usala con il comando `seq(formula,n,1,10)` per completare i primi dieci elementi delle successioni

0, 1/2, 2/3, 3/4,…

1, 5/2, 5/3, 9/4, 9/5,…

(discussione: dati i primi elementi di una successione, la formula che la genera è individuata in modo unico?)

Osservazione: non sempre l'uso della calcolatrice rende più semplice lo studio di successioni; esistono successioni semplici da definire e delle quali è facile calcolare i primi termini, ma con le quali, a mio parere, l'uso della calcolatrice grafica può essere "non banale". Si considerino i seguenti esempi

a. la successione

3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, ...

è formata dalle cifre della scrittura decimale di π ;

b. la successione

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

è la successione dei numeri primi

Non esistono espressioni di immediata scrittura per definire queste successioni: per una funzione che le generi può essere necessaria la programmazione.

3. Esplorazione del carattere di una successione in ambiente `Y=Editor`

Una successione può essere definita come funzione utilizzando l'editor di funzioni in modalità `sequence ( 3 +graph 4)` e i suoi elementi, calcolati in modalità approssimata, possono essere tabulati e rappresentati in un grafico.

Questo permette di introdurre il concetto di carattere di una successione in modo intuitivo e di fare sulle successioni osservazioni e congetture.

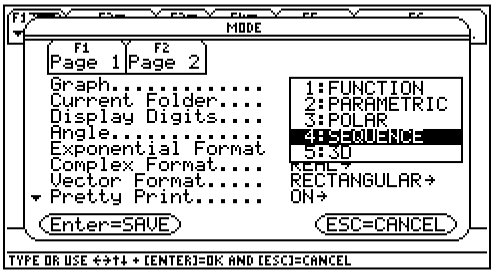
Attività

Facendo uso dell'ambiente # si definiscono le seguenti successioni:

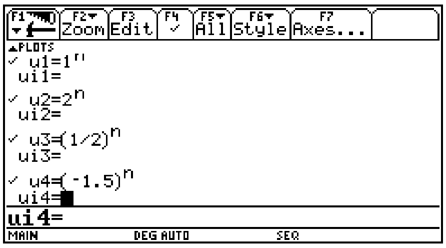
1^n $\quad 2^n$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad (-1.5)^n$ $\quad \frac{n+1}{n}$

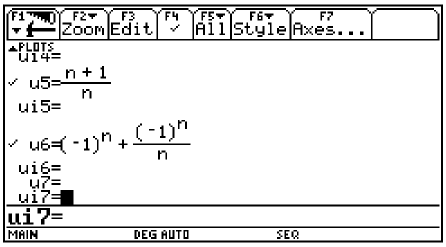
$(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

Assicuriamoci che l'ambiente # sia in modalità `sequence`



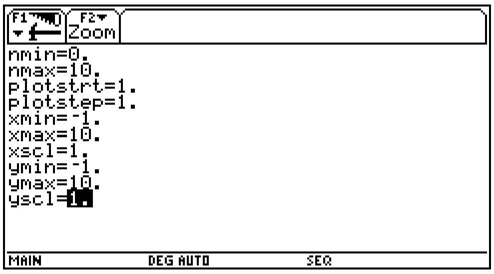
Definiamo:



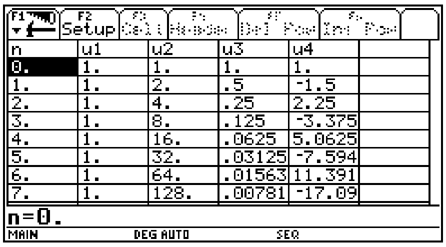


Quando l'ambiente # si trova in modalità `sequence`, abbiamo a disposizione due comandi per la definizione di ogni successione; il primo (`u1, u2...`) viene utilizzato per la definizione del termine generale, in forma di funzione dell'indice *n* o in forma induttiva; il secondo (`ui1, ui2...`) serve per il termine iniziale, nel caso in cui la successione sia definita per induzione. In questa attività questo comando non viene utilizzato.

Attraverso il tasto † selezioniamo di volta in volta le successioni che vogliamo tabulare e rappresentare graficamente. Definiamo anche i valori di *n* per i quali vogliamo tracciare il grafico, attraverso O $

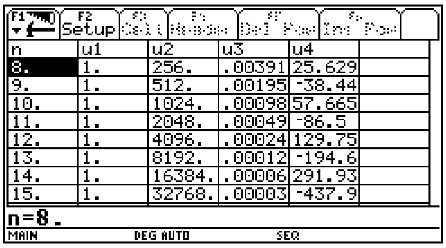


Nell'ambiente ' vengono tabulati i valori: qui abbiamo tabulato assieme le prime quattro funzioni: possiamo visualizzarne altri elementi (2 +@)



n	u1	u2	u3	u4
0.	1.	1.	1.	1.
1.	1.	2.	.5	-1.5
2.	1.	4.	.25	2.25
3.	1.	8.	.125	-3.375
4.	1.	16.	.0625	5.0625
5.	1.	32.	.03125	-7.594
6.	1.	64.	.01563	11.391
7.	1.	128.	.00781	-17.09

n=0.

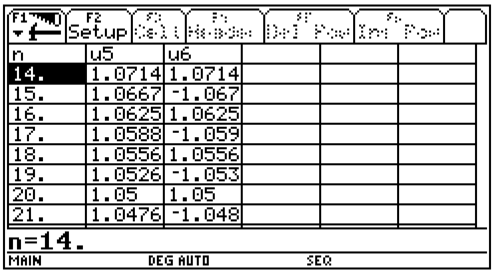


n	u1	u2	u3	u4
8.	1.	256.	.00391	25.629
9.	1.	512.	.00195	-38.44
10.	1.	1024.	.00098	57.665
11.	1.	2048.	.00049	-86.5
12.	1.	4096.	.00024	129.75
13.	1.	8192.	.00012	-194.6
14.	1.	16384.	.00006	291.93
15.	1.	32768.	.00003	-437.9

n=8.

Esse sono note: si tratta di progressioni geometriche. I grafici di `u2` e di `u4` presentano qualche problema: a causa della rapida crescita esponenziale, difficilmente riusciamo a visualizzare un numero significativo di punti. L'esame della tabella evidenzia meglio il loro andamento. Gli alunni fanno le loro osservazioni: la prima successione è costante; la seconda è crescente; anzi, più si procede, più rapida è la crescita. E' una progressione geometrica di ragione 2 e per essa abbiamo già detto, esprimendoci in modo intuitivo, che "tende all'infinito". La quarta oscilla tra valori positivi e negativi; comunque il valore assoluto sembra crescere oltre ogni limite. La terza successione è decrescente; il valore di u3 "tende a zero". Ma che cosa significa "tende a"?

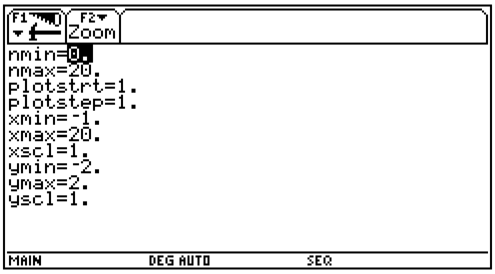
Le ultime due successioni definite ci aiutano a chiarire meglio il concetto: ne tabuliamo i valori (qui sono rappresentati i valori dal quattordicesimo al ventunesimo)



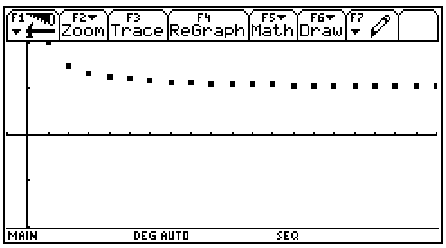
n	u5	u6
14.	1.0714	1.0714
15.	1.0667	-1.067
16.	1.0625	1.0625
17.	1.0588	-1.059
18.	1.0556	1.0556
19.	1.0526	-1.053
20.	1.05	1.05
21.	1.0476	-1.048

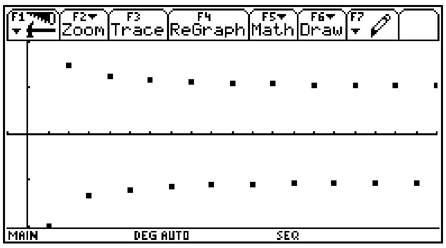
n=14.

Definiamo i parametri della finestra grafica, in modo da poterle visualizzare in modo efficace



e tracciamo il grafico di $\dfrac{n+1}{n}$ e di $(-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$





In questo caso le due successioni si avvicinano a 1 "sempre di più"; tuttavia la prima delle due successioni si avvicina a 1 "stabilmente": vale a dire che nella successione la distanza da 1 non solo può essere resa piccola quanto si vuole, ma rimane tale *da un certo indice in poi*. Questo fatto chiaramente nella tabella si intuisce soltanto, perché i valori vengono calcolati in modo approssimato, ma può essere chiarito meglio con il calcolo.
Nella seconda successione invece al crescere dell'indice troviamo valori che si avvicinano ad uno quanto si vuole, ma questa proprietà non è stabile: per tutti gli elementi di indice pari la distanza da 1 è maggiore di 2, quindi all'aumentare dell'indice troveremo valori prossimi a 1, ma anche valori che ne rimangono lontani.

Si può quindi dapprima in modo informale, poi in modo rigoroso, pervenire alla definizione di limite di una successione. Con la classe poi questa definizione viene utilizzata e verificata solo con progressioni aritmetiche e geometriche di primo elemento e ragione positiva. Infatti è intuitivo, ma si dimostra anche facilmente, che una progressione geometrica di ragione $0<a<1$ è decrescente, mentre se $a>1$ è crescente.
A questo punto vengono proposti esercizi del tipo:

a. Data la progressione geometrica di primo elemento 3 e di ragione 1/2, per quali valori di n si avrà $a_n < 10^{-9}$?

b. E' data la curva di Von Koch (che gli alunni conoscono) costruita a partire da un triangolo equilatero avente il lato di 1 m. Per quali valori di n il perimetro della curva supererà il chilometro?

Si fa osservare che la soluzione dei due esercizi è del tipo $n>k$, pertanto gli elementi della successione soddisfano la disuguaglianza richiesta ***da un certo valore di n in poi***.

4. Dalle successioni alle serie.

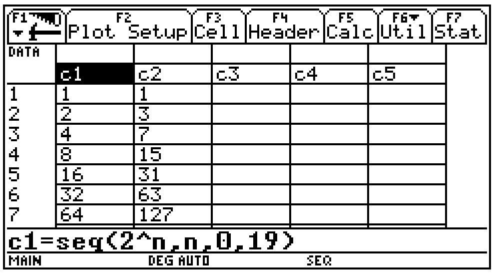
Se a_0, a_1, a_2...è una successione, a partire da essa è possibile definirne un'altra in questo modo:

$s_0=a_0$; $s_1=a_0+a_1$; $s_2=a_0+a_1+a_2$

Possiamo visualizzarne gli elementi in vari modi; ad esempio utilizzando l'ambiente `Data/Matrix Editor` (al quale si accede con O +6).

Selezioniamo l'opzione di ricalcolo automatico (*ƒ* `+9+Autocalculate ON`), riempiamo la colonna `c1` con i primi valori di una successione: poiché le colonne in questo ambiente contengono liste, nella cella di intestazione possiamo usare un comando di tipo `seq(definizione, indice, inizio, fine)`.

A questo punto ci poniamo con il cursore nella cella `c2` e digitiamo `cumsum(c1)`, ottenendo così le somme parziali dei primi n elementi di `c1`
.



F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat

DATA	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	1			
2	2	3			
3	4	7			
4	8	15			
5	16	31			
6	32	63			
7	64	127			

c1=seq(2^n,n,0,19)

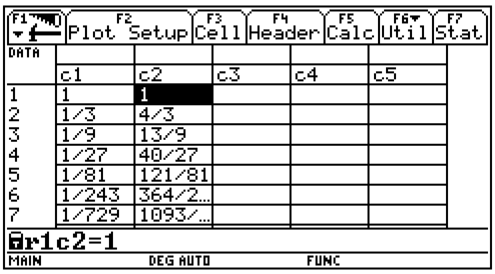
MAIN DEG AUTO SEQ

Le osservazioni e le congetture che è spontaneo fare sono numerose.

La classe conosce già a questo punto dell'anno la formula che permette di calcolare la somma dei primi n numeri di una progressione geometrica, in questo caso $\sum_{1=0}^{n-1} 2^i = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$. Questo spiega il fatto che ogni elemento della colonna `c2` è il precedente rispetto al numero che in `c1` occupa il posto successivo. Se partiamo dalla progressione geometrica di ragione 3, questa stessa proprietà si può ritrovare moltiplicando per 2 (cioè per n–1) la colonna `c2`.

La tabella ci mostra anche che la successione delle somme parziali è divergente, perché ogni suo elemento è maggiore o uguale al corrispondente elemento della successione di partenza, che abbiamo visto essere divergente.

Se invece partiamo da una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, sappiamo già che la successione degli elementi a_n tende a 0. Che cosa possiamo dire delle s_n?



F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat

DATA	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	1			
2	1/3	4/3			
3	1/9	13/9			
4	1/27	40/27			
5	1/81	121/81			
6	1/243	364/2…			
7	1/729	1093/…			

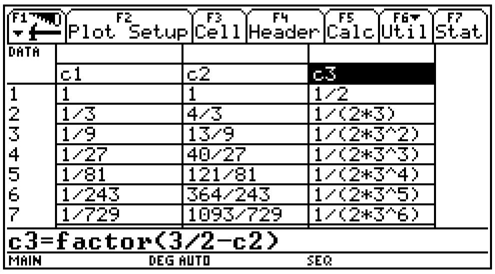
r1c2=1

MAIN DEG AUTO FUNC

Anche in questo caso la successione è crescente, ma l'esame delle approssimazioni parziali mostra che le somme parziali sembrano tendere a 1.5. E' un effetto dovuto all'approssimazione?

Torniamo alla rappresentazione in forma esatta e calcoliamo la differenza tra ogni somma parziale e $\frac{3}{2}$, anzi chiediamo che la frazione che risulta abbia numeratore e denominatore fattorizzati).

Allarghiamo le colonne (`ƒ +9+Cell Width 10`) e leggiamo



DATA	c1	c2	c3
1	1	1	1/2
2	1/3	4/3	1/(2*3)
3	1/9	13/9	1/(2*3^2)
4	1/27	40/27	1/(2*3^3)
5	1/81	121/81	1/(2*3^4)
6	1/243	364/243	1/(2*3^5)
7	1/729	1093/729	1/(2*3^6)

Riconosciamo nella differenze la forma $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Poiché tale differenza, al crescere dell'indice, può essere resa "piccola quanto vogliamo", la congettura che questa successione abbia un limite si rafforza; esiste una regola generale? Quale forma ha? Come posso dimostrarla? Naturalmente ricorriamo alla formula già dimostrata per la somma parziale e troviamo

$s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Intuitivamente si osserva che se q<1, q^{n+1} diventa trascurabile quanto più n cresce. Pertanto il limite sarà $a_0 \frac{1}{1-q}$. A questo punto è anche possibile dare una dimostrazione formale.

5. Ancora sull'introduzione al concetto di limite

Anche l'ambiente di programmazione delle TI-92 può essere estremamente utile per indagare sull'andamento di una successione e sul concetto di limite. Il lavoro che segue, utilizzato alla fine del percorso realizzato nella quarta sulle successioni, è finalizzato a:

- riprendere il concetto di andamento di una successione in forma "dinamica"

* mostrare il legame "operativo" tra il concetto di algoritmo e quello di successione
* riprendere la definizione di limite

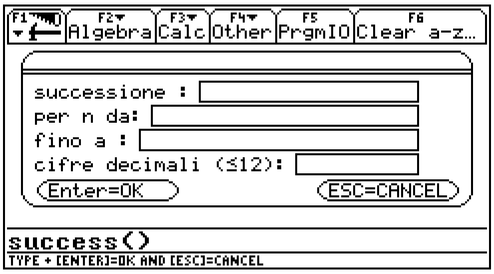
L'algoritmo è molto semplice e si limita a usare le potenzialità di calcolo della TI-92 per calcolare il valore dei primi termini di una successione, visualizzandoli in forma decimale.

Il programma è del tutto analogo a classici esercizi di semplice programmazione in un linguaggio strutturato (ad esempio il Turbo Pascal). E' stato costruito da me, ma può essere fatto costruire agli alunni e utilizza le funzioni di calcolo simbolico delle TI-92.

Il listato è il seguente:

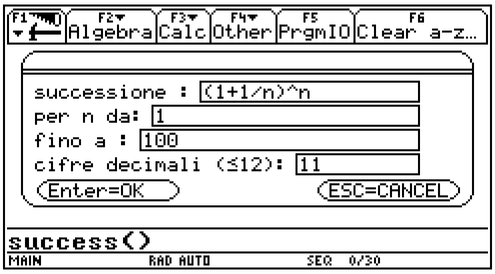
```
success()
Prgm
Local f,inizio,fine,numcifre,i,j
ClrIO
Dialog
Request "successione ",f
Request "per n da",inizio
Request "fino a ",fine
Request "cifre decimali (œ12)",numcifre
EndDlog
setMode("Display Digits","FIX "& numcifre)
expr(f)»f
expr(inizio)»inizio
expr(fine)»fine
ClrIO
For i,inizio,fine
Output 1,1,approx(f)|n=i
Output 30,1,"n="&string(i)
¨non fa nulla, rallenta solo la scrittura
For j,1,10
EndFor
EndFor
setMode("Display Digits","Float 6")
EndPrgm
```

Digitando `success()` appare la seguente finestra di dialogo

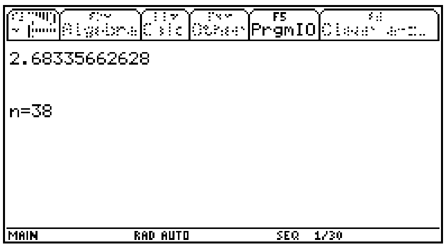


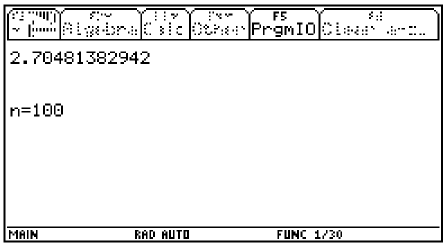
E' quindi possibile definire una successione, di cui saranno visualizzati i termini corrispondenti ai valori dell'indice compresi tra un valore iniziale e un valore finale.

Esempio:



A questo punto verranno visualizzate le successive approssimazioni, scritte una sopra all'altra nello stesso punto dello schermo. L'output del programma sarà di questo tipo





Se la successione converge o comunque varia abbastanza lentamente, si produce un effetto di "animazione". Si vedono cioè le prime cifre del risultato che si stabilizzano, mentre le altre variano, più velocemente quelle più a destra.

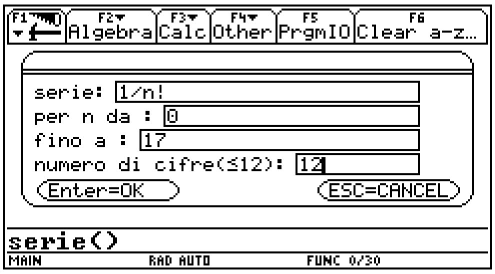
Questo lavoro può essere usato per confrontare successioni diverse che tendono allo stesso numero (più o meno velocemente).

Modificando leggermente il programma si possono calcolare i primi elementi di una serie o di un prodotto infinito.

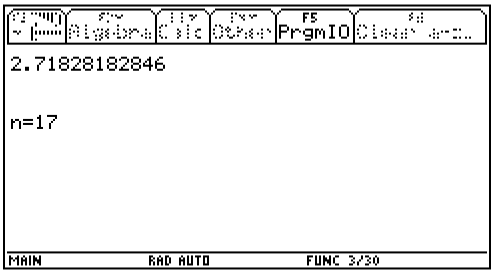
E' interessante, ad esempio, confrontare il risultato del seguente programma serie, nel caso sotto illustrato, con l'esempio precedente

```
serie()
Prgm
Local f,iniz,fine,numcifre,somma,i,j
ClrIO
Dialog
Request "serie",f
Request "per n da ",iniz
Request "fino a ",fine
Request "numero di cifre(œ12)",numcifre
EndDlog
expr(f)»f
expr(iniz)»iniz
expr(fine)»fine
setMode("Display Digits","FIX "&numcifre)
0»somma
ClrIO
For i,iniz,fine
somma+f|n=i»somma
Output 1,1, approx(soma)
Output 30,1,"n="&string(i)
For j,1,10
EndFor
EndFor
setMode("Display Digits","Float 6")
EndPrgm
```

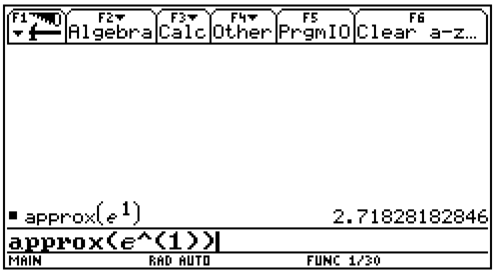
Vediamo qui il programma in esecuzione



La calcolatrice fornisce il valore



Che è lo stesso che si ottiene da `approx(e^(1)))`.



6. Prova somministrata alla fine dell'attività

1. Calcola la somma dei multipli di 3 compresi (strettamente) tra 100 e 1000

2.Una progressione geometrica ha come primo termine $n_0 = 3$ e come ragione 2. La somma dei primi n termini è 6.291.453. Quanto vale n?

3. (problema proposto da Michele Impedovo)
Una cellula si duplica ogni secondo.
a) Se si parte con 20 cellule, quante cellule si avranno dopo un giorno?
b) Quante cifre ha questo numero?
c) Se in un foglio formato A4 ci stanno 30 righe, e su ciascuna riga 80 caratteri, quanti fogli sono necessari per scriverlo?

4. La famiglia De Tappetti, composta dal padre, dalla madre e dal figlio diciottenne Gelsomino, compra in un negozio che vende pizze al taglio una intera teglia di pizza capricciosa. Gelsomino prende metà della pizza, il padre metà del rimanente e la madre metà di quello che resta. Quando ha finito di mangiare la sua parte Gelsomino, che ha ancora fame, ne prende ancora e così via. Se la pizza inizialmente pesava 1050 grammi, quanto pesa la parte mangiata da ciascuno dei tre componenti ? Dopo quante volte la porzione mangiata da Gelsomino pesa meno di un grammo?

5. Sia (u_n)la successione così definita:

$$u_1 = \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3}$$

a) Calcolare u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Mostrare che la successione di termine generale $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ è una successione geometrica

c) Ricavare l'espressione di v_n in funzione di n, dire se la somma dei v_n tende ad un limite finito o infinito e nel caso che il limite sia finito calcolarlo.

d) Dire per quale valore di n la somma dei primi n termini differisce dalla somma di tutti i termini per meno di 10^{-9}

e) Ricavare poi u_n in funzione di n

Tempo 60 minuti

Osservazioni:

Come si può vedere, si tratta sostanzialmente di una prova di tipo classico, su successioni che di fatto sono progressioni aritmetiche e geometriche. Ritengo particolarmente significativi l'ultimo quesito del problema 4 e il punto d dell'esercizio 5 in quanto fanno riferimento all'attività svolta. La calcolatrice è stata usata per lo più per fare calcoli ed esplorare le successioni. In alcuni casi è stata anche fonte di un errore ripetuto: alcuni alunni (i più deboli) hanno risposto all'esercizio 5b con una verifica, anziché con una dimostrazione. Conoscendoli, devo però dire che tutto sommato si tratta forse di un passo avanti, rispetto all'atteggiamento passivo mostrato in precedenza.

25. ASINTOTI

Ferruccio Rohr
Liceo Scientifico "Nomentano" Roma

Classe: terza Liceo Scientifico PNI
Obiettivi: fornire un approccio diverso allo studio di una funzione
Prerequisiti: coniche, funzioni razionali
Tempi: 14 ore

Premessa
Questa esperienza, svolta in una classe di 16 alunni, in generale attivi e interessati alle novità, descrive il primo impatto della classe (e dell'insegnante) con una calcolatrice grafica (TI-92 II). Ogni studente disponeva di una propria macchina, ma l'attività è stata sempre svolta in coppia tra compagni di banco. Il lavoro è stato svolto alla fine dell'anno scolastico 98-99.

1. Esempi critici tratti dalla libera attività

Come detto in premessa, gli allievi ancora non avevano mai utilizzato la TI-92, ma avevano una certa familiarità con le rette e le coniche e con la loro rappresentazione grafica.

Nel corso di una breve presentazione della macchina sono stati sommariamente illustrati i diversi ambienti con i rispettivi comandi essenziali e si è lasciato un po' di tempo ai ragazzi, circa un paio d'ore non consecutive, per esplorare in piena libertà la macchina. Una delle cose che ha subito creato un certo interesse è stata la possibilità di tracciare grafici a partire da equazioni.

Incoraggiati in tal senso, ma sempre inizialmente molto liberi di operare, gli studenti si sono appropriati dei principali comandi degli ambienti `Home`, `Y=Editor`, `GRAPH` e `TABLE`, tracciando a loro piacimento grafici di rette, parabole, iperboli equilatere in forma esplicita, ritrovando risultati già noti, ma anche nuovi aspetti di contenuti già acquisiti. L'uso dell'ambiente `TABLE` ha permesso di esplorare, sia localmente, sia globalmente, le funzioni delle quali si era tracciato il grafico. In questa fase non strutturata, di tanto in tanto venivano suggerite indicazioni sull'uso dello zoom (tasto `F2`) per una migliore visualizzazione, sulla procedura per "settare" l'ambiente `TABLE` per tabulare i valori delle funzioni, sulle modalità per passare dall'ambiente `HOME` all'ambiente `Y=Editor` e viceversa .

I comandi e le istruzioni più specifiche e meno evidenti da cogliere sono stati introdotti a mano a mano che se ne presentava la necessità, anche se alcuni alunni a volte riuscivano ad acquisirli da soli. Sono inoltre state messe a disposizione alcune copie del manuale di istruzioni. I ragazzi pertanto, quando si trovavano nella necessità di operare senza conoscere i comandi o le procedure necessarie, ne discutevano tra loro, oppure cercavano sul manuale (più raramente), solo in ultima analisi si rivolgevano all'insegnante.

Al termine di questa attività preliminare sono state raccolte alcune osservazioni, tra le quali:

- *" . . .a volte però il grafico non viene . . . "* (il diagramma è tutto esterno alla finestra grafica)
- *" . . . ho tentato di tracciare una circonferenza, ma non ci sono riuscito . . "*
- *". . . la macchina traccia solo l'asintoto verticale dell'iperbole di equazione* $y = \frac{2x+1}{x-2}$ . . . ".

Quest'ultima osservazione ha alimentato una certa di discussione che, opportunamente guidata, ha condotto a stabilire che in realtà quello che ci appare come asintoto verticale è semplicemente un tratto della curva, tracciato dalla macchina in condizioni per lei un po' critiche. Di fatto la macchina non determina alcun asintoto; se vogliamo stabilire comunque, perché ci sembra ragionevole, che la retta $x = 2$ è asintoto verticale della funzione esaminata, dobbiamo provarlo in altro modo.

Questo esempio è stato lo spunto per avviare un'attività nata sul momento e che si è strutturata in itinere. Preso dunque avvio da tale situazione si è chiesto agli studenti come procedere per determinare sia l'asintoto verticale che quello orizzontale di un iperbole equilatera, utilizzando la macchina.

2. L'iperbole equilatera.

Si è proposto di riesaminare la funzione

$$y1 = \frac{2x+1}{x-2},$$

fornendo però in questa fase precise istruzioni operative.

Premendo nell'ordine i tasti `F1` e `8` si ripuliscono gli ambienti `HOME` e `Y=Editor`. Nella pagina di `Y=Editor` tutti scrivono

$$y1 = \frac{2x+1}{x-2}$$

e ne tracciano il grafico. Il comando `F3 Trace` vincola il cursore alla curva, mentre in fondo alla finestra grafica vengono evidenziate, per ogni posizione del cursore le coordinate (x_c, y_c).

Le figure 1 e 2, nell'ordine, evidenziano un salto della funzione (fuori schermo) dal valore $y_c = -72.375$ al valore $y_c = 51.5833$, quando l'ascissa passa dal valore $x_c = 1.93277$ al valore $x_c = 2.10084$, procedendo con un "passo" $\Delta x = 0.16807$.

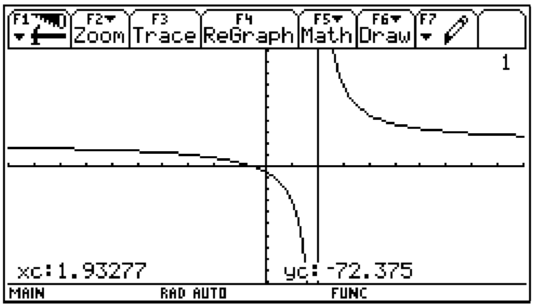


fig. 1

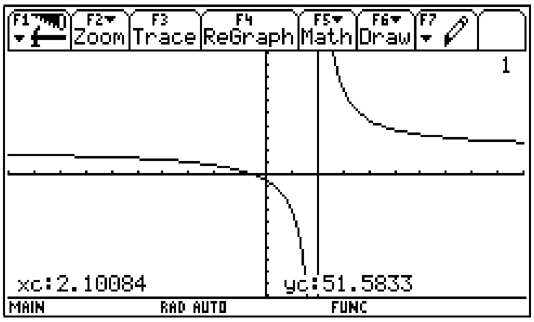


fig. 2

Per meglio esaminare il comportamento della funzione si può procedere alla sua tabulazione in un intorno di 2, più piccolo del precedente. La $y1 = \frac{2x+1}{x-2}$ viene così tabulata a partire 1.999 ("`tblStart`"), con un passo di 0.0003 (`Δtbl`).

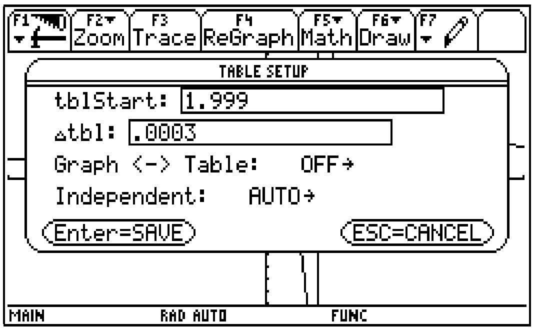


fig. 3

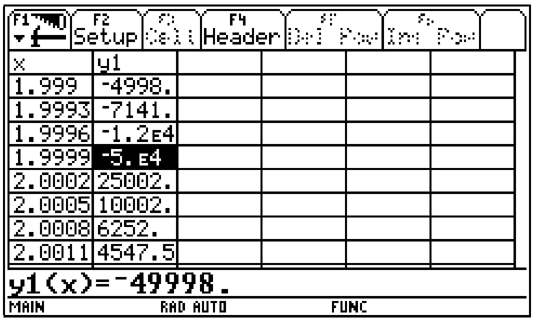


fig. 4

Le figure 3 e 4 rappresentano, rispettivamente, la schermata relativa all'impostazione della tabella (TABLE SETUP) e la tabella dei valori assunti. Il "salto" è ora molto più grande; da -49998 a 25002. Prendendo valori iniziali (tblStart) sempre più vicini a 2 e un passo (Δtbl) sempre più piccolo, il "salto" della funzione assume valori rapidamente crescenti, tendenti all'infinito.

Si passa quindi ad affrontare, nel caso dell'iperbole equilatera in esame, la ricerca dell'asintoto orizzontale.

Premendo i tasti ¥ HOME, si passa all'ambiente HOME, con i tasti F2 7 si attiva PropFrac, quindi si digita $y1(x)$, si chiude parentesi e si schiaccia nuovamente ENTER.

La schermata che appare è riportata nella figura 5.

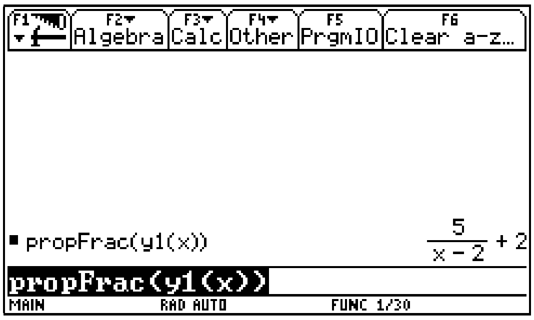


fig. 5

Il comando è stato `PropFrac` è stato introdotto come una "scatola nera". È nata pertanto l'esigenza di capire come opera su una funzione razionale. Prima di avventurarsi su una risposta è stato proposto agli studenti di provare come agisce su una frazione numerica. Fatta qualche prova su frazioni numeriche è venuto abbastanza naturale, ragionando per analogia, fare l'ipotesi di una riscrittura che esprime la frazione come somma di una parte intera, e di una frazione cosiddetta propria. La funzione è ora vista come somma di due termini (funzioni):

$$y1(x) = y2(x) + y3(x)\text{, dove } y2(x) = \frac{5}{x-2}.$$

La funzione $y2(x)$ viene importata in `Y=Editor` e successivamente tabulata. Dalla tabella ottenuta si percepisce chiaramente che converge a zero.

Essendo $y2(x) = y1(x) - y3(x)$, si può concludere che, "all'infinito",

$$y1 = \frac{2x+1}{x-2} \qquad \text{e} \qquad y3(x) = 2$$

tenderanno ad avere lo stesso comportamento, ciò vuol dire che l'equazione dell'asintoto orizzontale è $y3(x) = 2$.

Il passaggio tra i diversi ambienti `HOME`, `Y=Editor`, `GRAPH` e `TABLE` è un'attività che stimola la lettura in termini algebrici di proprietà geometriche e viceversa.

Sono stati esaminati esempi simili, anche suggeriti dai ragazzi, e ciò ha portato a individuare nella funzione

$$y(x) = \frac{ax+b}{x+c}$$

un modello matematico di funzione dotata di asintoto orizzontale e verticale. Infatti, l'espressione:

$$\frac{ax+b}{x+c},$$

immessa come argomento di `PropFrac` viene riscritta nella forma:

$$\frac{-(ac-b)}{x+c} + a$$

Quest'ultima espressione è data dalla somma di un termine costante e di uno "infinitesimo". Si è vista così in generale una proprietà relativa ad un modello matematico che, letta in termini geometrici, ci dice che l'iperbole di equazione

$$y = \frac{ax+b}{x+c}$$

ha per asintoti le rette $y = a$ e $x = -c$.

Si riottiene così, con un approccio più costruttivo, una proprietà incontrata nello studio delle coniche.

L'uso della macchina nello studio dell'iperbole non ha introdotto di fatto nuove conoscenze nella classe , ha però avuto i seguenti effetti positivi:

- ha offerto un approccio diverso nell'affrontare lo studio degli asintoti e più in generale delle funzioni;
- ha portato ad inquadrare e spiegare nel linguaggio dell'algebra proprietà geometriche;
- ha posto, sia pure in modo non rigoroso e non del tutto esplicito, il tema dell'infinito;
- ha stimolato i ragazzi verso generalizzazioni e formulazione di nuovi problemi.

3. Generalizzazione del problema

La familiarità acquisita dagli studenti con la calcolatrice grafica aveva fatto sì che ci si potesse, tutto sommato, "fidare" della macchina e che si potessero prendere per buoni i grafici che avrebbe tracciato immettendo funzioni arbitrarie. È stato allora proposto di digitare in `Y=Editor` la funzione

$$y_1(x) = \frac{x^2+1}{x+1},$$

analizzare il grafico che si ottiene e formulare osservazioni al riguardo.

La prima osservazione è stata quella relativa alla presenza dell'asintoto $x = -1$. Anche in questo caso , è stato ribadito, non viene tracciato alcun asintoto verticale, contrariamente a quanto appare sullo schermo. L'andamento del grafico (figura 6), in un intorno di -1

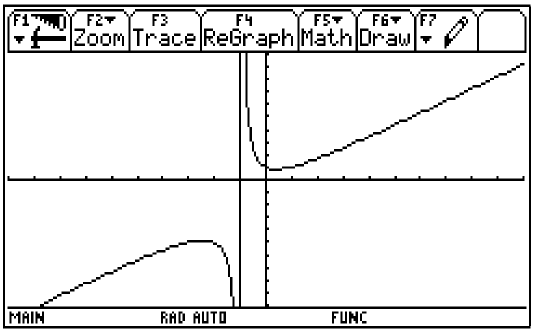


fig. 6

mostra una certa affinità con quello di un'iperbole equilatera, ad esempio

$$y_2(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

il cui grafico appare nella figura che segue.

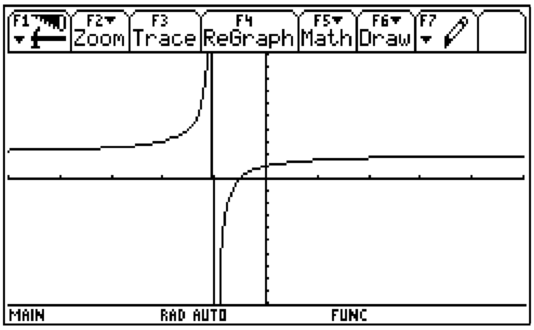


fig. 7

L'analogia algebrica (uguaglianza dei denominatori) si lega all'analogia geometrica (asintoti verticali). Si è pensato allora di trasferire quanto fatto sull'iperbole. Il comando `propFrac` permette di scomporre la funzione nella somma di un termine "infinitesimo", $\frac{2}{x+1}$, e di un termine lineare (non più costante) $x-1$. Viene individuata una retta $y=x-1$, rispetto alla quale la funzione ha comportamento asintotico. Come nel caso precedente si può dare generalità a questo risultato.

Il comando `PropFrac` applicato alla funzione

$$y(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d},$$

ci fa capire come la curva tenda asintoticamente alla retta $y=ax-ad+b$. (Non si è però insistito sugli aspetti formali di questo risultato).

Infine è stata proposta agli allievi una serie di funzioni:

$$y=\frac{x^2+x}{2x};\quad y=\frac{x^2-2}{x^2+x+3};\quad y=\frac{x+2}{x^2-1};\quad y=x^3+2x-1;\quad y=\frac{x^3+x^2+3}{x+1};$$

$$y=\frac{x^3}{x^2+1};\quad y=\frac{x^3}{x^2-1};\quad y=x^4-x+2;\ \ldots.$$

ed è stato loro chiesto di esaminarle, utilizzando il comando `PropFrac`, di tracciarne i grafici e tabularle, di esaminare le parti in cui eventualmente venivano scomposte.

Si è passati poi ad interpretare i risultati della macchina e ciò ha portato gradualmente a esplicitare il legame tra le proprietà dei grafici e il grado dei polinomi numeratore e denominatore, tra le proprietà dei grafici e gli zeri del denominatore. Nel corso della discussione qualcuno ha intravisto la *parabola asintotica*, ma non è stato spinto troppo oltre il discorso.

4. Un piccolo colpo di scena

La figura che segue riporta il grafico della funzione

$$y=\frac{2x+1}{x-2},$$

ampiamente studiata, tabulata e graficata. Questa volta però non appare il cosiddetto "asintoto incriminato".

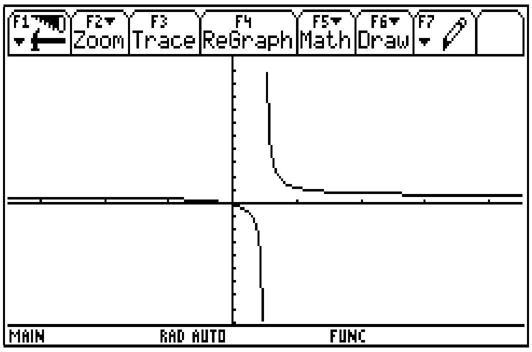


fig. 8

Ho scoperto come eliminare dal grafico questo elemento equivoco dopo che l'esperienza descritta era ampiamente conclusa.
Il " finto asintoto" viene eliminato dando opportuni parametri nell'impostazione di WINDOW, nel nostro esempio il problema è risolto come descritto nella schermata seguente.

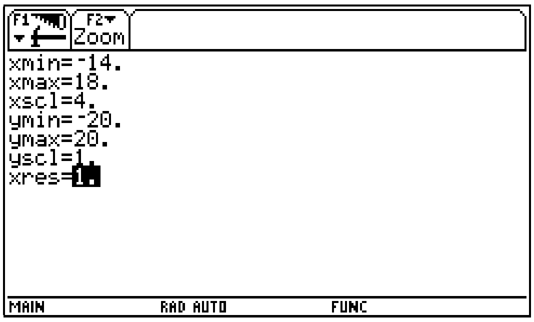


fig. 9

La macchina traccia i grafici congiungendo punti a due a due con un certo passo. Se i due estremi di un segmento di curva sono uno "immediatamente a sinistra" e l'altro "immediatamente a destra" del valore 2, allora la macchina traccia un segmento quasi verticale che può essere scambiato per l'asintoto. E' necessario

allora fare in modo che uno dei due estremi di un segmento di curva abbia proprio ascissa 2 (nel nostro esempio); per questo occorrono un po' di calcoli che,tenendo presente il numero dei pixel orizzontali dello schermo, ci diano i parametri `xmin` e `xmax` che permettano di "intercettare" proprio il punto che ha ascissa 2.
Ringrazio il prof. Sebastiano Cappuccio che mi ha indicato come superare l'inconveniente, tuttavia ritengo una fortuna che la macchina, con probabilità vicina a 1, tracci questo elemento che somiglia all'asintoto verticale. Perché questo apparente inconveniente costringe ad una riflessione approfondita, al termine della quale vengono chiariti ruoli, potenzialità e compiti della macchina e del suo operatore.
Prima di concludere può essere utile utilizzare un'altra strategia per aggirare il problema. Dalla pagina Y=Editor, aprendo il menù `F6Style`, con il comando `Dot`, il grafico verrà tracciato per punti (figura 11)

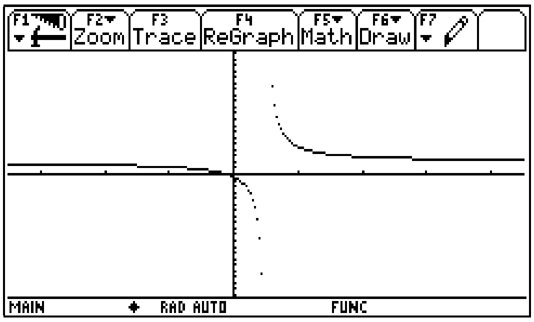


fig. 11

Questo modo di operare elimina l'inconveniente del finto asintoto e tutte le questioni problematiche che ne derivano. È però ugualmente utile per una riflessione, perché visualizza le proprietà della funzione nell'intorno di un punto di discontinuità (punto di infinito). Si osserva infatti che i punti che costituiscono il grafico sono molto fitti quando hanno ascissa "lontana" da 2, tanto che il tracciato sembra continuo. Avvicinandosi al valore 2 (la macchina procede sempre con lo stesso passo orizzontale) i punti si distanziano sempre di più, collassando a sinistra di 2 e impennandosi a destra di 2.

Conclusioni
Nel corso di questa esperienza i ragazzi hanno consolidato alcune nozioni di algebra e geometria analitica, hanno rivisitato in modo diverso le loro

conoscenze sui polinomi e sulle funzioni razionali, hanno avuto occasione di fare generalizzazioni. Ma tra le tante sollecitazioni una, a mio giudizio, sembra importante e riguarda un approccio alla nozione di limite, intorno alla quale ruotano tutti le considerazioni relative a termini “sempre più piccoli”e di progressivo indefinito avvicinamento di una curva e di una retta.
Molte cose naturalmente dovranno essere approfondite e trattate con maggiore ampiezza e rigore. Altre bisognerà spingerle fino alla contraddizione per evitare che la fiducia nella macchina risulti cieca e passiva.
Una estensione di questo lavoro potrà essere rivolta ai comportamenti asintotici della funzione esponenziale e logaritmica, sperando che la favorevole condizione di lavoro che crea la macchina possa facilitare lo studio di tali funzioni trascendenti, a volte poco conosciute dagli studenti all'uscita dalla scuola.

26. RELAZIONE TRA FORMULA E GRAFICO: FUNZIONE E LA SUA DERIVATA

Nicoletta Nolli
Liceo Scientifico "G.Aselli" Cremona

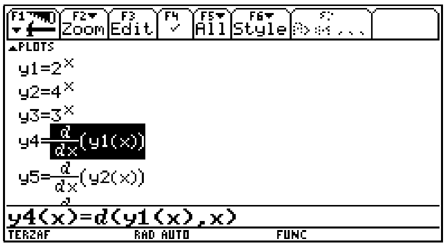
Classe: quarta Liceo scientifico P.N.I
Tempi: 12 ore + 2 ore di verifica
Strumenti: 11 calcolatrici per i ragazzi (1 calcolatrice ogni due alunni),
1 calcolatrice per l'insegnante, 1 viewscreen, 1 lavagna luminosa

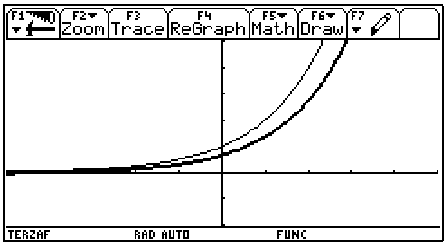
L'attività ha lo scopo di guidare gli alunni alla "scoperta" del concetto di derivata. L'idea è di sfruttare la possibilità che ha la TI-92, attraverso un semplice comando, di calcolare l'espressione della funzione derivata e di visualizzarne il grafico. Questi risultati, prodotti dalla calcolatrice come 'scatola nera', sono il punto di partenza per osservazioni e riflessioni che portano ad un approccio di tipo intuitivo sulla base del quale arrivare una formalizzazione rigorosa.

Scheda attività n.1

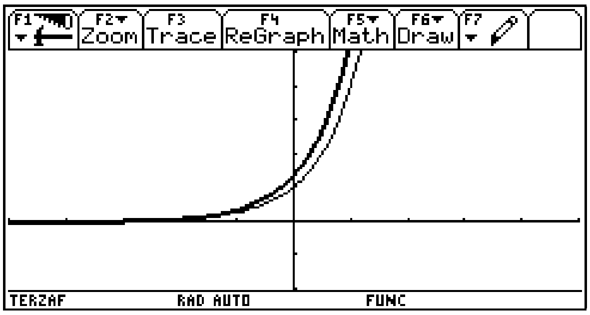
Tempi: 3 ore di lezione guidata
Argomento: La derivata come tasso di variazione istantaneo
Obiettivi:
- comprendere in modo intuitivo il concetto di derivata
- individuare alcune proprietà della funzione $y = e^x$ e delle funzioni esponenziali
- individuare l'espressione della derivata di alcune funzioni polinomiali

Metodi: lezione dialogata
Descrizione dell'attività:
In ambiente `Y=Editor` vengono impostate le funzioni $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 3^x$ e vengono mostrati i rispettivi grafici. Dopo un'introduzione al concetto di tasso di variazione istantaneo di una funzione, questo viene "calcolato", in ambiente `Y=Editor`, utilizzando il tasto *d* della calcolatrice e quindi viene visualizzato il suo grafico (nelle immagini il grafico della funzione derivata è in tratto più scuro).

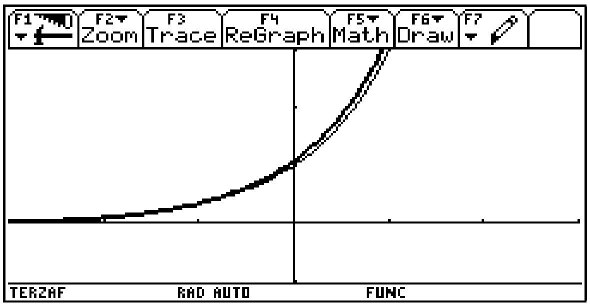




grafici di $y = 2^x$ e della sua derivata



grafici di $y = 4^x$ e della sua derivata

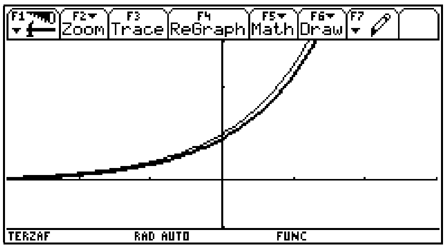


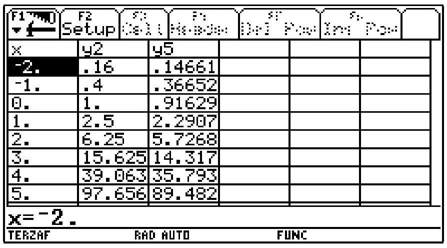
grafici di $y = 3^x$ e della sua derivata

Vengono chieste ai ragazzi osservazioni sul grafico delle funzioni e dei rispettivi tassi di variazione. I ragazzi si accorgono facilmente che i grafici dei tassi di variazione sembrano essere ancora funzioni esponenziali, in alcuni casi “stanno sotto” al grafico della funzione, in altri si trovano “sopra” ed in particolare quello di $y = 3^x$ ha un grafico molto vicino a quello della funzione.

Si domanda quindi se può esserci una funzione esponenziale che riproduce se stessa nelle sue variazioni. I ragazzi suggeriscono alcune prove e visto che i grafici diventano sempre meno chiari, in quanto le funzioni tendono a sovrapporsi, si utilizza anche l'ambiente `Table` per confrontare i valori assunti dalle funzioni e dai rispettivi tassi di variazione.

Ecco alcuni esempi:

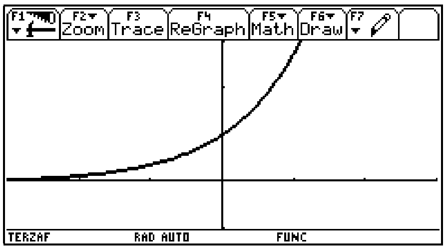


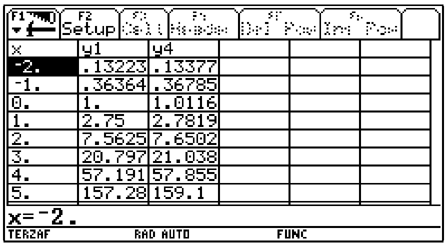


x	y2	y5
-2.	.16	.14661
-1.	.4	.36652
0.	1.	.91629
1.	2.5	2.2907
2.	6.25	5.7268
3.	15.625	14.317
4.	39.063	35.793
5.	97.656	89.482

x=-2.

grafici della funzione $y = (2.5)^x$ e del suo tasso di variazione e rispettive tabulazioni.





x	y1	y4
-2.	.13223	.13377
-1.	.36364	.36785
0.	1.	1.0116
1.	2.75	2.7819
2.	7.5625	7.6502
3.	20.797	21.038
4.	57.191	57.855
5.	157.28	159.1

x=-2.

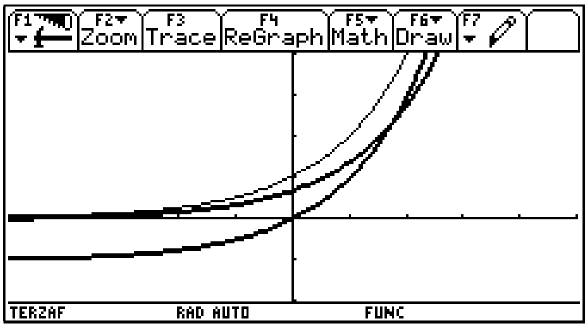
grafici della funzione $y = (2.75)^x$ e del suo tasso di variazione e rispettive tabulazioni.

Dopo varie ipotesi, tutte testate con i grafici e le tabulazioni, i ragazzi intuiscono che la funzione cercata è $y = e^x$.

Si domanda quindi se esiste una trasformazione che lega il grafico della funzione $y = a^x$, con a>0, al grafico del suo tasso di variazione .

Ecco alcune ipotesi dei ragazzi:

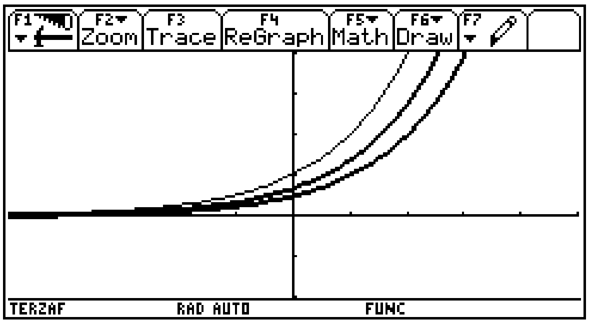
traslazione di vettore **v**(0,1)



grafici di $y = 2^x$, del tasso di variazione e di $y = 2^x - 1$.

Conclusioni: il grafico non conferma l'ipotesi, una traslazione di questo tipo rende la funzione non più asintotica rispetto all'asse *x*.

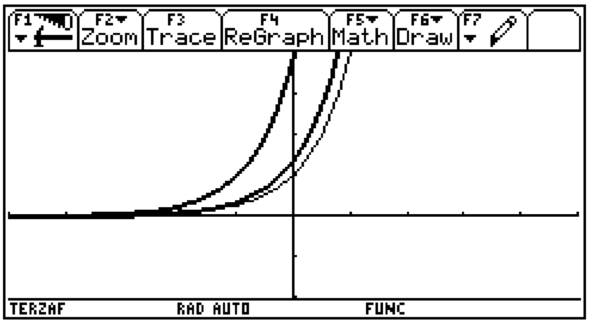
Traslazione di vettore **v**(1,0)



grafici di $y = 2^x$, del tasso di variazione e di $y = 2^{x-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^x$.

Conclusioni: la trasformazione può essere del tipo indicato ma il coefficiente $\frac{1}{2}$ non è quello giusto.

Traslazione di vettore $\mathbf{v}(-1,0)$



grafici di $y = 4^x$, del tasso di variazione e di $y = 4^{x+1} = 4 \cdot 4^x$.

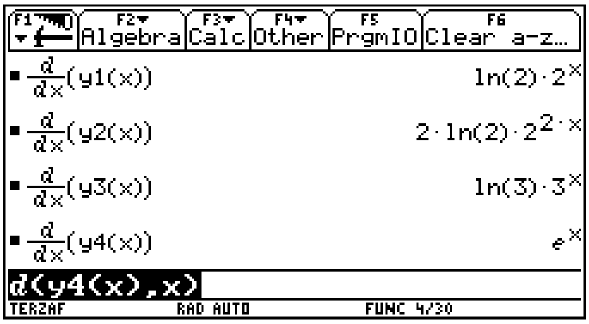
Conclusioni: la trasformazione può essere del tipo indicato ma il coefficiente 4 non è quello giusto.

Dopo svariate prove si perviene alla seguente generalizzazione:

- se $a > e$ l'espressione del tasso di variazione è $y = k \cdot a^x$ con $k > 1$
- se $0 < a < e$ l'espressione del tasso di variazione è $y = k \cdot a^x$ con $0 < k < 1$
- se $a = e$ l'espressione del tasso di variazione è $y = e^x$ ($k = 1$).

Non riescono, però, ad individuare il valore del coefficiente *k* nei primi due casi.

A questo punto si suggerisce ai ragazzi di utilizzare il tasto *d* della calcolatrice in ambiente `Home`: in questo modo si calcola l'espressione analitica della funzione derivata.



A questo punto si chiarisce la relazione fra la base della funzione esponenziale e il valore di k e si verificano le deduzioni precedenti.
Si passa quindi all'analisi di alcune funzioni polinomiali y=5, y=x+2, y=3x−1, y=−x+2, y=x^2 , y=x^3, y=x^4 e dei grafici delle rispettive derivate. Vengono fatte le prime osservazioni sui rapporti tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata.
Alla fine della attività si compila una tabella nella quale si scrivono le derivate di alcune funzioni fondamentali: $y = e^x$, $y = a^x$, $y = k$, $y = mx + q$, $y = x^n$.

Scheda attività n.2

Tempi: 2 ore di lavoro di gruppo + 1ora di discussione
Argomento: La derivata come tasso di variazione istantaneo
Obiettivi:
- conoscenza di alcuni ambienti della calcolatrice
- analisi del grafico delle funzioni derivate di y=sen$x$, y=cos$x$, y=ln$x$, $y = \log_a x$
- ricerca dell'espressione analitica della funzione derivata delle funzioni y=sen$x$, y=cos$x$, y=ln$x$, $y = \log_a x$

Metodi: lavoro di gruppo (attività di ricerca) con presentazione finale alla classe

Descrizione dell'attività:
Viene assegnata la seguente proposta di lavoro:

Con l'utilizzo della calcolatrice visualizza il grafico delle seguenti funzioni e delle rispettive derivate, riportando poi tali grafici sul quaderno:
y=sen$x$, y=cos$x$, y=ln$x$, $y = \log_a x$

A quali funzioni fanno pensare i grafici delle funzioni derivate ottenuti? Qual è l'espressione analitica delle funzioni derivate?

Nell'ora di sistematizzazione vengono raccolti e discussi i risultati ottenuti e vengono aggiunte alla tabella iniziata durante l'attività 1 le funzioni derivate trovate. Tutti i gruppi dimostrano di sapersi muovere con sufficiente disinvoltura con la calcolatrice e di saper utilizzare i suoi "ambienti" per risolvere la proposta di lavoro.

Scheda attività n.3

Tempi: 2 ore di lavoro di gruppo + 2 ore di discussione
Argomento: La funzione derivata
Obiettivi: ricerca dei rapporti tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata
Metodi: lavoro di gruppo (attività di ricerca) con presentazione finale alla classe

Descrizione dell'attività:

Viene assegnata la seguente proposta di lavoro:

Scegli alcune funzioni, con la calcolatrice visualizzane il grafico e confrontalo con quello della sua funzione derivata. Cerca di individuare delle relazioni generali tra le caratteristiche della funzione e quelle della sua derivata come richiesto nella tabella:

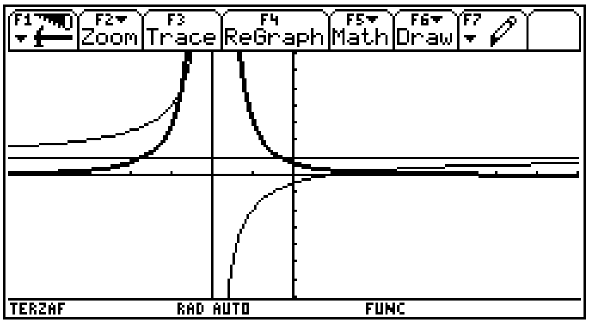
FUNZIONE	DERIVATA
Insieme di definizione	Insieme di definizione
crescenza/decrescenza	segno
punti stazionari	?
punti di flesso	?
concavità	crescenza/decrescenza
asintoti verticali	?
asintoti orizzontali	?
asintoti obliqui	?

Circa metà della classe riesce a completare in modo corretto la tabella e ad individuare le relazioni richieste.

La mancata o parziale risoluzione della proposta di lavoro è dovuta a scelte poco opportune delle funzioni.
Presentiamo le soluzioni di alcuni gruppi e le conclusioni a cui sono arrivati:

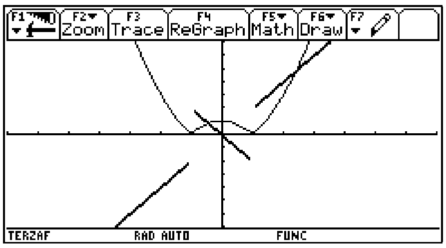
Gruppo 1

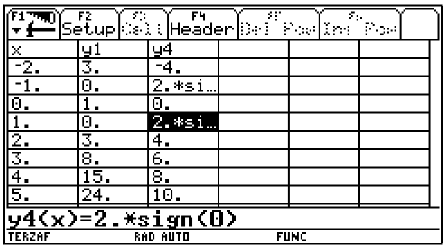
Funzione $y = \frac{x-1}{x+2}$ e sua derivata



- ✓ l'insieme di definizione è lo stesso e anche l'asintoto verticale
- ✓ la funzione è sempre crescente e la sua derivata è sempre positiva
- ✓ quando la concavità della funzione è rivolta verso l'alto la derivata cresce, quando verso il basso decresce
- ✓ l'asintoto orizzontale che, nella funzione è y=1, diventa, per la derivata, y=0

Funzione $y = \left|x^2 - 1\right|$, sua derivata e rispettive tabulazioni





x	y1	y4
-2.	3.	-4.
-1.	0.	2.*si…
0.	1.	0.
1.	0.	2.*si…
2.	3.	4.
3.	8.	6.
4.	15.	8.
5.	24.	10.

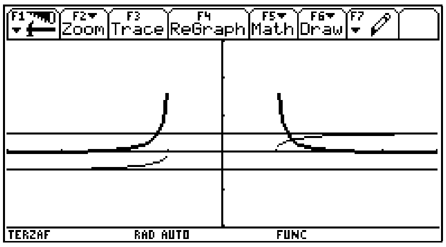
y4(x)=2.*sign(0)

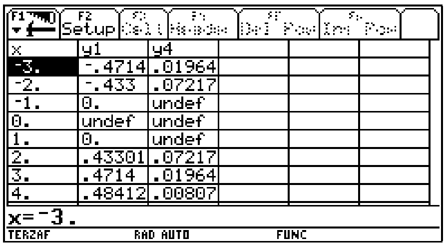
- ✓ non si capisce se l'insieme di definizione è ancora lo stesso, ma sicuramente la derivata presenta delle discontinuità con salto nei punti x=–1 e x=1
- ✓ quando la funzione cresce la derivata è positiva, quando decresce è negativa
- ✓ il punto stazionario della funzione (è un massimo relativo) diventa uno zero della derivata
- ✓ quando la concavità della funzione è rivolta verso l'alto la derivata cresce, quando verso il basso decresce

La tabulazione della funzione derivata presenta degli "strani" valori in corrispondenza di x=–1 e x=1, il gruppo pensa di calcolarsi l'espressione analitica della derivata in ambiente Home e trova l'espressione $2 \cdot x \cdot sign(x^2 - 1)$. In questo modo riesce a comprendere la duplice espressione della funzione derivata che dipende dal segno dell'espressione x^2–1.

Gruppo 2

Funzione $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$, sua derivata e rispettive tabulazioni





x	y1	y4
-3.	-.4714	.01964
-2.	-.433	.07217
-1.	0.	undef
0.	undef	undef
1.	0.	undef
2.	.43301	.07217
3.	.4714	.01964
4.	.48412	.00807

x=-3.

TERZAF RAD AUTO FUNC

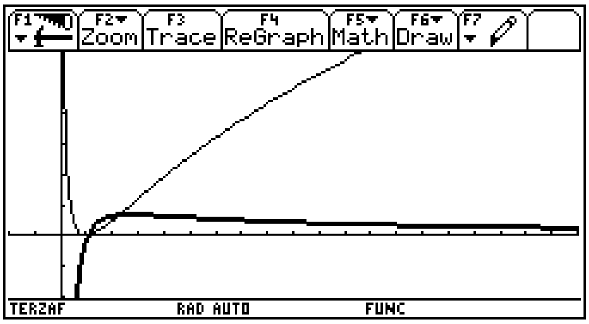
- ✓ l'insieme di definizione non sembra essere lo stesso (lo conferma anche la tabulazione), la derivata presenta delle discontinuità nei punti x=–1 e x=1: sembra avere due asintoti verticali
- ✓ quando la funzione cresce la derivata è positiva, quando decresce è negativa
- ✓ quando la concavità della funzione è rivolta verso l'alto la derivata cresce, quando verso il basso decresce

La tabulazione della funzione derivata presenta *undef* in corrispondenza di x=–1 e x=1, il gruppo pensa di calcolarsi l'espressione analitica della derivata in ambiente Home e trova l'espressione $\frac{-\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ che con il comando

comDenom del menu Algebra diventa $\frac{1}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$.

L'espressione ottenuta conferma che la derivata non è definita anche in $x=-1$ e $x=1$.

Funzione $y=\ln^2(x)$ e sua derivata

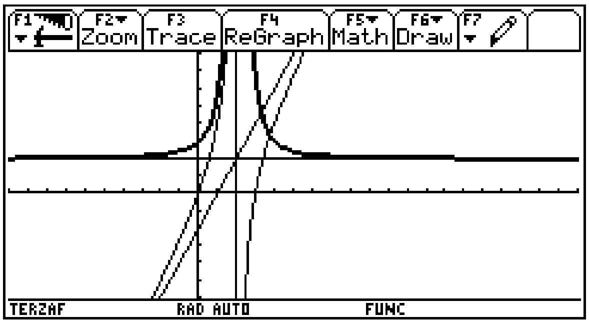


- ✓ l'insieme di definizione è lo stesso e anche l'asintoto verticale
- ✓ quando la funzione cresce la derivata è positiva, quando decresce è negativa
- ✓ il punto stazionario della funzione (è un minimo) diventa uno zero della derivata
- ✓ la funzione sembra avere un punto di flesso che nella derivata diventa un massimo
- ✓ quando la concavità della funzione è rivolta verso l'alto la derivata cresce, quando verso il basso decresce
- ✓ la derivata presenta un asintoto orizzontale di equazione y=0

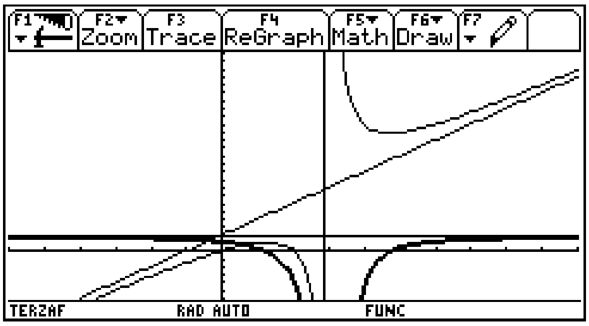
Gruppo 3

Questo gruppo utilizza svariate funzioni, ma in particolare studia i grafici di due iperboli per poter capire in cosa si può "trasformare", per la derivata, l'asintoto obliquo della funzione:

Funzione $y = \dfrac{2x(x-3)}{x-2}$, sua derivata e tutti gli asintoti



Funzione $y = \dfrac{2x(x-2)}{x-3}$, sua derivata e tutti gli asintoti



Dall'esame dei grafici si può dedurre:

- ✓ l'insieme di definizione è lo stesso e anche l'asintoto verticale
- ✓ quando la funzione cresce la derivata è positiva, quando decresce è negativa
- ✓ i punti stazionari della funzione (un minimo relativo ed un massimo relativo nella seconda schermata) diventano zeri della derivata
- ✓ quando la concavità della funzione è rivolta verso l'alto la derivata cresce, quando verso il basso decresce
- ✓ le due funzioni prese in esame presentano un asintoto obliquo (la retta $y = 2x - 2$ nel primo caso, la retta $y = 2x + 2$ nel secondo caso), le due derivate invece presentano un asintoto orizzontale di equazione y=2. Il coefficiente dell'asintoto obliquo è la costante dell'asintoto orizzontale?

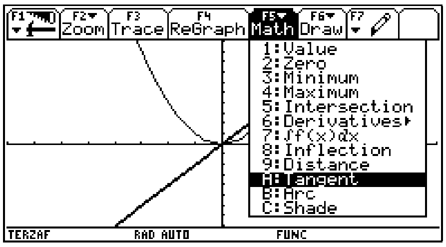
Scheda attività n.4

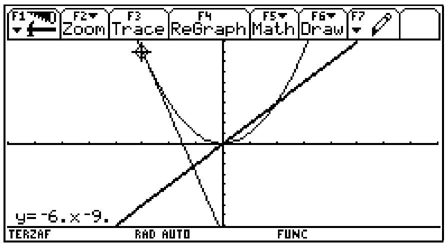
Tempi: 2 ore di lezione guidata
Argomento: La funzione derivata (2°)
Obiettivi:
- deduzione del significato della derivata come coefficiente angolare della retta tangente ad una curva
- significato di punto singolare

Metodi: lezione dialogata

Descrizione dell'attività:

Viene visualizzato il grafico della funzione $y=x^2$ e quello della sua derivata e vengono calcolate le equazioni delle rette tangenti (con il menu `Math`) in alcuni punti della funzione ($x=-3$, $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$ …….)





Si compila la seguente tabella:

in $x=-3$: $y=-6x-9$

in $x=-2$: $y=-4x-4$

in $x=-1$: $y=-2x-1$

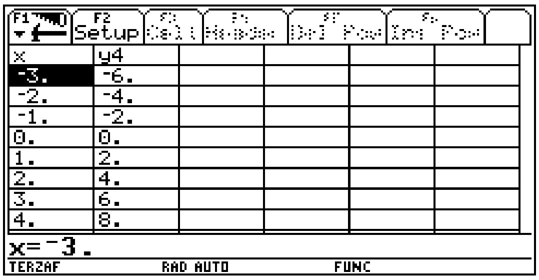
in $x=0$: $y=0$

in $x=1$: $y=2x-1$

in x=2 : $y=4x-4$

…………………

Si confrontano quindi i valori assunti dalla derivata in corrispondenza degli stessi valori di x con l'utilizzo dell'ambiente `Table`:

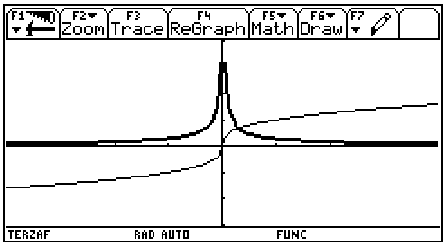


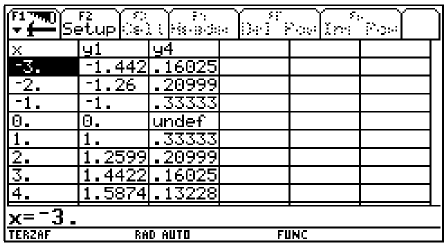
x	y4
-3.	-6.
-2.	-4.
-1.	-2.
0.	0.
1.	2.
2.	4.
3.	6.
4.	8.

Si ripete il procedimento anche con altre funzioni e dopo pochi esempi il legame tra i valori assunti dalla derivata e i coefficienti angolari delle rette tangenti è evidente.
Nella fase di discussione vengono riprese anche alcune questioni emerse nell'attività 3 che possono essere ulteriormente motivate alla luce della nuova definizione del concetto di derivata.

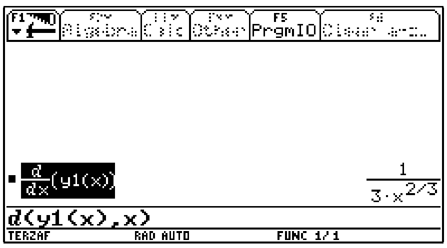
Si prosegue l'attività presentando i grafici di alcune funzioni modulari o irrazionali e quelli delle rispettive derivate. Vengono inoltre tabulate le funzioni nell'ambiente `Table` e calcolate in ambiente `Home` le espressioni analitiche delle funzioni derivate.

Funzione $y = \sqrt[3]{x}$

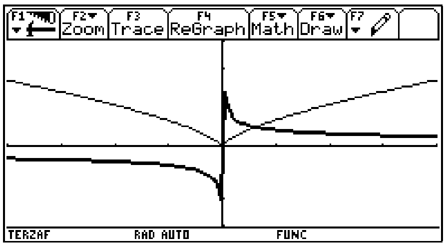


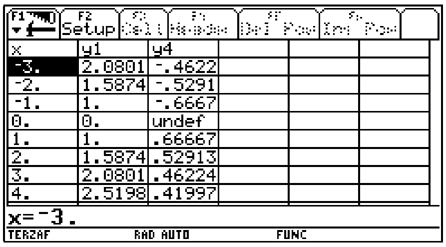


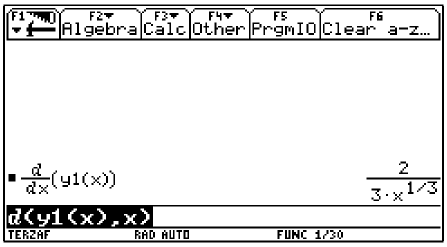
x	y1	y4
-3.	-1.442	.16025
-2.	-1.26	.20999
-1.	-1.	.33333
0.	0.	undef
1.	1.	.33333
2.	1.2599	.20999
3.	1.4422	.16025
4.	1.5874	.13228



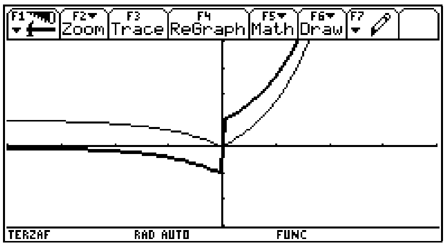
Funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$

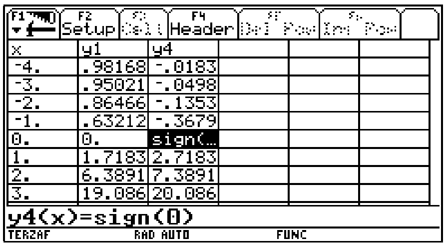


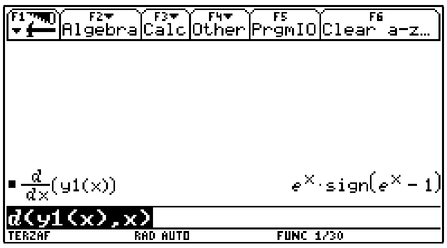




Funzione $y = \left|e^x - 1\right|$:







Per ogni funzione vengono poste ai ragazzi le seguenti domande:

- ✓ Che tipo di punto è per la funzione il punto di ascissa x=0?
- ✓ La funzione in un intorno di 0 è crescente?
- ✓ Qual è la retta tangente alla curva nel punto x=0?
- ✓ La derivata e la funzione hanno lo stesso insieme di definizione?
- ✓ Che valori assume la funzione derivata quando x si avvicina a 0 da destra, e da sinistra?
- ✓ La funzione derivata è continua in x=0? Se no, che tipo di discontinuità presenta?

Le risposte alle domande vengono date in modo intuitivo, osservando grafici e tabulazioni, e, nei casi più semplici, vengono motivate cercando di manipolare l'espressione algebrica della derivata.

Alla fine dell'attività è stata assegnata la seguente verifica in un tempo di due ore:

VERIFICA DI MATEMATICA
(con TI-92)

1. E' data la seguente funzione

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,(x-2)^2$$

Dal suo grafico deduci le sue caratteristiche e rispondi alle seguenti domande, motivandole:

- ♦ E' una funzione continua in R?
- ♦ Qual è la natura del suo punto di ascissa x=0?
- ♦ E' una funzione derivabile in R?
- ♦ La funzione ammette estremi relativi? Se si, indica le coordinate di tali punti.
- ♦ La funzione ammette flessi? Se si, determinane il numero e localizzane le ascisse.

Trova le equazioni delle rette tangenti alla curva nel punto di ascissa x=0 e negli eventuali punti estremi relativi.
Detta r la parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante passante per P(2,0), si dimostri che essa incontra la curva, oltre che in P, in un solo punto la cui ascissa x_0 appartiene all'intervallo (2,3).

2. In un piano cartesiano Oxy sono date la circonferenza e la parabola rispettivamente di equazioni:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad y = -x^2 + 1$$

Calcola la lunghezza delle corde che la circonferenza e la parabola staccano su una retta di equazione $y=k$. Determina in funzione di k l'area A del rettangolo avente i lati della stessa lunghezza delle due corde. Studia la funzione così trovata, determinando in particolare per quale valore di k l'area A è massima.

L'attività si è rivelata davvero significativa: i ragazzi hanno lavorato con grande entusiasmo, dichiarando di aver ricevuto dal lavoro grande soddisfazione e di aver compreso con sufficiente disinvoltura i vari concetti presentati. Le fasi che hanno coinvolto maggiormente la classe sono state le discussioni dopo i lavori di gruppo: questi momenti hanno permesso ai ragazzi di confrontare le loro congetture con quelle degli altri e mi hanno consentito di "sistemare" in modo un po' più rigoroso le questioni emerse. Anche i risultati della verifica sono stati abbastanza buoni: quasi tutti sono riusciti a risolvere il primo esercizio, solo una parte è riuscita ad affrontare parte o tutto del secondo; si sono registrate solo due gravi insufficienze.

Il lavoro si è rivelato prezioso anche per la prosecuzione dell'attività didattica su derivate e studi di funzioni che si è svolta l'anno successivo: i ragazzi hanno dimostrato di aver effettivamente compreso il significato dei concetti presentati e questo ha favorito la trattazione teorica e le conseguenti dimostrazioni.

27. L'INTEGRALE DEFINITO È "SEMPRE" UN'AREA?

Sarah Baratta, Giorgio Ravagnan
Liceo Scientifico "G. B. Benedetti" Venezia
Geraldo Vettorazzo, I.R.R.S.A.E. Veneto Mestre-Venezia

Classe: quinta Liceo Scientifico P.N.I.
Obiettivi: discussione sui possibili significati del concetto di integrale
Prerequisiti: conoscenza del calcolo differenziale e nozioni elementari di calcolo integrale
Tempi: due ore di attività in classe
Metodi: lezione frontale ed interattiva utilizzando interattivamente più ambienti della calcolatrice

Abbiamo proposto agli studenti di una classe quinta di Liceo Scientifico, a conclusione dello studio delle proprietà fondamentali del calcolo integrale definito ed indefinito l'analisi di particolari correlazioni tra i grafici di cubiche o quartiche con i grafici rispettivamente delle loro derivate prime.

In entrambi i casi le funzioni sono state scelte ad hoc (termine noto nullo) per poter evidenziare un'interpretazione geometrica non usuale dell'integrale definito.

La prima funzione proposta agli studenti è stata:

$$y = f(x) = -x^3 + 4x$$

si è chiesto di determinare gli zeri reali della derivata prima, come si può facilmente ricavare in ambiente `Home` (cfr. fig. 1)

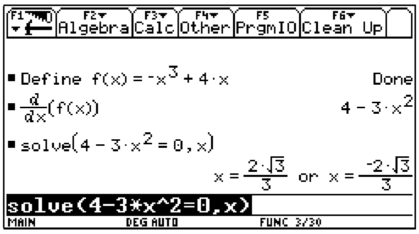


fig. 1

Si è quindi proposto di calcolare l'integrale definito della funzione derivata prima tra $x = 0$ e uno degli zeri precedentemente determinati: $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (cfr. fig. 2).

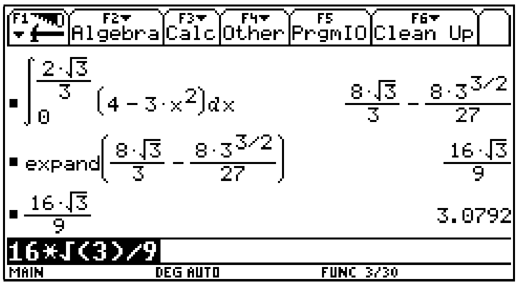


fig. 2

Si è chiesto infine di calcolare il valore della funzione $f(x)$ per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (cfr. fig. 3).

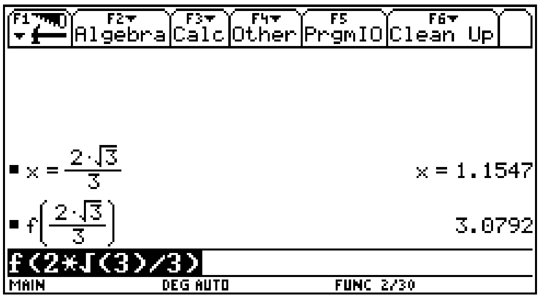


fig.3

Quale può essere la giustificazione della coincidenza tra il valore dell'integrale ed il valore della $f(x)$ per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$? La risposta sul *piano sintattico* è stata facilmente ricavata assieme applicando al caso in esame la conclusione del teorema di Torricelli-Barrow:

$$\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} f'(x)dx = f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) - f(0) = f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Sul *piano semantico* invece l'affermazione appare problematica se l'unica rappresentazione intuitiva del concetto di integrale definito rimane confinata all'idea di *area* (cfr. fig. 4). Ciò infatti ha creato una situazione di perplessità ed un momento di discussione in classe.

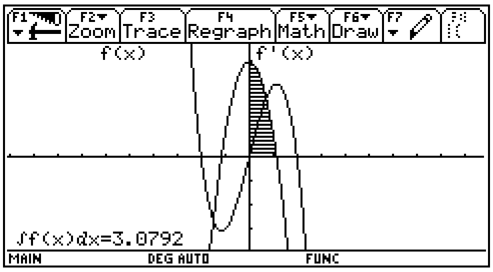


fig. 4

Infatti se si osserva la fig. 5 il valore dell'integrale corrisponde all'ordinata del punto *M*, che gli studenti hanno individuato come punto di massimo relativo, creando così una correlazione tra lo studio degli integrali e quello della ricerca con metodi differenziali dei massimi e minimi. Tale valore di ordinata è, da questo punto di vista, in qualche modo correlabile intuitivamente all'idea di *segmento*, creando una specie di paradosso visivo e concettuale.

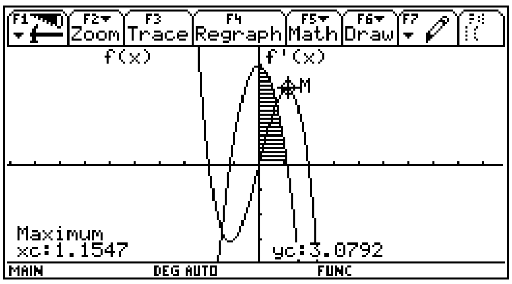


fig. 5

È stata quindi questa l'occasione per affermare che il concetto di integrale definito va riconsiderato come oggetto matematico in sé, svincolato da un particolare unico riferimento semantico. Ciò non limita le possibilità rappresentative ed applicative, ma piuttosto le amplifica rendendo il concetto disponibile a molteplici significati a seconda degli ambiti di intervento.
Va comunque detto che ogni paradosso si scioglie se si afferma che

1. né l'ordinata di un punto va identificata con un segmento né tanto meno con la sua misura
2. né un integrale definito va identificato con una superficie né tanto meno con la sua area.

Pertanto l'eguaglianza tra il valore dell'ordinata e quello dell'integrale non implica in alcun modo l'equivalenza tra una superficie ed un segmento, grandezze decisamente non omogenee.

La seconda funzione proposta come esercizio agli studenti è stata:

$$y = f(x) = x^4 - x$$

Per questa funzione gli studenti hanno ripercorso l'analisi svolta per la cubica. Le seguenti figure visualizzano i calcoli ed i grafici esaminati e discussi.

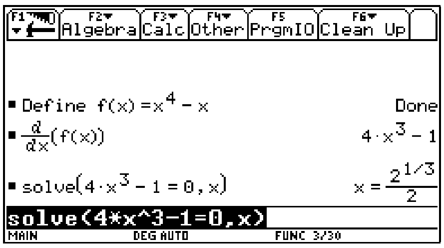


fig. 6

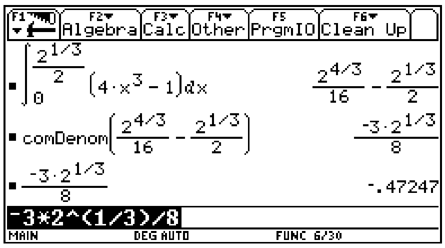


fig. 7

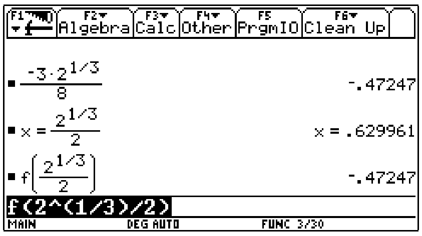
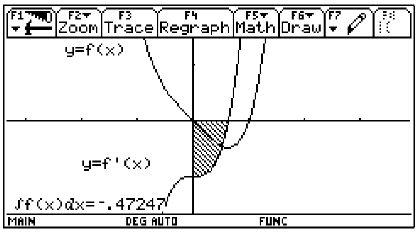


fig. 8



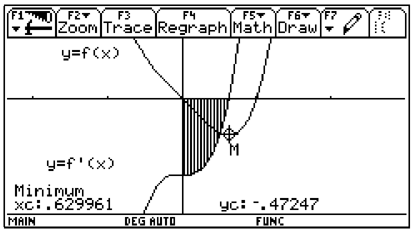


fig. 9 fig. 10

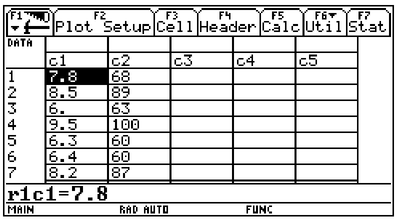
Lo svolgimento dell'esercizio, alla luce di quanto detto, ha creato minore difficoltà di comprensione e non ha prodotto nei ragazzi equivoci o ulteriori paradossi rispetto a situazioni come queste di *aree o di misure di segmenti impropriamente dette negative* poiché già con l'esercizio precedente ci si era portati su di un piano puramente sintattico.

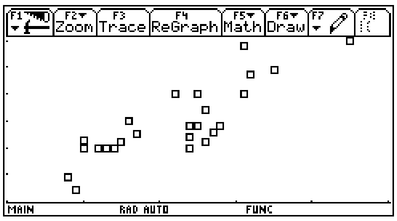
28. DAI DATI AL MODELLO: LA REGRESSIONE

Michele Impedovo
Liceo Scientifico "Galileo Ferraris" Varese

Una delle attività matematiche (scientifiche in generale) relativamente nuova nella scuola secondaria consiste nell'analizzare una tabella di dati (che potrebbe essere ottenuta da un esperimento in laboratorio di fisica, oppure da un'indagine statistica) e ipotizzare quale sia la "miglior" funzione che si adatta ai punti dati. È un'attività nuova perché l'approccio con carta e penna assai difficilmente riesce a giungere a conclusioni apprezzabili in tempi ragionevoli, mentre l'utilizzo di uno strumento automatico di calcolo consente di focalizzare l'attenzione, più che sul calcolo, sul modello applicato.
La TI-92 possiede l'ambiente Data Matrix Editor che si presta bene a questo tipo di attività. Vogliamo mostrare qualche esempio significativo.

L'esame di Stato 1999
Con il nuovo Esame di Stato il candidato arriva all'esame con una dichiarata *media di profitto* (in decimi), sulla base della quale viene calcolato il credito scolastico. Proviamo ad analizzare la relazione tra la media M dei voti allo scrutinio finale (in decimi) e il voto finale V dell'esame (in centesimi) e proviamo a ipotizzare che V sia in qualche modo una funzione di M. La seguente tabella riguarda la mia classe quinta dell'anno scolastico 98-99 (25 studenti); il grafico a dispersione dei punti (M_i, V_i) è visualizzato nel rettangolo [5,10]×[40,100].

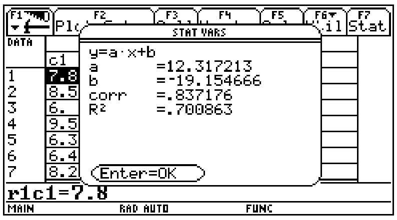


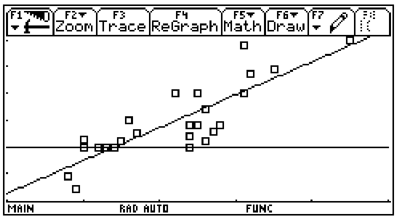


Il grafico mostra un andamento crescente; si può ipotizzare una correlazione di tipo lineare

$$V = aM+b.$$

La TI-92 consente di calcolare rapidamente l'equazione della retta di regressione.





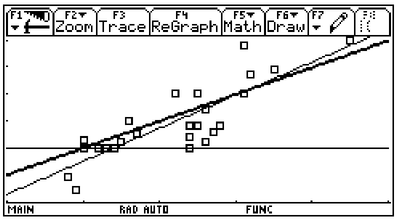
La retta orizzontale è la funzione costante $V = 60$: ci sono stati quindi due bocciati.
La miglior funzione lineare che approssima i dati è

$$V = 12.3M - 19.2$$

e l'indice di correlazione, 0.84, è relativamente alto. Se confrontiamo la retta di regressione (che caratterizza il comportamento della commissione) con la retta

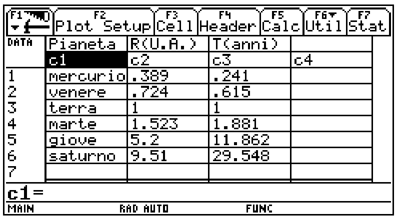
$$V = 10M$$

che trasforma la media M da decimi a centesimi, e quindi caratterizza il comportamento del consiglio di classe, possiamo osservare una certa discrepanza tra le valutazioni del consiglio di classe e le valutazioni della commissione d'esame, che ha in qualche modo penalizzato i (molti) punteggi medio-bassi, e valorizzato i (pochi) punteggi alti. Nel grafico seguente la retta V=10M è in grassetto.

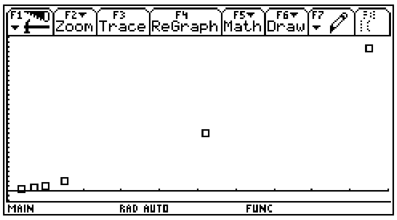


Si può dire che la retta di regressione sintetizzi il comportamento della commissione d'esame. Il confronto con gli stessi dati di altre commissioni nel mio liceo ha messo in luce comportamenti differenti delle diverse commissioni.

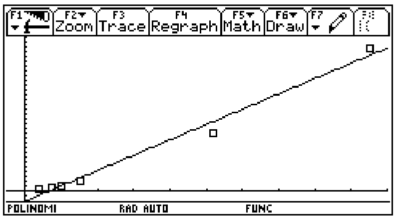
La terza legge di Keplero
Tabuliamo la distanza R e il tempo di rivoluzione T dei pianeti del Sistema Solare noti a Keplero; prendiamo come unità di misura delle distanze l'*unità astromica* (la distanza media Terra-Sole) e come unità di misura del tempo l'*anno* (il tempo di rivoluzione della Terra intorno al Sole).



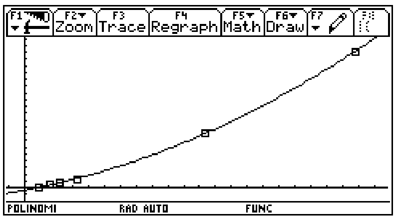
DATA	Pianeta	R(U.A.)	T(anni)	
	c1	c2	c3	c4
1	mercurio	.389	.241	
2	venere	.724	.615	
3	terra	1	1	
4	marte	1.523	1.881	
5	giove	5.2	11.862	
6	saturno	9.51	29.548	
7				



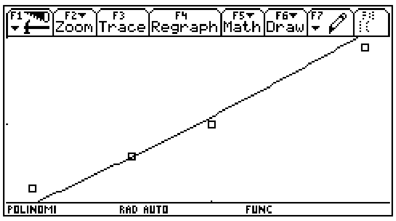
Mentre dalla tabella non ricaviamo alcuna informazione sintetica (se non che T è una funzione crescente di R), il grafico a dispersione dei punti mostra una crescita regolare. Proviamo ad ipotizzare una funzione lineare.



Il grafico non è molto soddisfacente. Vediamo se le cose migliorano con una regressione quadratica.



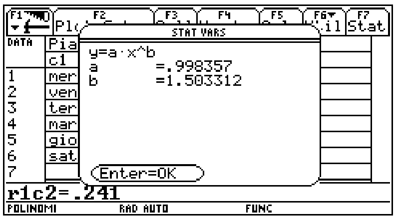
Il grafico a prima vista sembra adattarsi bene ai dati, ma se ingrandiamo la regione più vicino al Sole, trascurando i più lontani Giove e Saturno, le cose non sono più così convincenti.



Proviamo allora a ipotizzare una generica *funzione potenza*, del tipo

$$T = aR^b$$

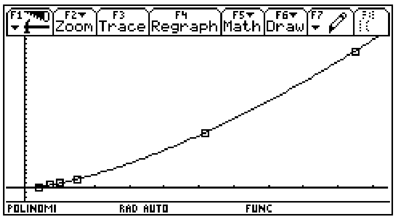
(*PowerReg*, sulla calcolatrice).

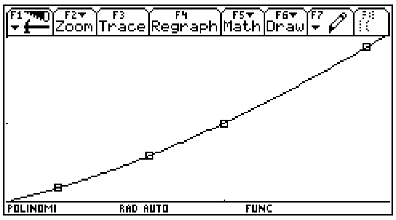


La miglior funzione potenza che si adatta ai punti è

$$T = R^{1.5}.$$

Il grafico è decisamente convincente, anche nella regione dei primi quattro pianeti.





In effetti la terza legge di Keplero afferma che i quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi della loro distanza media dal Sole, cioè

$$T = R^{3/2},$$

risultato molto vicino a quello trovato "sperimentalmente".

29. UN COMPITO DI STATISTICA

Lucio Carosati
Liceo Scientifico "G. Galilei" Ancona

Classe: Quinta liceo scientifico P.N.I.
Obiettivi:
- conoscere le formule statistiche relative a sintesi, dispersione, regressione lineare
- utilizzare la TI-92 per elaborare tabelle statistiche (con relative formule e grafici) e ricavarne leggi di regressione
- confrontare diverse distribuzioni statistiche sia globalmente (valori di sintesi e dispersione) sia localmente (valori normalizzati)
- valutare l'attendibilità di una legge, lineare e quadratica, relativamente ad una "nuvola" di punti

Tempi: 20 lezioni (compreso l'addestramento sulla TI-92)
Metodi: lezione dialogata, lavoro individuale e a coppie sulla TI-92
Strumenti: appunti, schede di lavoro, TI-92 (una per alunno), view-screen

Per vari motivi, legati alla storia della classe (18 alunni di buone capacità medie, in genere interessati all'attività matematica) il tema "Probabilità e Statistica" è stato rinviato di anno in anno, per cui nella quinta si è presentata la necessità di una introduzione veloce ed essenziale delle conoscenze e dei metodi di lavoro. La TI-92 si è rivelata a questo scopo uno strumento versatile, facile da usare, determinante per la visualizzazione grafica dei concetti e per la elaborazione di calcoli e tabelle.

Gli studenti hanno quasi sempre dimostrato interesse per le proposte didattiche dell'insegnante: per la quasi totalità il riuscire a riprodurre le videate presentate e a risolvere gli esercizi proposti con la TI-92 ha costituito elemento di sfida, un po' come se stessero giocando con un videogioco. Il lavoro iniziato a scuola è spesso poi proseguito a casa, in quanto la "macchinetta" è stata loro affidata per cinque o sei volte, onde utilizzarla nel lavoro domestico individuale.

Va anche notato che una parte (non significativa) della classe ha inizialmente opposto una certa resistenza all'introduzione di uno strumento di "calcolo" sofisticato come la TI-92, ma questo è un problema generale: non tutti hanno familiarità con le tecnologie e quindi all'inizio alcuni sono un po' diffidenti. Poi però le cose sono migliorate e tutti hanno lavorato durante il compito senza particolari problemi.

1. Il testo del compito

Nota: i dati del secondo problema sono stati scelti non per portare l'alunno alla modellizzazione di una situazione concreta, sviluppata abbastanza bene negli esercizi in classe, ma per verificare quanto gli alunni fossero attenti nella "lettura" della nuvola dei punti e critici anche con l'impostazione del problema (in effetti si spera che un fenomeno fisico sia un po' più regolare). D'altronde siamo alla fine del compito laddove si verificano abilità di più alto livello.

Problema 1 **:** È data la seguente tabella di distribuzione delle frequenze relative a due gruppi di persone di cui si sta studiando il peso (in *kg*):

kg	50	55	60	65	70	Tot.
Gruppo A	12	15	8	1	4	40
Gruppo B	7	3	6	3	1	20

A. Rappresentare graficamente le due distribuzioni utilizzando le frequenze relative.

B. Calcolare gli indici di sintesi e di dispersione per i due gruppi di persone e confrontare le dispersioni.

C. Le persone che pesano 55 *kg* si possono ritenere più disperse, rispetto alla media, nel gruppo A o nel gruppo B ? E quelle che pesano 65 *kg* ?

Problema 2 **:** I seguenti dati sperimentali riguardano un fenomeno fisico.

X	2	3	4	7	8
Y	3	2.5	2	5	6

A. Si vuole conoscere se è attendibile una legge lineare.

B. Sviluppare i calcoli per trovare la retta di regressione di Y su X e il coefficiente lineare di Bravais-Pearson.

C. Commentare i risultati raggiunti.

D. Si vuole stabilire se una legge quadratica approssima meglio i dati forniti: cercare la funzione quadratica che passa per i punti della tabella di posto dispari e successivamente dare una rappresentazione adeguata sia dei dati che delle due leggi trovate.

E. Confrontare le due leggi calcolando gli scarti quadratici medi degli scarti delle ordinate dai rispettivi valori teorici. Commentare i risultati.

2. La soluzione del compito

<u>Note tecniche generali.</u>

- Impostare (in 3) approximate, per avere i risultati in forma decimale.
- Tutti i calcoli avvengono in una sola tabella, che utilizza nelle prime colonne i dati forniti dal problema.
- Talvolta le colonne che contengono singoli valori (ad es. c8 e c9, del problema 1, in cui troviamo le medie) richiedono l'uso di seq(…) per questioni tecniche (le elaborazioni tra colonne che contengono più dati pretendono la stessa dimensione delle liste nelle colonne interessate).

2.1. Soluzione del ***<u>Problema 1</u>***

Formule usate nelle varie colonne			**C12**	Seq(sum(C11)/(sum(C2)),n,1,dim(C1))	
C4	C2/(sum(C2))	fr_A	**C13**	C10*C3	x^2*f_B
C5	C3/(sum(C3))	fr_B	**C14**	Seq(sum(C13)/(sum(C3)),n,1,dim(C1))	
C6	C1*C2	$x*f_A$	**C15**	√(C12-C8^2)	σ_A
C7	C1*C3	$x*f_B$	**C16**	√(C14-C9^2)	σ_B
C8	Seq(sum(C1*C4),n,1,dim(C1))		**C17**	C15/C8	σ_A rel
C9	Seq(sum(C1*C5),n,1,dim(C1))		**C18**	C16/C9	σ_B rel
C10	C1^2	x^2	**C19**	(C1-C8)/C15	z_A
C11	C10*C2	x^2*f_A	**C20**	(C1-C9)/C16	z_B

Punto A

- Elaborare le frequenze relative (formule in c4 e c5) (fig. 1).
- Impostare i parametri di $ (fig. 2).
- Impostare *Plot1* e *Plot2* (fig. 3 e 4) (Gruppo A: *xyline*, Gruppo B: *istogramma*).
- RISPOSTA: è la fig. 5 (rappresentazione delle distribuzioni in Graph).

Punto B (formule da c6 a c18)

- Per confrontare le due distribuzioni è necessario calcolare gli s.q.m. relativi.
- In questa fase è richiesto l'uso delle formule classiche:

$VAR(X) = M(X^2) - \mu^2$ e $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$ (fig. 6,7,8).

- RISPOSTA: nelle colonne `c17` e `c18` compaiono gli s.q.m. relativi.
- Si nota che l'arrotondamento ai centesimi dà 0.11 in entrambi i casi, quindi la dispersione è quasi identica, con una leggera preponderanza per B (dispersione leggermente superiore).

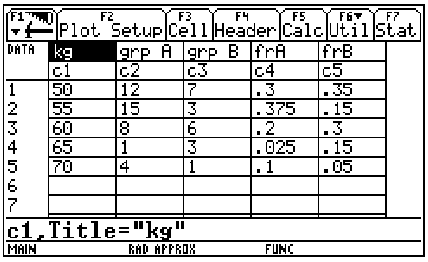


fig. 1

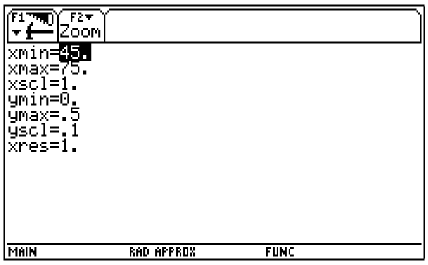


fig. 2

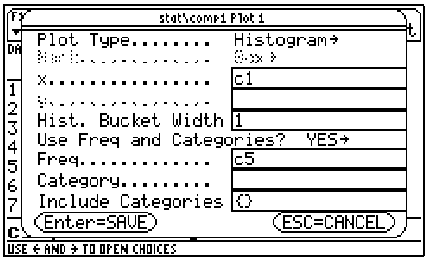


fig. 3

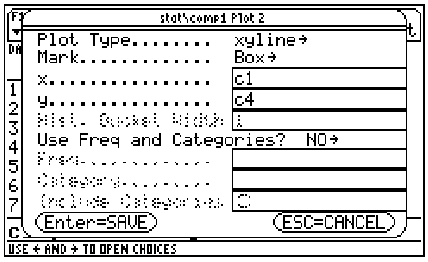


fig. 4

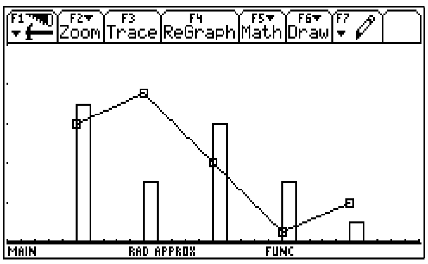


fig. 5

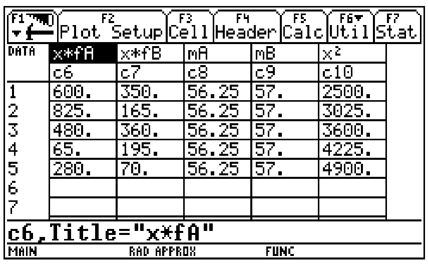
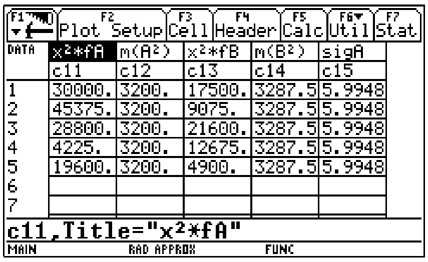
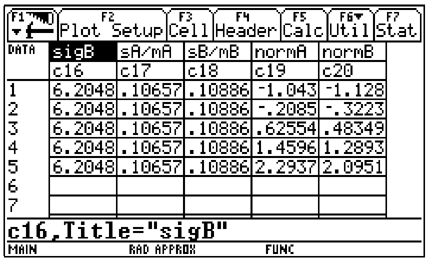


fig. 6



DATA	x²*fA	m(A²)	x²*fB	m(B²)	sigA
	c11	c12	c13	c14	c15
1	30000.	3200.	17500.	3287.5	5.9948
2	45375.	3200.	9075.	3287.5	5.9948
3	28800.	3200.	21600.	3287.5	5.9948
4	4225.	3200.	12675.	3287.5	5.9948
5	19600.	3200.	4900.	3287.5	5.9948
6					
7					

fig. 7



DATA	sigB	sA/mA	sB/mB	normA	normB
	c16	c17	c18	c19	c20
1	6.2048	.10657	.10886	⁻1.043	⁻1.128
2	6.2048	.10657	.10886	⁻.2085	⁻.3223
3	6.2048	.10657	.10886	.62554	.48349
4	6.2048	.10657	.10886	1.4596	1.2893
5	6.2048	.10657	.10886	2.2937	2.0951
6					
7					

fig. 8

Punto C (fig. 8)

- È necessario trasformare i dati normalizzandoli cioè trasformandoli in "punti zeta" (sono gli scarti dalla media rapportati ai relativi σ).
- RISPOSTA: dai dati normalizzati, arrotondati a due cifre decimali, si nota che
  - 55 *kg* diventa -0.21 per il gruppo A e -0.32 per il gruppo B: 55 *kg* è, nel gruppo A, più vicino alla media (riga 2, `c19` e `c20` in fig. 8);
  - 65 *kg* diventa 1.46 per il gruppo A e 1.29 per il gruppo B: 65 *kg* è, nel gruppo B, più vicino alla media (riga 4, `c19` e `c20` in fig. 8).

2.2. Soluzione del ***Problema 2***

Formule usate			**C15**	C10/(dim(C1))	M(XY)
C3	C1^2	X^2	**C16**	C13-C11^2	VAR(X)
C4	C2^2	Y^2	**C17**	C14-C12^2	VAR(Y)
C5	C1*C2	XY	**C18**	C15-C11*C12	COV(XY)
C6	Sum(C1)	Σx_i	**C19**	C18/(√(C16)*√(C17))	r
C7	Sum(C2)	Σy_i	**C21**	y1(C1)	$r(x)=r_i$
C8	Sum(C3)	Σx_i^2	**C22**	C2-C21	$y_i-r_i=s1_i$
C9	Sum(C4)	Σy_i^2	**C23**	C22^2	$s1_i^2$
C10	Sum(C5)	$\Sigma x_i y_i$	**C24**	√(sum(C23)/(dim(C23)))	σ_{retta}
C11	C6/(dim(C1))	μ_x	**C26**	y2(C1)	$p(x)=p_i$
C12	C7/(dim(C2))	μ_y	**C27**	C2-C26	$y_i-p_i=s2_i$
C13	C8/(dim(C1))	$M(X^2)$	**C28**	C27^2	$s2_i^2$
C14	C9/(dim(C2))	$M(Y^2)$	**C29**	√(sum(C28)/(dim(C28)))	$\sigma_{parabola}$

Punto A (formule da `c3` a `c19`)

- Elaborare le formule a partire dai dati iniziali fino al coefficiente *r* (fig. 1-4).
- Trovare la retta di regressione con ‡ `Calc` (fig. 5 e 6) (fig.7 per la definizione di *Plot3*) e rappresentarla (fig. 10) (grafico riassuntivo con la parabola).
- RISPOSTA: *r*=0.88, *a*>0 . La correlazione tra *X* e *Y* è positiva quindi il legame (lineare) tra *X* e *Y* è crescente. Tuttavia il valore 0.88 per *r* indica una correlazione non molto forte, almeno per dati riguardanti fenomeni fisici (dovremmo avere per *r* almeno 0.95-0.97).

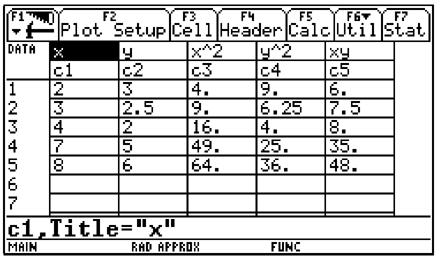


fig. 1

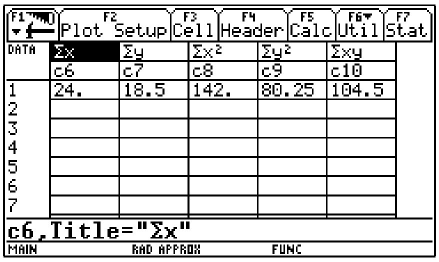


fig. 2

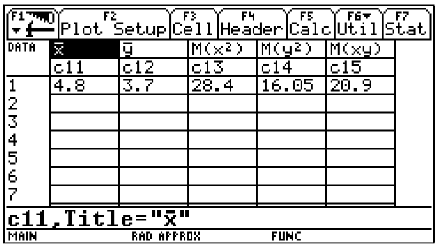


fig. 3

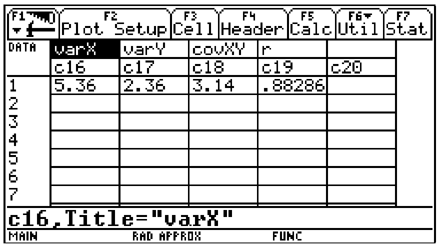


fig. 4

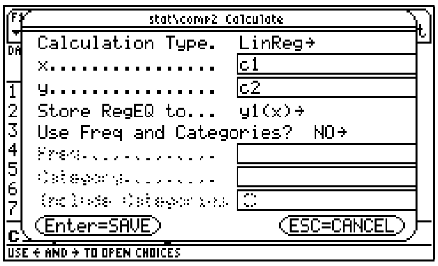


fig. 5

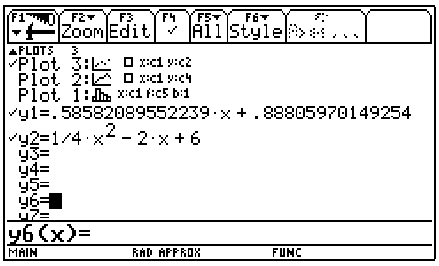


fig. 6

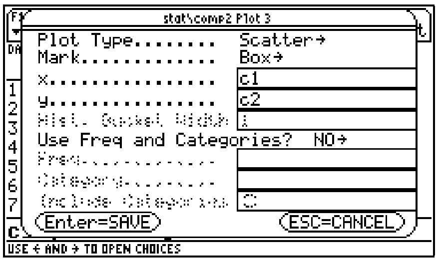


fig. 7

Punto B

- Trovare l'equazione della parabola per 3 punti (fig. 8 e 9) ed inserirla in `y2(x)` di `# (Y editor)`.
- RISPOSTA: è la fig. 10 (dati, retta di regressione, parabola richiesta).

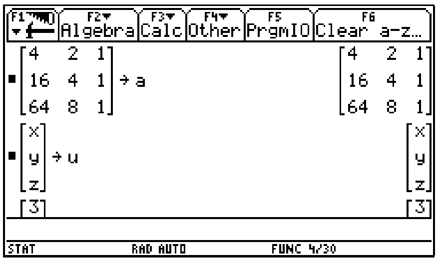


fig. 8

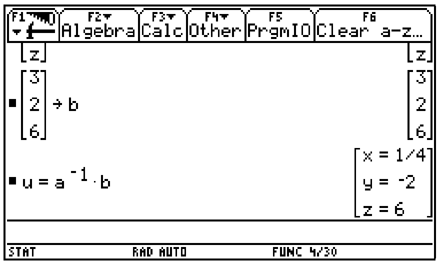


fig. 9

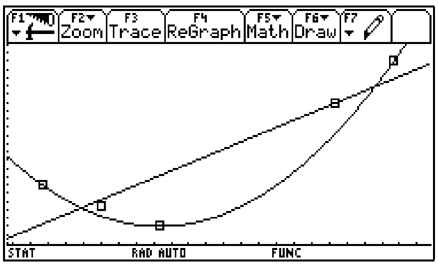
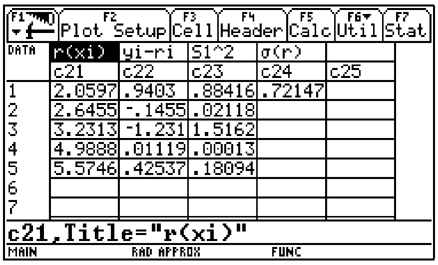


fig. 10

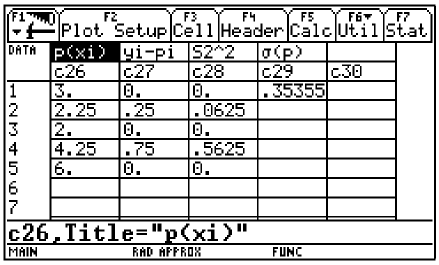
Punto C (formule da `c21` a `c24` e da `c26` a `c29`)

- Elaborare gli scarti dei dati iniziali dalla retta di regressione e dalla parabola trovata e i relativi s.q.m. σ_r e σ_p (fig. 11 e 12).
- Confrontare σ_r e σ_p .
- RISPOSTA: si nota che la parabola è molto più vicina della retta ai dati della tabella; questo è ovvio perché si è cercata una parabola che passa già per tre dei cinque punti assegnati.
  Gli s.q.m. relativi agli scarti dei punti dalla retta e dalla parabola sono σ_r = 0.72 e σ_p = 0.35 e risulta $\sigma_r << \sigma_p$ il che conferma che la legge quadratica è più attendibile di quella lineare.



DATA	r(xi)	yi-ri	S1^2	σ(r)	
	c21	c22	c23	c24	c25
1	2.0597	.9403	.88416	.72147	
2	2.6455	-.1455	.02118		
3	3.2313	-1.231	1.5162		
4	4.9888	.01119	.00013		
5	5.5746	.42537	.18094		
6					
7					

fig. 11



DATA	p(xi)	yi-pi	S2^2	σ(p)	
	c26	c27	c28	c29	c30
1	3.	0.	0.	.35355	
2	2.25	.25	.0625		
3	2.	0.	0.		
4	4.25	.75	.5625		
5	6.	0.	0.		
6					
7					

fig. 12

Osservazioni sul Problema 2.

Può sembrare che si chieda troppo agli alunni (*r* è possibile ottenerlo semplicemente con ‡ `Calc` insieme alla retta di regressione). È tuttavia un modo per verificare l'acquisizione delle formule e la capacità di utilizzarle in una tabella.
In ogni caso l'opzione ‡ `Calc` serve agli alunni per verificare se i loro calcoli sono corretti.

Inoltre qualora non fossero capaci di arrivare correttamente al valore di *r*, possono comunque rispondere a tutte e tre le domande, senza rimanere bloccati sul calcolo del coefficiente di correlazione.

La parabola può essere trovata dall'alunno manualmente, ma avendo sviluppato anche i calcoli con le matrici resta più agevole usare la TI-92 come nelle fig. 8-9.

Va chiarito inoltre perché si chiede di trovare non la parabola dei minimi quadrati ma quella che passa per tre particolari punti. Come già detto si vogliono verificare diverse abilità: intanto la capacità di lavorare con le matrici per trovare la parabola per tre punti; poi, se si guarda bene, la parabola richiesta non è troppo "distante" dai cinque punti nel loro complesso e quindi permette di confrontarla con la retta dei minimi quadrati, confronto in cui quest'ultima ha la peggio, dimostrando così che non basta trovare tale retta per accontentarci di una approssimazione statistica di una legge; inoltre diventa ovvio osservare che già tre dei cinque punti sono proprio sulla parabola, e che gli altri due non sono molto lontani da essa ma non è ovvio che gli alunni arrivino ad osservarlo.

Ci si dovrebbe infine aspettare che qualcuno vada avanti e decida autonomamente di cercare la parabola dei minimi quadrati e confrontarla con le curve precedenti. Nessuno l'ha fatto, ma è scontato: "in un compito (nella scuola attuale) è meglio non prendere troppe iniziative". Invece è confortante osservare che due alunni siano riusciti ad arrivare alle osservazioni precedenti.

3. I risultati

Al compito erano presenti 14 alunni su 18 (causa influenza).
Hanno ottenuto un risultato discreto-buono in 4, sono stati sufficienti (o quasi) in 5 e altri 5 sono risultati insufficienti. È andato meglio il secondo problema.

A guardar bene sono le frequenze pressoché solite, senza miglioramenti né peggioramenti. Quantomeno non è andata peggio del solito.

4. Conclusioni

Ritengo che i risultati non troppo entusiasmanti siano stati determinati anche dal fatto che è stato il mio (e per la classe) primo esperimento di insegnamento della statistica con la TI-92, anzi con un computer, e questo ha portato certamente vari inconvenienti: tempi lunghi di apprendimento tecnico che hanno tolto il tempo all'approfondimento sui concetti statistici, poco tempo per allenarsi sulle tabelle con relative questioni tecniche, scarsa esperienza da parte mia su quali fossero le migliori questioni da presentare, la poca dimestichezza di alcuni con le macchine in genere (anche con il solito PC).

C'è da notare poi che 20 lezioni per presentare sia la statistica (compresa un po' di statistica bivariata e di Chi-quadrato) che la TI-92 (fino ad allora poco utilizzata) sono poche, ma i limiti di realtà non danno tante altre possibilità.

Nonostante tutto la classe ha risposto con entusiasmo ed interesse e non ha recriminato; anzi dopo il compito mi hanno portato (quelli che non erano riusciti a svolgere il primo problema, quasi per farsi perdonare) il grafico e le elaborazioni dei "punti zeta" dei voti del compito. Meno male. Qualcosa avevano imparato comunque.

In effetti ho avuto la netta impressione, discutendo con loro sui risultati, che anche il tempo assegnato non sia stato sufficiente. Non tanto per affrontare i problemi quanto per tradurli sulla TI-92.

È infatti risaputo che di fronte al computer il tempo vola e la TI-92 non fa eccezione. O si fa un progetto a tavolino (il che richiede comunque del tempo) o si lavora sulla macchina scoprendo spesso che era meglio fare in un altro modo, e qualche volta è doveroso. Il tempo è un gran tiranno e bisogna tenerne conto nel presentare compiti da risolvere con una macchina.

Tenendo conto di tutte queste osservazioni il bilancio finale va considerato positivo comunque: gli alunni hanno imparato in poco tempo e in modo più chiaro molte questioni statistiche che in genere rimanevano spesso un po' troppo astratte.

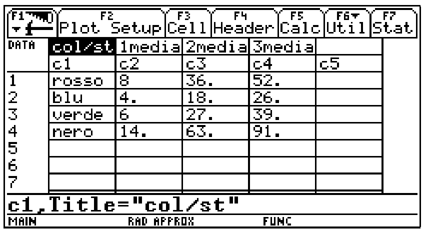
Ed hanno imparato ad affrontarle con un computer (piccolo ma potente).

30. ANALISI DELLA DIPENDENZA STATISTICA E CALCOLO DEL CHI QUADRO

Giorgio Ravagnan
Liceo Scientifico "G. B. Benedetti" Venezia

Classe: terza Liceo Scientifico P.N.I.
Obiettivi: analisi della dipendenza statistica fra due variabili, confronto con la dipendenza probabilistica e con la dipendenza tra vettori in algebra lineare; calcolo dell'indice chi quadro
Prerequisiti: nozioni elementari di probabilità (note dal biennio), nozioni elementari di programmazione, funzionalità di base dell'ambiente `Data/Matrix Editor`.
Tempi: quattro ore di attività in classe
Metodi: lezione frontale, lavori individuali e di gruppo di costruzione ed analisi di tabelle nell'ambiente `Data/Matrix Editor`, programmazione in ambiente `Program Editor`

A fine anno scolastico ho affrontato in una terza classe di Liceo Scientifico lo studio della *Statistica Descrittiva*, prima relativamente ad una variabile, ad approfondimento e completamento di quanto era già stato studiato ed utilizzato in Fisica fin dal biennio, poi analizzando distribuzioni congiunte di due variabili diverse. Ho proposto agli studenti, come esempio di partenza, la seguente tabella a doppia entrata di *distribuzione congiunta*, dove sono riportate le frequenze assolute di preferenza fra 4 colori in un "ipotetico" campione di studenti di scuola media suddivisi per classe. La tabella in fig. 1 è stata costruita come `Data` (insieme di liste inserite come colonne) nell'ambiente `Data/Matrix Editor` della calcolatrice.

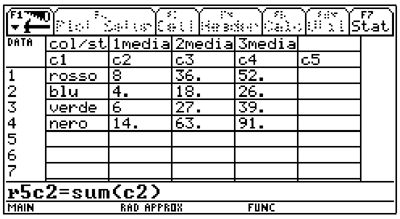


DATA	col/st	1media	2media	3media	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	rosso	8	36.	52.	
2	blu	4.	18.	26.	
3	verde	6	27.	39.	
4	nero	14.	63.	91.	
5					
6					
7					

fig. 1

E’ possibile calcolare, tramite la funzione `sum` operante su ciascuna colonna (`c2,c3,c4`), la *distribuzione marginale* riferita al carattere classe, inserendo la funzione con argomenti di volta in volta diversi (cfr. fig. 2) nelle varie celle della riga `r5`. Successivamente in `c5` viene inserita la somma `c2+c3+c4` (cfr. fig. 3) ottenendo così in colonna la distribuzione marginale riferita al carattere colore e automaticamente nell’ultima cella (`r5c5`) il numero totale di elementi del campione.

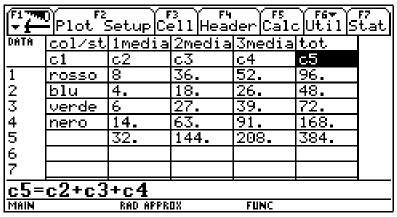
Così facendo, oltre alla definizione delle distribuzioni marginali, è stato evidenziato agli studenti che, dal punto di vista sintattico, la possibilità di manipolare una variabile `Data` è realizzata tramite operazioni sulle colonne, cioè su liste di valori.



DATA	col/st	1media	2media	3media	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	rosso	8	36.	52.	
2	blu	4.	18.	26.	
3	verde	6	27.	39.	
4	nero	14.	63.	91.	
5					
6					
7					

r5c2=sum(c2)

fig. 2

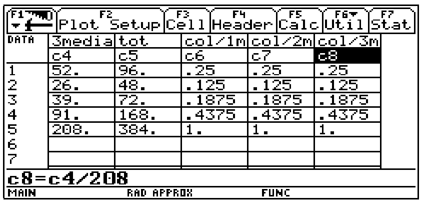


DATA	col/st	1media	2media	3media	tot
	c1	c2	c3	c4	c5
1	rosso	8	36.	52.	96.
2	blu	4.	18.	26.	48.
3	verde	6	27.	39.	72.
4	nero	14.	63.	91.	168.
5		32.	144.	208.	384.
6					
7					

c5=c2+c3+c4

fig. 3

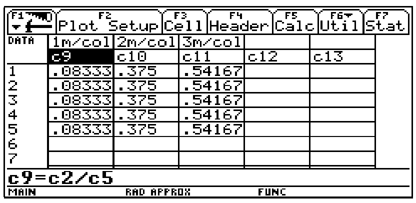
Ho proposto poi agli studenti di costruire in `c6, c7, c8` la tabella delle *distribuzioni condizionate relative a ciascuna classe*. Ciò è stato ottenuto dagli alunni dividendo ciascuna colonna (`c2, c3, c4`) della tabella iniziale per il totale di colonna (cfr. fig. 4). Poiché le tre colonne ottenute sono uguali, il carattere colore non dipende dal carattere classe. Analogamente sono state costruite in `c9, c10, c11` le *distribuzioni condizionate relative a ciascun colore* (leggibili riga per riga) dividendo, questa volta, ciascuna colonna iniziale per la colonna `c5` (cfr. fig. 5). Anche in questo caso si nota che il carattere classe non dipende dal carattere colore, poiché le prime quattro righe sono uguali.



DATA	3media	tot	col/1m	col/2m	col/3m
	c4	c5	c6	c7	c8
1	52.	96.	.25	.25	.25
2	26.	48.	.125	.125	.125
3	39.	72.	.1875	.1875	.1875
4	91.	168.	.4375	.4375	.4375
5	208.	384.	1.	1.	1.
6					
7					

c8=c4/208

fig. 4



DATA	1m/col	2m/col	3m/col		
	c9	c10	c11	c12	c13
1	.08333	.375	.54167		
2	.08333	.375	.54167		
3	.08333	.375	.54167		
4	.08333	.375	.54167		
5	.08333	.375	.54167		
6					
7					

c9=c2/c5

fig. 5

Si osserva inoltre l’eguaglianza con la quinta riga della distribuzione marginale relativa che descrive infatti come si ripartisce, in termini di frequenze relative, il campione fra le varie classi a prescindere dalla preferenza di colore.

E’ possibile poi, coerentemente con l’analisi svolta su questo esempio, formalizzare la definizione di *indipendenza statistica* tra caratteri (variabili statistiche). Il carattere x (ad es. colore) in riga è indipendente dal carattere y (ad es. classe) in colonna se

$$\frac{n_{ij}}{c_j} = \frac{r_i}{n} \qquad \forall i, j$$

dove n_{ij} è la frequenza assoluta della tabella di distribuzione congiunta iniziale nella cella di riga i e colonna j, mentre c_j è il totale della colonna j, r_i è il totale della riga i ed infine n è il numero totale di elementi del campione.

Poiché, nella proporzione della definizione, è possibile scambiare i medi lasciando valida l’eguaglianza, si è così riscontrato con gli studenti che la *simmetria di indipendenza statistica* riscontrata nell’esempio non è casuale, ma costituisce piuttosto una proprietà generale.

Inoltre, seguendo l’approccio frequentista di definizione statistica a posteriori della probabilità noto dal biennio, sono state interpretate con gli studenti in ambito probabilistico, e in riferimento alla legge dei grandi numeri, la frazione n_{ij} / c_j come probabilità condizionata P(x = x_i / y = y_j) e la frazione r_i / n come probabilità P(x = x_i). L’eguaglianza che definisce l’indipendenza statistica diventa così

$$P(x = x_i / y = y_j) = P(x = x_i)$$

ottenendo in questo modo una caratterizzazione dell’*indipendenza probabilistica* fra eventi, argomento già discusso a livello elementare al biennio. In seguito verrà formalizzata, all’interno di uno studio sistematico e assiomatico, la definizione di probabilità condizionata.

In una riflessione conclusiva l’ipotetico campione dell’esempio esaminato è apparso agli studenti come un caso abbastanza artificioso. Infatti basta un valore di frequenza assoluto diverso nella tabella iniziale per far saltare l’indipendenza statistica. Ci si è posti allora la domanda su come può esser stato costruito a priori un caso tanto particolare. Confrontando le tre colonne della tabella gli studenti hanno verificato che `c3 = c2 *` 9/2 mentre `c4 = c2 *` 13/2, cioè ciascuna delle tre liste di valori è multipla di una qualsiasi altra lista.

Questa osservazione è generalizzabile. Infatti l’indipendenza statistica definita come

$$\frac{n_{ij}}{c_j} = \frac{r_i}{n} \quad \forall i, j \qquad \text{implica che} \qquad \frac{n_{ij}}{c_j} = \frac{n_{ik}}{c_k} \quad \forall i, j, k$$

cioè $n_{ij} = \frac{c_j}{c_k} n_{ik} \quad \forall i, j, k$ e ciò significa che la lista *j* è multipla della lista *k*.

Viceversa, se una generica lista *j* è multipla di una qualsiasi altra lista *k*, si avrà che

$$n_{ij} = h * n_{ik} \rightarrow c_j = h * c_k \rightarrow n_{ij} = \frac{c_j}{c_k} n_{ik} \quad \forall i, j, k$$

cioè $\frac{n_{ij}}{c_j} = \frac{n_{ik}}{c_k} \quad \forall i, j, k$ e, se le colonne sono m,

$\frac{n_{i1}}{c_1} = \frac{n_{i2}}{c_2} = ... = \frac{n_{im}}{c_m}$ implica, per una proprietà delle proporzioni, che

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} n_{ik}}{\sum_{k=1}^{m} c_k} = \frac{n_{ij}}{c_j}, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{r_i}{n} = \frac{n_{ij}}{c_j} \quad \forall i, j .$$

Poiché dallo studio della geometria analitica era già noto che due vettori sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro, interpretando le due liste *j* e *k* come vettori, si è osservato pertanto nella discussione in classe che *l'indipendenza statistica è correlata quindi dal punto di vista dell'algebra lineare alla dipendenza piuttosto che all'indipendenza tra vettori*, creando così un rovesciamento nell'uso dei termini, passando da un ambito all'altro.

Il calcolo del Chi Quadro

In una lezione successiva ci si è riproposti di analizzare il livello di connessione tra due variabili statistiche introducendo il *test del chi quadro* in riferimento al seguente esempio (cfr. fig. 6) di tabella a doppia entrata di distribuzione congiunta, dove sono riportate le frequenze assolute dei voti finali in matematica in un campione di studenti suddivisi in quattro classi terze.

DATA	voti	3a	3b	3c	3d
	c1	c2	c3	c4	c5
1	3.	1.	3.	4.	1.
2	4.	6.	4.	5.	3.
3	5.	3.	2.	3.	4.
4	6.	10.	13.	9.	14.
5	7.	5.	4.	5.	2.
6	8.	1.	1.	0.	2.
7		26.	27.	26.	26.

`c1,Title="voti"`

MAIN RAD APPROX FUNC

fig. 6

La struttura della procedura matematica necessaria per il calcolo degli indici statistici è stata proposta, e discussa con gli studenti, contemporaneamente alla ricerca di una sua possibile implementazione nel `Data` costruito. E' stato immediato per gli studenti completare la tabella, come nel caso precedente, con le distribuzioni marginali in riga `r7` (cfr. fig. 6) e colonna `c6` (cfr. fig. 7).

Il passo successivo è stato la costruzione della *tabella delle frequenze teoriche*

$$\hat{n}_{ij} = \frac{r_i * c_j}{n}$$

che comporterebbero, a parità di distribuzioni marginali, l'indipendenza statistica fra le variabili. L'implementazione nelle colonne `c7, c8, c9, c10` è stata ottenuta moltiplicando ogni volta la colonna c6, della distribuzione marginale riferita al carattere voti (lista dei vari r_i), per il fattore $\frac{c_j}{n}$ relativo alla colonna corrispondente nella tabella iniziale (cfr. fig. 7).

DATA	tot	3ateor	3bteor	3cteor	3dteor
	c6	c7	c8	c9	c10
1	9.	2.2286	2.3143	2.2286	2.2286
2	18.	4.4571	4.6286	4.4571	4.4571
3	12.	2.9714	3.0857	2.9714	2.9714
4	46.	11.39	11.829	11.39	11.39
5	16.	3.9619	4.1143	3.9619	3.9619
6	4.	.99048	1.0286	.99048	.99048
7	105.	26.	27.	26.	26.

`c10=c6*26/105`

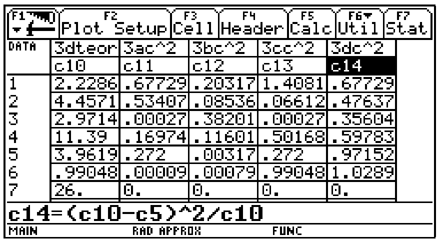
MAIN RAD APPROX FUNC

fig. 7

A questo punto sono stati inseriti facilmente nelle colonne `c11, c12, c13, c14` i quadrati delle *contingenze* (scarti tra frequenze reali e frequenze teoriche) divisi ciascuno per il corrispondente valore di frequenza teorica

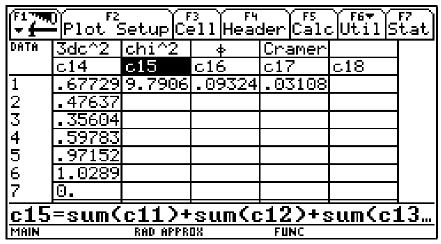
$$\frac{\left(n_{ij} - \hat{n}_{ij}\right)^2}{\hat{n}_{ij}}$$

ancora una volta operando opportunamente sulle colonne precedenti corrispondenti alle frequenze reali e teoriche (cfr. fig. 8).



DATA	3dteor	3ac^2	3bc^2	3cc^2	3dc^2
	c10	c11	c12	c13	c14
1	2.2286	.67729	.20317	1.4081	.67729
2	4.4571	.53407	.08536	.06612	.47637
3	2.9714	.00027	.38201	.00027	.35604
4	11.39	.16974	.11601	.50168	.59783
5	3.9619	.272	.00317	.272	.97152
6	.99048	.00009	.00079	.99048	1.0289
7	26.	0.	0.	0.	0.

fig. 8



DATA	3dc^2	chi^2	ɸ	Cramer	
	c14	c15	c16	c17	c18
1	.67729	9.7906	.09324	.03108	
2	.47637				
3	.35604				
4	.59783				
5	.97152				
6	1.0289				
7	0.				

fig. 9

Il valore di *chi quadro*, $\sum_i \sum_j \frac{\left(n_{ij} - \hat{n}_{ij}\right)^2}{\hat{n}_{ij}}$, è stato infine ottenuto in `c15` (cfr. fig. 9) inserendo la somma delle somme ottenute con `sum` per le varie colonne `c11, c12, c13, c14`. Semplice il calcolo, rispettivamente in `c16` e `c17`, degli indici standardizzati di *contingenza quadratica media*, $\Phi = \frac{\chi^2}{n}$, e di *contingenza di Cramer*, $C = \frac{\Phi}{h-1}$ dove *h* è il minore tra il numero delle righe e quello delle colonne.

L'uso dell'ambiente `Data /Matrix Editor` si è rivelato in definitiva utile per costruire e analizzare passo passo la struttura di un algoritmo, visualizzando contemporaneamente l'apparato formale nella definizione delle colonne ed il risultato operativo concreto nel contenuto numerico delle varie liste, facilitando così la comprensione dell'argomento agli studenti. Ma, per il calcolo del chi quadro, *possono esser percorse altre vie, operando in altri* *ambienti* della calcolatrice. Ad esempio uno studente, pur non essendo ancora stato affrontato in classe l'intero tema dell'algebra lineare, è riuscito, lavorando da solo, a costruire un programma che realizzasse tale calcolo nell'ambiente `Program Editor`. Ha considerato la tabella a doppia entrata delle frequenze assolute come variabile di tipo matrice e, consultando il manuale della calcolatrice come dizionario di comandi, ha realizzato l'algoritmo necessario tramite calcolo di matrici trasposte e operazioni tra matrici. Nelle lezioni successive il programma è stato analizzato e discusso in classe, in particolare descrivendo la struttura delle operazioni tra matrici e anticipando in questo modo temi di algebra lineare.

Si noti che è in genere possibile, con la calcolatrice, utilizzare anche operazioni non canoniche dell'algebra delle matrici, premettendo un punto al simbolo di operazione. In tal modo il risultato è, in genere, ottenuto applicando l'operazione sui singoli elementi delle matrici (ad esempio `.*` non è la moltiplicazione righe per colonne: il risultato ha in questo caso per elemento di posto *ij* il prodotto degli elementi di posto *ij* delle due matrici di partenza). Ciò permette una *maggior versatilità dell'algebra matriciale*, come strumento di possibile intervento in diversi ambiti, in questo caso relativamente ad un problema di statistica. Si è cercato pertanto di caratterizzare maggiormente con la sintassi matriciale il programma proposto, eliminando in implementazione diversi utilizzi della struttura iterativa `for` e pervenendo ad una formulazione espressiva del programma più sintetica. Per tale scopo si è ricorso anche al comando `sum` che, applicato ad una matrice, restituisce un vettore riga con elementi le somme delle varie colonne della matrice (utile per il calcolo di distribuzioni marginali) e quindi applicato ad un vettore riga restituisce la somma dei suoi elementi.

Si osservi anche la presenza nella calcolatrice dei seguenti comandi particolarmente funzionali:

- L'operatore `dim`(*A*) che calcola la dimensione di una matrice *A* restituendola come lista.
- L'operatore *A*™ che calcola la trasposta di una matrice *A*.
- L'operatore `min`(lista) che restituisce il valore minimo di una lista, utilizzato per la determinazione dell'indice di Cramer.

Il *listato della versione finale del programma* a cui si è pervenuti è il seguente:

```
chiquadr(freq)
Prgm
Local dimens, i, j, sumcol, sumrig, nelem, freqteo,
contiqr, chi, fi, cramer
ClrIO
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
freq » freqteo
freq » contiqr
sum(freq) » sumcol
Disp "distribuzioni marginali:", sumcol
sum(freq™ ) » sumrig
Disp sumrig
sum(sumrig™ ) » nelem
nelem[1,1] » nelem
Disp "n¬ unitÜ: " & string(nelem)
dim(freq) » dimens
For i,1,dimens[1]
   For j,1,dimens[2]
     sumrig[1,i]*sumcol[1,j]/nelem » freqteo[i,j]
  EndFor
EndFor
(freq-freqteo).^2 ./ freqteo » contiqr
sum((sum(contiqr))™ ) » chi
chi[1,1] » chi
Disp "chiquadro: " & string(chi)
chi/nelem » fi
Disp "Fi: " & string(fi)
fi/(min(dimens)-1) » cramer
Disp "Cramer: " & string(cramer)
EndPrgm
```

La tabella di distribuzione congiunta delle frequenze assolute dell'esempio precedente può essere inserita come `Matrix` (votimat) nell'ambiente `Data /Matrix Editor` (cfr. fig. 10).

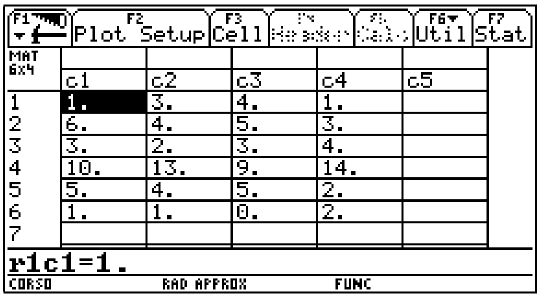


fig. 10

Successivamente in `Home` la chiamata `chiquadr(votimat)` farà eseguire il programma, passando come parametro la variabile matrice. Si ottengono così i risultati nella seguente schermata (cfr. fig. 11) della lavagna di esecuzione.

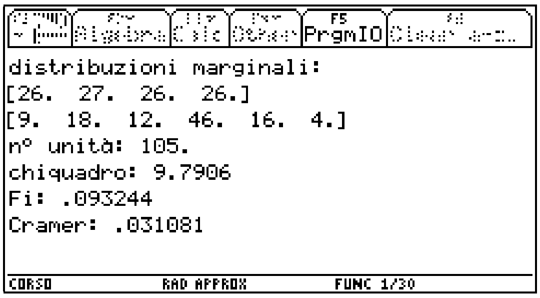


fig. 11

31. STATISTICA E PROBABILITÀ: ALCUNE IDEE[i]

LUCIO CAROSATI
Liceo Scientifico "G. Galilei" Ancona

L'uso di una calcolatrice grafica con le potenzialità della TI-92 (tabelle, grafici, programmazione, potenti funzioni predefinite) permette di introdurre i concetti matematici in modo più operativo e amichevole rispetto alla metodologia tradizionale e spesso si presenta la possibilità di ampliare il campo di problemi senza ancora aver completato l'iter teorico normalmente necessario per affrontarli. Anzi talvolta è proprio l'osservazione di ciò che accade sulla "macchinetta" che porta a nuove questioni.

Quello che segue è un insieme (limitato) di idee circa l'introduzione di alcuni concetti di Probabilità e Statistica in un triennio di scuola superiore (talvolta applicabili anche al biennio).

Non è necessario che i ragazzi conoscano già tutti i comandi necessari, anzi mentre si risolvono problemi essi impareranno ad usare la TI-92 e ad apprezzarne le potenzialità.

Si evita così il classico periodo di addestramento, spesso arido e noioso, che porta via tanto del poco tempo che gli insegnanti hanno a disposizione. Questo è possibile grazie al View Screen, il Data Display dedicato alla TI-92, mediante il quale possiamo far vedere "come si fa" e subito dopo farlo eseguire dai ragazzi.

Verranno esposti alcuni problemi che possono essere proposti in classe, i concetti che si intende presentare mediante l'uso della TI-92 e le note tecniche necessarie per realizzare le attività proposte.

Si suppone che chi legge abbia un minimo di capacità nell'uso della TI-92, tuttavia i comandi necessari verranno scritti in modo da poter realizzare effettivamente quanto proposto.

1. Introduzione ai concetti statistici.

Finalità : presentare agli alunni alcuni concetti di statistica e qualcuna delle elaborazioni che li riguardano.

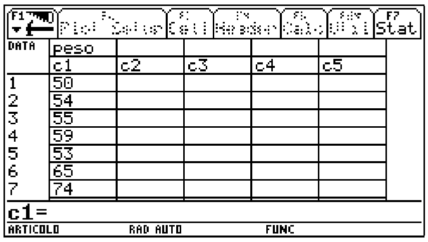
Problema 1 : *"qual è il peso medio della classe ?"*

Fase 1 : Concetti introdotti: *variabile statistica, frequenza assoluta, tabella di distribuzione.*

Inseriamo in una tabella (nella colonna C1 come nella figura PESI) i valori dei pesi dei ragazzi; potrebbero essere i valori seguenti (si tratta di 50 valori, riferiti a due classi parallele; i pesi sono espressi in kg e arrotondati al kg)[1]:

50	62	45	62	67	55	53
54	56	47	51	68	67	62
55	55	56	50	53	66	
59	58	73	59	47	67	
53	62	71	58	46	59	
65	61	63	64	51	48	
74	73	65	65	58	54	
71	48	49	57	68	55	

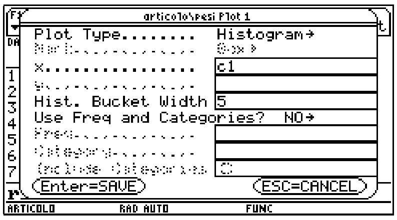
Pesi di 50 alunni (in kg)



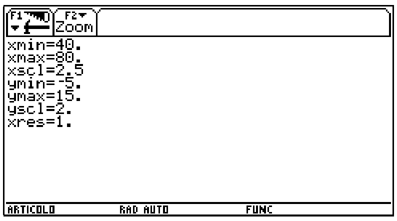
PESI

Per creare la tabella premiamo O { ª e digitiamo il nome della tabella : PESI.

Prima di elaborarli rappresentiamoli graficamente con un istogramma delle frequenze che la TI-92 trae dall'elenco dei dati grezzi.
Definiamo allora l'istogramma premendo „ e poi ƒ . Compare la finestra di definizione dei parametri che imposteremo come nella figura PARAMETRI 1. Con ¸ avremo definito un grafico di tipo PLOT (Plot 1), cioè di tipo statistico. La TI-92 suddivide i dati grezzi in varie classi determinate dalla larghezza impostata (Hist. Bucket With = 5 , in PARAMETRI 1) . Le frequenze della tabella di distribuzione possono essere ottenute esaminando l'istogramma.



PARAMETRI 1



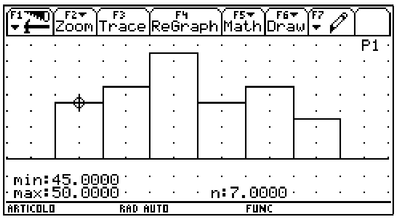
WINDOW

[1] La variabile "peso" è continua per cui i valori che vengono misurati dovranno essere approssimati. Rispetto a variabili con valori discreti (qualitative) c'è qualche difficoltà in più tuttavia, sul piano didattico, può non essere un male: è sempre l'insegnante che gestisce l'attività che vuole sviluppare in classe e quindi anche il grado di difficoltà. Il "peso" è comunque una variabile piuttosto vicina all'immaginario degli alunni (e non solo) e per questo il Problema 1 può sorgere anche come domanda spontanea. In ogni caso sarà preferibile iniziare da questioni più significative per gli alunni, anche se più complesse, piuttosto che da situazioni più semplici, ma con il vizio della costruzione artificiosa come spesso accade nell'insegnamento della matematica.

Per avere un buon grafico impostiamo prima le caratteristiche della finestra di visualizzazione con ¥ $.

Sappiamo già che il peso sarà compreso fra 40 e 80 kg, per cui impostiamo questi valori (vedi WINDOW) come estremi orizzontali della finestra (*xmin=40* , *ymin=80*). Inoltre ipotizziamo che le frequenze non supereranno 15 e vogliamo avere una parte della finestra (in basso) libera dal grafico: ecco allora *ymin=-5* e *ymax=15* . Infine *xscl=2.5* e *yscl=2* indicano le dimensioni orizzontali e verticali della griglia che compare sullo sfondo.

Ora passiamo all'istogramma con ¥ % (figura ISTOGRAMMA). Per vedere anche la griglia premiamo ƒ e poi O *(Format)* , selezioniamo quindi *Grid on* (usando il cursore @ e >) ed infine ¸ .
L'istogramma comparirà proprio come nella figura.



ISTOGRAMMA

Premendo ora … *(Trace)* compare un cursore a sinistra dell'istogramma e in basso compaiono gli estremi e la frequenza della classe. Spostando il cursore con = e > si possono esplorare le frequenze assolute delle varie classi e ottenere così la tabella della distribuzione delle frequenze.

Fin qui, oltre a far acquisire una certa manualità sulla TI-92 abbiamo introdotto anche alcuni concetti:

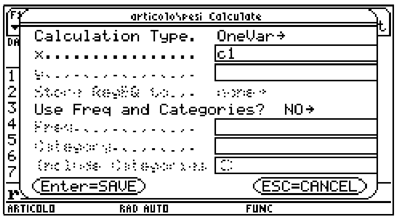
il peso è la <u>variabile</u>, i cui valori sono stati elencati nella colonna; osservando <u>l'istogramma</u> abbiamo ricavato le <u>frequenze</u> che possiamo scrivere nel quaderno costruendo così la <u>tabella di distribuzione delle frequenze</u> (assolute).

Fase 2: <u>Concetti introdotti</u>: *media aritmetica, varianza, scarto quadratico medio (sqm).*

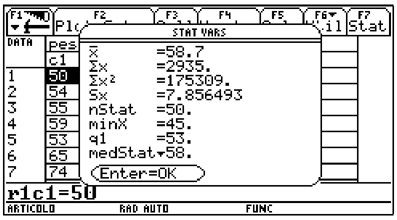
Elaboriamo i dati introdotti. Lo facciamo fare alla TI-92, che in un sol colpo calcola anche gli indici di dispersione. Quindi va ben al di là delle aspettative (il peso medio). Questo è decisamente opportuno: si può subito parlare ai ragazzi non solo della problematica della sintesi dei valori in un numero ma anche di quella della dispersione.

Il tempo perso per lavorare con la TI-92 si guadagna in termini di interesse, di manualità sulla macchina, ma anche di velocità di presentazione dei concetti partendo non dalla teoria ma dalla risoluzione dei problemi rendendo così gli argomenti più appetibili e concreti.

Torniamo alla tabella corrente con O { ¨ , poi con ‡ *(Calc)* passiamo alla impostazione dei parametri del calcolo (figura PARAMETRI 2). Premendo ¸ l'elaborazione viene eseguita e si hanno i risultati come in figura (ELAB 1).



PARAMETRI 2



ELAB 1

Con la classe si può discutere per ora sulla media e sullo scarto quadratico medio (ed eventualmente sulla mediana): introduciamo così un po' di teoria e le formule relative, che utilizzeremo per verificare i risultati della TI-92.

Creiamo allora una nuova tabella (di nome PESIMS) in cui introdurremo la tabella delle frequenze ottenuta prima :

valore medio della classe	47.5	52.5	57.5	62.5	67.5	72.5
frequenza assoluta	7	9	13	7	9	5

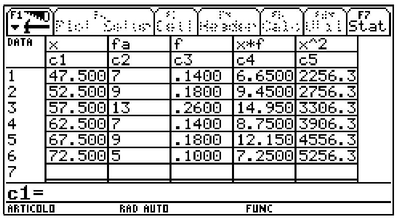
Inseriamo poi in colonne successive le formule:[2]

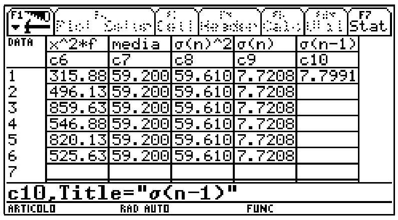
c3= approx(c2/(sum(c2))) c7= seq(sum(c4),k,1,dim(c1))
c4= c1*c3 c8= sum(c6)-c7^2
c5=c1^2 c9=√(c8)
c6=c5*c3

[2] Per inserire una formula in una colonna: portare il cursore nella seconda riga, premere ¸ , digitare la formula, premere di nuovo ¸ .

per calcolare la media e lo scarto quadratico medio.

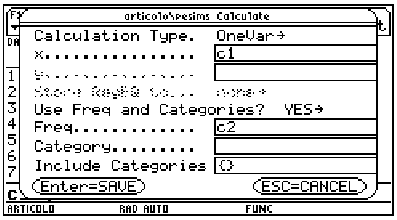
In colonna C9 troviamo *σ(n)* come media quadratica degli scarti.

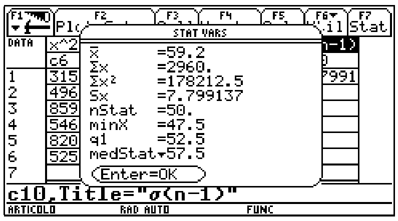




PESIMS altre colonne

Ora confrontiamo i nostri risultati con quelli ottenibili dalla TI-92. Con ‡ *(Calc)* impostiamo i parametri come in PARAMETRI 3 in cui vediamo l'uso delle frequenze, presenti in C2. Con ¸ otteniamo i risultati della figura





PARAMETRI 3 ELAB 2

Si nota che *Sx* , che dovrebbe essere lo *sqm* , è un po' diverso. In effetti la TI-92 usa direttamente *σ(n-1)* , cioè lo *sqm* corretto per piccoli campioni (si ottiene una migliore stima per lo *sqm* della popolazione, ma per *n>30* non ci sono differenze rilevanti).

La formula per *σ(n-1)* potremmo inserirla come segue in C10 :

c10= √(sum(c2*(c1-c7)^2/(sum(c2)-1)))

Possiamo anche notare due modi diversi di elaborare le tabelle: nelle prime colonne impostiamo gli elementi necessari per poi calcolare *σ(n)* in C9, invece in C10 mettiamo un'unica formula.

Inoltre in C7 la media viene posta in tutte le righe della tabella, perché poi verrà usata per il calcolo di *σ(n)* , questo perché nella TI-92 non è possibile utilizzare un solo dato per combinarlo con tutti quelli di un'altra colonna.

Problema 2 : *"è andato meglio l'ultimo compito in classe o il precedente ?"*

Concetti introdotti: *confronto tra distribuzioni.*

È un problema abbastanza stimolante (i ragazzi si sentono coinvolti direttamente). Si possono confrontare due compiti della stessa classe o di classi parallele.

Si tratta di calcolare i valori di sintesi e di dispersione (facile con ‡ *Calc*) ed osservare come si dispongono i dati rispetto al valor medio.

Per meglio evidenziare come sia necessario tener conto degli scarti e dello *sqm* si può procedere per gradi cominciando con due distribuzioni fittizie con *media* uguale ma diverso *sqm*, in modo da notare come la *media* sia insufficiente a rappresentare la distribuzione delle frequenze. Si giustifica così il calcolo dello *sqm*.

Problema 3 : *"e tu nell'ultimo compito in classe sei migliorato o no rispetto alla media della classe ?"*

Concetti introdotti: *confronto tra distribuzioni, normalizzazione dei dati.*

È un approfondimento non necessario subito. È comunque utile e interessante perché introduce il calcolo dei valori *normalizzati (punteggi zeta*) senza con questo parlare per ora di curva normale; passa però il concetto che, per *rendere confrontabili situazioni diverse*, è bene renderle indipendenti dall'influenza della *media* e dello *sqm*.

Si applica quindi una prima trasformazione (traslazione orizzontale) dei dati: $x' = x - \mu$, in modo da "centrare" tutti i dati rispetto all'origine.

Si tratta poi di far vedere che è necessario anche portare gli *sqm* nella stessa posizione in modo da renderli confrontabili, il che significa prenderli come unità di misura degli scarti in entrambe le distribuzioni.

C'è allora da applicare l'omotetia (sempre orizzontale) $x'' = \frac{x'}{\sigma}$ e quindi complessivamente la trasformazione $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ che permette di confrontare lo scostamento dal valor medio di due dati anche di distribuzioni diverse.

Gli alunni sono piuttosto interessati a questi confronti e tendono poi ad applicarli alle prove successive per vedere come si collocano rispetto alla media della classe (e quindi a confrontare il loro andamento relativo).

Anche se non si è arrivati alla curva normale la strada è aperta.

2. Dalla statistica alla probabilità.

Finalità : introdurre il concetto di probabilità nelle varie impostazioni del calcolo delle probabilità; introdurre il concetto di variabile aleatoria (casuale).

Il concetto di variabile aleatoria è piuttosto oscuro (e astruso) se presentato in modo formale partendo da situazioni solo probabilistiche, in particolare fatte di Teste, Croci e palline Bianche e Nere, soprattutto non se ne comprende l'utilità quando tutto sommato per calcolare la probabilità degli eventi basta appunto il concetto di "evento".

Un'idea per superare l'ostacolo è quella di introdurre la probabilità dopo la statistica, partendo inizialmente da un fenomeno statistico in cui già il concetto di variabile statistica è stato acquisito.

<u>Problema 1</u> : *"facciamo lanciare un dado dalla …TI-92 !"*

All'inizio si introduce la funzione *Rand(n)* della TI-92 e si prende confidenza con il concetto di *numero aleatorio* (basta chiamare i ragazzi per l'interrogazione utilizzando tali numeri della TI-92 invece del solito numero di pagina, tutt'altro che equanime).

Poi si passa alla simulazione, in una tabella, del lancio di un dado (30 lanci sono sufficienti).

Si ha così una tabella di dati (aleatori) che possono essere elaborati esattamente come quelli di una tabella statistica (si cercano le frequenze di uscita delle varie facce).

È bene osservare anche l'*istogramma*.

Ad ogni rientro nella tabella (O { ¨) i lanci vengono ripetuti e così si può notare che le uscite delle varie facce non sono sempre in egual numero.

Dopo aver osservato vari istogrammi si pongono i due problemi:

<u>Problema 2</u> : *"se io punto 1000 lire sul 3 quanto punteresti tu sul 6 ?"*

<u>Problema 3</u> : *"c'è una faccia su cui ti senti di puntare di più ?"*

La discussione in genere si accende perché non per tutti è naturale pensare che non ci sono preferenze particolari per assegnare un maggior *grado di fiducia* ad una delle facce. Nonostante accada che le uscite cambino continuamente, per alcuni qualche faccia potrebbe presentarsi più facilmente.

In effetti tale posizione concettuale non è peregrina perché la TI-92 non effettua un vero lancio "casuale", ma una semplice simulazione attraverso un algoritmo di calcolo. Questa posizione dubbiosa è utile però per presentare la differenza tra i numeri casuali e quelli pseudo-casuali che dei primi mantengono solo la pressoché uniforme distribuzione su un grande numero di lanci.

Tutti si convincono in genere che nel caso del lancio di un *vero dado* non ci sono motivi particolari per assegnare la preferenza ad una faccia invece che ad un'altra.

Tuttavia anche questa equidistribuzione ipotetica delle uscite è una semplice congettura, un *grado di fiducia* assegnato alle varie facce.

Si arriva così ai vari concetti di probabilità:

- *classica : spontanea e intuitiva*
- *soggettiva : non si hanno motivi per ritenere una faccia più probabile delle altre (probabilità = grado di fiducia)*
- *frequentista : si arriva ad 1/6 notando (legge empirica del caso) la tendenza alla coincidenza delle frequenze aumentando il numero di* lanci.

La conclusione è che possiamo esaminare i fenomeni non solo dopo che si sono verificati (*statistica*) ma anche prima che si verifichino o, pur essendosi verificati, in assenza di informazioni deterministiche sugli eventi stessi (*probabilità*)[3].

Avremo ancora *variabili* , non più statistiche ma *casuali*, popolazioni ed unità *(universo degli esiti, eventi*), valori di sintesi e dispersione (*media, varianza, sqm*): la probabilità è un numero che svolge lo stesso ruolo della frequenza relativa, le facce del dado sono come le persone di cui rileviamo il peso (eventi), i valori disegnati sulle facce del dado sono i valori possibili di una variabile (aleatoria) come quelli di una variabile statistica (il peso), la tabella che ad ogni valore della faccia assegna una probabilità è l'equivalente della tabella di distribuzione delle frequenze.

[3] Ad esempio se lancio un dado e non guardo quale faccia è uscita (potrei spegnere la luce !) l'evento si è verificato comunque ma non ho informazioni deterministiche che mi permettono di individuare il numero uscito. Ho solo informazioni non deterministiche, cioè il fatto che il dado ha sei facce ma nient'altro. Per questo motivo sarebbe indifferente puntare su una faccia prima o dopo il lancio, purché nel secondo caso non si conosca quale faccia è uscita.

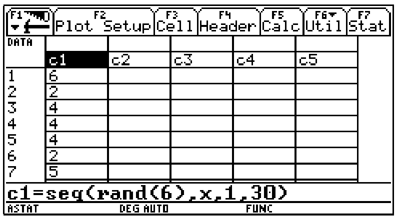
Il ponte dalla statistica alla probabilità e alle variabili casuali è stato gettato: si tratta ora solo di sviluppare il discorso.

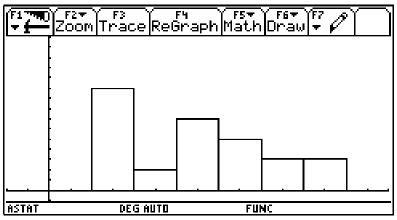
<u>Concetti introdotti</u>: *numeri casuali e pseudo-casuali, probabilità.*

Con O { ª DADO si apre una nuova tabella[4] .
Introdurre nella colonna C1 la formula *seq(rand(6),x,1,30)* per generare una lista di numeri casuali.

Elaborare la tabella come quella dei pesi (vedi le indicazioni per PESI e le figure del paragrafo 1).

Le figure relative alla tabella DADO sono le seguenti:





3. Distribuzioni di probabilità.

Finalità : far lavorare gli alunni sulle distribuzioni più importanti, binomiale, gaussiana, di Poisson; della prima si dovrà raggiungere una comprensione completa, delle altre si darà solo l'idea di come si collegano con la binomiale.

3.1 La passeggiata dell' "ubriaco".[5]

Un ubriaco si trova a dover tornare a casa ma non sa come arrivarci, visto il suo stato confusionale. La mappa del territorio è rappresentata nella figura alla pagina successiva.

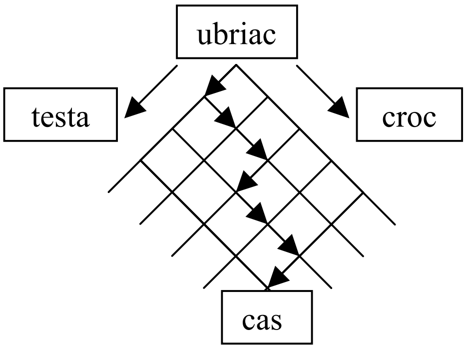
Il quartiere è disposto in modo regolare e lui sa che si trova a 7 isolati di distanza (un isolato corrisponde ad un lato di un palazzo).

Decide di lanciare, ad ogni bivio, una monetina. Se viene Testa prende la strada alla sua destra, se viene Croce quella alla sua sinistra e poi avanza di un isolato.

[4] *DATA EDITOR*: se succede di dover cancellare delle colonne, per errori di impostazione della tabella, accade che si blocca il calcolo sulla prima formula che non trova più i riferimenti corretti. In questo caso da F1 (di DATA EDITOR) disattivare l'Auto-calcolo (opzione *9:Format…*), poi modificare tutte le formule delle varie colonne ed infine riattivare l'Auto-calcolo.

[5] Il problema è tratto dal libro di G.Prodi *"Matematica come scoperta"*, vol. 1 (Ed. D'Anna).

Problema 1 : *"Che probabilità ha l'ubriaco di arrivare a casa ?"*



Il problema è abbastanza complesso e richiede una scomposizione in sottoproblemi.

Discutendo con i ragazzi arriviamo alla necessità di dover calcolare preliminarmente il numero dei casi favorevoli (cioè il numero dei cammini che arrivano all'abitazione dell'ubriaco) e il numero dei casi possibili (cioè il totale di cammini possibili effettuando 7 lanci della moneta).

Come problema preliminare si può allora proporre il seguente:

Problema 2 : *"simulare il percorso dell'ubriaco tracciandolo sullo schermo grafico della TI-92".*

La rappresentazione potrà essere realizzata mediante l'ambiente grafico della TI-92.

Anche questo problema è abbastanza impegnativo perché richiede alcune scelte dal punto di vista grafico per ben posizionare l'insieme dei cammini, per gestire le direzioni del tracciamento, per tenere sotto controllo le coordinate dell'ubriaco mentre avanza. È un bel progettino grafico da realizzare.

Comunque si potranno raggiungere diversi obiettivi:

- attenta analisi grafica del problema (non banale);
- utilizzo della grafica della TI-92 (in particolare il tracciamento di *Line* per i segmenti e di *PxlText* per eventuali commenti);
- utilizzo di numeri casuali (pseudo) con *Rand(n)*;
- programmazione nel linguaggio della TI-92, con uso di cicli *For* più o meno evoluti (a seconda delle possibilità dell'alunno);
- utilizzo di variabili all'interno del ciclo che traccerà il cammino, per controllare la posizione dell'ubriaco.

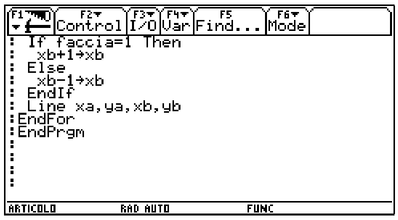
Possiamo in ogni caso fare affidamento sul fatto che la TI-92 possiede un linguaggio di programmazione evoluto ed amichevole per la grafica cartesiana (e non solo). Si tratta di un *linguaggio strutturato*, che può utilizzare tutte le funzioni predefinite nella ROM della macchina ed in più tutte quelle definite dall'utente. Utilizza inoltre parametri di input, se necessario, e diverse modalità grafiche.

È un sistema veramente potente.

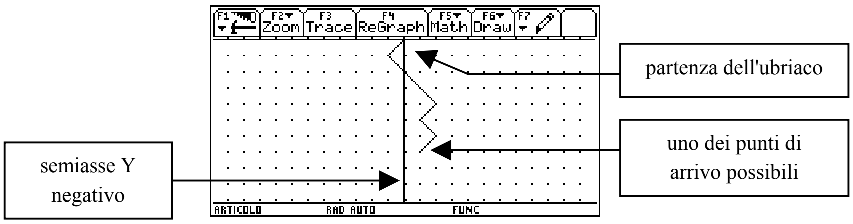
Il Problema 2 può essere rappresentato in molti modi diversi, in base alle scelte grafiche operate dagli alunni. Sarà comunque necessario spostare l'origine degli assi per far spazio alle tracce dei cammini. Questo si ottiene agendo, da programma, sui parametri della finestra $ (figura UBRIAC1, 4ª e 5ª riga; inoltre xa,ya,xb,yb sono poste come variabili globali in modo da essere visibili dall'esterno di *ubriac1()* qualora fosse usato come sottoprogramma).

Un possibile programma che risolve il problema è il seguente e l'effetto è quello nella figura CAMMINO:[6]

UBRIAC1



il resto del programma



CAMMINO

[6] Per editare il programma premiamo O m ª e digitiamo il nome *ubriac1*. Premendo poi due volte ¸ (la prima per confermare il nome) si entra nell'Editor in cui potremo digitare le istruzioni. Il nome viene inserito automaticamente nella prima riga e non è modificabile. Inoltre è già presente all'inizio di ogni riga il simbolo â (due punti) che funge da separatore delle istruzioni del programma.
Al termine, per eseguire il programma, si passa all'ambiente Home (con ¥ "). Il programma rimane comunque presente nel Program Editor.
Ora in Home digitiamo (nella riga di Edit) il nome del programma (*ubriac1()*) seguito da ¸ .

Tracciando un cammino casuale abbiamo posto le basi per contarli e per trovare la probabilità richiesta (di tornare a casa).

Eseguendo molte volte il programma *ubriac1()* si vedranno le tracce di molti cammini diversi (proprio perché casuali).

Potrebbe allora essere interessante contare tutti quelli che arrivano ad un determinato punto. Si tratta di inserire il programma *ubriac1()* in un ciclo che lo ripeta finché l'utente lo ritiene opportuno, quindi in un *while true ... endwhile* (che potrà essere interrotto premendo Ï).

Nel frattempo il programma dovrà contare i cammini che arrivano ai vari punti finali possibili con 7 lanci (mettiamo i contatori in una *matrice 1x8*).

È bene anche visualizzare il conteggio, man mano che procede. Lo faremo evidenziando in posizioni vicine ai punti di arrivo dell'ubriaco il numero totale di cammini raggiunto fino a quel momento (uso di *PxlText*).

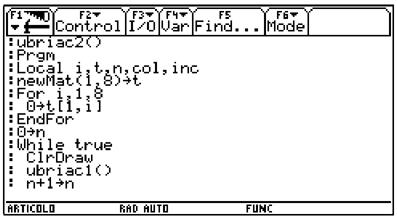
Povero ubriaco! A forza di ricominciare sempre daccapo il suo tentativo di ritorno a casa "probabilmente" si stancherà. O magari la "sbornia" gli passa e, più cosciente, non deve più tentare la sorte.

Intanto però i ragazzi intravedono il bel diagramma "a rete" che prelude allo studio delle combinazioni e del modello di Bernoulli (con tanto di triangolo di Tartaglia-Pascal).

Proponiamo allora il …

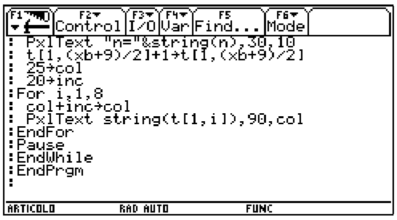
<u>Problema 3</u> : *"Far eseguire, con un loop infinito, il tracciamento di un cammino casuale e, ad ogni ciclo, contare per ogni possibile punto di arrivo il numero di cammini che raggiungono quel punto. Visualizzare anche i totali parziali accanto ad ognuna delle possibili posizioni di arrivo. Ad ogni ciclo visualizzare solo l'ultimo cammino percorso. "*

Il problema non è tanto più complesso di prima e potremo inserire *ubriac1()* come sottoprogramma. Un programma possibile (*ubriac2()*) è il seguente:



```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:ubriac2()
:Prgm
:Local i,t,n,col,inc
:newMat(1,8)→t
:For i,1,8
:  0→t[1,i]
:EndFor
:0→n
:While true
:  ClrDraw
:  ubriac1()
:  n+1→n
ARTICOLO RAD AUTO FUNC
```

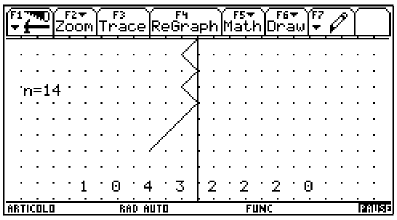
UBRIAC2



```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:  PxlText "n="&string(n),30,10
:  t[1,(xb+9)/2]+1→t[1,(xb+9)/2]
:  25→col
:  20→inc
:For i,1,8
:  col+inc→col
:  PxlText string(t[1,i]),90,col
:EndFor
:Pause
:EndWhile
:EndPrgm
:
ARTICOLO RAD AUTO FUNC
```

e le altre linee

e questo è l'effetto grafico risultante dopo l'interruzione al 14° ciclo (con Ï):

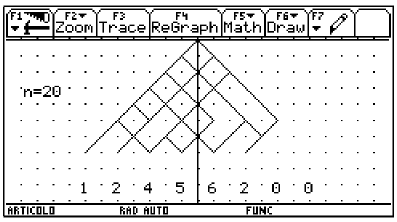


Se lasciamo andare avanti l'ubriaco per un numero elevato di tentativi saranno percorsi almeno una volta tutti i cammini (non è un fatto certo, ma comunque ci si può fare abbastanza affidamento, tanto più che stiamo usando numeri pseudo-casuali, generati con un algoritmo).

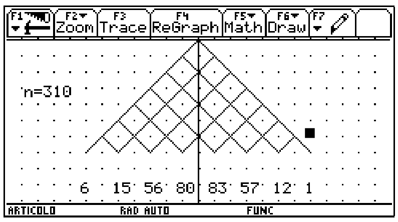
Spostando l'istruzione *ClrDraw* prima del ciclo *while* e togliendo *Pause* avremo un programma che lascia la traccia di tutti i cammini e procederà finché non premiamo Ï . Dopo un numero elevato di tentativi avremo la "rete" completa (come in RETE2).

Nella figura RETE1, ottenuta dopo 20 tentativi, si nota che i cammini centrali sono stati percorsi più di altri, anche se non siamo in grado di stabilire una probabilità attendibile (troppo poche sono le prove effettuate).

In RETE2, dopo 310 tentativi,[7] tutti i cammini sono stati percorsi e già si potrebbe parlare di probabilità vista la simmetria, non perfetta, ma significativa, che si riscontra sui totali calcolati. Aumentando il numero delle esecuzioni i dati



RETE1



RETE2

diventeranno sempre più attendibili.
In effetti i valori dei rapporti, cioè delle frequenze relative, sono:

rapporti =	.019	.048	.181	.258	.268	.184	.039	.003

[7] Il numero 310 è relativo alla esecuzione del programma effettuata in figura e ovviamente cambia ad ogni esecuzione visto che i cammini vengono tracciati in modo casuale (pseudo).

Se interpretiamo allora le <u>frequenze come valori approssimati delle probabilità</u> possiamo dire che, supponendo di dover raggiungere la casa dell'ubriaco con 3 Teste e 4 Croci, <u>la probabilità sarà</u>:

$$p = \frac{83}{310} \cong 0.268 \ .$$

Non siamo ancora in grado, invece, di calcolare i valori teorici. Ci manca il concetto di <u>*combinazione*</u> ma non siamo distanti dall'obiettivo.

Potremmo indicare con $C_{n,k}$ il numero dei percorsi che arrivano ad un certo punto finale (contati una sola volta), dove n è il numero delle monete lanciate ovvero di isolati, e k è il numero di teste uscite ($k=0..n$).

Dal diagramma "a rete" si deducono immediatamente le proprietà dei numeri $C_{n,k}$

- $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ (simmetria)
- $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$ (ovvio)
- $C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}$ (basta osservare i due nodi che precedono un certo punto finale)

Calcoliamo allora tali numeri sfruttando le proprietà scoperte e costruiamo sulla carta il <u>*Triangolo di Tartaglia_Pascal*</u>. Notiamo anche che essi sono proprio i <u>*coefficienti binomiali*</u>. Facciamo infine prendere agli alunni un po' di dimestichezza con le varie righe del Triangolo suddetto.

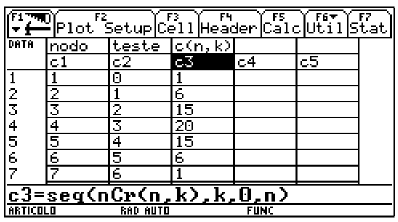
Un aiuto all'ultima esigenza viene ancora dalla TI-92 : lo sforzo di far generare alla macchina tali numeri costringe a controllare la correttezza dei risultati e questo porta ad una maggior confidenza con i simboli $C_{n,k}$.

<u>Problema 4:</u> *"rappresentare in una tabella i coefficienti $C_{n,k}$ (cioè in un triangolo di Tartaglia-Pascal) con n prefissato."*

I numeri $C_{n,k}$ nella TI-92 sono generati dalla funzione predefinita *nCr(n,k)* in cui i parametri *n* e *k* o sono numeri naturali o sono variabili istanziate in *Home*.

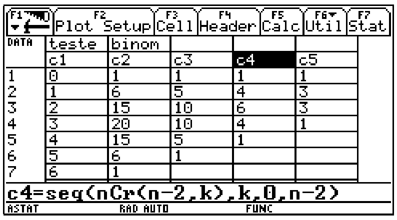
La tabella COMBI calcola $C_{n,k}$ con $n=5$:

c1=seq(x,x,1,n+1)
c2=seq(x,x,0,n)
c3=seq(nCr(n,k),k,0,n)



COMBI

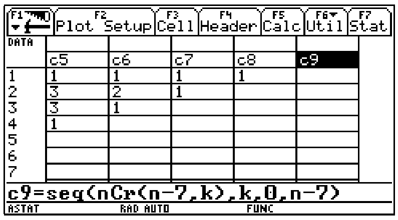
La tabella PASCAL riproduce invece il triangolo di Pascal con i coefficienti $C_{n,k}$ disposti su colonne:



DATA	teste	binom			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0	1	1	1	1
2	1	6	5	4	3
3	2	15	10	6	3
4	3	20	10	4	1
5	4	15	5	1	
6	5	6	1		
7	6	1			

c4=seq(nCr(n-2,k),k,0,n-2)

PASCAL con $n=6$



DATA					
	c5	c6	c7	c8	c9
1	1	1	1	1	
2	3	2	1		
3	3	1			
4	1				
5					
6					
7					

c9=seq(nCr(n-7,k),k,0,n-7)

e le altre colonne

c1=seq(k,k,0,n)
c2=seq(nCr(n,k),k,0,n)
c3=seq(nCr(n-1,k),k,0,n-1)

c4=seq(nCr(n-2,k),k,0,n-2)
………….
c10=seq(nCr(n-8,k),k,0,n-8)

Con le formule introdotte (fino alla colonna C10) si può arrivare fino ad $n=8$ per avere un triangolo completo. Con $n>8$ si avranno le ultime 9 righe del triangolo.

Cambiando n più volte (in *Home*) si può osservare la diversa lunghezza (in numero di cifre) dei coefficienti binomiali. I più "lunghi" sono concentrati verso il centro della riga del triangolo (cioè della colonna nella tabella).

Si comincia ad intravedere un andamento a "campana".

Torniamo ora alle <u>*combinazioni*</u>, il cui legame con i <u>*cammini*</u> è molto forte.
Il cammino dell'ubriaco (con 7 lanci) può essere rappresentato con la sequenza di T e C che lo generano:

T	**C**	**C**	**T**	**C**	**C**	**T**

ma anche con

T			**T**			**T**

se tralasciamo le Croci.

Allora individuare uno dei cammini equivale ad individuare uno dei modi con cui si possono posizionare le 3 Teste nei 7 posti disponibili nella tabella.

Se ora prendiamo un insieme con 7 oggetti (oggetti che individuiamo genericamente con X) e vogliamo prelevarne 3 (cioè vogliamo una "combinazione di 7 oggetti in 3 posti", ovvero un "sottoinsieme con 3 elementi") possiamo rappresentarlo con

X			**X**			**X**

dove le X indicano quali elementi sono stati prelevati.

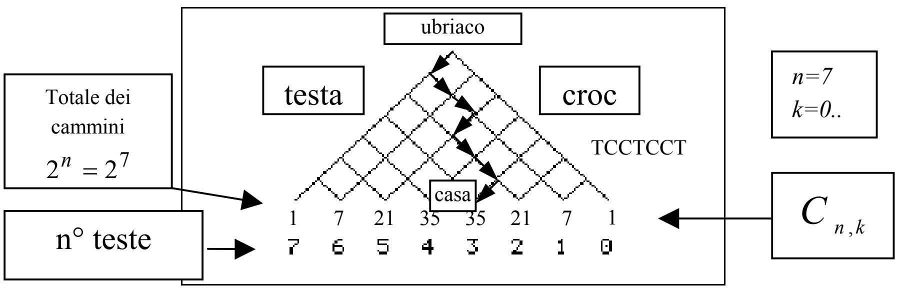
Ma allora ogni sottoinsieme di 3 oggetti può anche rappresentare un cammino con 3 Teste e viceversa.

Concludiamo che $C_{n,k}$ rappresenta non solo il numero di *cammini* con k Teste su n lanci, ma anche il numero di sottoinsiemi (che chiamiamo *combinazioni*) formati da k elementi prelevati da n oggetti.

Finalmente possiamo calcolare la probabilità richiesta dal Problema 1:

$$p = \frac{C_{7,3}}{C_{7,7} + C_{7,6} + \ldots + C_{7,1} + C_{7,0}} = \frac{35}{2^7} = \frac{35}{128} \cong 0.273 .$$

La figura seguente è una sintesi del modello dell'ubriaco.



3.2 La distribuzione Binomiale.

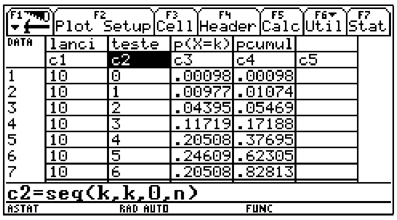
È possibile ora passare in classe al modello della *distribuzione binomiale*. Lo potremo fare attraverso una adeguata attività didattica su problemi dedicati, da risolvere con carta e penna.

Anche in questo campo tuttavia la TI-92 può essere utile.

Ad esempio è interessante osservare come variano le probabilità *P(X=k)* al variare di *k* (*k=n° di teste su n lanci di una moneta*) sia per una moneta simmetrica che non simmetrica (modello di *Bernoulli* con $p \neq \frac{1}{2}$).

<u>Problema 1</u> : *rappresentare graficamente le probabilità P(X=k) al variare del numero di Teste (k) per un certo numero di lanci (n).*

Nell'ambiente *Home* assegniamo i valori desiderati alle variabili *p* ed *n*, poi costruiamo una tabella come BINO (O { ª *bino*) :

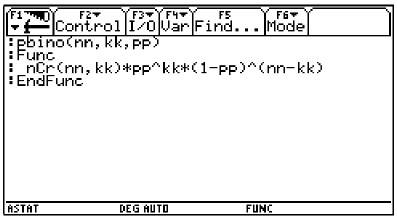


c1=seq(n,x,1,n+1)
c2=seq(k,k,0,n)
c3=pbino(c1,c2,p)
c4=cumsum(c3)

BINO con n=10, p=0,5

pbino(c1,c2,p) è una funzione che calcola la probabilità dell'uscita di *k* Teste in *n* lanci, con *p=P(Testa)*, quindi:

pbino(n,k,p) = P(X=k)



Questa formula è ormai nota ai ragazzi che possono preparare da soli la funzione relativa.

Si ottengono i grafici seguenti (e molti altri) sui quali si andrà a discutere circa il loro significato.

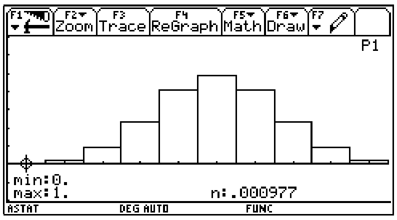
Conviene prima vedere un istogramma e poi un grafico a linee.

Per definirli partendo dal *Data/Matrix Editor* premere ƒ (*Plot Setup*) „ (*Define*) ed introdurre i parametri seguenti:

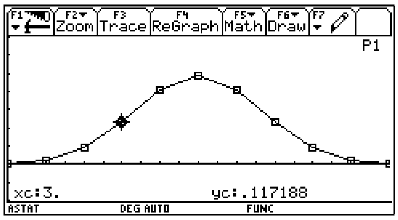
Plot1 : Plot Type=Histogram, x=c2, Use Freq …=YES, Freq=c3 ;
Plot2 : Plot Type=xyline, Mark=Box, x=c2, y=c3, Use Freq …=NO.

Inoltre per ottenere grafici leggibili impostare i parametri di $ in modo adeguato ai dati delle tabelle oppure usare le varie opzioni di *Zoom* tra cui

ZoomData e *SetFactors* per opportuni ingrandimenti (assicurarsi prima della rappresentazione grafica che nell'ambiente *Y=* (*Y Editor*) non ci siano funzioni o Plot selezionati oltre a *Plot1* e *Plot2*).



ISTOGRAMMA BINO n=10, p=0.5



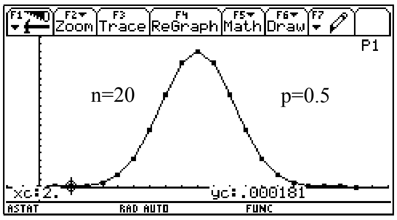
BINO A CAMPANA n=10, p=0.5

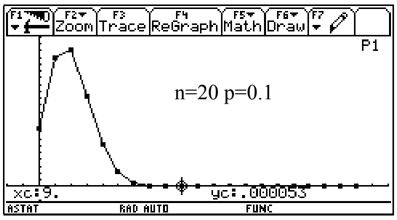
Il grafico cartesiano evidenzia bene l'andamento a "campana", con $p = \frac{1}{2}$.

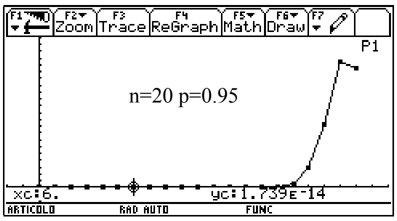
Problema 2 : *"come cambia la distribuzione delle probabilità (e quindi il grafico) al variare di n e p ?"*

È una indagine da assegnare agli alunni, ormai diventati degli esperti.

Poniamo in *Home* i valori di *n* e *p* ed osserviamo poi il grafico cartesiano di BINO. Facciamo molte diverse osservazioni cambiando i due parametri *n* e *p*.







Se manteniamo *n* fisso, ad esempio *n = 20* o *30*, abbiamo una osservazione più sistematica, ed inoltre il grafico viene visualizzato sempre nello stesso intervallo dell'asse *x*.

Dopo aver esaminato la variazione grafica rispetto ad *n* con $p = \frac{1}{2}$ (la spezzata è sempre più curva) conviene studiare quella rispetto a *p* mantenendo *n* fisso, con *n = 20* (abbastanza grande da fornire una curva e piccolo da rendere il ricalcolo del foglio veloce).

Variando *p* (situazioni non simmetriche) si vede bene il diverso andamento della campana e la perdita di simmetria verso gli estremi (spingersi verso $p = 0.05$ o $p = 0.95$) .

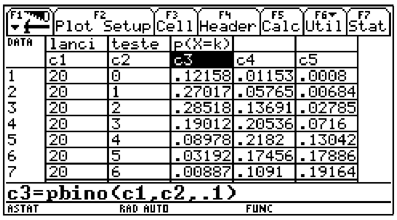
Analizzare i valori di probabilità nella colonna C3 della tabella e nel grafico (con TRACE) per rendersi ben conto se risultano attendibili. C'è anche il rischio di interpretare, nel grafico, come 0 le probabilità molto basse.

<u>Problema 3</u> : *"costruire una tabella con più valori di probabilità in modo da illustrare l'andamento delle P(X=k) al variare di p".*

Il problema non aggiunge niente di nuovo se non il fatto che avere tutti i grafici insieme migliora la possibilità di confronto. Ne vale la pena.

Suggerire di arrivare anche a valori molto piccoli o molto grandi per $p \in A$ con $A=\{0.1,0.2,0.3,0.5,0.7,0.8,0.9\}$ o $p \in B$ con $B=\{0.01,0.02,0.03,0.05,0.1,0.2,0.5\}$ in modo da confrontare valori di *p* molto piccoli o grandi con altri intermedi.

Per avere grafici simultanei si dovranno definire diversi *Plot* (uno per ogni colonna della tabella) ciascuno con *x=c2* e *y=colonna interessata*.



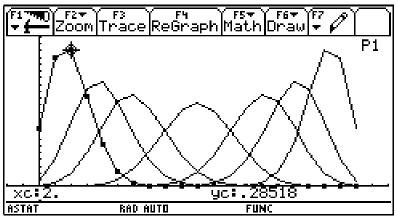
F1 F2 Plot Setup | F3 Cell | F4 Header | F5 Calc | F6 Util | F7 Stat

DATA	lanci	teste	p(X=k)		
	c1	c2	c3	c4	c5
1	20	0	.12158	.01153	.0008
2	20	1	.27017	.05765	.00684
3	20	2	.28518	.13691	.02785
4	20	3	.19012	.20536	.0716
5	20	4	.08978	.2182	.13042
6	20	5	.03192	.17456	.17886
7	20	6	.00887	.1091	.19164

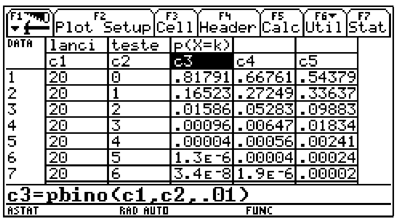
c3=pbino(c1,c2,.1)

ASTAT RAD AUTO FUNC

CAMPANE : n=20, $p \in A$



CAMPANE - grafico



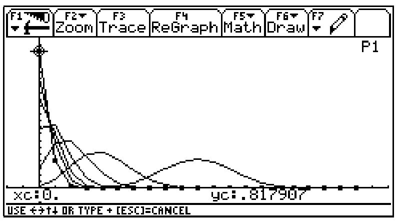
F1 F2 Plot Setup | F3 Cell | F4 Header | F5 Calc | F6 Util | F7 Stat

DATA	lanci	teste	p(X=k)		
	c1	c2	c3	c4	c5
1	20	0	.81791	.66761	.54379
2	20	1	.16523	.27249	.33637
3	20	2	.01586	.05283	.09883
4	20	3	.00096	.00647	.01834
5	20	4	.00004	.00056	.00241
6	20	5	1.3E-6	.00004	.00024
7	20	6	3.4E-8	1.9E-6	.00002

c3=pbino(c1,c2,.01)

ASTAT RAD AUTO FUNC

CAMPAN2 : n=20, $p \in B$



CAMPAN2 - grafico

Dai grafici dei due fogli si arriva a concludere che l'andamento a "campana" si ha solo per *p* non troppo distante dal valore $\frac{1}{2}$.

3.3 Dalla distribuzione binomiale a Poisson e Gauss: gettiamo un ponte.

Giunti a questo punto (grazie alla TI-92) parliamo un po' anche delle distribuzioni di Poisson e di Gauss, anche se non sono state introdotte le formule e i modelli relativi.

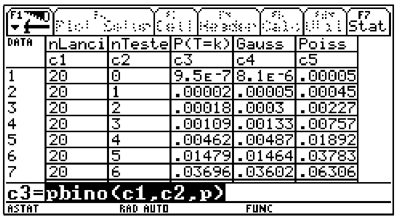
Ormai diverse volte è stata osservata la forma a "campana" di alcuni grafici e addirittura dei numeri (nel caso dei coefficienti binomiali). Val la pena allora di usare i grafici delle due distribuzioni per mostrare come entrambe possono approssimare la binomiale, avvicinandosi ad essa ognuna in modo diverso al variare del valore di *p*.

Gli alunni non conoscono ancora le formule, però saranno in grado di capire che esistono altri modelli di distribuzione di probabilità, e che potrebbero essere utilizzati al posto della binomiale, se qualche motivo lo richiedesse, per approssimarne l'andamento al variare di *p* (ovviamente ognuna in modo diverso e quindi più o meno utile in relazione al problema).

Per metterli in grado di lavorare dovremo fornire loro i listati di due funzioni (per il calcolo del valore della probabilità per le due distribuzioni). Gli studenti poi le useranno per preparare una tabella di confronto tra le tre distribuzioni, generandole attraverso valori fissi di *n* e *p* forniti in *Home* (figura BINO2 e relativo grafico).

Si ottengono così diversi grafici al variare di *p*, definiti come segue :

```
c1=seq(n,x,0,n)
c2=seq(x,x,0,n)
c3=pbino(c1,c2,p)      (plot1, x=c2, y=c3, xyline, dot)
c4=gaussian(n,c2,p)    (plot2, x=c2, y=c4, xyline, dot)
c5=poisson(n,c2,p)     (plot3, x=c2, y=c5, xyline, dot)
```



DATA	nLanci	nTeste	P(T=k)	Gauss	Poiss
	c1	c2	c3	c4	c5
1	20	0	9.5E-7	8.1E-6	.00005
2	20	1	.00002	.00005	.00045
3	20	2	.00018	.0003	.00227
4	20	3	.00109	.00133	.00757
5	20	4	.00462	.00487	.01892
6	20	5	.01479	.01464	.03783
7	20	6	.03696	.03602	.06306

c3=pbino(c1,c2,p)

ASTAT RAD AUTO FUNC

BINO2 con *n=20, p=0.5*

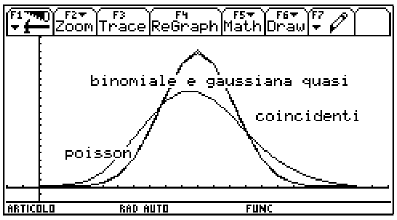
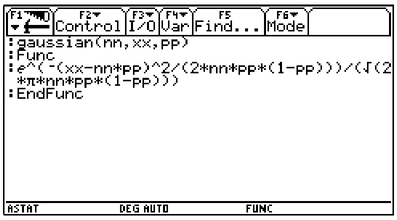


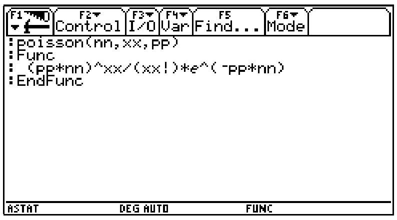
grafico di BINO2 con *n=20, p=0.5*

È impressionante la quasi coincidenza tra la binomiale e la gaussiana con qualunque n, anche piccolo, se $p=0.5$ (usare *ZoomData* se si cambia n). Il comportamento cambia quando p è molto grande o molto piccolo. Provare per credere.

Nell'esaminare i grafici è interessante anche isolare con *ZoomBox* la parte vicino ai massimi in cui il comportamento delle varie distribuzioni è manifestamente diverso e valutare quindi quale approssima meglio la binomiale.

Di seguito compaiono le varie schermate relative alle tabelle e ai grafici.





Funzioni utilizzate:

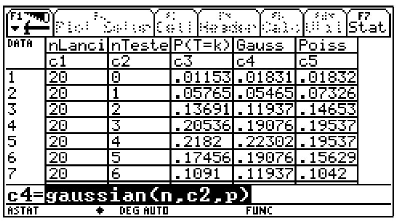
Formule utilizzate:

a) $poisson(n,k,p) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \dfrac{(p\,n)^k}{k!}e^{-p\,n}$ $\qquad (\lambda = p\,n,\ k = x)$

b) $gaussian(n,k,p) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\,n\,p\,(1-p)}}e^{-\frac{(x-n\,p)^2}{2np(1-p)}}$

(gaussiana con μ e σ pari a quelli della binomiale, quindi con $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$)

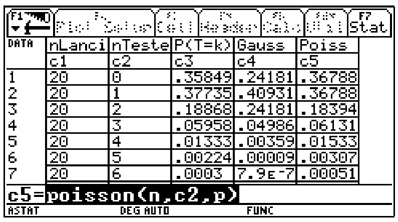
Vediamo ora la tabella BINO2 con le tre funzioni ($n=20$):



DATA	nLanci	nTeste	P(T=k)	Gauss	Poiss
	c1	c2	c3	c4	c5
1	20	0	.01153	.01831	.01832
2	20	1	.05765	.05465	.07326
3	20	2	.13691	.11937	.14653
4	20	3	.20536	.19076	.19537
5	20	4	.2182	.22302	.19537
6	20	5	.17456	.19076	.15629
7	20	6	.1091	.11937	.1042

c4=gaussian(n,c2,p)

BINO2 con $p=0.2$



DATA	nLanci	nTeste	P(T=k)	Gauss	Poiss
	c1	c2	c3	c4	c5
1	20	0	.35849	.24181	.36788
2	20	1	.37735	.40931	.36788
3	20	2	.18868	.24181	.18394
4	20	3	.05958	.04986	.06131
5	20	4	.01333	.00359	.01533
6	20	5	.00224	.00009	.00307
7	20	6	.0003	7.9E-7	.00051

c5=poisson(n,c2,p)

BINO2 con $p=0.05$

ed i relativi grafici (*binomiale=square, gaussiana=box, poisson=dot*):

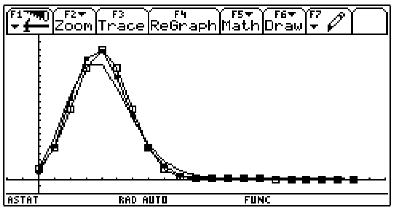


grafico BINO2 con *p=0.2*

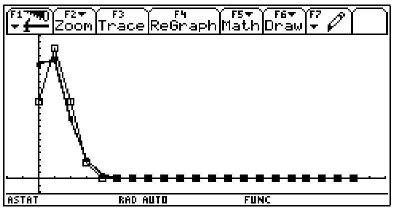


grafico BINO2 con

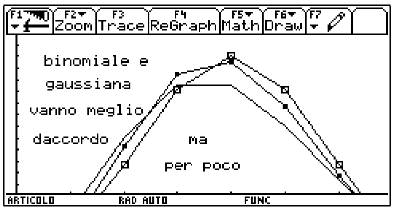


grafico ingrandito BINO2 con *p=0.2*

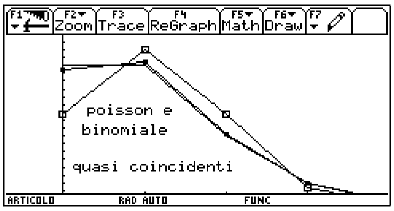


grafico ingrandito BINO2 con *p=0.05*

Si arriva alla conclusione:

- per *p* molto piccola ($p \le 0.1$) la binomiale è ben approssimata da POISSON e non da GAUSS ; è tanto più vero quanto più *p* è piccolo.
- per *p* intermedia o grande ($p > 0.1$) è la gaussiana la migliore approssimazione.

Al termine di queste brevi note penso che ci si renda conto come la TI-92 non debba essere considerata semplicemente una calcolatrice, magari grafica; essa è uno strumento così versatile (anche grazie alla programmazione e all'interazione tra i diversi ambienti) da permettere non solo di affrontare agevolmente calcoli e rappresentazioni grafiche, ma anche di aprire agli alunni "finestre concettuali" verso altri orizzonti, magari lontani, ma presenti nel percorso dello studio della Matematica.

Questo dà allo studente la consapevolezza che il "suo" percorso è una piccola parte della "storia" della conoscenza umana, talvolta faticosa, e, osservando da lontano tali orizzonti, riceve lo stimolo a porsi il problema di raggiungerli.

La TI-92, con l'aiuto dell'insegnante che quegli orizzonti ha meglio presenti, permette di esplorarli e in parte di dominarli.

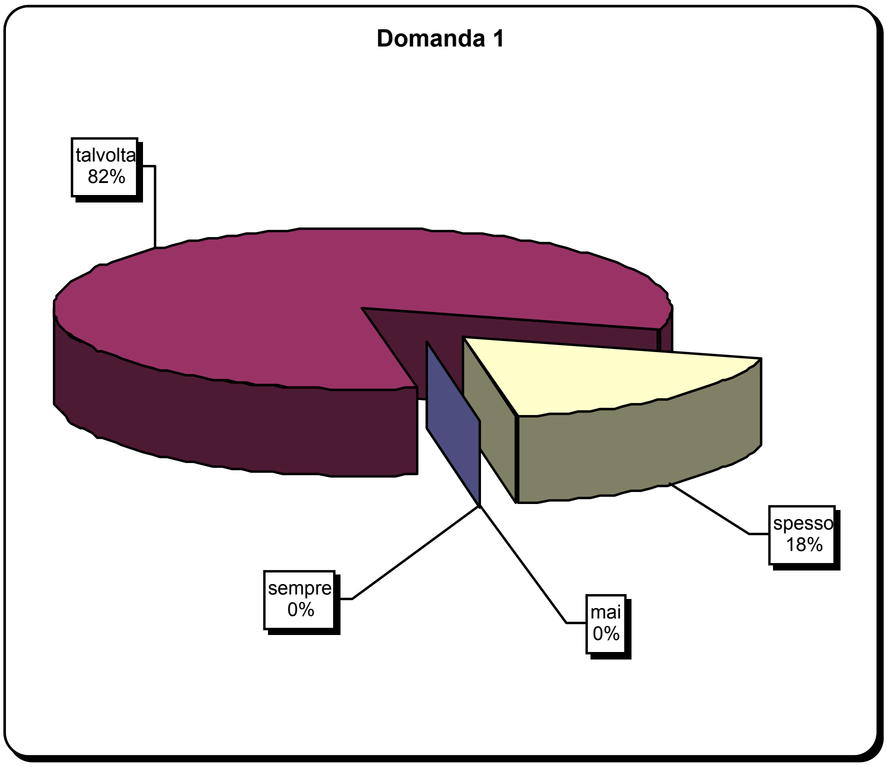
Si è gettato un ponte. Resta la voglia di percorrerlo.

QUESTIONARIO DEI DOCENTI SULLA SPERIMENTAZIONE

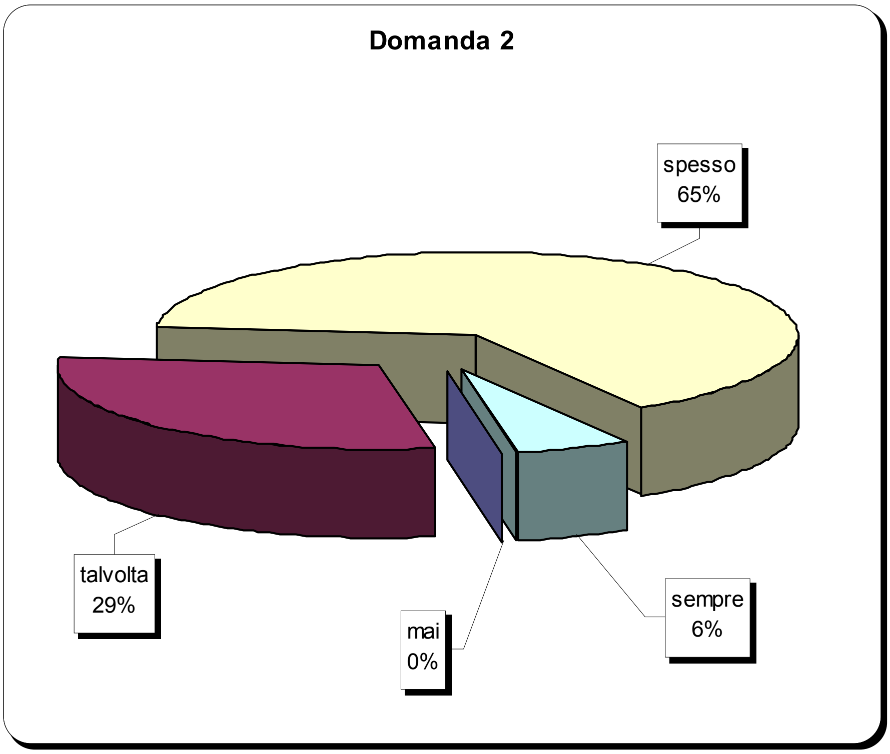
Al termine dell'esperienza i docenti che hanno partecipato al progetto Labclass hanno risposto alle domande di un questionario di cui si sono riportati i risultati.
Il questionario era mirato a conoscere quali cambiamenti, in termini di apprendimento e di atteggiamenti, avessero rilevato nei propri alunni.

1. Nel lavorare con la calcolatrice i tuoi studenti hanno incontrato inizialmente difficoltà?

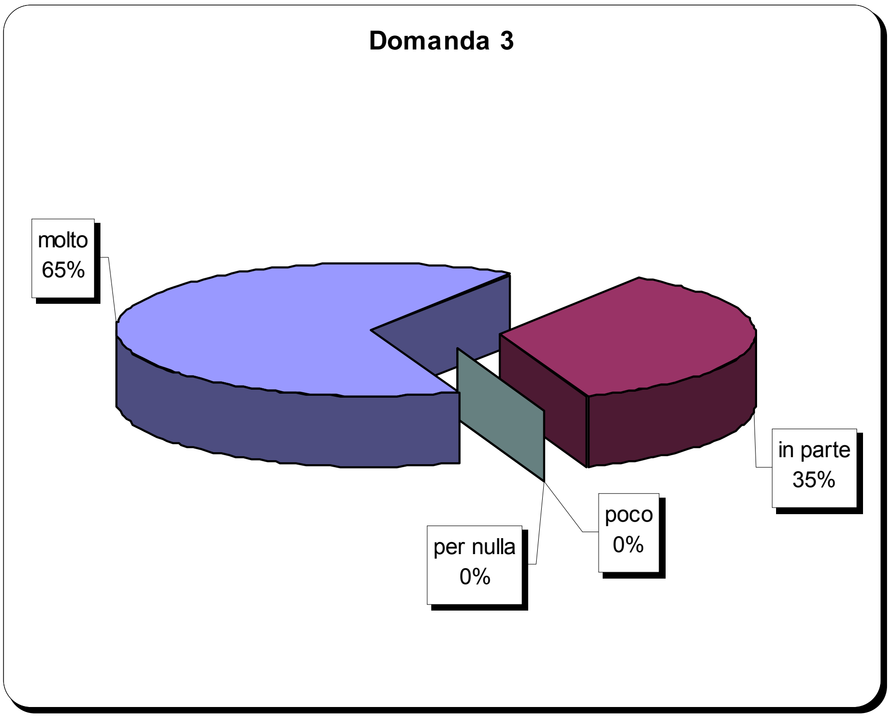
- spesso
- sempre
- talvolta
- mai



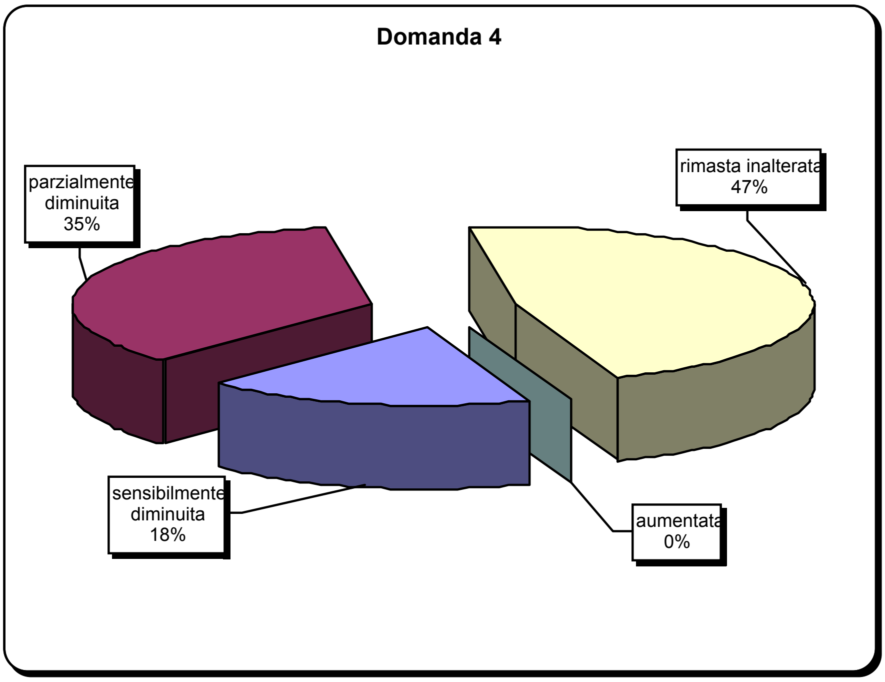
2. Gli alunni hanno sentito l'esigenza di usare la calcolatrice nel lavoro individuale e in classe?
    - spesso
    - sempre
    - talvolta
    - mai



3. L'esperienza Labclass ha favorito l'integrazione tra gli allievi nei lavori di gruppo?
    - molto
    - abbastanza
    - poco
    - per nulla

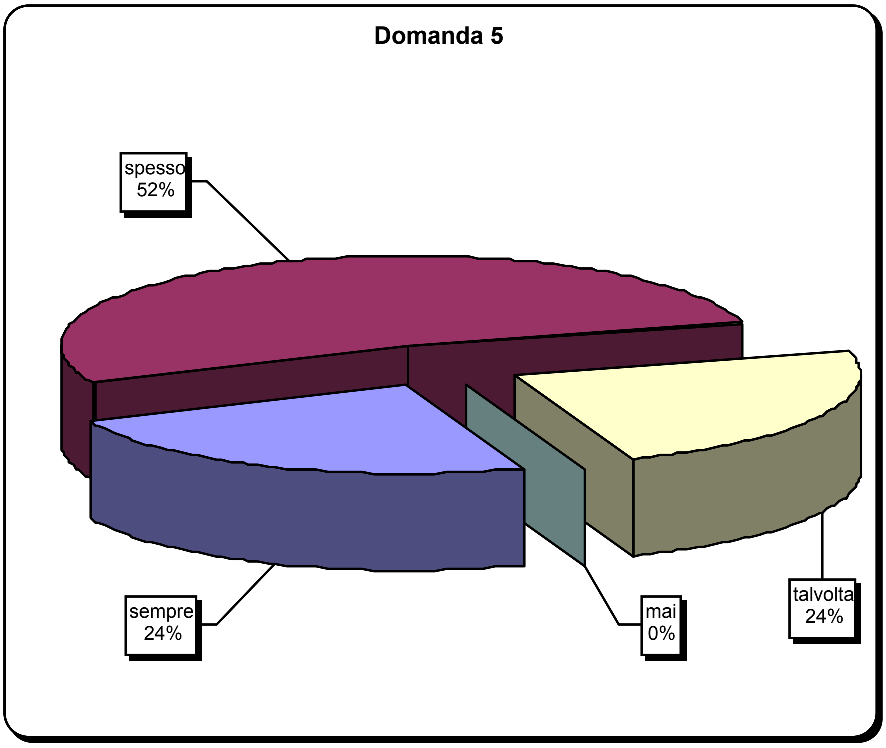


4. La disomogeneità di apprendimento, spesso esistente all'interno della classe, è
    - sensibilmente diminuita
    - parzialmente diminuita
    - rimasta inalterata
    - aumentata

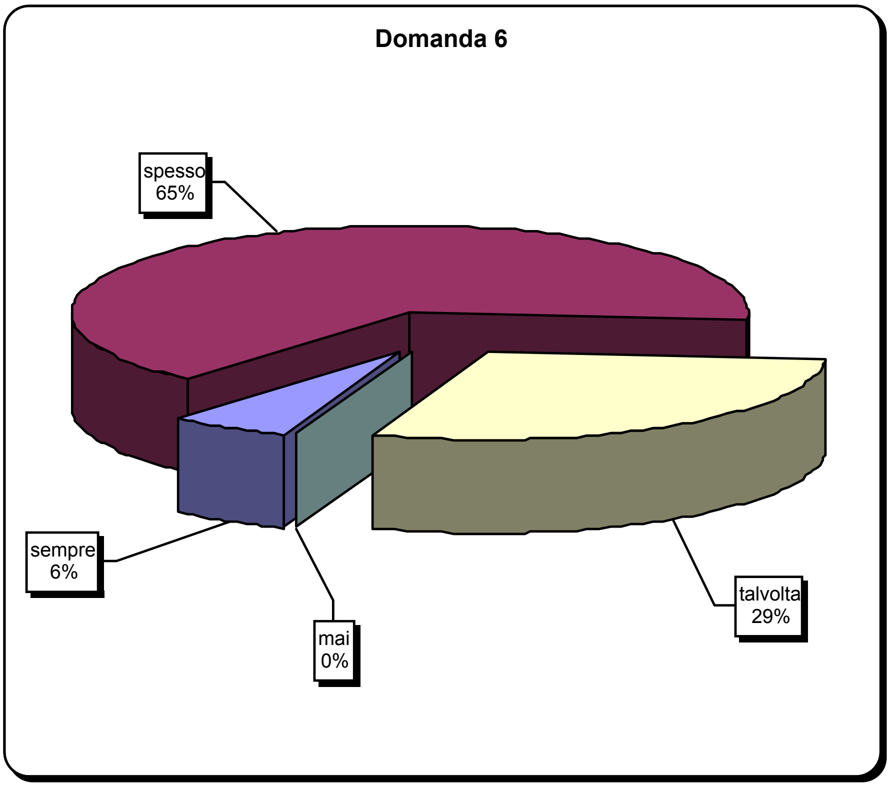


5. L’uso della calcolatrice ha aumentato negli alunni la capacità di esplorare situazioni e formulare congetture?

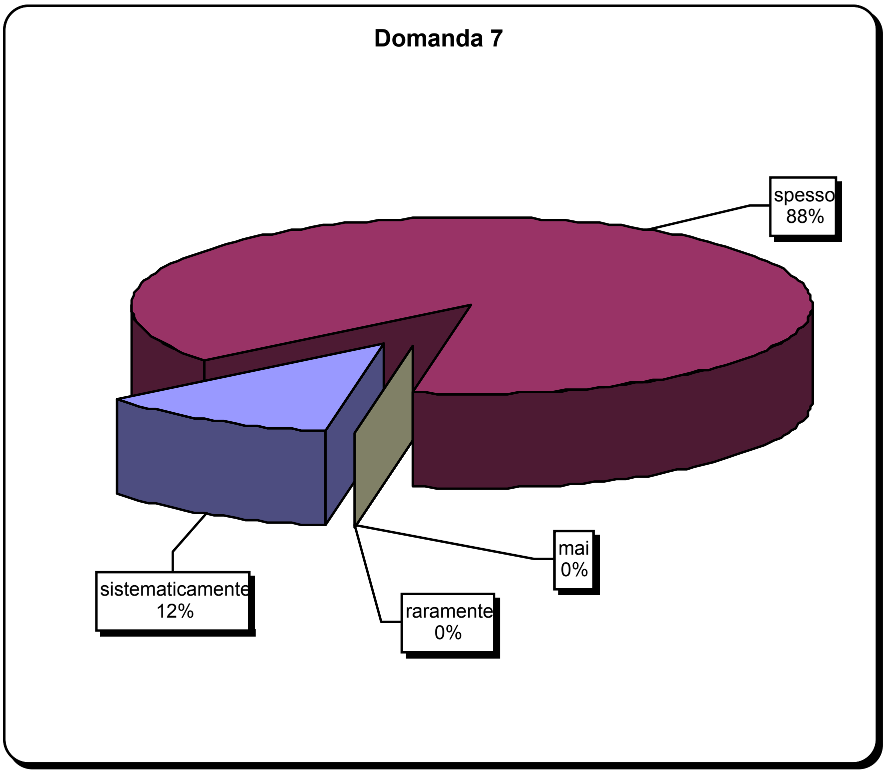
- spesso
- sempre
- talvolta
- mai



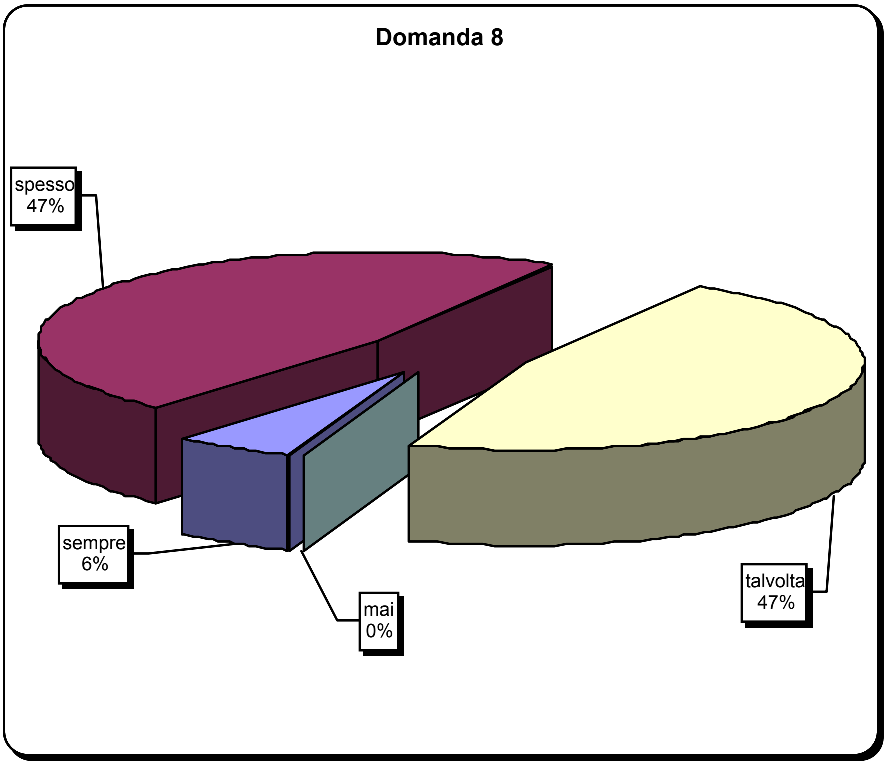
6. L’uso della calcolatrice ha agevolato l’attività di problem solving?
- spesso
- sempre
- talvolta
- mai



7. Nell'esperienza Labclass hai verificato un miglioramento da parte degli alunni nella comprensione dei concetti matematici?
   - sistematicamente
   - spesso
   - raramente
   - mai

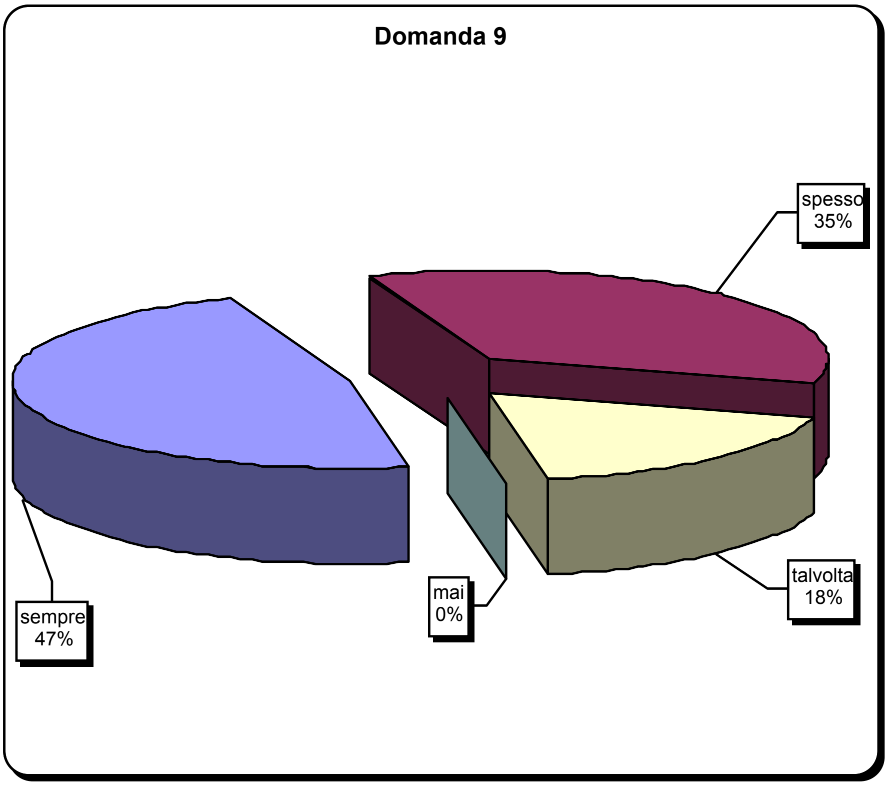


8. La calcolatrice ti ha suggerito, nell’ambito dell’attività didattica, nuovi ambiti da esplorare
   - sempre
   - spesso
   - talvolta
   - mai

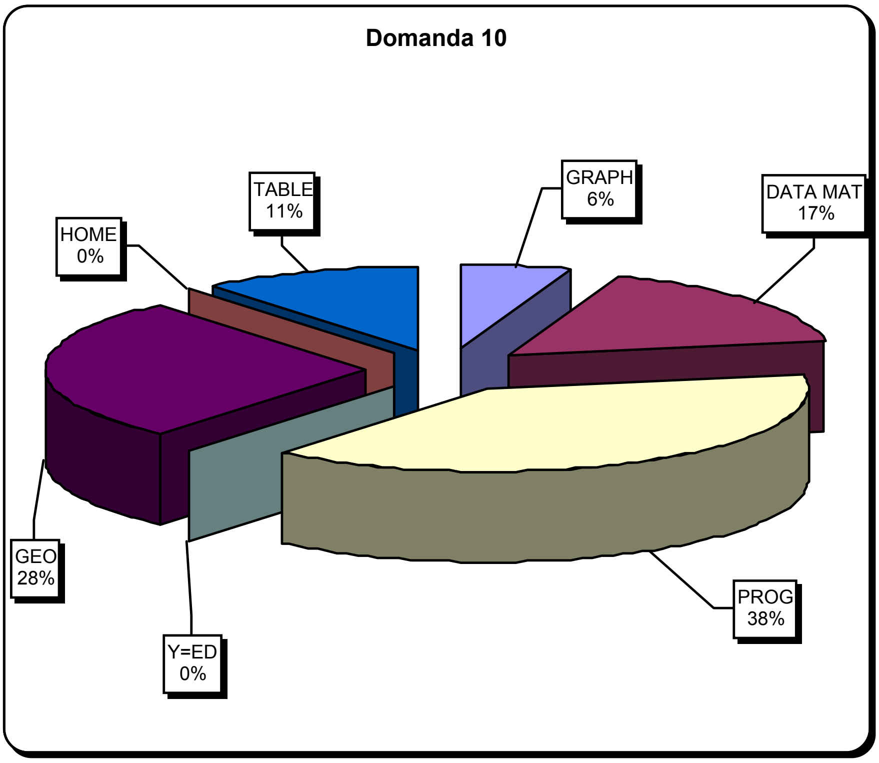


9. L'uso della calcolatrice ha migliorato l'organizzazione della lezione frontale?

- sempre
- spesso
- talvolta
- mai



10. Quale ambiente della calcolatrice hai usato raramente?
- Home
- Y = Editor
- Graph
- Table
- Data Matrix
- Prog
- Geo



BIBLIOGRAFIA

Libri
G. C. BAROZZI, S. CAPPUCCIO: *Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, PITAGORA EDITRICE, Bologna 1997

C. DI STEFANO, *Dalla matematica alle calcolatrici grafiche*, Voll. A e B, GHISETTI E CORVI EDITORI, Milano

J. M. FERRAD, H. LEMBERG: *Mathématiques concrètes, illustrées par la TI-92 et la TI-89*, SPRINGER-VERLAG FRANCE, Paris 1998

M. IMPEDOVO: *Matematica: Insegnamento e computer algebra*, SPRINGER-VERLAG ITALIA, Milano 1999

B. KUTZLER: *Introduzione alla TI-89* (Trad. italiana a cura di P. Brandolin e R. Fazio), GIOVANNI BATTAGIN EDITORE, Treviso 2000

L. TROUCHE: C*alculatrices symboliques: un défi mathématiques*, RESEAU ACADEMIQUE LANGUEDOC-ROUSSILON, Monpellier, 1997

M. VENÈ MICHELOTTI: *inforMatematica*, SANSONI PER LA SCUOLA, Milano 2000

Riviste
Ipotesi, la tecnologia nell'insegnamento scientifico, PITAGORA EDITRICE, Bologna

The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, RESEARCH INFORMATION LTD.UK

The Bulletin of the International Derive/TI-92 User Group, (EDITOR JOSEF BÖHM) Würmla, Österreich

Vari articoli sull'argomento possono essere letti sulle seguenti riviste:

La matematica e la sua didattica, PITAGORA EDITRICE

Lettera matematica Pristem, BOCCONI

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, CENTRO RICERCHE DIDATTICHE U. MORIN

ELENCO DEI DOCENTI PARTECIPANTI

Accomazzo	Pierangela	L.S.“Einstein” Torino
Anconelli	Anna Maria	L.S.“G. Ricci Curbastro” Lugo di Romagna (Ra)
Baratta	Sarah Paolantonia	C.N.“Morosini” Venezia
Brandolin	Paolo	Ministero della P.I. Roma
Cagnacci	Roberto	L.S.“Vallisneri” Lucca
Cappuccio	Sebastiano	I.T.Aeronautico .“F. Baracca” Forlì
Carosati	Lucio	L.S.“Galilei” Ancona
Chimetto	Maria Angela	L.S.“Quadri” Vicenza
Cini	Sandra	L.S.“S. Francesco d’Assisi” Roma
De Simone	Giovanna	L.S.“Severi” Frosinone
Dirani	Paola	L.S.“G. Ricci Curbastro” Lugo di Romagna (Ra)
Foà	Donata	L.S.“Buonarroti” Pisa
Ilari	Fernando	L.S.“Majorana” Latina
Impedovo	Michele	L.S.“G. Ferraris” Varese
Margiotta	Giovanni	IRRSAE-Lazio Roma
Mocchetti	Anna Cristina	L.S.“Majorana”
Nolli	Nicoletta	L.S.“Aselli” Cremona
Pirazzini	Enrica	L.S.“G. Ricci Curbastro” Lugo di Romagna (Ra)
Ravagnan	Giorgio	L.S.“Benedetti” Venezia
Ricci	Roberto	L.S.“A. Righi” Bologna
Rohr	Ferruccio	L.S.“Nomentano” Roma
Rosa	Carlo	L.S.“Severi” Frosinone
Rossini	Anna Maria	L.S.“L. Da Vinci” Casalecchio di Reno (Bo)
Santoro	Lorenzo	L.S.“Majorana” Mola di Bari (Ba)
Servi	Grazia	L.S.“Pitagora” Rende (Cs)
Tamburro	Nora	L.S.“Majorana” Isernia
Travaglini	Antonio	L.S.“Galilei” Lanciano (Ch)
Vettorazzo	Geraldo	IRRSAE-Veneto Venezia Mestre (Ve)

ELENCO DELLE SCUOLE POLO

Le scuole polo, di cui si pubblica l'elenco, hanno assunto il compito di Distribuire i *Quaderni* agli istituti che rientrano nel territorio loro affidato.

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - A

IM	S. SLATAPER	Corso Verdi, 17	Gorizia
LS	E. TORRICELLI	Via Udine, 7	Maniago (PN)
LC	F. PETRARCA	Via Rossetti, 74	Trieste
IM	C. PERCOTO	Via Pier Silverio Leicht, 4	Udine
IM	GOBETTI	Via Istituto Tecnico, 1	Genova-Sampierdarena
IM	C. AMORETTI	Piazzetta G.B.De Negri, 2	Imperia
IM	G. MAZZINI	Viale Aldo Ferrari, 37	La Spezia
IM	G. DELLA ROVERE	Via Monturbano, 8	Savona
IM	G. FALCONE	Via Dunant, 1	Bergamo
LS	A. CALINI	Via Monte Suello, 2	Brescia
LS	GIOVIO	Via P. Paoli, 28	Como
LC	MANIN	Via Cavallotti, 2	Cremona
IM	TENCA-EUROPA UNITA	Bastioni Porta Volta, 16	Milano
LS	E. MAJORANA	Via Ratti, 88	Rho (MI)
IM	PARINI	Via Gramsci, 17	Seregno (MI)
LC	VIRGILIO	Via Ardigò, 13	Mantova
IM	A. CAIROLI	Corso Mazzini, 7	Pavia
LS	NERVI	Piazza S. Antonio, 9	Morbegno (SO)
LS	LUINO	Via Lugano, 24	Luino (VA)
IM	G. BERTACCHI	Via XI Febbraio, 6	Lecco
IM	R. SALUZZO	Via E. Faà di Bruno, 85	Alessandria
IM	A. MONTI	Piazza Cagni, 8	Asti
IM	LEONARDO DA VINCI	Piazza S. Francesco, 1	Alba (CN)
IM	C. T. BELLINI	Baluardo Lamarmora, 10	Novara
LS	A. GRAMSCI	Colle Bellavista	Ivrea (TO)
LS	GOBETTI	Via M. Vittoria, 39 bis	Torino
IM	ROSA STAMPA	Corso Italia, 48	Vercelli
LC	G. E Q. SELLA	Via Addis Abeba, 20	Biella
LS	B. CAVALIERI	Via M. di Campagna, 18	Verbania Pallanza
IM	G. PASCOLI	Via M. Longon, 3	Bolzano
LC	W. VON DER VOGELWEIDE	Via A. Diaz, 34	Bolzano
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Giusti, 1/1	Trento
IM	BINEL	Via Francheté, 111	Verres (AO)
LC	TIZIANO	Via Cavour, 2/D	Belluno
IM	AMEDEO DI SAVOIA	Via del Santo, 57	Padova
IM	C. ROCCATI	Via Carducci, 8	Rovigo
LC	CANOVA	Via Mura S. Teonisto, 16	Treviso
IM	STEFANINI	Via del Miglio, 30	Venezia-Mestre
LC	G.B. BROCCHI	Via Beata Giovanna, 67	Bassano del Grappa (VI)
IM	C. VERONESE	Via Cav.V. Veneto, 20	San Bonifacio (VR)

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - B

LC	D. COTUGNO	Portici del Liceo	L'Aquila
IM	ISABELLA GONZAGA	Via dei Celestini	Chieti
IM	MARCONI	Via M. da Caramanico, 26	Pescara
IM	MILLI	Via G. Carducci, 38	Teramo
LS	COPERNICO	Via F. Garavaglia, 11	Bologna
LC	ARIOSTO	Via Arianuova, 19	Ferrara
LS	RIGHI	Piazza Aldo Moro, 76	Cesena (FC)
LS	FANTI	Via Curta S. Chiara, 20	Carpi (MO)
LC	M. GIOIA	Viale Risorgimento, 1	Piacenza
LC	C/O C.N. MARIA LUIGIA	Borgo Lalatta, 14	Parma
LS	G. RICCI CURBASTRO	Viale degli Orsini, 6	Lugo (RA)
LS	A. MORO	Via XX Settembre, 5	Reggio Emilia
LS	EINSTEIN	Via Agnesi, 2/B	Rimini
IM	REGINA MARGHERITA	Viale Regina Margherita	Anagni (FR)
LS	E. MAJORANA	Via Sezze	Latina
IM	ELENA PRINC. DI NAPOLI	Piazza Mazzini, 2	Rieti
LC	MAMIANI	Viale delle Milizie, 30	Roma
LS	G. PEANO	Via Morandini, 38	Roma
SM	MONTESSORI	Via Livenza, 8	Roma
IM	S. ROSA DA VITERBO	Via S. Pietro, 27	Viterbo
LC	VIRGILIO	Via Giulia, 38	Roma
LS	LEONARDO DA VINCI	Viale G. Verdi, 23	Jesi (AN)
IM	L. MERCANTINI	Via Emilio Consorti, 28	Ripatransone (AP)
IM	DA VARANO	Largo Feliciangeli, 1	Camerino (MC)
LC	MAMIANI	Via Gramsci, 2	Pesaro
IM	PRINCIPESSA ELENA	Via Trieste, 1	Campobasso
IM	V. CUOCO	Via Patriarca	Isernia
LS	REDI	Via Leone Leoni, 38	Arezzo
LS	C/O C.N. CICOGNINI	Piazza del Collegio, 13	Prato
IM	ROSMINI	Viale Porciatti, 2	Grosseto
IM	A. PALLI BARTOLOMEI	Via Maggi, 50	Livorno
LS	VALLISNERI	Via delle Rose, 68	Lucca
IM	MONTESSORI	Via Lunense, 39/B	Marina di Carrara (MS)
LS	F. BUONARROTI	Largo C. Marchesi	Pisa
IM	C. LORENZINI	Via Sismondi, 7	Pescia (PT)
LC	E. S. PICCOLOMINI	Piazza S. Agostino, 2	Siena
LS	LEONARDO DA VINCI	Via G. De' Marignolli, 1	Firenze
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Tusicum	Umbertide (PG)
LC	TACITO	Viale Fratti, 12	Terni

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - C

IM	T. STIGLIANI	Via La Nera, 61	Matera
IM	GIANTURCO	Via Giara	Potenza
LS	FERMI	Via Molinella, 30	Cosenza
LC	P. GALLUPP I	Via De Gasperi	Catanzaro
IM	C. V. GRAVINA	Via Foscolo	Crotone
IM	C. ALVARO	Via Campanella, 1	Palmi (RC)
IM	V. CAPIALBI	Via S. Ruba	Vibo Valentia
IM	T. CAMPANELLA	Via C. Da Cavallerizza	Lamezia Terme
IM	P. E. IMBRIANI	Via S. Pescatori 153	Avellino
IM	GUACCI	Via N. Calandra, 138	Benevento
IM	SALVATORE PIZZI	Piazza Umberto I	Capua (CE)
LC	VICO	Via Salvator Rosa, 117	Napoli
LS	CALAMANDREI	Strada C. Maranda, 84	Napoli-Barra
IM	M. SERAO	Via Carducci, 10	Pomigliano d'Arco (NA)
IM	ALFANO I	Via dei Mille	Salerno
LC	TROYA	Via R. Sanzio, 1	Andria (BA)
LS	E. MAJORANA	Via A. Moro, 19	Mola di Bari (BA)
IM	E. PALUMBO	Via A. Grandi, 17	Brindisi
IM	A. G. RONCALLI	Piazza Europa, 1	Manfredonia (FG)
LC	F. CAPECE	Piazza A. Moro, 37	Maglie (LE)
LC	ARISTOSSENO	Viale Virgilio, 15	Taranto
LS	PACINOTTI	Via Liguria, 9	Cagliari
LS	E. FERMI	Via Veneto, 45	Nuoro
IM	B. CROCE	Via G. D'Annunzio	Oristano
IM	M. DI CASTELVI	Via Manno, 58	Sassari
LS	LEONARDO	Viale della Vittoria	Agrigento
LC	RUGGERO SETTIMO	Via Rosso San Secondo	Caltanisetta
LC	C/O C.N. M. CUTELLI	Via V. Emanuele, 56	Catania
IM	F. CRISPI	Via Padova, 50	Piazza Armerina (EN)
LS	ARCHIMEDE	Viale R. Margherita, 3	Messina
IM	G. A. DE COSMI	Via L. Ruggieri;15	Palermo
IM	G. MAZZINI	Via Curtatone	Vittoria (RG)
IM	M. RAELI	Via Matteo Raeli, 9	Noto (SR)
IM	R. SALVO	Via Marinella, 1	Trapani

VOLUMI DELLA COLLANA QUADERNI GIÀ PUBBLICATI

0	L'Indirizzo Linguistico	Dirigenti scolastici	**L.C. *G.B. Brocchi*** Bassano del Grappa(VI)
1	Gestione e Innovazione	Dirigenti scolastici	**Con. Naz. *F. Cicognini*** Prato
2	Lo Sviluppo Sostenibile	Docenti	**L.S. *A. Vallisneri*** Lucca
3	La Valenza Didattica del Teatro Classico	Docenti	**I.M. *Salvatore Pizzi*** Capua (CE)
4	Il post-secondario per la Professionalità (DUE TOMI)	Dirigenti scolastici	**L.S. *G. Peano*** Roma
5	Dalla Memoria al Progetto	Docenti	**L.S. *E. Majorana*** Latina
6/1	La Sperimentazione della Sperimentazione: IL PROGETTO PROTEO I	Dirigenti scolastici	**L.S. *A. Gramsci*** Ivrea
6/2	La Sperimentazione della Sperimentazione: IL PROGETTO PROTEO II	Dirigenti scolastici	**L.C. *L. Ariosto*** Ferrara
7	L'Algebra tra Tradizione e Rinnovamento	Docenti	**L.S. *A. Vallisneri*** Lucca
8	L'insegnamento di Probabilità e Statistica nella Scuola Liceale	Docenti	**L.S. *G. Ricci Curbastro*** Lugo di Romagna (RA)
9	L'Italia e le sue Isole: Fase I: *Sardegna*	Dirigenti scolastici	**IRRSAE-Sardegna** Cagliari
10	Lingua e Civiltà Tedesca	Docenti	**L.C. *G.B. Brocchi*** Bassano del Grappa (VI)

11	La Scuola nel “Sistema Polo”	Dirigenti scolastici	**L.C. *A. Canova*** Treviso
12	La “Città” dei Filosofi (DUE TOMI)	Docenti	**L.C. *L. Ariosto*** Ferrara
13	Le Città d’Europa (DUE TOMI)	Docenti	**CEDE-Villa Falconieri** Frascati (RM)
14/1	Dal Passato al Futuro: LA DIDATTICA DEL GRECO	Docenti	**IRRSAE-Friuli V. G.** Trieste
14/2	Dal Passato al Futuro: LESSICO DI BASE	Docenti	**IRRSAE-Friuli V. G.** Trieste
15	Gestione, Innovazione e Tecnologie	Dirigenti scolastici	**I.M. *Margherita di Savoia*** Roma
16	Per non vendere il cielo	Docenti	**L.C. *G.B. Brocchi*** Bassano del Grappa (VI)
17	Briser la glace	Docenti	**I.M. *T. Campanella*** Lamezia Terme (CZ)
18	Dalla Lingua per la Cultura: LA DIDATTICA DEL LATINO	Docenti	**IRRSAE-Friuli V. G.** Trieste
19	L’insegnamento della Geometria (DUE TOMI)	Docenti	**L.S. *A. Vallisneri*** Lucca
20	La lingua del Disegno: AL CROCEVIA FRA SCIENZA E ARTE	Docenti	**L.C. *Corradini*** Thiene (VI)
21	Dalla Memoria al Progetto (DUE TOMI)	Docenti	**L.S. *E. Majorana*** Latina
22	Problemi della Contemporaneità: UNITÀ/AUTONOMIE NELLA STORIA ITALIANA (DUE TOMI)	Docenti	**L.S. *G. Segrè*** Torino

23	Aritmetica	Docenti	**L.S.** ***A. Vallisneri*** Lucca
24	Analisi Matematica	Docenti	**L.S.** ***A. Vallisneri*** Lucca
25	Insegnamento della Fisica negli Indirizzi Sperimentali	Docenti	**L.S.** ***A. Bafile*** L'Aquila
26	I Temi "Nuovi" nei Programmi di Matematica (Probabilità, Statistica, Logica,…) e il loro inserimento nel *Curriculum* (DUE TOMI)	Docenti	**L.S. A.** ***Vallisneri*** Lucca
27	La Fisica nei trienni del P.N.I.	Docenti	**L.S.** ***Vinci*** Reggio Calabria
28	Probabilità e Statistica nella Scuola Liceale	Docenti	**L.S.** ***G .Ricci Curbastro*** Lugo di Romagna (RA)
29	Non solo Storia: un modello di formazione per i tutor	Docenti	**LS.** ***G. Casiraghi*** Cinisello B. (MI)
30	La Differenza come Ricchezza	Docenti	**L.C.** ***L. Galvani*** Bologna
31/1	Il Progetto Qualità nella Scuola. L'esperienza del Polo Qualità di Milano	Dirigenti scolastici Docenti Pers. A.T.A.	**L.S.** ***E. Majorana*** Rho (MI)
31/2	Il Progetto Qualità nella Scuola. L'esperienza del Polo Qualità di Milano METODI, STRUMENTI E MATERIAL I PER LA FORMAZIONE	Dirigenti scolastici Docenti	**L.S.** ***E. Majorana*** Rho (MI)
32	Nuove Parole, Nuovi Metodi. "Soggettività Femminile e Didattica della Storia"	Docenti.	**I.M.** ***Virgilio*** Pozzuoli (NA)
33	(In preparazione)		

34	(In preparazione)		
35	Geometria e Multimedialità (Medie e Superiori)	Docenti	**L.S.** ***A. Vallisneri*** Lucca
36	Geometria e Multimedialità (Scuole Elementari)	Docenti	**L.S.** ***A. Vallisneri*** Lucca
37	La Dimensione Culturale della Tecnica e della Tecnologia	Dirigenti scolastici Docenti	**L.S.** ***E. Majorana*** Mola di Bari (BA)
38	Problemi della Contemporaneità	Docenti	**L.S.** ***G. Peano*** Cuneo
39	Progetto LABTEC/1	Docenti	**I.S.** ***Montessori*** Roma
40	(In preparazione)		
41	(In preparazione)		
42	(In preparazione)		
43	(In preparazione)		
44	Il Progetto LABCLASS	Docenti	**L.S.** ***G.Ricci Curbastro*** Lugo di Romagna (RA)
45	Matematica ed Aspetti Didattici	Docenti	**L.S.** ***G.Ricci Curbastro*** Lugo di Romagna (RA)