Il *Mathematical Pride,*

per una scienza leggera e profonda.

Luigi Borzacchini (Dipartimento di Matematica, Università di Bari)

"*Niente di matematico deve essere insegnato per costrizione all'uomo libero*" (Platone, *Respublica*, 536 e 1-2).

La traduzione di questo passo spesso omette il riferimento alla matematica, perchè? Perchè nell'opinione comune sembra assurdo che il divino Platone abbia trovato una qualche connessione tra matematica e libertà. Eppure sia il testo che il contesto sono chiari: Platone si riferisce alla matematica.

Può sembrare infatti assurdo un insegnamento della matematica ispirato alla libertà, di fronte all'idea che attualmente si ha della matematica: autoritaria, mnemonica, formale, appresa tramite uno spietato addestramento. La materia meno amata dagli studenti, tra i quali è un luogo comune che la matematica sia incomprensibile, ostile, richieda sempre uno sforzo mnemonico e formale, sia una prova da sopportare stoicamente. Si presenta come una montagna impervia da scalare, un Moloch, una divinità ostile che chiede terribili sacrifici: più facile conquistare il Regno dei Cieli.

I professori di matematica sono spesso ammirati per la loro competenza (se sono veri matematici), ma visti come la nemesi per la massa degli studenti. Sono magari grandi tecnici ma poco comunicativi: "parlano alla lavagna", ed è la lavagna poi a parlare agli studenti perché sono quasi sacerdoti di una misteriosa liturgia - come la Messa in latino celebrata volgendo le spalle ai fedeli - comprensibile solo per pochi eletti. Maghi o sacerdoti più che professori. Pochi i laureati in matematica, la matematica appare un crivello a maglie strette, passano in pochi, gli altri la considereranno sempre soltanto arabo - se non hai il 'bernoccolo', se non sei un 'genietto'! Utile, magari talora anche fascinosa - piena di effetti speciali -, ma estranea, terribilmente aliena.

Per difenderla dalla cattiva nomea sempre più si dice che 'serve'. Per renderla più appetibile si insiste sulla sua utilità sul mercato del lavoro - sarà anche indigesta, ma la disoccupazione è peggio. Visto che per il permissivismo dilagante non si può costringere gli studenti a studiare la matematica con le bocciature si usa il ricatto della disoccupazione. Ma dove è l'"uomo libero" di cui parlava Platone? La matematica non può essere ridotta alle forche caudine per accedere lavoro, quasi sempre insoddisfacente. E' un insulto alla matematica e la rende ancora più odiosa.

Difetti pedagogici e psicologici? Colpa della TV e dei social? O colpa delle nuove generazioni? Forse, ma credo ci sia qualcosa di più profondo alla radice della 'condizione infelice' della matematica nelle nostre scuole.

Credo che alla base di queste difficoltà didattiche ci sia in primo luogo una certa concezione generale della matematica affermatasi nel XX secolo. Io credo infatti che i problemi più seri nell'insegnamento della matematica trovino le loro radici non tanto in difetti didattici, quanto soprattutto nella 'immagine diffusa' della matematica, in una idea dominante, evidente nella filosofia della scienza ma non solo, nella quale la scienza è sostanzialmente empirica e la matematica e la logica ne sono solo lo strumento linguistico.

Nella 'miseria' della filosofia della scienza del XX secolo il ruolo della matematica (e della logica) è, praticamente in tutti i filosofi contemporanei – direi quasi senza eccezione anche se in forme differenti -, ridotto a quello di uno strumento, senza un'autonoma funzione conoscitiva, così che la matematica e a logica sarebbero una sorta di tecnica di compressione dati, uno ’zucchero sintattico’, e la matematica è quindi pura tecnica. Nel contempo la matematica viene vista come lo sfondo neutro comune di tutte le scienze, il loro comune denominatore e terreno di coltura, in una celebre e stupida formula retorica, "serva e regina" delle scienze -, come si diceva una volta alle casalinghe che erano le 'regine della casa'. Cultura invece è la filosofia, la storia, la letteratura, la musica, l'arte, persino il diritto. Ma la matematica no ... è uno strumento, certamente utile, ma solo uno strumento, un sistema di tecniche utili, come il martello o il coltello. Che c'è di strano allora se uno studente vi chiede: <prof, ma a che serve l'algebra?>.

E in genere gli stessi matematici si sono adeguati a questo luogo comune, rinunciando a sentirsi persone 'colte', trincerandosi dietro la loro competenza tecnica, di cui sono giustamente orgogliosi; ma ritengo sbagliato accontentarsi di questo ruolo che direi difensivo. Non si comprende che una armatura tecnicista, positivista e formalista non rende giustizia alla matematica e neanche la difende, le è utile solo per farla affondare, come una incudine attaccata al piede.

Conseguenza della idea strumentale della matematica è la concezione lineare (e poco affascinante) della sua storia, una sequenza di teorie e teoremi, come la 'storia' del martello o del coltello, che in definitiva è solo la cronaca lineare del continuo perfezionamento dello strumento che va dalla semplicità alla complessità, dall'evidenza al rigore. L'idea dominante è quella di un edificio che cresce perchè in esso si aggiungono ogni tanto nuovi piani.

La storia della cultura ha tutto un altro metabolismo, è fatta di vicoli ciechi e di intuizioni, di cambiamenti di visioni e di fondamenta, e la storia di una cultura è intrecciata strettamente con quella delle altre forme culturali e di tutti gli ambiti della vita della comunità.

In realtà la matematica è una grandiosa architettura concettuale, un edificio in cui periodicamente vanno ricostruite le fondamenta, cambiando il linguaggio, lo stile, l'idea di rigore, e si presenta come una rete di concetti e oggetti matematici strettamente connessi tra loro.

Ed *è la matematica la vera 'cultura generale'*. Non è cultura generale sapere quando è nato Napoleone ma che cosa sia la 'funzione', e non tanto conoscendone la definizione, quanto piuttosto cogliendone le connessioni con gli altri concetti della matematica, e con concetti non matematici, come quelli di legge naturale, di macchina, di calcolo, di causalità.

In tutti i campi della attività umana (arte, linguaggio, lavoro, musica, religione, etc.) ritroviamo la matematica come ingrediente essenziale, quasi come schema di fondo. E nel contempo nelle sue trame troviamo tracce di tutte le attività umane.

Facciamo l'esempio della filosofia. Matematica e filosofia hanno storie autonome ma intrecciate, un intreccio più fitto proprio nei periodi di maggiore sviluppo di entrambe: nella Accademia Platonica, all'origine della filosofia classica e della grande geometria teorica greca, e poi nel Seicento, con Descartes e Leibniz, Galileo e Newton, all'origine della Rivoluzione Scientifica.

E i confini tra esse, sebbene netti, sono cambiati nella storia: la fisica, la biologia, la chimica sono state per millenni semplici tecniche pratiche o capitoli di filosofia naturale e poi all'improvviso nel Seicento si sono 'matematizzate'. Ed anche la logica, per oltre duemila anni spina dorsale della filosofia, diventa improvvisamente nell'ottocento una disciplina matematica. Viceversa la teoria della musica, per duemila anni parte della matematica: tutti i musicisti conoscevano la matematica e tutti i matematici conoscevano la teoria musicale. Ma verso la metà del Settecento la musica si sposta nell'ambito della espressività artistica: una frattura improvvisa e irrecuperabile, e oggi nei Conservatori si fa pochissima matematica e a matematica al massimo si accenna alla acustica.

Ma è così ovvia e naturale questa concezione strumentale della matematica? Direi di no. Gli animali hanno credibilmente sensazioni e forme di conoscenza, anche forme di linguaggio e di logica elementare. Ma nessun animale (e neanche nessun cosiddetto 'primitivo') ha mai eseguito un algoritmo o una dimostrazione. La storia ha visto fiorire ed estinguersi scuole artistiche e di pensiero, addirittura intere religioni, culture e linguaggi sono praticamente scomparsi. La matematica no, cresce nei secoli, ogni civiltà eredita la matematica di quelle precedenti e lascia la sua in eredità a quelle successive. La matematica odora di eternità. Riconosciamo facilmente i testi matematici nelle tavolette di terracotta mesopotamiche di 4000 anni fa, di quale altra disciplina si può dire lo stesso? Forse solo la medicina, ma nessuno (spero!) si farebbe oggi curare da uno scriba sumero mentre il teorema di Pitagora nasce in Mesopotamia e in Cina, ma resta valido ancor oggi, in fondo vero come allora. E lo stesso scriba babilonese da cui non vi fareste curare potrebbe fare oggi corsi impeccabili di matematica elementare.

La matematica è eterna, quasi divina. E universale: in questo momento si sta facendo la stessa matematica in una scuola al centro di New York e in una nella giungla centro-africana.

Forse, si potrebbe obiettare, è eterna e universale perchè banale? 2+2=4 è una verità eterna perchè ovvia, due pecore e due pecore fanno quattro pecore, due computers e due computers fanno quattro computers, ovunque.

Particolarmente diffusa questa idea qui da noi, dove il nostro più illustre intellettuale del XX secolo è stato Benedetto Croce che considerava le leggi scientifiche "ricette di cucina" e gli scienziati e matematici solo degli "ingegni minuti". Le considerava qualcosa di estraneo alla cultura, qualcosa di meccanico, oggi esemplificato dalla coincidenza tra la proverbiale stupidità del computer e quella di chi lo usa (così Catarella è l'unico nel commissariato di Vigata che ne capisce qualcosa: è *l'ingegno minuto* di Croce illustrato al popolo televisivo!).

La sfortuna di Croce è stata che ai suoi tempi le 'ricette di cucina' erano la teoria della relatività e la meccanica quantistica, la metamatematica e i teoremi di incompletezza, la teoria degli algoritmi e il computer, la teoria della evoluzione e la biologia molecolare. E gli 'ingegni minuti' si chiamavano Einstein, Bohr, Hilbert, Gödel, Turing.

Nel XX secolo abbiamo toccato così il punto più basso dalla concezione della matematica nella storia del pensiero, ma la concezione generale della matematica non è mai stata così misera. Per quanto difficile la matematica in passato ha sempre avuto un'aura quasi divina. Sul tavolo anche del filosofo e del teologo fino al Settecento, dopo la Bibbia, c'erano gli *Elementi* di Euclide e magari anche l'*Almagesto* di Claudio Tolomeo.

Da Platone all'Ottocento essa fu definita luogo e presenza del divino, presupposto di ogni formazione anche filosofica, base di ogni certezza, vera natura della scienza, paradigma di ogni conoscenza necessaria e apriori, trionfo della ragione, linguaggio e struttura profonda del libro della natura, onore dello spirito umano, etc., ora invece appare un magazzino di formule, algoritmi e teorie, definizioni e formule, da memorizzare e tenere a disposizione, e a cui si possono approvvigionare tutti gli interessati dotati delle cosiddette 'competenze' necessarie.

Certo la matematica ha una struttura linguistica, ma non è solo uno 'strumento'. Non esiste una scienza empirica a prescindere dalla matematica: il 'dato' dei protocolli osservativi neopositivisti era scientifico solo in quanto era già un 'fatto' matematico!

La matematica è la scienza unica e unitaria della struttura del mondo reale e di tutti i mondi possibili, la cornice intuitiva e teorica in cui tutta la conoscenza empirica si deve iscrivere. Insisto: la cornice intuitiva e la struttura teorica, e non solo la forma logico-linguistica con cui scriverla.

Ma come storico della matematica non posso non chiedermi quando si è aperta questa frattura tra la scienza fondata sulla matematica da una parte e la cultura in generale, la società e i processi formativi dall'altra? Visto con gli occhi dello storico, questi fenomeni datano abbastanza nettamente dalla seconda metà del Settecento, dopo l'Illuminismo e la Rivoluzione Industriale, con grandi geni come Rousseau e Vico, e poi con Goethe e il Romanticismo. Infatti fino all'Illuminismo la matematica aveva conservato la sua aura rivoluzionaria e liberatrice dall'ignoranza, dalla superstizione, dalle malattie, dalla fatica, dalla povertà, dalla tirannia.

Nello stesso periodo comincia a cambiare il mondo matematico, tra Lagrange e Gauss si pongono le basi della matematica moderna: finisce la centralità della geometria euclidea e il baricentro della matematica si sposta verso l'aritmetica e l'algebra, con l'esigenza di un nuovo rigore, logico in senso lato più che geometrico. E ormai il clima culturale è cambiato, cambia la percezione sociale della matematica e della scienza, e si delinea l’abisso tra le ‘due culture’.

Inoltre occorre sottolineare come la frattura tra fisica-matematica e cultura umanistica generale, e tra scienza e mondo della vita quotidiana, appaia insieme all’affermarsi di una nuova didattica della matematica, mnemonica e formale.

Infatti anche l'insegnamento della matematica cambia. Lo stesso carattere strettamente mnemonico e formale che oggi appare pesante agli studenti (procedure antiche come la tabellina pitagorica, la prova del nove, la radice quadrata, la regola del tre, e poi le formule algebriche, altri algoritmi vari o coefficienti utili per il calcolo, memorizzati brutalmente, senza comprenderne il fondamento, - ma non so quanto sia cambiata la situazione negli ultimi tempi -) è qualcosa che era apparso col Rinascimento, con quella che possiamo considerare la prima 'professionalizzazione' della matematica (il geometra, il ragioniere, il contabile, l'artigiano superiore, etc.).

Alla fine del Settecento l'ingegnere dell'ecole polytechnique segna la seconda professionalizzazione della matematica, e anche qui formule e algoritmi vengono in genere brutalmente memorizzati.

Non causalmente quindi l'ottocento segna l’affermarsi della ignoranza e diffidenza verso la matematica e le scienze. Tramontano le radici intuitive geometriche della analisi matematica (derivata come tangente, integrale come area), si afferma un approccio formale che porterà alla aritmetizzazione della analisi (per ogni epsilon esiste un delta...): intendiamoci, sarà un grande progresso per la matematica, sarà la culla della matematica moderna, ma anche un trauma nella formazione matematica, un abisso che si spalancava davanti alla scuola di massa e faceva della matematica un'arte per pochi, mnemonica e formale, accessibile solo tramite uno spietato addestramento.

Ma siamo allora condannati alla incompatibilità tra una matematica sofisticata, formale, rigorosa ma estranea alla maggioranza dei cittadini e culturalmente inesistente, ed una cultura di massa più intuitiva e comprensibile, più immersa nella vita comune, più leggera e familiare?

Rinunciare alla ricchezza e potenza della matematica attuale è impensabile, si può solo sperare in una sua diffusione più culturale e più estesa. Ma si può e si deve manifestare una presenza più incisiva della cultura matematica, una sua più estesa connessione con gli altri settori culturali e soprattutto una didattica di massa che la renda patrimonio culturale delle nuove generazioni. E credo di non sbagliare nel pensare che una matematica leggera e profonda nella scuola sia il punto da cui partire.

Quindi non è solo un problema di mercato del lavoro ma un problema di civiltà, siamo di fronte ad un paradosso fatale: in una civiltà fondata su una scienza e una tecnologia a base matematica, la matematica è diventata un corpo estraneo e incomprensibile, la materia 'più odiata', appare come qualcosa di ostico, granitico e autosufficiente, rigoroso, pesante, quasi opprimente, da subire per trovare un lavoro. E la matematica con la scienza e tecnologia cresciute su di essa sono sostanzialmente ignorate e viste con un misto di diffidenza, di stupore quasi magico rispetto a certe divulgazioni approssimative, e di dipendenza quasi feticista per i gadgets tecnologici.

Si delinea una civiltà che diffida dei suoi stessi fondamenti materiali e in realtà anche culturali. Una civiltà costruita su questo presupposto non può non vedere alla fine la matematica e la scienza che come una potenza minacciosa, una imposizione autoritaria. Un fenomeno che vediamo diffusamente da molti decenni. Ricordiamoci gli scontri violenti al G7 di Torino della settimana scorsa su "industria, scienza, lavoro". La tesi era che oggi produttività e competitività si giocano sulla innovazione scientifica e tecnologica e questo riclassifica i caratteri del mercato del lavoro e della formazione. L'antitesi degli "antagonisti" era che la scienza e la tecnologia sono solo gli strumenti con cui la volontà di potenza del capitalismo sfrutta e domina il lavoro soprattutto giovanile . Sono le due facce della stessa medaglia, della stessa relazione 'infelice' nella società moderna, fatta della ineluttabile centralità della scienza e la tecnologia a base matematica e della diffusa ignoranza e ostilità verso di esse.

Per questo *una cultura matematica di massa è necessaria per la stessa libertà dell'uomo moderno*. Il vero problema oggi è allora rompere quella disarmonia che allora si è creata tra la scienza matematica e l'uomo moderno, e la scuola è il primo e vero campo di battaglia. Forse l'unico.

Il punto essenziale è allora questa connessione tra la didattica e la concezione generale della matematica. Una connessione che riappare nella matematica attuale, però con una novità.

Il fatto nuovo, epocale, da cui partire è che con l'arrivo del computer si cominciano a sgretolare quegli aspetti formali, mnemonici, di formule e algoritmi che erano stati il 'valore aggiunto' delle precedenti professionalizzazioni: negli ultimi decenni il computer ha progressivamente eroso tutte quelle abilità mnemonico-formali.

E allo stesso tempo il computer ha cominciato a diventare il modello della stessa intelligenza matematica umana.

Come funziona il computer? una unità logico aritmetica che naviga su una memoria esterna, che contiene dati, ma anche programmi, formule, procedure, algoritmi: è la macchina di Turing universale o l'architettura di von Neumann. E nella filosofia della matematica dominante nel XX secolo, con la matematica e la logica ridotte ad un ruolo superficiale e strumentale, puramente pratico, di calcolo, la stessa 'intelligenza' matematica ha finito con l'essere assimilata al funzionamento del computer: è questa concezione diffusa della stessa intelligenza matematica umana è finita alla base della stessa didattica della matematica: un insieme di competenze riunite in una grande 'memoria' contenente in forma simbolica non solo dati, ma soprattutto formule e algoritmi, e in aggiunta un 'motore' logico per applicarle (trovarle ed eseguirle) ad un problema, utilizzando le opportune 'competenze'.

Questa concezione viene spacciata per *problem solving*, ma in realtà ha niente a che vedere con il "how to solve it" di George Polya del secondo dopoguerra – che non parlava di formule, di memoria e di tecniche logiche. Appare piuttosto solo un capitolo specifico della programmazione logica, detto appunto 'problem solving'. L'aspetto formale della matematica è infatti quello che conta, formato da un lato da una 'memoria esterna' di formule, algoritmi, regole, dimostrazioni, dall'altro da una capacità logica di assemblare tali aspetti formali nella risoluzione dei problemi.

In questa concezione non è allora strano che un tema molto discusso è stato negli ultimi anni se permettere l'uso dei calcolatori nella scuola, evitando agli studenti di riprodurre (spesso male) senza capirne il senso questi semplici algoritmi che il calcolatore esegue meglio o addirittura se permettere l'uso di formulari, che in fondo stanno su Wikipedia, sottolineando che l'importante è solo formalizzare e risolvere i problemi, il miraggio del problem solving! Del resto il 'formulario' lo studente lo ha sempre usato: se lo scrive sui bigliettini che nasconde da qualche parte, con esiti quasi sempre disastrosi: l'errore principale è che di fronte ad un problema matematico risolubile spesso con un poco di buon senso matematico lo studente cerca disperatamente di ricordarsi una formula, quasi fosse una bacchetta magica,

Come se l'alternativa fosse o memorizzare come filastrocche o poesie formule e algoritmi, oppure sostituire questa attività mnemonica col computer o con il formulario. A questo punto il problem solving diventa la semplice capacità di utilizzare una formula di un esercizio o in un problemino. Ma una percezione matematica della realtà non richiede la memoria passiva di formule e algoritmi e neanche la loro ricerca sul formulario, ma quella che io chiamerei la 'familiarità' con la matematica, che è soprattutto una abilità argomentativa, una ricostruzione matematica del mondo, l'arte di passare dal mondo dei problemi al regno dei segni.

La matematica è infatti una disciplina memoria zero, nel senso che non ha una 'memoria esterna'. Certo, memorizzare un algoritmo o una formula è pesante e superficiale, lo studente non è la brutta copia del computer, ma non deve neanche farsi sottrarre l'intelligenza algoritmica dal computer. E la 'familiarità' con la matematica non è una questione di memoria o di competenze. O, in altri termini, il problema è cosa intendiamo per 'memoria'. Le formule non sono filastrocche, oggetti esterni alla intelligenza matematica, non sono 'morte', sono ‘vive’ nel loro uso e nel loro 'senso', parte integrante della capacità di leggere matematicamente il mondo, come 'nodi' di una rete, il cui significato è proprio dato dalle connessioni con gli altri nodi e con ciò che sta fuori della rete (ricordiamoci del servo nel *Meno* di Platone che senza conoscenze matematiche esplicite viene condotto quasi alla scoperta della incommensurabilità).

Non possiamo ridurre lo studente alla brutta copia un computer nè farlo sostituire nella conoscenza algoritmica, facendolo espropriare dal dominio della intelligenza algebrica e algoritmica, che è la quintessenza del controllo umano sulla conoscenza formale: *in matematica non si devono imparare a memoria formule e algoritmi senza capirne il senso, ma nemmeno usare i computer e i formulari per ignorare tale senso.*

La conoscenza algoritmica e formale 'struttura' il pensiero: più della semplice 'memorizzazione', è una sorta di 'ricostruzione concettuale' e di conseguenza anche 'familiarità', 'dimestichezza', 'agilità' nel regno dei segni. La memoria matematica è solo interna, è la familiarità di una architettura concettuale e di una visione del mondo matematica. Una formula o un algoritmo imparati a memoria come una filastrocca è come un pilastro che non regge nulla e non si poggia su nulla.

Per questo parlo di una matematica 'leggera', a memoria zero, in cui il ricordare coincide con la familiarità con la matematica: sono indistinguibili, quasi una abilità naturale a 'matematizzare' per risolvere i problemi. E per questo parlo di una matematica 'profonda' perchè non è un semplice strumento linguistico ma è innervata nel nostro stesso essere intelligenti nel mondo e del mondo, è la 'cultura matematica'. E *gli algoritmi non si eseguono, si costruiscono,* tramite una familiarità matematica, una chiara visione quantitativa del mondo e pochissima memoria.

Diceva un grande psicologo cognitivo (credo Vigotskij) che nella intelligenza matura non si pensa ricordando ma si ricorda pensando. *La memoria non è la precondizione ma l'effetto collaterale del pensiero matematico.*

E questo non è irrilevante per quanto riguarda i problemi della occupazione nell'era del computer: leggo che oggi, soprattutto nelle aree economicamente più avanzate, si profila una terza professionalizzazione della matematica con una crescente richiesta di formazione matematica nei settori che hanno a che fare coi *big data* e col *data mining,* ad esempio nel campo finanziario e nella gestione dei sistemi complessi. La stessa dimensione galattica dei data bases rende necessaria la capacità di gestirli algoritmicamente, e quindi la memorizzazione algebrica e algoritmica non è più il valore aggiunto, come nelle prime due professionalizzazioni, ora gli algoritmi che servono sono abbastanza semplici e nel contempo estremamente vari, l'incredibile abbondanza di dati e algoritmi disponibili rende piuttosto necessaria la loro selezione, adeguamento e organizzazione, come anche la verifica intuitiva dei risultati degli algoritmi usati e l'intuizione di nuovi, e quindi è indispensabile non tanto ricordarsi il teorema, la formula o l'algoritmo generali, quanto una notevole 'familiarità' col sistema dei dati numerici e del loro trattamento algoritmico, una vera familiarità matematica su qualsiasi tipo di data base.

Ma come si acquista la 'familiarità', la 'competenza' col pensiero matematico? Con gli esercizi e i problemi, certo. Ma non basta, questo resta ancora solo un addestramento, mentre la matematica è un fatto unitario, non è uno strumento linguistico, non è un insieme di tecniche e di competenze, è la scienza unica e unitaria della struttura del mondo.

Che fare rendere la matematica nel contempo potente e familiare all'uomo moderno? La familiarità è una architettura cognitiva, una struttura concettuale. Possono servire storia e filosofia della matematica?

Qui entra il tema dell'ordine didattico, in parole povere, 'del programma'. Che relazione deve avere con l'ordine logico-disciplinare delineato dalla concezione generale della matematica su accennata? E che relazione con l'ordine storico?

Non credo possibile studiare la matematica studiandone la storia, sarebbe una serie di aneddoti, di date, di nomi, ... per farla bene occorrerebbe intrecciarla con lo studio della storia, della filosofia, dell'arte, della tecnica. Invece credo che la storia della matematica per un professore di matematica sia una abilità professionale: rivela quei passaggi critici nella storia dell'opera matematica, che nelle strutture disciplinari delle teorie sono dimenticati, svaniti. E mostra come la via di accesso alla intelligenza matematica non sia un'unica strada. Non esiste un unico 'programma'!

Ad esempio, in una concezione lineare e strumentale della matematica domina la tesi implicita che gli aspetti intuitivi ed evidenti della matematica ne siano una parte ingenua e non rigorosa, da superare, siano strumenti 'più rozzi', o addirittura 'errori' da dimenticare, come vecchi arnesi dell'età della pietra. L'intuizione forma così una penombra della matematica da rimuovere, e questo ha come prezzo un insegnamento più formale e mnemonico, non intuitivo. L'intelligenza matematica sembra allora doversi sviluppare con lo stesso passo della logica della disciplina, e quindi la didattica deve imitare lo sviluppo logico-disciplinare.

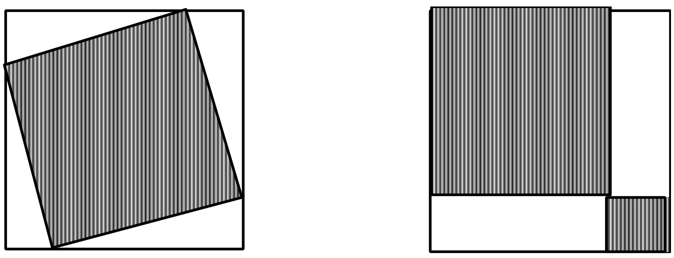
Ma nella storia della matematica una 'evoluzione' dall'intuitivo al rigoroso è solo un effetto ottico, *la matematica ha sempre avuto fondamenta intuitive evidenti ed è sempre stata rigorosa, ma intuizione e rigore sono cambiate nei secoli.*

E il rigore, la metodologia generale, le tecniche memorizzate sono solo la punta dell'iceberg della intelligenza matematica e del concetto matematico, la cui struttura profonda e costruttiva si estende invece sotto la superficie, e quindi l'evidenza e l'intuizione non sono la fase 'ingenua' della competenza matematica, ne sono invece la base, il fondamento anche degli aspetti logici formali più moderni. Che cosa è intuitivo? E cosa è rigoroso? Pensiamo solo al *continuo*: è intuitivo (o logico) che la retta si componga di punti? è intuitivo (o logico) associare biunivocamente numeri ai punti della retta? I numeri reali ancora oggi sono una zuppa di problemi logici e non sono stati 'intuiti' prima della fine del Cinquecento, nè 'teorizzati' prima della fine dell'Ottocento. E pochi credono che la realtà fisica sia continua. Eppure nelle nostre scienze i numeri reali aritmetizzano tranquillamente il continuo del tempo e dello spazio, nonchè di tutte le grandezze fisiche. E' intuitivo? E' logico? E' rigoroso?

Il rigore, il formalismo è solo che la punta dell'iceberg, l'unica che veramente 'si vede' in quanto è la parte dell'iceberg che appare sopra la superficie, anche nel formalismo moderno, logico e insiemistico.

Inoltre ricordo che nella possibile terza professionalizzazione matematica la punta dell'iceberg viene assunta dal computer, ma non il resto dell'iceberg, la familiarità matematica, che non è un fatto mnemonico nè logico formale. *Il computer di fatto ha automatizzato solo la superficie della intelligenza matematica umana.*

Per comprendere meglio che cosa in verità si intende per 'rigore', consideriamo ad esempio il teorema di Pitagora, che in fondo non è cambiato dalle sue prime versioni prepitagoriche, tra i babilonesi prima di Pitagora e di Euclide. Allora non esisteva ancora la dimostrazione euclidea, e allora come era stato scoperto? E come lo si 'dimostrava'? Non lo sappiamo, quasi certamente la 'dimostrazione' era solo un costruzione geometrica, forse quella in figura: due quadrati uguali nel ciascuno dei quali sono inseriti diversamente quattro triangoli bianchi uguali. Il teorema 'si vede'.



Semplice, facilmente memorizzabile, intuitiva ed evidente, mentre la dimostrazione euclidea è lunga e complessa, ma è quella attualmente utilizzata: quella pre-euclidea è meno rigorosa? Si basa su alcune costruzioni geometriche (affini ai postulati degli *Elementi*), su alcune simmetrie (che anche Euclide usava) e sull'assioma "se da uguali sono sottratti uguali, i resti sono uguali", terza nozione comune degli *Elementi.* Anche i limiti di validità sono gli stessi: nelle geometrie non euclidee il teorema non vale. Nella dimostrazione pre-euclidea per la impossibile costruibilità del quadrato, in quella euclidea per il rigetto del postulato delle parallele. Ma è difficile sostenere che questo sia più evidente di quella. Dove sta allora il minore rigore?

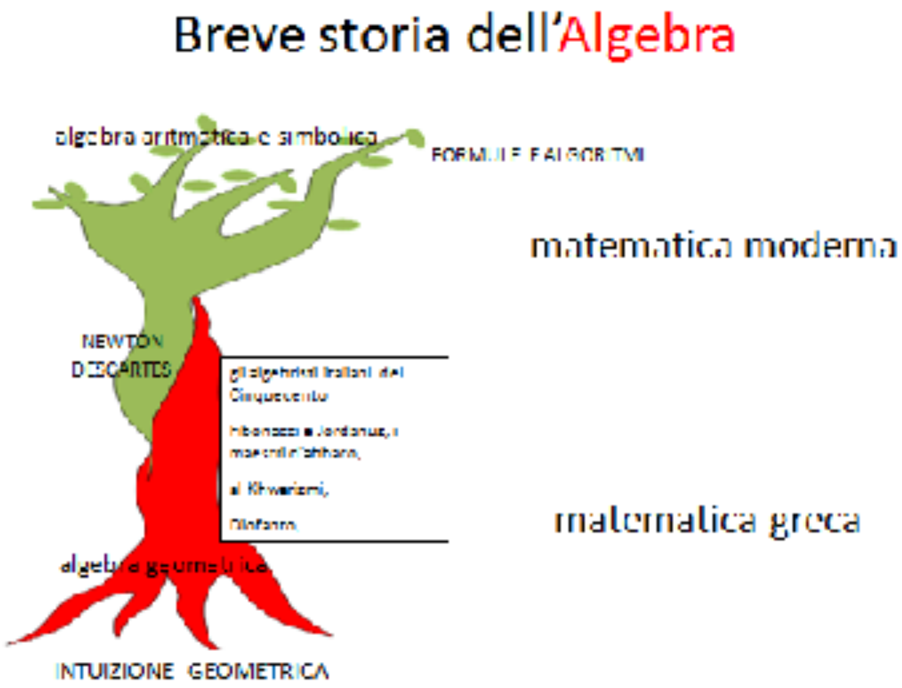
La vera differenza è che la dimostrazione euclidea si fonda su una traduzione linguistico-logica della costruzione la quale costituisce una istanza di una procedura generale, la 'dimostrazione euclidea', con la quale si 'riscrive' tutta la geometria precedente, mentre le costruzioni pre-euclidee erano particolari, ad hoc, per lo specifico problema o teorema.

Ed anche oggi: per Euclide la base del rigore era la dimostrazione euclidea fondata sulle costruzioni geometriche evidenti e sugli assiomi dell'uguaglianza, oggi preferiamo la dimostrazione logica fondata sugli assiomi logici e insiemistici. E' un rigore 'maggiore'? Direi piuttosto che è più consono ad una matematica fondata sull'infinito, sulla ricerca di procedure generali formali e sulla netta distinzione tra sintassi e semantica. E indubbiamente l'"intuizione geometrica" è stata oggi sostituita da una nuova "intuizione simbolica", con un conseguente grande arricchimento della potenza della matematica. Ma siamo sicuri si tratti di un processo che possa essere tradotto didatticamente in modo indolore nella cancellazione della intuizione geometrica?

Ricordiamo che quello che appariva un limite della intuizione matematica preeuclidea - l'assenza di un metodo unico, la ricerca delle soluzioni caso per caso - diventa un punto di forza nella fase della terza professionalizzazione della matematica. Possiamo allora dare per scontato che l'ordine didattico coincida con l'ordine logico-disciplinare, l'unico 'programma' rigoroso?

Vorrei soffermarmi su un esempio: il passaggio apparentemente più 'duro', che appare agli studenti come un salto, una discontinuità, è proprio quel passaggio dalla matematica più intuitiva (numeri interi e figure geometriche) a quella simbolica, l'algebra, che caratterizza la fase di passaggio dalle medie inferiori a quelle superiori, e nel contempo caratterizza la matematica ottocentesca con la nascita della matematica moderna, una matematica splendida basata sull'algebra/aritmetica e sulla analisi. Ma l'algebra simbolica appare agli studenti un autentico 'salto nel buio ', quasi 'un'altra matematica'.

La ragione è semplice: una cosa che mi ha sempre colpito guardando ai libri di matematica nel passaggio dalle medie inferiori alle superiori, è che l'algebra viene vista come 'aritmetica generalizzata', come 'aritmetica con le lettere', ma questo per la storia della matematica è un triplo salto mortale. Questa aritmetizzazione dell'algebra si afferma solo nel tardo Settecento, quando l'algebra diventa il linguaggio della fisica e della tecnica. E prima?



La culla dell'algebra era la geometria, la storia ce lo dice chiaramente. Sin dai Babilonesi l'algebra ha sempre avuto radici geometriche, che ritroviamo come 'algebra geometrica' nel II libro degli *Elementi*. Nella tarda antichità e nel medioevo cominciano ad apparire due novità: una prima scrittura simbolica e qualche aspetto aritmetico, con Diofanto, poi al-Khwarizmi estende l'algebra con le prime forme di manipolazione sintattica, e il simbolismo compare nel medioevo europeo. Ma la base dell'algebra resta ancora geometrica.

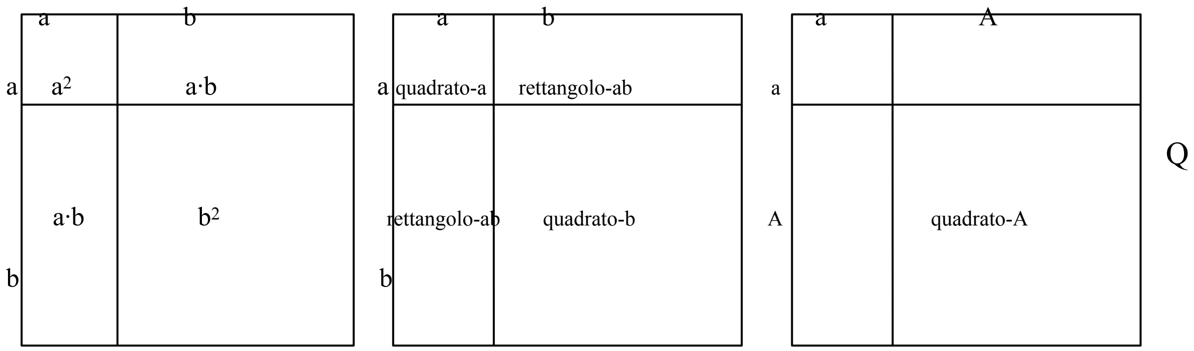
E anche nel Seicento, ancora in Descartes, padre del simbolismo moderno (*la geometrie*), e Newton, padre dell'analisi e della fisica-matematica (i *Principia*), l'algebra è ancora solo una tecnica utile in un ragionamento sostanzialmente geometrico e ha un senso geometrico. Solo nel tardo settecento si afferma definitivamente il ruolo del linguaggio algebrico simbolico-aritmetico in meccanica e in analisi.

Il passaggio ottocentesco dalla visualizzazione geometrica al rigore algebrico manipolativo, e poi l'eliminazione degli aspetti intuitivi nella fisica-matematica sarà un enorme passo avanti per la scienza, ma la storia ci dice che *l'intuizione simbolica, algebrica, logica o insiemistica che sia, non ha niente di 'naturale', è piuttosto il risultato di una evoluzione* *interna alla intuizione costruttiva geometrica*. La moderna fondazione formalista ha offuscato due passaggi cognitivi essenziali: il legame tra intuizione e rigore, e la transizione dalla algebra geometrica a quella simbolica, una opacità che oggi vivono gli studenti come un triplo salto mortale dalla matematica contenutista a quella sintattica.

Ha senso rivalutare le radici geometriche intuitive dell'algebra? Qualcuno obietterà: noi facciamo un sacco di geometria, quella euclidea. Ma storicamente Euclide segna proprio il primo distacco dalla geometria intuitiva, basata sulla evidenza visuale, e l'inizio di uno stile linguistico-formale con l'idea euclidea di 'dimostrazione'. Allo studente imponiamo quindi insieme il rigetto della intuizione geometrica con la geometria euclidea e la costruzione immediata di un'algebra simbolico-aritmetica senza overture geometrica. Due grandi conquiste per il pensiero matematico, ma pericolose per una didattica di massa della matematica se realizzate in tempi brevi e senza preparazione.

Per concludere vorrei fare un esempio - per non essere troppo astratto - per arrivare alla formula della potenza del binomio, alla soluzione delle equazioni di II grado, all'estrazione della radice quadrata, etc..

All'inizio c'è solo una figura, teorema II.7 degli *Elementi,* perfettamente equivalente al quadrato del binomio $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\, a \cdot b$. La figura si dimostra da sola, è semplice e facile da ricordare, molto più della formula, tant'è che può essere già introdotta nella scuola primaria, senza linguaggio algebrico.



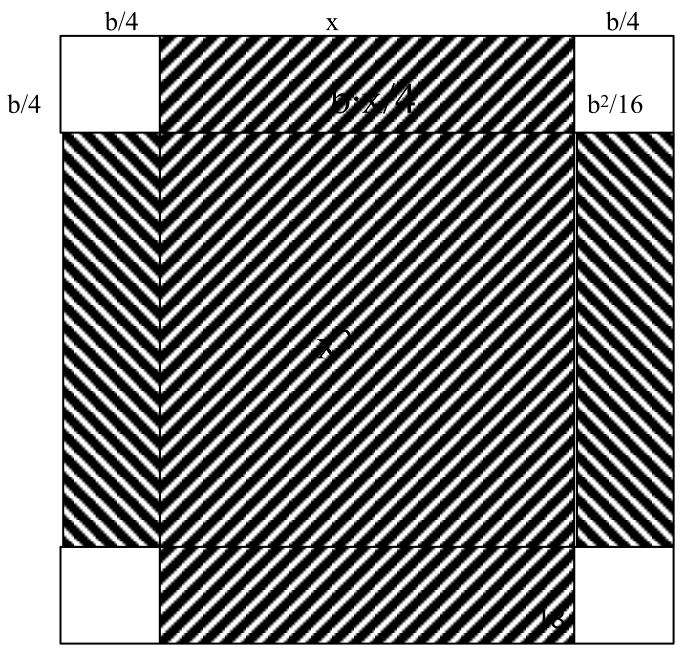
La figura a sinistra illustra il passaggio dall'algebra geometrica all'algebra simbolica, quella centrale mostra l'introduzione della costruzione del *Quadrato-(a,b)* senza linguaggio algebrico, quella sulla destra mostra come il ragionamento che porta all'algoritmo aritmetico per l'estrazione della radice quadrata (il lato), che di norma è incomprensibile e viene 'imposta' mnemonicamente, abbia un senso algebrico-geometrico chiarissimo: *Q* è il quadrato, *A* la sua radice approssimata, cioè una parte maggioritaria del lato (uso qui per ragioni tipografiche un linguaggio quasi-algebrico).

Q = Quadrato-(A,a) = $(A + a)^2 =$

= Quadrato-A + Quadrato-a + Rettangolo-Aa + Rettangolo-Aa $= A^2 + a^2 + 2\,a \cdot A \approx$ *Quadrato-A + 2 Rettangolo-Aa* $= A^2 + 2\,a \cdot A$, (eliminando *Quadrato-a* se l'approssimazione è buona, con *a* più piccolo di *A*). Da cui calcoliamo $a' \approx (Q - A^2)/\, 2A$. E allora $A+a' = A'$ è la nuova radice approssimata, con cui costruire una seconda approssimazione.

Il ragionamento sulla figura è generalizzabile al quadrato del polinomio e, con un disegno più complesso, al cubo del binomio, e qui appare qualcosa di interessante: si può fare la quarta potenza del binomio? Qui l'algebra geometrica si arena e mostra la necessità di passare ad un'altra forma di intuizione, più sofisticata e inconsueta, quella simbolica.

Una figura appena più complessa è quella usata da al-Khwarizmi per la risoluzione delle equazioni di II grado: $x^2 + b \cdot x = C$. Si parte da un quadrato di lato *x,* che si prolunga dai due lati con un segmento *b/4*



L'area tratteggiata vale $x^2+b \cdot x$, cioè *C*. Viene quasi spontaneo aggiungere i 4 quadratini sugli angoli, ottenendo il quadrato grande di lato ($x+b/2$) e area $C+b^2/4$

che è noto. Estraendo la

radice si ottiene $x+b/2$ e quindi x. La cosa curiosa è che nei libri di testo la risolvente algebrica viene ottenuta proprio aggiungendo $b^2/4$ su ambo i lati della equazione, ottenendo

$$x^2 + b \cdot x + b^2/4 = (x+b/2)^2 = C + b^2/4, \text{ da cui } x = - b/2 \pm \sqrt{(C + b^2/4)}.$$

In entrambi i casi si parla di "completamento del quadrato" ma per 'quadrato' si intende da un lato quello geometrico, dall'altro quello del binomio. Anche qui però la risoluzione geometrica, oltre ad essere più evidente e facilmente memorizzabile, mostra subito la necessità di passare ad una risoluzione algebrica quando si osservi che geometricamente tutte le grandezze devono essere necessariamente positive. Il passaggio dall'approccio geometrico a quello simbolico quindi non solo è naturale ma appare anche necessario.

Con figure simili si possono motivare altre procedure normalmente imparate a memoria e senza motivazione, come la prova del nove.

Per concludere: io non credo che le questioni dell'insegnamento della matematica siano un fatto solo pedagogico e metodologico. L'idea strumentale della matematica e la sua storia come cronaca sono la vera questione, poichè portano all'idea della matematica come insieme di competenze, alla definizione di un programma rigido, ad una idea di intelligenza matematica modellata sul computer, alla memoria e al formalismo come paradigma della intelligenza.

La familiarità e la cultura matematica credo debbano essere invece il reale obiettivo didattico, e la storia cognitiva della matematica appare anche come abilità professionale del docente, come suggerimento di strade alternative, di mille programmi per costruire la familiarità matematica.

Il carattere pervasivo del computer ci dice che gli aspetti intuitivi diventeranno più importanti di quelli formali e mnemonici, in quanto il regno del generale, della memoria e del ripetitivo è il dominio del computer, la soluzione ad hoc, particolare, creativa anche se tecnicamente semplice, è il dominio della familiarità, della intuizione e della intelligenza matematica dell'uomo.

E soprattutto ricordiamo che la matematica è l'orgoglio della umana intelligenza e della sua libertà, e può essere anche divertente, tanto da imparare che da insegnare...

luigi borzacchini
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
via Orabona, 70125 BARI

luigiborzacchini47@gmail.com

http://www.dm.uniba.it/Members/borzacchini