Schema della relazione

1. Generalità sul concetto di evento
2. Definizione di probabilità comparativa ($\succcurlyeq$)
3. Quantificazione P di $\succcurlyeq$ per eventi dipendenti da partizioni finite di evento certo in eventi identicamente probabili
4. Come estendere la quantificazione P ad eventi qualunque
5. Verifica che la quantificazione P soddisfa le regole del calcolo
6. Molteplicità degli indici di probabilità e loro equivalenza sostanziale
7. Eventi condizionati (subordinati). Principio delle probabilità composte

---

Scanned by CamScanner

Valutazione di probabilità ai fini della scelta ragionata di una fra varie possibilità. - Relazione tenuta da Eugenio Regazzini il 28.VIII.2017 per i partecipanti alla Quarta Scuola Estiva per Insegnanti (UMI CIIM - AIRDM), Bardonecchia 25-29 Agosto 2017.

1. - Fra le nostre facoltà logiche, quella che nell'attività pratica ci è più costantemente e concretamente di aiuto si esercita con la formazione di opinioni, la formulazione di ipotesi e l'enunciazione di conclusioni e giudizi sulla base di indizi, apparenze, intuizioni e deduzioni personali. In una parola, è la facoltà che ci porta a fare congetture su fatti dall'esito incerto, secondo livelli d'incertezza diversi. I fatti di cui parleremo, per i quali conveniamo di usare il termine evento, sono quelli descritti mediante proposizioni intese come entità logiche per le quali sia possibile stabilire, incontrovertibilmente, se sono Vere o False. L'applicazione di questo concetto alle situazioni reali può talvolta richiedere un certo grado di idealizzazione, ché la verità o la falsità di una proposizione è necessariamente relativa ad un determinato stato d'informazione che, di volta in volta, richiede di essere specificato. Per semplicità espositiva, in vista soprattutto di esigenze didattiche, lo stato d'informazione sarà da intendersi come dato del problema e verrà richiamato sotto questa denominazione. Così, un evento si dice certo se i dati del problema ne implicano la verità, impossibile se ne implicano la falsità, possibile se i dati non sono sufficienti ad implicarne la falsità o la verità. A titolo illustrativo, si esamina il valore dell'evento: « in corrispondenza ad una specifica estrazione del lotto,

Scanned by CamScanner

entrambi i giocatori A e B vincono (fanno) terno >>. Per un problema che non fornisse precisazioni aggiuntive, l'evento sarebbe da riguardarsi come semplicemente possibile; invece, se due il problema specificasse che A e B hanno giocato sulla stessa ruota V insiemi disgiunti di numeri, l'evento sarebbe impossibile; sarebbe certo in un problema che specificasse che entrambi i giocatori hanno giocato tutti i terni possibili.

2.- I problemi concreti obbligano, generalmente, a considerare più eventi simultaneamente, i quali si presentano con diversi gradi d'incertezza (dall'impossibile al certo), e una molteplicità di azioni disponibili a ciascuna delle quali si riattaccano conseguenze di entità diversa a seconda di quale dei suddetti eventi si verifica. Di fronte al compito di dover sceglierne una, s'intravede l'opportunità, se non addirittura la necessità, di effettuare una valutazione comparativa, basata sul grado d'incertezza degli stessi eventi percepito dal decisore. Il discorso si chiarisce, speriamo, concependo uno schema semplice che "incroci" i detti eventi aleatori, a due a due incompatibili e tali da esaurire tutte le possibilità (partizione), $H_1, H_2, \dots, H_n$; con le azioni alternative $A_1, \dots, A_m$ a disposizione, e a ciascun incrocio (H_i, A_j) associ l'utilità/disutilità u_{ij} $(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ delle conseguenze derivanti dall'azione A_j quando fra le possibilità (tipicamente, stati di un sistema fisico, o economico, o economico/fisico, o altro) che ha a disposizione, la "Natura" scelga H_i. Ne scaturisce una tabella (cfr. Tab. 1) che contiene elementi essenziali per una decisione ragionata fra azioni e, tuttavia, è inadeguata per l'assenza di una valutazione dei diversi anche

Scanned by CamScanner

gradi di incertezza che un decisore consapevole avrà, magari in forma semplicemente qualitativa e comparativa, alle diverse ipotesi attribuibili alla Natura.

Azioni / Natura	A_1	A_2	. . .	A_m
H_1	u_{11}	u_{12}	. . .	u_{1m}
H_2	u_{21}	u_{22}	. . .	u_{2m}
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
H_n	u_{n1}	u_{n2}	. . .	u_{nm}

Tab. 1

Ed è a questo punto che sembra opportuno far intervenire la teoria (non ancora il calcolo) delle probabilità per fissare i requisiti minimi che la valutazione richiesta deve avere per non incorporare contraddizioni tali da renderla inammissibile da parte di un qualunque individuo propenso a "ragionare bene", sia che si tratti di regolarizzare una valutazione comparativa o, più direttamente, un indice numerico dei diversi livelli d'incertezza. Seguendo l'uso comune, il termine probabilità è riservato a questo secondo tipo di valutazione, la locuzione probabilità qualitativa essendo usata per designare

una valutazione comparativa. Ovviamente, una probabilità si può tradurre immediatamente in una probabilità comparativa, mentre il processo inverso è più delicato e, tuttavia si ritiene opportuno trattarne in conseguenza dell'idea, tutt'altro che bizzarra, che sia più intuitivo ed efficace cogliere l'esistenza del ragionamento probabilistico a partire dal punto di vista qualitativo, piuttosto che da un'angolazione direttamente quantitativa. È un fatto che la facoltà logica di cui si è parlato all'inizio sia accompagnata, nella stragrande maggioranza dei casi, da un giudizio semplicemente comparativo fra eventi e non da una probabilità.

La presentazione della teoria qualitativa che segue è dovuta a Bruno de Finetti (1906–1985) e, precisamente, è tratta da un suo lavoro apparso nel 1931, nella rivista Fundamenta Mathematicae. Dato per acquisito il significato della relazione[(*)] «l'evento E_1 è non meno probabile dell'evento E_2», tradotta nel simbolo $E_1 \gtrsim E_2$, la teoria proposta da de Finetti impone che tale relazione soddisfi quattro requisiti, i primi tre piuttosto ovvi e il quarto più caratterizzante e significativo ma comunque facile da accettare:

(i) per due eventi E_1, E_2 deve valere $E_1 \gtrsim E_2$ oppure $E_2 \gtrsim E_1$; se valgono simultaneamente le due si dice che E_1 ed E_2 sono identicamente probabili, in simboli $E_1 \doteq E_2$ (in particolare, per ogni evento E, si ha $E \doteq E$); quando vale $E_1 \gtrsim E_2$ ma non $E_2 \gtrsim E_1$ si dice che E_1 è più probabile di E_2, $E_1 > E_2$ in simboli;

(ii) se A e Ω sono eventi, rispettivamente, impossibile e certo,

---

(*) Si considera, in altri termini, il caso di un individuo che è in grado di istituire il confronto in questione sulla base di opinioni personali.

Scanned by CamScanner

per ogni evento possibile E si ha $A \leqslant E \leqslant \Omega$

(iii) se per gli eventi E_1, E_2, E_3 valgono le relazioni $E_1 \gtrsim E_2$, $E_2 \gtrsim E_3$, allora sussiste (transitività) $E_1 \gtrsim E_3$, $E_1 > E_3$ se in almeno una delle due ipotesi si assume $>$, $E_1 \doteq E_3$ se entrambe si presentano con $\doteq$

(iv) se E è incompatibile con entrambi gli eventi E_1, E_2 e $E_1 \gtrsim E_2$ [rispettivamente, $>$ oppure $\doteq$], allora vale $E_1 \cup E \gtrsim E_2 \cup E$ [rispettivamente $>$ oppure $\doteq$].

L'ultima condizione (iv) ammette una formulazione più sintetica e (apparentemente) più generale data dal

Teorema 1. Date due classi di eventi $\{A_1, \dots, A_n\}, \{B_1, \dots, B_n\}$ con $A_1, \dots, A_n$ incompatibili a due a due e $B_1, \dots, B_n$ incompatibili a due a due, valgono i fatti seguenti:

(1) se $A_i \gtrsim B_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora $\bigcup_{i=1}^n A_i \gtrsim \bigcup_{i=1}^n B_i$, e se qualcuna [tutte, rispettivamente] valese [valsero, rispettivamente] col simbolo $>$ [$\doteq$, rispettivamente], allora si avrebbe $\bigcup_{i=1}^n A_i > \bigcup_{i=1}^n B_i$ [$\bigcup_{i=1}^n A_i \doteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, rispettivamente];

(2) da $\bigcup_{i=1}^n A_i \gtrsim \bigcup_{i=1}^n B_i$ discende la validità di $A_i \gtrsim B_i$ per qualche i, e se $\bigcup_{i=1}^n A_i > \bigcup_{i=1}^n B_i$ allora $A_i > B_i$ per qualche i, mentre $A_i \doteq B_i$ per ogni i quando $\bigcup_{i=1}^n A_i \doteq \bigcup_{i=1}^n B_i$.

[dimostrazione. La verifica della contronominale della (2) è conseguenza immediata della (1), che basta verificare per una $n = 2$. In questo caso, i quattro eventi A_1, A_2, B_1, B_2 generano una partizione formata da non più di 9 eventi dati da

$C_1 = A_1 \cap A_2^c \cap B_1 \cap B_2^c$, $C_2 = A_1 \cap A_2^c \cap B_1^c \cap B_2$, $C_3 = A_1 \cap A_2^c \cap B_1^c \cap B_2^c$, $C_4 = A_1^c \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2^c$, $C_5 = A_1^c \cap A_2 \cap B_1^c \cap B_2$,

Scanned by CamScanner

$C_6 = A_1^c \cap A_2 \cap B_1^c \cap B_2^c$, $C_7 = A_1^c \cap A_2^c \cap B_1 \cap B_2^c$, $C_8 = A_1^c \cap A_2^c \cap B_1^c \cap B_2$, $C_9 = A_1 \cap A_2^c \cap B_1^c \cap B_2^c$. Quindi,
$A_1 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, $B_1 = C_1 \cup C_4 \cup C_7$, $A_2 = C_4 \cup C_5 \cup C_6$, $B_2 = C_2 \cup C_5 \cup C_8$ e le ipotesi si riscrivono come

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \succcurlyeq C_1 \cup C_4 \cup C_7, \quad C_4 \cup C_5 \cup C_6 \succcurlyeq C_2 \cup C_5 \cup C_8$$

ovvero, in virtù di (iv),

$$C_2 \cup C_3 \succcurlyeq C_4 \cup C_7, \quad C_4 \cup C_6 \succcurlyeq C_2 \cup C_8$$

e quindi, sempre per la (iv) applicata per due volte di seguito,

$$A_1 \cup A_2 = (C_2 \cup C_3) \cup (C_4 \cup C_6) \cup (C_1 \cup C_5)$$
$$\succcurlyeq (C_4 \cup C_7) \cup (C_2 \cup C_8) \cup (C_1 \cup C_5) = B_1 \cup B_2.$$

Ovvie sono le piccole modifiche da apportare a queste semplici considerazioni per ottenere il completamento della verifica di (2).-]

L'implicazione più importante del Teorema 1 è che se A_1 e A_2 sono eventi incompatibili, B_1 e B_2 sono incompatibili e $A_i \doteq B_i$ per $i = 1, 2$, allora $A_1 \cup A_2$ e $B_1 \cup B_2$ sono da giudicare ideticamente probabili. Data una classe $\mathcal{E}$ di eventi e, per tali eventi, una valutazione comparativa che rispetti i postulati (i)-(iv) si pone il problema se sia possibile tradurre tale valutazione in una probabilità (quantitativa) P in modo che essa concordi con la anagrafata probabilità qualitativa: per A e B in $\mathcal{E}$ tali che $A \succcurlyeq B$ è richiesto che si verifichi $P(A) \geq P(B)$. Lo studio del problema ci conduce a scoprire quali debbano essere le caratteristiche della funzione $P: \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$, le regole di calcolo in particolare, e al tempo stesso fornire la giustificazione più naturale, in quanto scaturente da considerazioni puramente qualitative, di tali regole. Data la natu-

Scanned by CamScanner

ra personale, soggettiva, della relazione $\succsim$, di natura soggettiva sarà necessariamente ogni sua versione quantitativa concordante.

3.- Conviene affrontare il problema a partire dalla situazione semplificata in cui $\mathcal{E}$ è data dall'unione di partizioni finite di eventi certi - i cui elementi sono giudicati identicamente probabili - con le classi delle unioni di elementi di ciascuna delle partizioni considerate. Generalmente, simili partizioni vengono usate per la schematizzazione di giochi d'azzardo, di estrazioni campionarie, etc.. Per comodità, d'ora in poi, si userà il simbolo $\mathcal{I}$ per denotare una qualunque classe di eventi costruita nel modo testé indicato. Per fissare le idee, prendiamo in considerazione due delle suddette partizioni

$$\mathcal{C} := \{C_1, \dots, C_n\}, \quad \mathcal{C}' := \{C'_1, \dots, C'_{n'}\}$$

con $C_1 \doteq \dots \doteq C_n$, $C'_1 \doteq \dots \doteq C'_{n'}$. Si vuole dimostrare che, se E ed E' sono eventi ottenuti riunendo, rispettivamente, m elementi di $\mathcal{C}$ ed m' elementi di $\mathcal{C}'$, si ha $E \succsim E'$ se e solo se risulta $m/n \geq m'/n'$. Un breve commento prima di procedere alla verifica di questa affermazione, che consente di ricondurre uno dei più noti, e abusati, criteri di valutazione di una probabilità a semplici considerazioni di natura qualitativa. In questo passaggio emergono chiaramente alcuni aspetti importanti: si tratta di un criterio di valutazione, non di una definizione, di probabilità; la validità del criterio ha una base soggettiva, che si estrinseca nell'opinione che gli elementi di $\mathcal{I}$ corrispondano ad unioni di eventi componenti partizioni finite di evento certo in eventi ritenuti ideticamente probabili. Venendo finalmente alla dimostrazione, conviene introdurre un insieme ausilia-

Scanned by CamScanner

rio di $N = n \cdot n'$ eventi identicamente probabili: $a_1, \ldots, a_N$ con $a_1 \doteq a_2 \doteq \ldots \doteq a_N$ (si può sempre immaginare ad una estrazione da un'urna di una pallina che ne contiene N di colore diverso, e identificare a_j con l'evento «si estrae pallina di colore j-esimo»). Dell'insieme sopra introdotto si immaginano due suddivisioni qualunque, rispettivamente in n e n' famiglie di uguale numerosità: n' nella prima suddivisione, n nella seconda:

n famiglie
$$\begin{cases} a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n'}} \\ a_{j_{n'+1}}, \ldots, a_{j_{2n'}} \\ a_{j_{2n'+1}}, \ldots, a_{j_{3n'}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{j_{(n-1)n'+1}}, \ldots, a_{j_{n \cdot n'}} \end{cases}$$

n' famiglie
$$\begin{cases} a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \\ a_{i_{n+1}}, \ldots, a_{i_{2n}} \\ a_{i_{2n+1}}, \ldots, a_{i_{3n}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_{(n'-1)n+1}}, \ldots, a_{i_{n'n}} \end{cases}$$

e si indicano con $U_{j_1}, \ldots, U_{j_n}$ (rispettivamente: $U'_{i_1}, \ldots, U'_{i_{n'}}$) le unioni per riga nella prima (rispettivamente, seconda) suddivisione. Poichè gli a_r sono identicamente probabili, dal Teorema 1 segue subito la validità delle relazioni

$$U_{j_1} \doteq \ldots \doteq U_{j_n}, \quad U'_{i_1} \doteq \ldots \doteq U'_{i_{n'}}.$$

Si giustificano, inoltre, i due fatti seguenti:

(F_1)
$$U_{j_1} \doteq C_1, \ldots, U_{j_n} \doteq C_n$$
$$U'_{i_1} \doteq C'_1, \ldots, U_{i_{n'}} \doteq C_{n'}$$

(F_2) Sia E che E' sono identicamente probabili, rispettivamente, con l'unione di $m \cdot n'$ e con l'unione di $m' \cdot n$ eventi a_r estratti dall'insieme ausiliario.

[Per la verifica di (F_1), si osserva che se, per assurdo, non va-

Scanned by CamScanner

lesse la prima relazione della prima riga ma, per fissare le idee, fosse $U_{j_1} \succ C_1$, allora $U_{j_r} \succ C_r$ $(r=1,\dots,n)$ e quindi, per il Teorema 1, $\bigcup_{r=1}^{n} U_{j_r} \succ \bigcup_{r=1}^{n} C_r$, in contraddizione con (i)-(ii) in base alle quali un evento certo è identicamente probabile con ogni altro evento certo. Per dimostrare (F_2), ricordando che $E = \bigcup_{r=1}^{m} C_{i_r}$, $E' = \bigcup_{r=1}^{m'} C'_{i_r}$, da (F_1) e dal Teorema 1 discende: $E \overset{\cdot}{=} \bigcup_{r=1}^{m} U_{j_r}$, $E' \overset{\cdot}{=} \bigcup_{r=1}^{m'} U'_{i_r}$. Ora, per costruzione, si ha $\bigcup_{r=1}^{m} U_{j_r} = \bigcup_{r=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n} a_{j_{(r-1)n+k}}$ (unione di $m \cdot n$ eventi estratti dall'insieme ausiliario) e $\bigcup_{r=1}^{m'} U'_{i_r} = \bigcup_{r=1}^{m'} \bigcup_{k=1}^{n} a_{i_{(r-1)n+k}}$.]

Disponiamo ora degli elementi per dimostrare la proposizione più importante del paragrafo, ovvero il

Teorema 2. Siano E, E' elementi di una classe $\mathfrak{I}$, come sopra definita, il primo unione di m fra gli n elementi V in $\mathfrak{I}$ di una partizione, il secondo unione di m' fra gli n' elementi di una partizione in $\mathfrak{I}$. Allora, vale una delle relazioni $E \succ, \overset{\cdot}{=}, \prec E'$ a seconda che valga, rispettivamente, una delle relazioni $m/n > , = , < m'/n'$.

Dimostrazione. Ricorrendo a (F_2), il confronto si può ricondurre al confronto di due unioni di elementi identicamente probabili presi dall'insieme ausiliario: la prima di $m \cdot n'$ e la seconda di $m' \cdot n$ eventi a due a due incompatibili. Per fissare le idee, sia $m \cdot n' > m' \cdot n$ (ovvero, $m/n > m'/n'$). Si può "completare" la seconda con $(m \cdot n' - m' n)$ eventi impossibili, in modo che le due unioni abbiano lo stesso numero di addendi. Combinando il Teorema 1 con (ii), poiché gli a_r sono identicamente probabili, si ottiene

Scanned by CamScanner

che E è più probabile di E'. Considerazioni simili per discutere i casi in cui $m\,n' = , < m'\cdot n$, e procedere per assurdo per dimostrare la proposizione inversa (se $E > E'$, allora $m\cdot n' > m'\cdot n$, etc.).]

Stabilito che un giudizio comparativo di probabilità, secondo i postulati (i)-(iv), sopra una famiglia J di eventi, concorda (strettamente) col criterio di valutazione: rapporto del numero dei casi favorevoli sul numero dei casi possibili, sorge spontanea la domanda sull'esistenza e, in caso affermativo, sulle caratteristiche di una probabilità concordante con una valutazione comparativa assegnata su una classe qualunque di eventi, non necessariamente del tipo di J. Dallo studio del problema può venire, come di fatto avviene, una giustificazione e una spiegazione convincente (stò pensando in particolare ad esigenze didattiche) delle regole di calcolo delle probabilità. Prima di addentrarci nella questione, facciamo ancora una piccola, ma importante, osservazione: data una qualunque funzione reale φ definita su una parte di $\mathbb{R}$, che includa l'intervallo $[0,1]$, strettamente crescente (almeno su questo intervallo) può essere usata per costruire una nuova "immagine" quantitativa Q della valutazione comparativa su J: Basta prendere $Q(E) = \varphi(P(E))$, per ogni E in J, quando P rappresenti la usuale quantificazione stabilita nel Teorema 2. Come si può vedere facilmente, gioca in questo processo un ruolo fondamentale il fatto che φ sia strettamente crescente. Conviene, d'ora in poi, per adeguamento al linguaggio corrente riservare il termine di probabilità a P, e chiamare indice di probabilità ogni Q corrispondente ad una φ qualunque diversa dall'identità.

Scanned by CamScanner

4.- Per mostrare come una quantificazione di probabilità comparativa, assegnata su un'arbitraria classe di eventi $\mathcal{E}$, possa essere convenientemente arricchire $\mathcal{E}$ con l'unione della classe $\mathcal{T}$ ottenuta a partire da una sola partizione di evento certo in n eventi ugualmente probabili, per ogni $n = 1, 2, \ldots$, o più direttamente assumere, come noi facciamo, che $\mathcal{E}$ contenga una $\mathcal{T}$ siffatta. Esponiamo quindi una procedura per una quantificazione della probabilità comparativa $\succcurlyeq$ su $\mathcal{E}$, la cui restrizione ad $\mathcal{T}$ coincida con la probabilità P "determinata" alla fine del paragrafo precedente (cfr. Teorema 2). La particolare forma di $\mathcal{T}$ sopra descritta assicura, allora, che tale restrizione assumerà ogni razionale contenuto in $[0, 1]$. Con attenzione ad esigenze didattiche, si può spiegare che la partizione, in $\mathcal{T}$, fatta di n eventi sia associata all'esperimento seguente: da un sacchetto contenente n pedine, ben mescolate e identiche per forma, numerate da 1 a n, si estrae una pedina. Allora gli esiti possibili dell'esperimento sono eventi del tipo «la pedina estratta reca il numero j» per $j = 1, \ldots, n$, ed è evidente che essi costituiscono una partizione di evento certo; inoltre, grazie al buon mescolamento ed all'indistinguibilità, è ragionevole assumere che essi siano ugualmente probabili. Si realizza così una partizione che ha le caratteristiche per poter essere considerata come elemento di $\mathcal{T}$. In particolare, se con $A_n(k)$ si denota l'evento che si verifica se, e solo se, la pallina estratta reca un intero $\leq k$, essendo k intero fissato, si ha $P(A_n(k)) = k/n$ per $k = 0, 1, \ldots, n$, $P(A_n(k)) = 1$ per $k > n$ (evento certo), $P(A_n(k)) = 0$ per $k \leq 0$ (evento impossibile). Ora, preso E in $\mathcal{E} \setminus \mathcal{T}$ e fissato n intero positivo, definiamo $k_n^E = k_n(E)$ come il minimo dei k tali che $A_n(k) \succcurlyeq$

E, quindi: $A_n(k_n) \gtrsim E$ e $A_n(k_n - 1) < E$. Noi siamo interessati ad un prolungamento di P da $\mathcal{J}$ ad $\mathcal{E}$ che concordi con la probabilità comparativa $\gtrsim$; perciò, mantenendo il simbolo P anche per il prolungamento, $P(E)$ dovrà necessariamente soddisfare (cfr. Fig. 1, che reca la funzione di ripartizione del risultato dell'estrazione dal sacchetto con n pedine)

$$(G_1) \qquad \frac{k_n - 1}{n} = P(A_n(k_n - 1)) < P(E) \leq P(A_n(k_n)) = \frac{k_n}{n} \,.$$

Si deve ora pensare di ripetere queste considerazioni per $n = 1, 2, \ldots$; può accedere si arrivi ad un intero $n = \bar{n}$ per il quale $E \doteq A_{\bar{n}}(k_{\bar{n}})$ e, in tal caso la desiderata quantificazione è determinata. Altrimenti, si dovrà continuare, eventualmente con "infiniti" passi, per giungere alla determinazione di $P(E)$. Arrestando arbitrariamente il processo al passo n-esimo, si ottengono stime di $P(E)$ con errore non superiore a $1/n$.

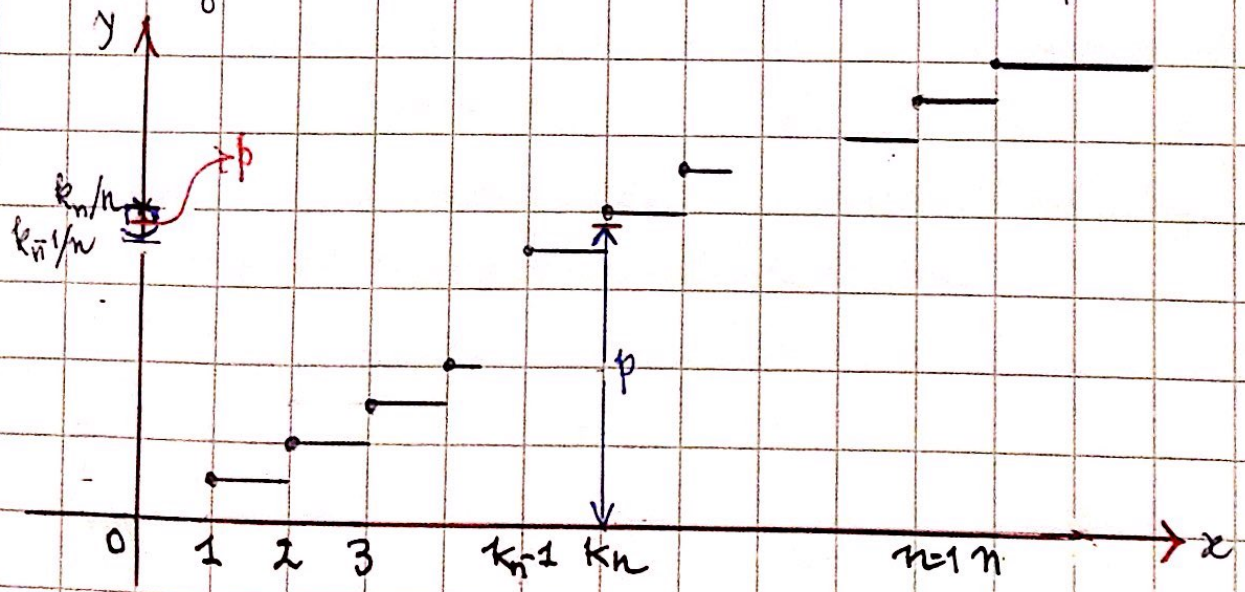

Fig. 1. - Si rappresenta la f.r. del risultato dell'estrazione dal sacchetto di n pedine: $y = F_n(x) = [x]/n$, $x \in \mathbb{R}$. Dopo il confronto n-esimo, l'insieme dei valori ammissibili per $p := P(E)$ è ristretto a $\left(\frac{k_n - 1}{n}, \frac{k_n}{n}\right]$.

Scanned by CamScanner

Che cosa accade durante il processo di confronto di E con $A_k(n)$ determinato dall'assegnazione di $\not\geq$ quando n cresce? L'evento E separa tutti gli eventi $A_k(n)$ in due classi A', A'' separate: nella prima, A', vanno a collocarsi tutti gli $A_k(n)$ per cui $A_k(n) < E$, mentre nella seconda, A'' si collocano gli $A_k(n)$ che soddisfano $A_k(n) \not< E$. In corrispondenza, i razionali di $[0,1]$, che rappresentano le probabilità $P(A_k(n))$ si separano in due classi contigue di razionali Q_1', Q_1'', nel senso che, dato $\varepsilon > 0$, esistono p' in Q_1' e p'' in Q_1'' tali che $p' < p''$ e $0 < p'' - p' < \varepsilon$; inoltre, $p' < P(E) \leq p''$, e $P(E)$ viene a rappresentare l'unico elemento separatore di Q_1' e Q_1'' e, ancora,

$$(G_2) \qquad P(E) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}.$$

Prima di proseguire, si dà un'illustrazione grafica, Fig 2, del procedimento seguito per determinare $P(E)$. Più precisamente, si dà una immagine di quanto accade all'intervallo di ammissibilità nel passaggio da $n = 2^m$ a $n = 2^{m+1}$, essendo m un intero positivo. In questo caso, il codominio della f.r. disegnata nella Fig. 1, si raddoppia e l'intervallo di ammissibilità si dimezza.

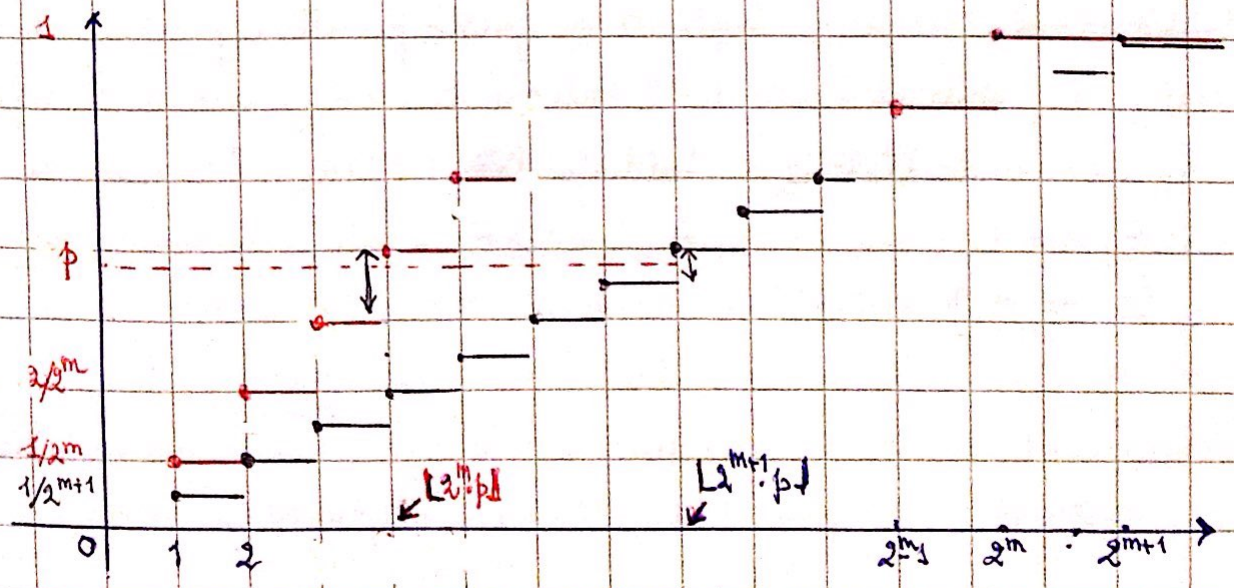

Fig 2. - In rosso il grafico della f.r. dell'esito di una estrazione dal sacchetto con 2^m pedine, assunto per la stessa riferita a sacchetto di 2^{m+1} pedine.

Scanned by CamScanner

Procedendo in questo modo per ogni E in $\mathcal{E} \setminus \mathcal{J}$ si perviene ad una quantificazione P di $\succcurlyeq$ che concorda con $\succcurlyeq$ nel senso che se E_1, E_2 sono elementi di $\mathcal{E}$ tali che $E_1 \succcurlyeq E_2$, allora $P(E_1) \geq P(E_2)$. Può però accadere che valga $E_1 \succ E_2$ e, d'altro canto, $P(E_1) = P(E_2)$. In altro modo il fenomeno si può rendere dicendo che due eventi identicamente probabili sono anche ugualmente probabili, ma due eventi ugualmente probabili non sono necessariamente identicamente probabili.(*) Il fenomeno pone in luce l'inadeguatezza del campo reale a rappresentare una probabilità comparativa in maniera strettamente concordante: servirebbero infinitesimi attuali (analisi non-standard). Vediamo un esempio di come può presentarsi. Supponete che $E \in \mathcal{E}$ sia possibile ma tale che, per ogni n, risulti $A \prec E \preccurlyeq A_n(1)$, essendo A un evento impossibile. Allora, pur non essendo impossibile, E dovrà ricevere una probabilità nulla, proprio come A.

5. Appreso che una probabilità comparativa $\succcurlyeq$, sopra una classe $\mathcal{E}$ di eventi contenente $\mathcal{J}$ come all'inizio del paragrafo precedente, (§) $\Leftarrow$ ammette una quantificazione (debolmente) concordante con essa [tenere presente il fenomeno evidenziato alla fine del paragrafo precedente] indicata con P e ottenuta per mezzo di (G_1)–(G_2), si pone la questione se P abbia le usuali proprietà che assiomaticamente vengono prescritte per definire una probabilità. In caso affermativo, come già osservato in precedenza, si avrebbe una spiegazione semplice, ma profonda, di queste prescrizioni e un contributo non da poco alla didattica a cui si riferisce la

(*) Attenzione al significato degli avverbi: identicamente è riferito alla probabilità comparativa; ugualmente è riferito ad una quantificazione P di $\succcurlyeq$.

Scanned by CamScanner

(§) Conviene essere più espliciti su questo punto e provare che se E_1, E_2 sono elementi di $\mathcal{E}$ tali che $E_1 \geqslant E_2$, allora P, definita seguendo (G_1)-(G_2), soddisfa $P(E_1) \geqslant P(E_2)$. [Infatti, se $A_n(k) \geqslant E_1$, per la (iii) si ha $A_n(k) \geqslant E_2$ e, di conseguenza $k_n(E_2) \leqslant k_n(E_1)$.] (§) $\Leftarrow$

Scanned by CamScanner

attuale edizione della Scuola. Da (G_1)-(G_2) discendono immediatamente non negatività di P e l'obbligo di porre $P(B)=1$ quando B è un evento certo. Resta da verificare che P è finitamente additiva o, con linguaggio ben noto, che P soddisfa il principio delle probabilità totali. Si considerino allora due eventi incompatibili contenuti in $\mathcal{E}$: $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1 \cap E_2$ impossibile e, con ovvio significato dei simboli, per ogni n si fissino $k_n(E_1)$ e $k_n(E_1 \cup E_2)$ - cfr. il par. 4 - osservando che deve valere $E_1 \gtrsim A_n(k_n(E_1)-1)$ per ogni n. Quindi, se fosse $E_2 \gtrsim A_n(k_n(E_1 \cup E_2)) \setminus A_n(k_n(E_1)-1)$, dall'applicazione del Teorema 1 si dedurrebbe: $E_1 \cup E_2 \gtrsim A_n(k_n(E_1 \cup E_2))$, in aperta contraddizione con la definizione di $k_n(E_1 \cup E_2)$. D'altra parte, se riuscisse $A_n(k_n(E_1 \cup E_2)-1) \setminus A_n(k_n(E_1)) \gtrsim E_2$, dallo stesso teorema si ricaverebbe

$$A_n(k_n(E_1)) \cup (A_n(k_n(E_1 \cup E_2)-1) \setminus A_n(k_n(E_1)) \gtrsim E_1 \cup E_2$$

in contraddizione col fatto che $E_1 \cup E_2 \gtrsim A_n(k_n(E_1 \cup E_2)-1)$. Devono quindi valere le relazioni

$$A_n(k_n(E_1 \cup E_2)-1) \setminus A_n(k_n(E_1)) \lesssim E_2$$

$$E_2 \lesssim A_n(k_n(E_1 \cup E_2)) \setminus A_n(k_n(E_1)-1)$$

dalle quali si trae

$$\frac{k_n(E_1 \cup E_2)-k_n(E_1)}{n} \leq P(E_2) \leq \frac{k_n(E_1 \cup E_2)-k_n(E_1)+2}{n} \qquad (n \geq 1)$$

la quale, per (G_2), implica

$$P(E_1 \cup E_2)-P(E_1)=P(E_2)$$

che è proprio il principio che restava da dimostrare. I punti essenziali del ragionamento precedente si possono condensare nel

Teorema 3. - Se $\gtrsim$ è una probabilità comparativa su $\mathcal{E}$,

Scanned by CamScanner

ed $\mathcal{E}$ contiene, per ogni n, una partizione di evento certo in n eventi ideticamente probabili, allora $\gtrsim$ ammette una quantificazione [cfr. (G_1)-(G_2)] P la quale soddisfa le regole usuali del calcolo delle probabilità:

(i') $P(E) \geq 0$ per ogni $E \in \mathcal{E}$; (i'') $P(B) = 1$ se B è evento certo; $(i'i')$ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ se $E_1, E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$ ed E_1, E_2 sono incompatibili.

È interessante osservare che una quantificazione P di $\gtrsim$ non deve essere necessariamente additiva in senso completo, come invece richiede, per via assiomatica, l'impostazione (di Andrej N. Kolmogorov (1903-1987)) più seguita dai matematici. Per la sua natura assiomatica, questa impostazione non fornisce spiegazioni di sorta degli assiomi! Un punto da meditare quando ci si ponga il problema di come far entrare l'uso della probabilità nella vita quotidiana (v. manifesto Scuola).

(cfr. (G_1)-(G_2))

Osservazione. Il ragionamento che ha prodotto il Teorema 3 pone in evidenza anche il fatto seguente: se il primo passo della quantificazione di $\gtrsim$, sugli elementi di $\mathcal{I}$, avviene adottando il criterio (legittimo in virtù del Teorema 2) del rapporto del numero dei casi favorevoli sul numero dei possibili, allora l'estensione ad $\mathcal{E}$ è unica e soddisfa (i'), (i'') e (i''').

6.- Si ritorna al problema dell'esistenza di più indici di probabilità concordanti con $\gtrsim$ su $\mathcal{E}$, introdotto alla fine del Par. 3. È utile riprendere la questione per mostrare che fra i vari indici che si possono associare, nel modo ivi

Scanned by CamScanner

specificato, ad una stessa probabilità comparativa non sussistono differenze sostanziali. Come vedremo, infatti, essi sono accomunati da una "stessa" legge di unione, la stessa che, nel caso di probabilità, si presenta sotto la forma del principio delle probabilità totali. Ed è degno di nota osservare che questa interessante circostanza dipende essenzialmente dalla proprietà (iv) di $\succcurlyeq$.

Scopo di questo paragrafo è quello di spiegare il senso della precedente affermazione. Per facilitare il compito, conviene circoscrivere lievemente il quadro di riferimento: primo, si continua a considerare classi $\mathcal{E}$ dello stesso tipo descritto all'inizio del Par. 4; secondo, si assume che la probabilità P, che quantifica $\succcurlyeq$, prenda tutti i valori di $[0,1]$, a questo proposito si può ricordare che il primo punto, da solo, implica che P prenda almeno tutti i valori razionali dello stesso intervallo; terzo, la stessa richiesta viene fatta per un qualunque indice $Q = \varphi \circ P$, nel senso che, se α è il valore di Q in corrispondenza ad un evento impossibile e ω quello preso in corrispondenza di un evento certo, allora si assume che Q prenda tutti i valori dell'intervallo $[\alpha, \omega]$. Conseguenza importante di queste condizioni è che andremo a considerare soltanto quegli indici ottenuti prendendo φ continua su $[0,1]$, oltre che strettamente crescente per garantire l'accordo di Q con $\succcurlyeq$.

Per la spiegazione che ci stiamo prefissi di dare, prendiamo le mosse dalla (iv) e dal Teorema 1 che ne consegue: se (A,B), (A',B') sono coppie di eventi incompatibili appartenenti ad $\mathcal{E}$ insieme alle unioni $A \cup B$, $A' \cup B'$, e se $A \doteq A'$, $B \doteq B'$, allora le suddette unioni sono considerate ugualmente probabili. Questa condizione, per un indice di probabilità Q che concordi con $\succcurlyeq$, si traduce nel

Scanned by CamScanner

"stessa" significa strutturalmente la stessa; cambia la soluzione
funzione φ passando da un caso all'altro

Scanned by CamScanner

fatto che sussista la relazione (implicazione): $Q(A) = Q(A')$ con $Q(B) = Q(B')$ implicano $Q(A \cup B) = Q(A' \cup B')$. In altri termini, se E_1 ed E_2 sono incompatibili allora il valore di $Q(E_1 \cup E_2)$ dipende, secondo una certa funzione, dalla coppia $(Q(E_1), Q(E_2))$. Se si indica tale funzione con S, si ha

$$[\alpha, \omega]^2 \ni (\xi, \eta) \mapsto S = S(\xi, \eta)$$

e si può vedere che S non è una funzione qualunque. Ricordando che $Q = \varphi \circ P$ e che ξ, η saranno, nel nostro caso, i valori di Q in corrispondenza a due eventi E_1, E_2 incompatibili, e qualunque per il resto, si ha

$$\begin{aligned} S(Q(E_1), Q(E_2)) &= S(Q(P(E_1)), Q(P(E_2))) \\ &= Q(E_1 \cup E_2) \\ &= \varphi(P(E_1 \cup E_2)) \\ &= \varphi(P(E_1) + P(E_2)) \quad \text{(per la (iii'))} \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(Q(E_1)) + \varphi^{-1}(Q(E_2))) \end{aligned}$$

dalle quali si ricava la legge di unione

$$S(\xi, \eta) = \varphi(\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)) \qquad ((\xi, \eta) \in [\alpha, \omega]^2).$$

Ora si può controllare facilmente che S gode delle proprietà seguenti:

(s) $S(\xi, \eta) = S(\eta, \xi)$ (simmetria);

(n) $S(\alpha, \eta) = \eta$, $S(\xi, \alpha) = \xi$ (nullità di α rispetto ad S);

(m) $\xi \mapsto S(\xi, \eta)$ è strettamente crescente per ogni η, $\eta \mapsto S(\xi, \eta)$ è strettamente crescente per ogni ξ;

[(n) e (m) implicano: $S(\xi, \eta) > \xi$ se $\eta > \alpha$, $S(\xi, \eta) > \eta$ se $\xi > \alpha$]

(c) S è continua;

(a) S è associativa: $S(S(\xi, \eta), \zeta) = S(S(\zeta, \eta), \xi) = S(S(\zeta, \xi), \eta) = \text{etc.}$;

(ar) S è archimedea: se $\xi > \alpha$, la successione

Scanned by CamScanner

la regola di calcolo usuale ti dà per φ = identità 

Scanned by CamScanner

$\xi_1 = S(\xi,\xi)$, $\xi_2 = S(\xi_1,\xi)$, ..., $\xi_n = S(\xi_{n-1},\xi)$, ...
è crescente e supera definitivamente ω.

Abbiamo quindi dimostrato che: Se $\mathcal{C}$, $\geq$, P e Q sono assegnate con i requisiti fissati all'inizio di questo paragrafo, allora Q possiede una legge di unione S che soddisfa tutte le proprietà (s), (n), ..., (a), (ar), ma è forse più interessante notare che: assegnati $\mathcal{C}$, $\geq$, P come prima ed una funzione $S:[\alpha,\omega]^2 \to \mathbb{R}$ con le proprietà (s), ..., (ar), allora esiste un solo indice di probabilità Q, che assume tutti i valori di $[\alpha,\omega]$ e ammette S come legge di unione. Questa parte della proposizione non è di verifica immediata, ma non rinunciamo a presentare le linee principali di un ragionamento che serve a dimostrarla.

[Poniamo, per $\xi \in [\alpha,\omega]$,
$\psi_1(\xi) := \xi$, $\psi_n(\xi) := S(\psi_{n-1}(\xi),\xi)$ per $n = 2,3,\ldots$.
Allora, ciascuna ψ_n è strettamente crescente e continua su $[\alpha,\omega]$; inoltre, $\psi_n(\alpha) = \alpha$ per ogni n, ma per $\xi \in (\alpha,\omega]$ si ha $\xi < \psi_2(\xi) < \psi_3(\xi) < \cdots < \psi_n(\xi) < \cdots$. Per ogni n e per ogni $x \in [\alpha,\omega]$ fissati esiste una ed una sola radice dell'equazione in $\xi \in [\alpha,\omega]$: $\psi_n(\xi) = x$; indichiamo questa radice con $g_{1/n}(x)$. Ora si può vedere che per m,n interi positivi si può scrivere $\psi_m(g_{1/n}(x)) = g_{m/n}(x)$, $x \in [\alpha,\omega]$, perchè il membro di sinistra, per x fissata, dipende solo dal rapporto m/n. Per verificare questo fatto si nota che dalla (a), per ogni coppia d'interi $m,n \geq 1$, si ricava (eser.) $\psi_{m\cdot n} = \psi_m \circ \psi_n = \psi_n \circ \psi_m$; quindi, per ogni intero $k \geq 1$:

$$\psi_{km} \circ g_{1/kn} = \psi_{km} \circ \psi_{k\cdot n}^{-1} = \psi_m \circ \psi_k \circ \psi_k^{-1} \circ \psi_n^{-1}$$
$$= \psi_m \circ \psi_n^{-1}$$
$$= \psi_m \circ g_{1/n}$$

e, di conseguenza, si può scrivere $\psi_m \circ g_{1/n} = g_p$

Scanned by CamScanner

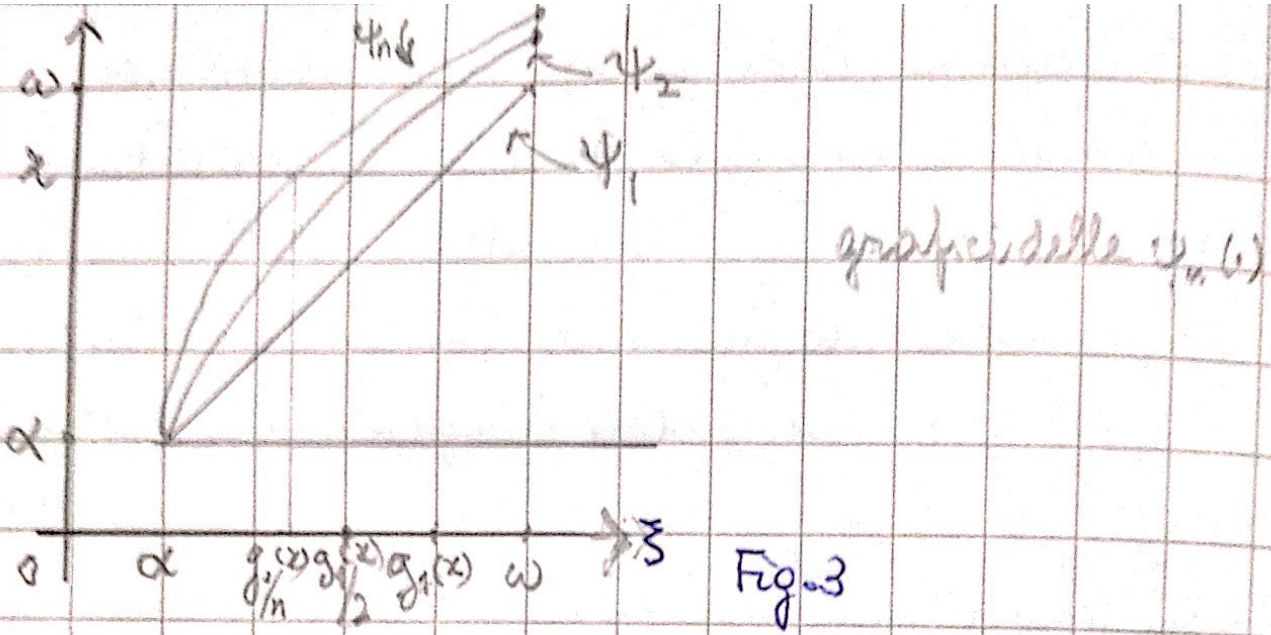

Fig. 3

Dalla proprietà (a2) segue che $g_{1/n}(x) \downarrow \alpha$ per $n \uparrow +\infty$ e, più in generale, $g_{\rho_n}(x) \downarrow \alpha$ per $\rho_n \downarrow 0$ (monotonia)

Scanned by CamScanner

con $\rho := m/n$. Ora, per r, m, n interi positivi, $g_{r \cdot m/n} = \psi_{rm} \circ g_{1/n} = \psi_r \circ g_{m/n} = g_r \circ g_{m/n} = g_{1/n} \circ g_{rm}$ e, per ogni intero $h \geq 1$, si avrà

$$g_{r/h} \circ g_{m/n} = g_{1/h} \circ g_r \circ g_{m/n} = g_{1/h} \circ g_{rm/n} = g_{rm/nh}$$

equivalente a dire che per ogni coppia di razionali positivi ρ, σ è soddisfatta l'equazione

$$(*) \quad g_{\rho \cdot \sigma}(\xi) = g_\rho(g_\sigma(\xi)) \qquad \xi \in [\alpha, \omega].$$

Inoltre,

$$(**) \quad g_{\rho+\sigma} = S(g_\rho, g_\sigma);$$

infatti per k intero positivo, $S(\psi_k, \psi_1) = \psi_{k+1}$ e, procedendo induttivamente [ricordare (a)], $\psi_{k+j} = S(\psi_k, \psi_j)$ che è $(**)$ ristretta agli interi. Ora, se $\rho = m/n$ e $\sigma = m'/n'$, si può scrivere

$$S(g_\rho, g_\sigma) = S(\psi_{m \cdot n'} \circ g_{1/n \cdot n'}, \psi_{m' \cdot n} \circ g_{1/n \cdot n'})$$

$$= \psi_{m \cdot n' + m' \cdot n} \circ g_{1/n \cdot n'} = g_{\frac{m \cdot n' + m' n}{n \cdot n'}}$$

$$= g_{\rho+\sigma}.$$

Mostriamo che, per ogni ξ, la definizione della funzione, di ρ, $g_\rho(\xi)$ può essere completata per continuità su tutto l'intervallo $[0,1]$. Intanto, si ha $g_\rho(\alpha) = \alpha$ per ogni $\rho > 0$ e, quindi, si pone $g_0(\alpha) = \alpha$. Per ξ in $(\alpha, \omega]$, se i razionali ρ_1, ρ_2 soddisfano $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq 1$ si ha $g_{\rho_1}(\xi) < g_{\rho_2}(\xi) \leq g_1(\xi) = \xi$, pertanto per quanto osservato con la Fig. 3 si ha $g_\rho(\xi) \downarrow \alpha$ per $\rho \downarrow 0$. Per continuità, si può quindi estendere (e qui lo faremo) $\rho \to g_\rho(\xi)$ a tutti i razionali di $[0,1]$ ottenendo una funzione crescente da α a ξ se $\xi \in (\alpha, \omega]$ e una funzione costante (uguale ad α) per $\xi = \alpha$. Immaginando $\xi > \alpha$, si prendano

x in $(0,1)$ e due successioni $(\rho_n)_{n\geq 1}, (\sigma_n)_{n\geq 1}$ di razionali in Q_1 tali che $\rho_n \downarrow x$, $\sigma_n \uparrow x$ per $n \to +\infty$. Allora, per monotonia,

$$\lim_{n\to+\infty} g_{\rho_n} = L_x \geq l_x = \lim_{n\to+\infty} g_{\sigma_n}$$

e, per la (**),

$$0 \leq g_{\rho_n} - g_{\sigma_n} = S(g_{\sigma_n}, g_{\rho_n - \sigma_n}) - g_{\sigma_n}$$

$$\leq S(l_x, g_{\rho_n-\sigma_n}) - g_{\sigma_n} \quad [\text{per (m)}]$$

$$= S(l_x, \alpha + \Delta_{\rho_n-\sigma_n}) - g_{\sigma_n}$$

$$= S(l_x, \alpha) + \Delta'_{\rho_n-\sigma_n} - g_{\sigma_n} \quad [\text{per la (n)}]$$

$$= l_x + \Delta'_{\rho_n-\sigma_n} - g_{\sigma_n} \quad [\text{per (n)}].$$

Mandando $n \to +\infty$, $\Delta'_{\rho_n-\sigma_n}$ converge a zero [perché $\rho_n - \rho_n \to 0$ e $\Delta_{\rho_n-\sigma_n} \to 0$, grazie al comportamento di g_ρ per $\rho \downarrow 0$, e quindi $\Delta'_{\rho_n-\sigma_n} \downarrow 0$, per (o)] e $g_{\sigma_n} \uparrow l_x$; perciò $g_{\rho_n} - g_{\sigma_n} \downarrow 0$ e, quindi, $L_x = l_x$.

Ora, possiamo completare la definizione di g_ρ, per continuità, su tutto $[0,1]$, dove $\rho \mapsto g_\rho$ cresce da α a ξ mentre ρ passa da 0 a 1 attraverso tutti i reali, per ogni $\xi \in [\alpha, \omega]$. Anche (*) viene di conseguenza estesa a tutti i reali ρ e σ di $[0,1]$. Poniamo

$$\varphi(x) := g_x(\omega) \in [\alpha, \omega] \quad (\text{per ogni } x \in [0,1])$$

ovvero $x = \varphi^{-1}(g_x(\omega))$. Allora, per x, y in $[0,1]$, si ha

$$S(\varphi(x), \varphi(y))$$

$$= S(g_x(\omega), g_y(\omega)) = g_{x+y}(\omega) = \varphi(x+y)$$

$$= \varphi\left(\varphi^{-1}(g_x(\omega)) + \varphi^{-1}(g_y(\omega))\right).$$

In particolare, se pensiamo x come $P(E)$ per qualche evento E in $\mathcal{E}$, si vede che $g_x(\omega) = \varphi(P(E)) =: Q(E)$ fornisce un indice di probabilità che concorda con $\geq$, la cui legge di unioni è proprio data da S; infatti,

Scanned by CamScanner

$S(Q(E), Q(E')) = \varphi(\varphi^{-1}(Q(E)) + \varphi^{-1}(Q(E')))$.

Se $Q^* := \varphi^* \circ P$ è un altro indice di probabilità con legge di unione $S(\xi,\eta) = \varphi(\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta))$, allora indicando con I un evento impossibile si ottiene $P(E) = \varphi^{-1}(S[Q^*(E), Q^*(I)])$ $= \varphi^{-1}(Q^*(E)) = \varphi^{-1} \circ \varphi^*(P(E))$, dalla quale si vede immediatamente che l'indice concordante con $\gtrsim$ su $\mathcal{E}$ è unico.]

La conclusione che si può trarre alla fine del processo di quantificazione di una assegnata probabilità comparativa $\gtrsim$ è che tutti gli indici di probabilità che concordano con essa [su una classe $\mathcal{E}$ abbastanza ricca come quella alla quale si riferiscono le ultime due proposizioni] devono avere leggi di unione strutturalmente simili: $S(\xi,\eta) = \varphi(\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta))$ per (ξ,η) in $[\alpha,\omega]^2$ con φ: $[0,1] \to [\alpha,\omega]$ crescente e continua (se si vuole che l'indice prenda tutti i valori fra α e ω), la libertà di scelta riguarda soltanto φ. Dunque, ogni indice è completamente caratterizzato dalla legge di unione. A questo proposito, per curiosità storica si può ricordare che il matematico Paolo Medolaghi propose in *La previsione statistica ed il calcolo delle probabilità* (1920) una legge di unione del tipo

(M) $\quad S(\xi,\eta) = \xi + \eta + A\xi\eta \qquad (\xi,\eta) \in [\alpha,\omega]$

con A costante, al fine di ottenere, a suo dire, una estensione effettiva dell'ordinario calcolo delle probabilità. Ora si può però vedere che (M) è una particolarissima forma di legge di unione concordante con una probabilità comparativa $\gtrsim$ e, perciò, non ha nulla di... rivoluzionario. [Per convincersene, basta far vedere che esiste φ crescente su $[0,1]$ e a valori in $[\alpha,\omega]$ tale che

$$\varphi(\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)) = \xi + \eta + A\xi\eta \qquad ((\xi,\eta) \in [\alpha,\omega])$$

oppure che, per $(x,y) = (\varphi^{-1}(\xi), \varphi^{-1}(\eta)) \in [0,1]^2$, vale

Scanned by CamScanner

Ovviamente la proposta del Medolaghi era stata formulata fuori dalla teoria qui riportata, che era ancora da venire nel 1920. ⇐

Scanned by CamScanner

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + A\varphi(x)\varphi(y) \qquad (x, y \geq 0,\ x+y \leq 1)$$

Assumendo φ derivabile, l'equazione funzionale (§) si riduce ad una semplice equazione differenziale osservando che equivale a

$$\frac{\varphi(x+y) - \varphi(y)}{x} = [1 + A\varphi(y)]\,\frac{\varphi(x)}{x}$$

e, passando al limite per $x \downarrow 0$, il membro di sinistra converge a $\varphi'(y)$ e, di conseguenza, anche $\varphi(x)/x$ deve convergere (indichiamo con γ il limite) producendo

$$\varphi'(y) = \gamma\,[1 + A\varphi(y)]$$

ovvero, per $A \neq 0$,

$$\log\left(A\varphi(y) + 1\right) = A\gamma y + c \qquad \varphi(0) = \alpha,\ \varphi(1) = \omega$$

dalla quale risulta

$$\varphi(y) = \frac{1}{A}\left\{\sigma_1 e^{y\sigma_2} - 1\right\} \qquad y \in (0,1)$$

con $\sigma_1 := 1 + A\alpha$, $\sigma_2 := \log\left(\frac{1+A\omega}{1+A\alpha}\right)$ dove le terne (A, α, ω) ammissibili (quelle, cioè, per cui φ è crescente) devono soddisfare: $A \neq 0$, $\frac{\sigma_1}{A} > 0$, $\sigma_2 > 0$, oppure $A \neq 0$, $\frac{\sigma_1}{A} < 0$, $\sigma_2 < 0$. Infine, se $A = 0$, si ottiene

$$\varphi(y) = (\omega - \alpha)\,y + \alpha \qquad y \in (0,1)$$

purchè sia $\omega > 0$.

[La "teoria" di Medolaghi è quindi riconducibile, come preannunciato, ad una legge di unione, che si riduce a quella ordinaria per $A = 0$, e in questo senso non presenta caratteri innovativi sostanziali.]

7.- Non abbiamo fin qui parlato di eventi condizionati e, quindi, non abbiamo posto il problema d'individuare principî (regole di calcolo) idonei a regolarne la valutazione comparativa (quantitativa). La decisione di trattarne soltanto

(§) L'equazione è stata ampiamente studiata (cfr., ad es., Aczel (1966)) sotto condizioni molto generali per l'incognita. Per rendere la presentazione autonoma, qui si accenna ad un procedimento risolutivo che, tuttavia, per ragioni di semplicità assume un'ipotesi non necessaria, di derivabilità.

Scanned by CamScanner

a conclusione della conferenza è dovuta alla delicatezza dello argomento, non certo al significato, veramente fondamentale, che esso racchiude rispetto all'intera teoria. Infatti, il ragionamento probabilistico, svolto per problemi effettivi, coinvolge primariamente eventi condizionati e, per convincersene, basti ricordare che la sua applicazione all'induzione (effettiva, non semplicemente induzione matematica) si riduce a valutazioni di probabilità di eventi $E|H$, dove E è un evento che si riferisce tipicamente ad un'esperienza futura, ed H un evento che ha a che fare col risultato ipotetico di una o più prove che si "progettano" onde dare un fondamento alla previsione di E, sulla base del presupposto che il risultato di tali prove serva a dare indicazioni sul grado di fiducia da attribuire al verificarsi di E. Ad esempio, E potrebbe essere l'evento che una ben definita ma incognita grandezza fisica prenda il suo valore in un prefissato intervallo, mentre H potrebbe essere un evento (aleatorio) associato all'esperimento che si progetta per ricavare informazioni, tirelle o no, sulla attendibilità di E. Un altro caso, di natura diversa dal precedente, s'incontra nelle previsioni di risultati elettorali, dove E potrebbe essere «un partito ben individuato supererà in una certa competizione elettorale, ben determinata, la soglia del 5% dei votanti», ed H la proposizione che esprime il risultato delle preferenze elettorali dichiarate dagli elettori inclusi in una parte (campione), opportunamente selezionata, dell'intero corpo elettorale. Per arrivare ad una definizione utile di $E|H$, fuori dagli esempi particolari, chiediamoci quale sarebbe l'effetto di una scommessa su $E|H$ nelle situazioni particolari descritte: la scommessa sarebbe vinta qualora si verificasse

$E \cap H$, persa qualora si verifichi $E^c \cap H$, annullata se non si verifica H. La terza circostanza costituisce la novità rispetto ad eventi non condizionati. In altri termini, $E|H$, essendo H evento non impossibile è privo di valore logico se si verifica H^c, è Falso se si verifica $E^c \cap H$ e Vero se si verifica $E \cap H$.

Immaginiamo ora di avere una classe $\mathcal{E}$ di eventi che include $\mathcal{I}$, come in precedenti paragrafi, e siano $E, H, E \cap H$ elementi di $\mathcal{E}$ con H non impossibile. Allora se E' e H' sono anch'essi elementi di $\mathcal{E}$, riguardo al confronto di probabilità di $E|H$ e $E'|H'$ stabiliamo la prescrizione seguente da aggiungere alle (i)-(iv) del Par. 2:

(v) $E|H \gtrsim E'|H'$ se e solo se $E \cap H \gtrsim E' \cap H'$, $H|H \doteq H'|H'$

e vediamo se gli ordinamenti che ne scaturiscono ammettono una quantificazione. Accenniamo al ragionamento che porta a stabilire che, per $\mathcal{E}$ con le solite proprietà fissate nei par. precedenti e per una relazione $\gtrsim$ su $\mathcal{E}$ soddisfacente a (i) - (v), allora esiste una (unica) probabilità P, concordante con $\gtrsim$ in senso debole, che oltre a soddisfare (i')-(i''), (teorema 3), è tale che

(C) $P(E' \cap H')/P(H') \leq P(E \cap H)/P(H)$ se e solo se $E'|H' \lesssim E|H$

quando (E, H), (E', H') sono presi da $\mathcal{E}^2$ con $P(H)$ e $P(H')$ positivi.

Basta verificare (C), il resto della proposizione essendo contenuto nel citato Teorema 3. Si può incominciare dal caso in cui sono date due partizioni $\{C_1, \dots, C_n\}$, $\{C'_1, \dots, C'_{n'}\}$ di evento certo, come nel terzo paragrafo, H è l'unione dei primi ν C_i e H' l'unione dei primi ν' C'_i. Si assume che valgano

$$C_1 \doteq \dots \doteq C_n, \quad C'_1 \doteq \dots \doteq C'_{n'}$$

con γ_i (γ'_i, rispettivamente) si indica $C_i|H$ ($C'_i|H'$, rispettivamente). Si riprendono in mano i due "quadri" di

Si dà ovviamente per acquisito il significato (soggettivo) della relazione $\Rightarrow$ estesa ad eventi condizionati; tenere presente che $E|A \doteq E$ quando A è evento certo. $\Leftarrow$

Scanned by CamScanner

eventi di pag. 8, A, che si suppongono, come allora, identicamente probabili. Del primo quadro si considerano soltanto gli eventi che sono all'incrocio delle prime ν righe e delle prime ν' colonne, e del secondo si prendono gli eventi all'incrocio delle prime ν' righe (secondo, rispettivamente) e delle prime ν colonne. Degli eventi del primo gruppo si considerano i corrispondenti condizionati α (β, rispettivamente) ~~data la~~ unione di tutti gli elementi del primo (secondo, rispettivamente) sottoquadro. Ragionando come nel terzo paragrafo, si trova che l'unione degli elementi della i-esima riga del primo (secondo, rispettivamente) sottoquadro e $C_i|H$ ($C_i'|H'$, rispettivamente) sono identicamente probabili, per ogni $i=1,\dots,\nu$ ($i=1,\dots,\nu'$, rispettivamente). Ovviamente, in questa verifica è necessario servirsi opportunamente, soprattutto, della seconda parte di (v). Dati, a questo punto, due eventi E, E' unioni, rispettivamente, di elementi C_i della prima partizione ed elementi C_i' della seconda, si verifica facilmente che $E|H \gtrsim E'|H'$ se e solo se $P(E\cap H)/P(H) \geq P(E'\cap H')/P(H')$. Basta imitare la parte conclusiva della dimostrazione del Teorema 2 applicandola agli eventi condizionati α e β, tenendo conto di (v), prima parte. A questo punto, la proposizione da dimostrare è verificata solo per eventi H, E unioni di elementi di una partizione finita identicamente probabile, per i quali siamo quindi autorizzati a scrivere $P(E|H) = P(E\cap H):P(H)$, a patto che risulti $P(H)>0$. Per completare, ma senza alcuna pretesa di rigore, il ragionamento idoneo a giustificare (C), si fa notare che per (E,H) in $\mathcal{E}^2$ con $P(H)>0$, il rapporto $P(E\cap H)/P(H)$ si può scrivere (cfr. $(G_1)-(G_2)$) come

$$\frac{P(E\cap H)}{P(H)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P(A_n(k_n(E\cap H)))}{P(A_n(k_n(H)))}$$

Scanned by CamScanner

Questa proposizione esprime, sia pure in un caso particolare, una condizione necessaria e sufficiente (di tipo quantitativo) per la validità di una certa valutazione comparativa, ha un valore fondamentale (lo si vede alla fine) per la comparazione di eventi condizionati e per la definizione della loro probabilità. ⇐

Scanned by CamScanner

$$= \lim_{n\to+\infty} P(A_n(k_n(E\cap H)) \mid A_n(k_n(H)))$$

l'ultima uguaglianza essendo giustificata dalla parte precedente del ragionamento in considerazione del fatto che gli eventi $A_n(k_n(\cdot))$ rientrano in $\mathcal{I}$; ovviamente, le stesse uguaglianze valgono, sostituendo (E,H) con (E',H'), per $E'|H'$. Inoltre, ricordando le definizioni del quarto paragrafo, appare del tutto legittima l'interpretazione che vede $A_n(k_n(G\cap I)) \mid A_n(k_n(I))$ per ogni coppia di eventi G, I in $\mathcal{I}$ come approssimante di $G|I$. Ora, si può osservare che, se

($\S$) $\quad P(E'\cap H')/P(H') < P(E\cap H)/P(H)$,

vale per ogni n sufficientemente grande, allora deve risultare

($\S\S$) $P(A_n(k_n(E'\cap H')) \mid A_n(k_n(H'))) < P(A_n(k_n(E\cap H)) \mid A_n(k_n(H)))$

e questo implica (dalla (*) della prima parte del ragionamento)

($\S\S\S$) $\quad A_n(k_n(E'\cap H')) \mid A_n(k_n(H')) \leq A_n(k_n(E\cap H)) \mid A_n(k_n(H))$.

Viceversa, se vale ($\S\S\S$) è facile constatare, a questo punto, ad esempio con ragionamento per assurdo, che vale anche ($\S\S$) e, quindi, ($\S$). Dunque, $P(E\cap H)/P(H)$, al variare di (E,H) in $\mathcal{E}^2$ con $P(H)>0$, concorda con l'ordinamento esistente fra eventi condizionati (fondato, di fatto, sull'ordinamento fra gli approssimanti costruiti mediante elementi di $\mathcal{I}$). Ciò giustifica, quindi, l'adozione di $P(E\cap H)/P(H)$ come probabilità dell'evento condizionato $E|H$, insieme alla notazione

$$P(E|H) := \frac{P(E\cap H)}{P(H)} \qquad ((E,H)\in\mathcal{E}^2,\ P(H)>0).$$

O, in forma più generale (perché vale anche se $P(H)=0$) di principio delle probabilità composte: $P(E|H)$ è un numero in $[0,1]$ che soddisfa

$$P(E|H)\cdot P(H) = P(E\cap H).$$

Oremona, Ferragosto 2017 — L. Regazzini

Scanned by CamScanner