# Laboratorio scuola primaria: rappresentare, modellizzare e ragionare

Ferdinando Arzarello
Dipartimento di Matematica "G. Peano"
Università di Torino

**4ª SCUOLA ESTIVA PER INSEGNANTI UMI CIIM AIRDM**
Bardonecchia, 26 agosto 2017

# Sommario

- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

# Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione

(2012)

*Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per* ***esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.***

*…fondamentale il* ***laboratorio****, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.*

# Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- *Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce* ***rappresentazioni*** *(tabelle e grafici).*
  ***Ricava informazioni*** *anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.*
  *Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.*
  *Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.*
  *Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.*

# Sommario

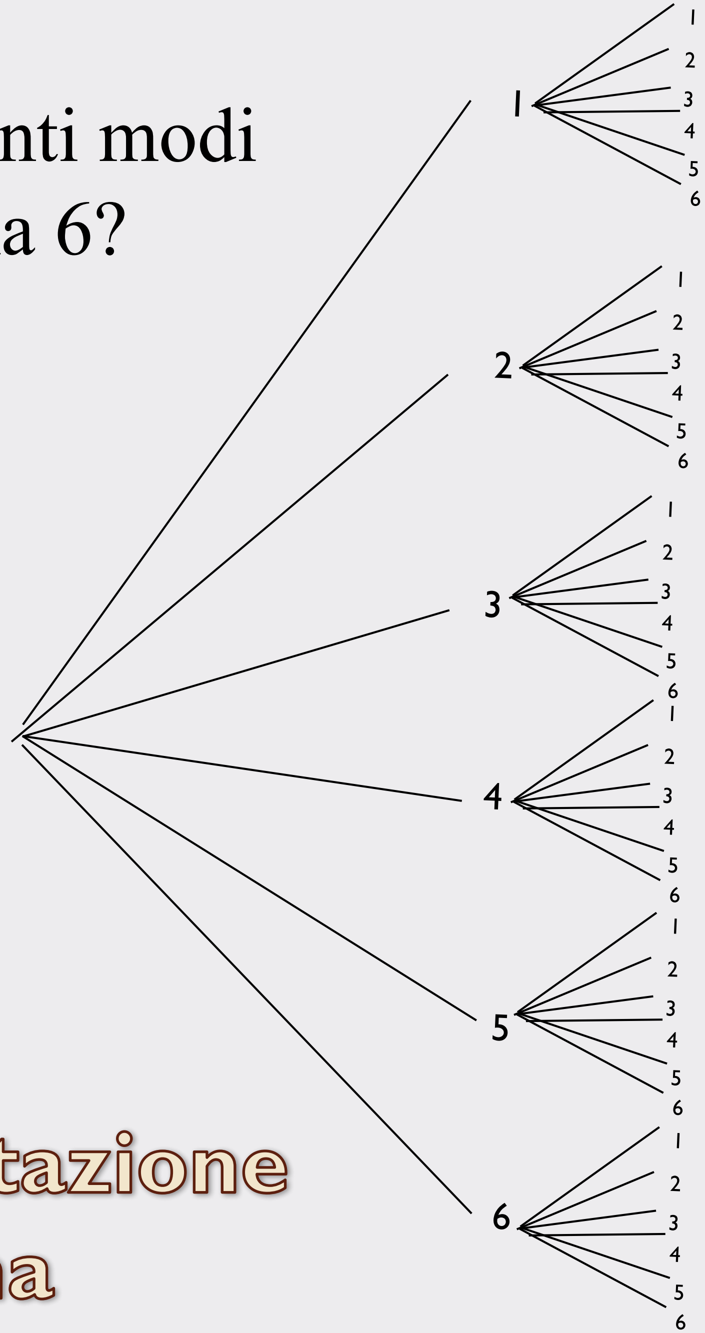
- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie:
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

# Attività 1

Se lancio due dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?

# Rappresentazioni

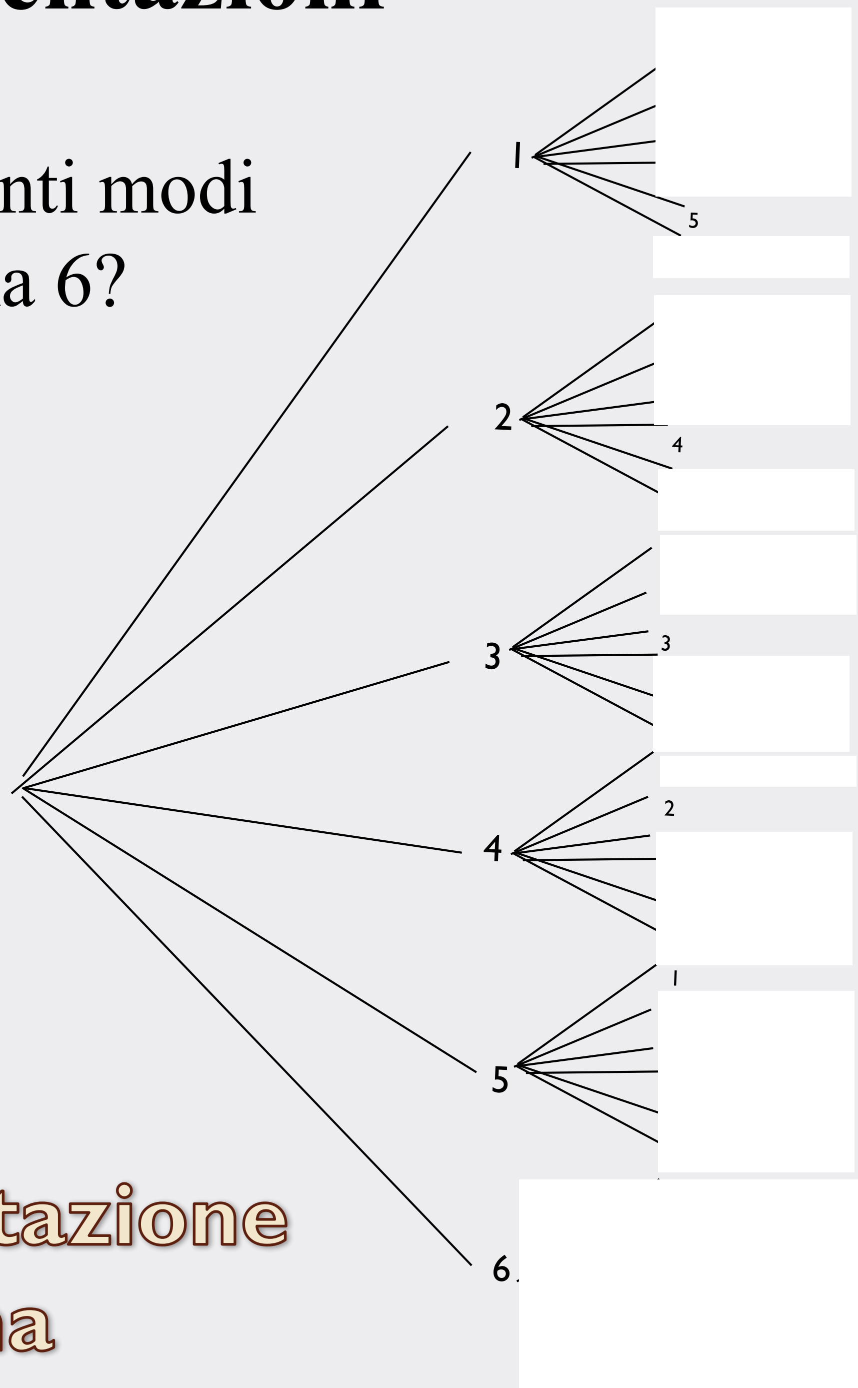
Se lancio due dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?




Una 1ª rappresentazione del problema

# Rappresentazioni

Se lancio due dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?




Una 1ª rappresentazione del problema

# 2ª Rappresentazione

| Somma dadi | Combinazioni | N |
|---|---|---|
| 2 | (1,1) | 1 |
| 3 | (1,2) (2,1) | 2 |
| 4 | (1,3) (2,2) (3,1) | 3 |
| 5 | (1,4) (2,3) (3,2) (4,1) | 4 |
| 6 | (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) | 5 |
| 7 | (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1) | 6 |
| 8 | (2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2) | 5 |
| 9 | (3,6) (4,5) (5,4) (6,3) | 4 |
| 10 | (4,6) (5,5) (6,4) | 3 |
| 11 | (5,6) (6,5) | 2 |
| 12 | (6,6) | 1 |
| | TOTALE | 36 |

# Matematica per il Cittadino, 2001

Il significato dei segni matematici è analizzabile a due livelli:
1. quello diretto dei segni, per cui ad es. 1x2 = 2 può denotare un insieme numerico ben preciso all'interno di un codice specifico (le soluzioni in **Q**, **R** dell'equazione; due rette verticali; ...);
2. quello del discorso in cui tali segni entrano.

Il primo significato riguarda principalmente le definizioni dei concetti, il secondo le relazioni tra queste. La matematica è costituita da enunciati in cui sono coinvolti continuamente i due aspetti. Comprendere la matematica significa possedere queste due funzioni del discorso.

Le attività didattiche sono quindi finalizzate allo sviluppo di queste due funzioni, che affondano le loro radici nelle attività discorsive possedute dal soggetto in modo “naturale” e che coinvolgono attività cognitive usuali. Per questo in tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno accompagnare sempre la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica.

# Attività 2
## Rappresentazioni e analogie

Se lancio **tre** dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?

# Analogia & Rappresentazione

| | Combinazioni | N | tot |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 |
| 4 | (1,1,2) (1,2,[illegible] 1,1) | 3 | 3 |
| 5 | (1,1,3) (1,2,2) | 3+3 | 6 |
| 6 | (1,1,4) (1,2,3) (2,2,2) | 3+6+1 | 10 |
| 7 | (1.1.5) (1,2,4)(1,3,3) (2,2,3) | 3+6+3+3 | 15 |
| 8 | (1.1.6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3) | 3+6+6+3+3 | 21 |
| 9 | (1,2,6) (1,3,5) (1.4.4) (2,3,4) (2,5,2) (3,3,3) | 6+6+3+6+3+1 | 25 |
| 10 | (1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2.6.2) (3,3,.4) | 6+6+6+3+3+3 | 27 |
| 11 | (1,4,6) (2,4,5) (2,3,6) (3.4.4) (5,1,5) (3,3,5) | 6+6+6+3+3+3 | 27 |
| 12 | (1,5,6) (2,4,6) (6.3,3) (5,4,3) (5,2,5) (4,4,4) | 6+6+3+6+3+1 | 25 |
| 13 | (1,6,6) (2,5,6) (6.4,3) (5,5,3) (5,4,4) | 3+6+6+3+3 | 21 |
| 14 | (2,6,6) (3,5,6) (6.4,4) (5,5,4) | 3+6+3+3 | 15 |
| 15 | (3,6,6) (4,5,6) (5,5,5) | 3+6+1 | 10 |
| 16 | (4,6,6) (5,5,6) | 3+3 | 6 |
| 17 | (5,6,6) | 3 | 3 |
| 18 | (6,6,6) | 1 | 1 |
| | TOTALE | 216 | |

Somma di tre dadi

# Rappresentazioni e Modelli

- Noi pensiamo comunemente in termini di modelli perché forniscono il processo di ragionamento con gli elementi strutturanti e stimolanti necessari al suo corso creativo.

*Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per* ***esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.***

Le analogie sono una fonte molto ricca di modelli. Due oggetti, due sistemi, sono analoghi se, sulla base di una certa somiglianza parziale, si può assumere che le rispettive entità siano simili anche per altri aspetti. La differenza tra analogia e somiglianza banale è che l'analogia giustifica inferenze plausibili: una casa rossa e una fragola hanno lo stesso colore, ma nessuno vedrà alcuna analogia tra la casa rossa e la fragola. L'analogia implica quindi la somiglianza della struttura, un insieme di proprietà strutturate comuni.

Il meccanismo della metafora è basato sull'analogia (es.: tempo → spazio: settembre si avvicina e le ferie si allontanano)

Un'analogia intuitiva aiuta a ottenere una rappresentazione iconica unitaria con un significato comportamentale concreto. Una comprensione intuitiva diventa quindi possibile. Il processo di ragionamento ottiene un "oggetto", un sistema di rappresentazione con le sue qualità di immediatezza, globalità, capacità generativa, consistenza intrinseca e possibilità di estrapolazione.

Esempi: retta numerica; piano cartesiano; corrente elettrica e fluidi; modello di Rutheford per l’atomo.

Il modello fornisce un oggetto mentale compatto, strutturato, relativamente familiare e coerente, un elemento vitale di un processo di ragionamento attivo e visibile.

# Attività 3

## Analogie ed esempi paradigmatici

Se lancio quattro dadi in quanti modi posso ottenere le somme da 4 a 24?

# ANALOGIE ED ESEMPI PARADIGMATICI

| Somma dadi | Combinazioni | N |
|---|---|---|
| 2 | (1,1) | 1 |
| 3 | (1,2) (2,1) | 2 |
| 4 | (1,3) (2,2) (3,1) | 3 |
| 5 | (1,4) (2,3) (3,2) (4,1) | 4 |
| 6 | (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) | 5 |
| 7 | (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1) | 6 |
| 8 | (2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2) | 5 |
| 9 | (3,6) (4,5) (5,4) (6,3) | 4 |
| 10 | (4,6) (5,5) (6,4) | 3 |
| 11 | (5,6) (6,5) | 2 |
| 12 | (6,6) | 1 |
| | TOTALE | 36 |

| Somma | Combinazioni | N | tot |
|---|---|---|---|
| 3 | (1,1,1) | 1 | 1 |
| 4 | (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) | 3 | 3 |
| 5 | (1,1,3) (1,2,2) | 3+3 | 6 |
| 6 | (1,1,4) (1,2,3) (2,2,2) | 3+6+1 | 10 |
| 7 | (1.1.5) (1,2,4)(1,3,3) (2,2,3) | 3+6+3+3 | 15 |
| 8 | (1.1.6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3) | 3+6+6+3+3 | 21 |
| 9 | (1,2,6) (1,3,5) (1.4.4) (2,3,4) (2,5,2) (3,3,3) | 6+6+3+6+3+1 | 25 |
| 10 | (1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2.6.2) (3,3,.4) | 6+6+6+3+3+3 | 27 |
| 11 | (1,4,6) (2,4,5) (2,3,6) (3.4.4) (5,1,5) (3,3,5) | 6+6+6+3+3+3 | 27 |
| 12 | (1,5,6) (2,4,6) (6.3,3) (5,4,3) (5,2,5) (4,4,4) | 6+6+3+6+3+1 | 25 |
| 13 | (1,6,6) (2,5,6) (6.4,3) (5,5,3) (5,4,4) | 3+6+6+3+3 | 21 |
| 14 | (2,6,6) (3,5,6) (6.4,4) (5,5,4) | 3+6+3+3 | 15 |
| 15 | (3,6,6) (4,5,6) (5,5,5) | 3+6+1 | 10 |
| 16 | (4,6,6) (5,5,6) | 3+3 | 6 |
| 17 | (5,6,6) | 3 | 3 |
| 18 | (6,6,6) | 1 | 1 |
| | TOTALE | 216 | |

| Somma dadi | Combinazioni | N |
|---|---|---|
| 2 | (1,1) | 1 |
| 3 | (1,2) (2,1) | 2 |
| 4 | (1,3) (2,2) (3,1) | 3 |
| 5 | (1,4) (2,3) (3,2) (4,1) | 4 |
| 6 | (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) | 5 |
| 7 | (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1) | 6 |
| 8 | (2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2) | 5 |
| 9 | (3,6) (4,5) (5,4) (6,3) | 4 |
| 10 | (4,6) (5,5) (6,4) | 3 |
| 11 | (5,6) (6,5) | 2 |
| 12 | (6,6) | 1 |
| | TOTALE | 36 |

| Somma | Combinazioni | N | tot |
|---|---|---|---|
| 3 | (1,1,1) | 1 | 1 |
| 4 | (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) | 3 | 3 |
| 5 | (1,1,3) (1,2,2) | 3+3 | 6 |
| 6 | (1,1,4) (1,2,3) (2,2,2) | 3+6+1 | 10 |
| 7 | (1.1.5) (1,2,4)(1,3,3) (2,2,3) | 3+6+3+3 | 15 |
| 8 | (1.1.6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3) | 3+6+6+3+3 | 21 |
| 9 | (1,2,6) (1,3,5) (1.4.4) (2,3,4) (2,5,2) (3,3,3) | 6+6+3+6+3+1 | 25 |
| 10 | (1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2.6.2) (3,3,.4) | 6+6+6+3+3+3 | 27 |
| 11 | (1,4,6) (2,4,5) (2,3,6) (3.4.4) (5,1,5) (3,3,5) | 6+6+6+3+3+3 | 27 |
| 12 | (1,5,6) (2,4,6) (6.3,3) (5,4,3) (5,2,5) (4,4,4) | 6+6+3+6+3+1 | 25 |
| 13 | (1,6,6) (2,5,6) (6.4,3) (5,5,3) (5,4,4) | 3+6+6+3+3 | 21 |
| 14 | (2,6,6) (3,5,6) (6.4,4) (5,5,4) | 3+6+3+3 | 15 |
| 15 | (3,6,6) (4,5,6) (5,5,5) | 3+6+1 | 10 |
| 16 | (4,6,6) (5,5,6) | 3+3 | 6 |
| 17 | (5,6,6) | 3 | 3 |
| 18 | (6,6,6) | 1 | 1 |
| | TOTALE | 216 | |

| Somma dadi | N(2 dadi) | N (3 dadi) | N(4 dadi) |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | |
| 3 | 2 | 1 | |
| 4 | 3 | 3 | |
| 5 | 4 | 6 | |
| 6 | 5 | 10 | |
| 7 | 6 | 15 | |
| 8 | 5 | 21 | |
| 9 | 4 | 25 | |
| 10 | 3 | 27 | |
| 11 | 2 | 27 | |
| 12 | 1 | 25 | |
| 13 | | 21 | |
| 14 | - | 15 | |
| 15 | - | 10 | |
| 16 | - | 6 | |
| 17 | - | 3 | |
| 18 | - | 1 | |

+1

+?

# ANALOGIE ED ESEMPI PARADIGMATICI

Sembra che sia di grande interesse psicologico che *il processo di ragionamento, almeno nelle sue forme veramente produttive, sia in larga misura stimolato, modellato, e controllato da istanze paradigmatiche* (ad es. il modello dei due dadi come paradigma).
Si può plausibilmente affermare che il ruolo fondamentale svolto dai paradigmi nelle rivoluzioni scientifiche ha le sue radici in questo fenomeno psicologico fondamentale: si pensa agli universali in termini di istanze specifiche e strutturate. In genere non siamo consapevoli di questo gioco doppio perché di solito **vediamo l'universale attraverso il particolare**. Questa è una delle caratteristiche principali delle **intuizioni**.

# MODELLI ANALOGICI IN MATEMATICA

L'analogia interviene spesso nel ragionamento matematico.
Nel passaggio da 2 a 3 a 4…dadi la si sfrutta.

Altro esempio. Se uno studente sa che l'area di un rettangolo è B x H, può naturalmente estendere il principio di questa soluzione al volume di un prisma o di un cilindro in cui B diventa l'area della base del prisma o del cilindro.

Polya parla di "grandi analogie" nella matematica. Cita l'analogia fondamentale tra il dominio dei numeri e quello delle figure (piano cartesiano), analogia che rappresenta il terreno fondante per la geometria analitica.

# MODELLI ANALOGICI IN MATEMATICA

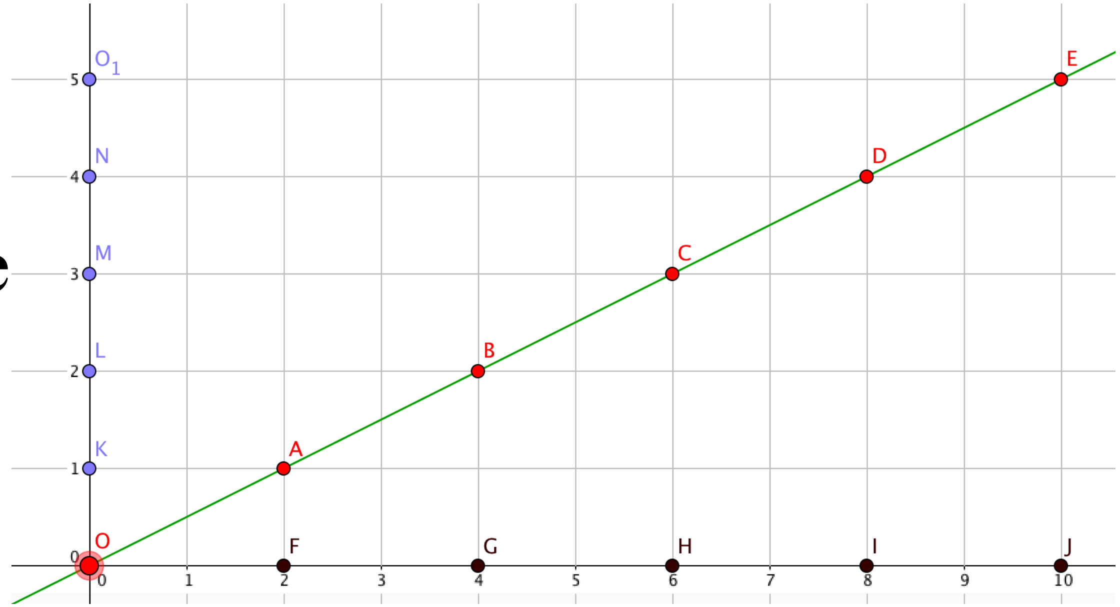
Si possono considerare tre categorie principali di analogie matematiche, due sono intra-matematiche, una extra-matematica.

Analogie intra-matematiche:

a. Analogie in cui un termine è una rappresentazione intuitiva, di solito geometrica e il secondo termine è un'espressione simbolica, ad esempio aritmetica.

<u>Esempio:</u>

Il piano cartesiano e le sue rappresentazioni geometriche basate sull'isomorfismo fondamentale tra numeri e figure.



Analogie intra-matematiche:

a. Analogie in cui un termine è una rappresentazione intuitiva, di solito geometrica e il secondo termine è un'espressione simbolica, ad esempio aritmetica.

b. Sia il modello sia l'originale non utilizzano mezzi intuitivi espliciti ma solo il simbolismo numerico-algebrico. Si consideri, per esempio, l’estensione dall’aritmetica dei numeri naturali a quella dei decimali o a quella dei numeri negativi (a livelli più avanzati, c’è il caso delle operazioni con numeri immaginari, definiti per analogia con i numeri reali).

c) Una terza categoria di analogie che interviene nel ragionamento matematico è quella in cui il modello è extra-matematico, più specificamente una rappresentazione materiale dei concetti matematici.
Materiali strutturati (ad esempio quelli prodotti da Dienes o le aste di Cuisenaire appartengono a quella categoria).
Si possono anche includere nella stessa categoria le rappresentazioni pittoriche di numeri o di concetti geometrici: tracce fisiche sulla carta per indicare i punti geometrici oppure i numeri, le "patate" per gli insiemi.

NOTA. L'altro lato della medaglia è che le analogie possono essere la fonte di idee sbagliate quando si assumono corrispondenze che in realtà non fanno parte della mappatura strutturale tra i due sistemi.

Vedremo un esempio più avanti.

# MODELLI DIAGRAMMATICI
# COME FONTE DI ANALOGIE

Una categoria di modelli importante per stimolare/supportare il ragionamento matematico e le analogie è quella dei diagrammi. In linea generale, i diagrammi sono rappresentazioni grafiche dei fenomeni e delle loro relazioni.

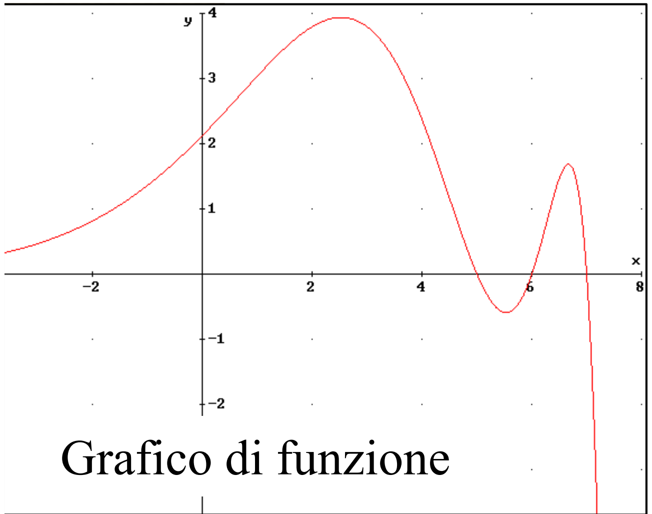
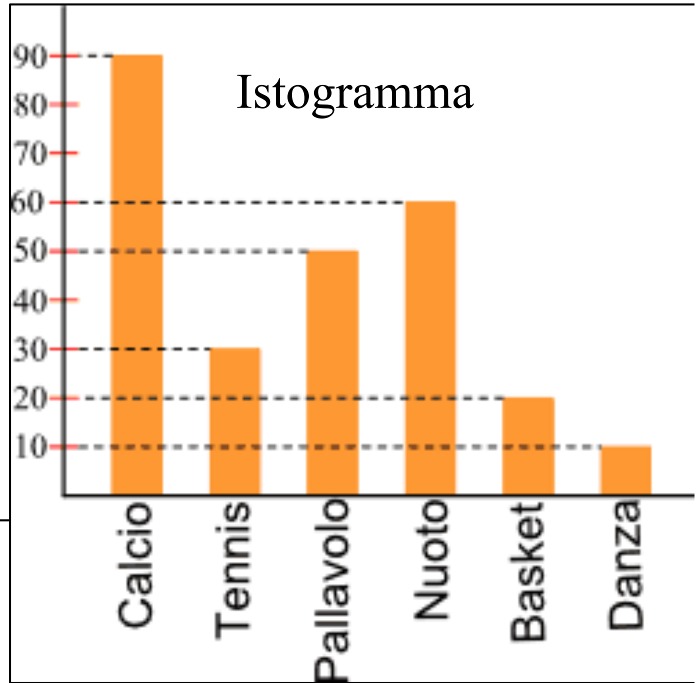


Grafico di funzione



Istogramma

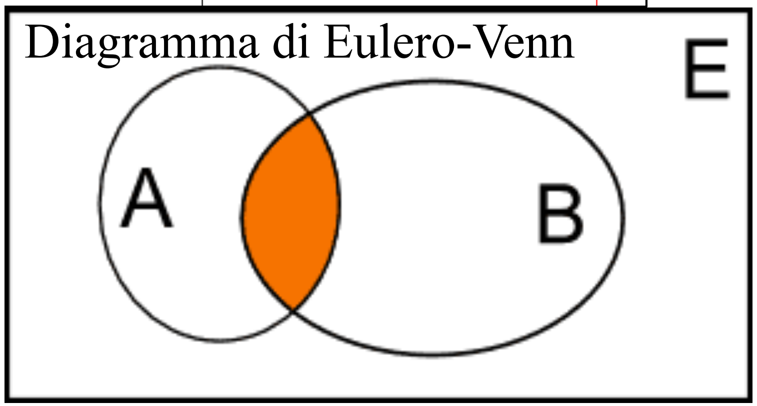


Diagramma di Eulero-Venn

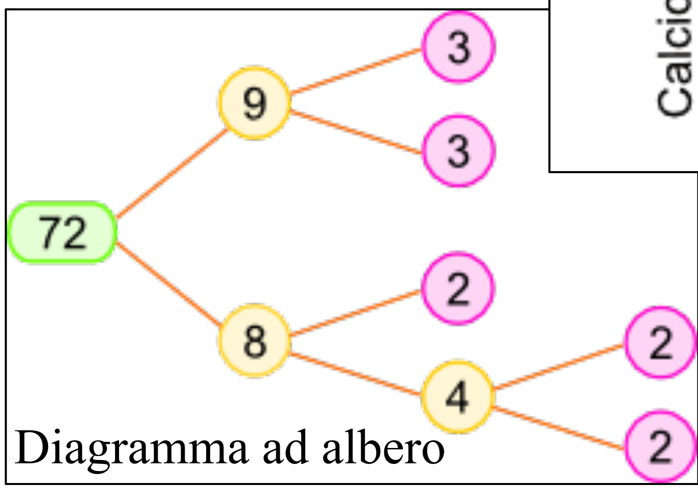


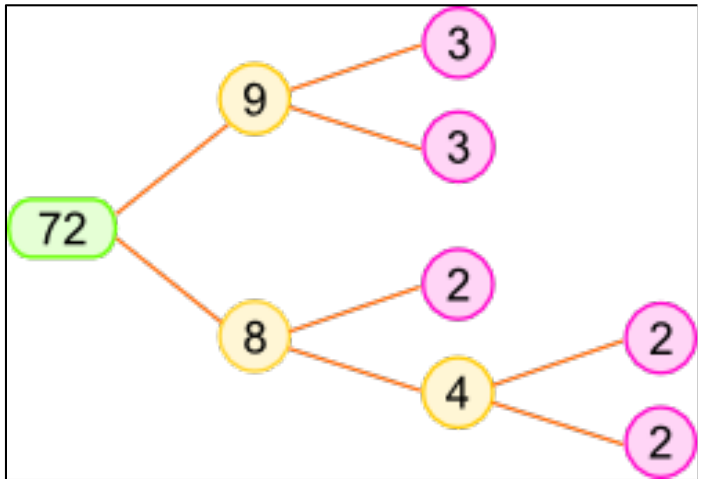
Diagramma ad albero

# MODELLI DIAGRAMMATICI COME FONTE DI ANALOGIE

Mentre le analogie rappresentano solitamente mappature tra due sistemi esistenti e relativamente indipendenti, nel caso dei diagrammi, un sistema, l'originale, esiste in proprio mentre l'altro, il diagramma, è un costrutto artificiale, creato per modellare il primo.

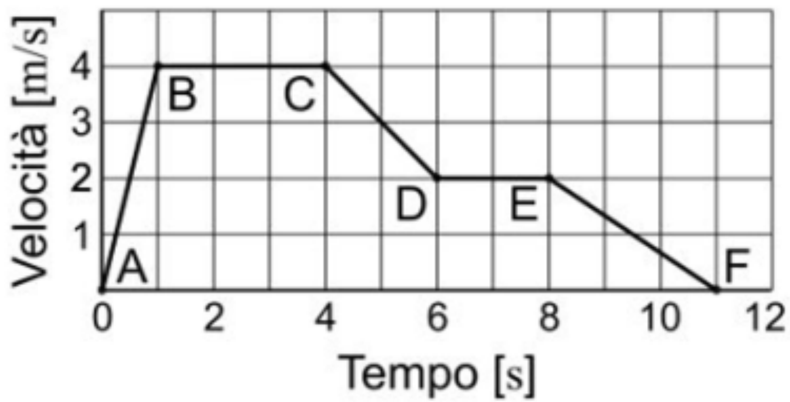
Esempi: i diagrammi per rappresentare la somma dei dadi del ns. caso.

Il diagramma ad albero per rappresentare i divisori di 72.



# Un problema cognitivo e didattico

I diagrammi non sono generalmente l'immagine diretta di una certa realtà. Se si vuole ottenere una sensazione intuitiva di quello che significa "velocità" si deve guardare un corpo in movimento o, meglio, confrontare due corpi in movimento.

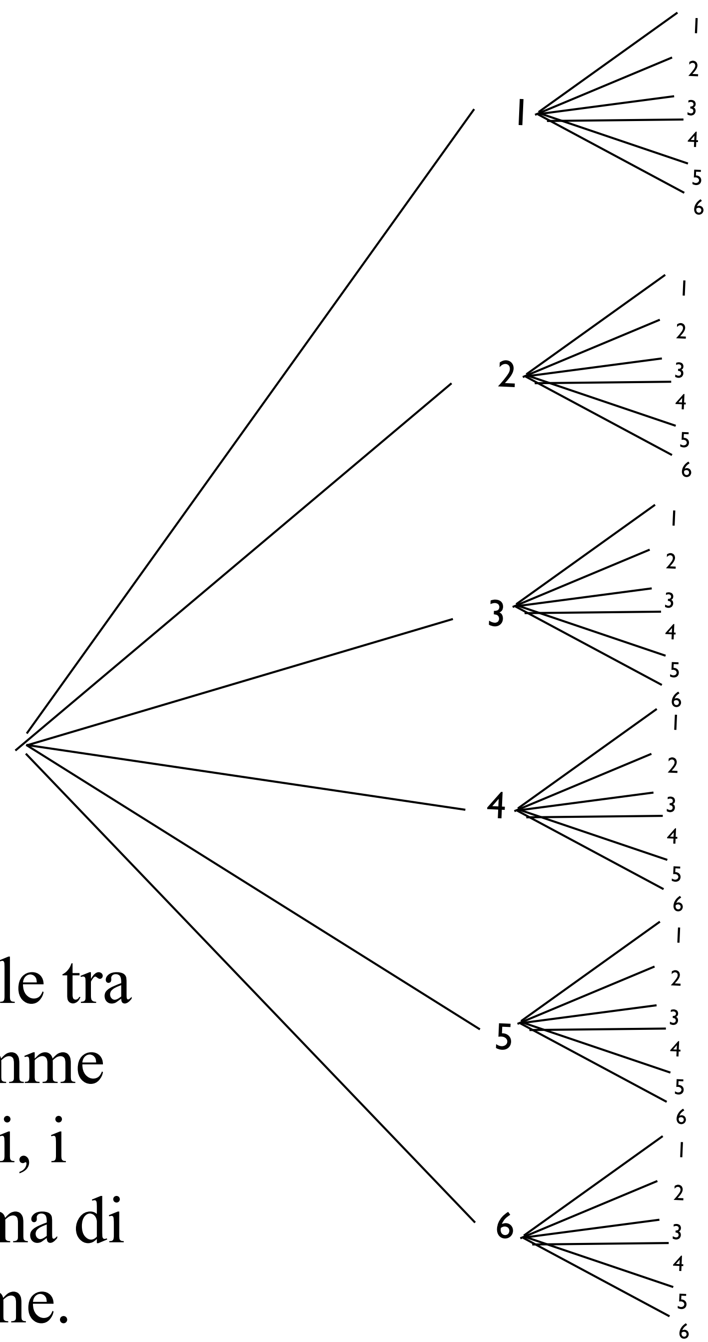



Ma con i diagrammi le cose sono completamente diverse poiché un diagramma, anche se espresso in termini figurativi, non è un'istanza cognitiva primaria.

*È l'espressione figurale di una struttura concettuale già elaborata, come un qualsiasi altro sistema simbolico.*

# Le rappresentazioni del problema dei 2 dadi

| Somma dadi | Combinazioni | N |
|---|---|---|
| 2 | (1,1) | 1 |
| 3 | (12) (2,1) | 2 |
| 4 | (1,3) (2,2) (3,1) | 3 |
| 5 | (1,4) (2,3) (3,2) (4,1) | 4 |
| 6 | (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) | 5 |
| 7 | (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1) | 6 |
| 8 | (2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2) | 5 |
| 9 | (3,6) (4,5) (5,4) (6,3) | 4 |
| 10 | (4,6) (5,5) (6,4) | 3 |
| 11 | (5,6) (6,5) | 2 |
| 12 | (6,6) | 1 |
| | TOTALE | 36 |



Certamente, non esiste alcuna analogia naturale tra il diagramma ad albero e le varie possibili somme dei dadi. Nei propri termini grafici e aritmetici, i due diagrammi traducono, attraverso un sistema di convenzioni, il processo originale di tali somme.

I diagrammi appartengono alla "modalità simbolica", nella terminologia di Bruner (*).
Ma hanno la qualità eccezionale di trasmettere il messaggio in modo strutturato e iconico e questo conferisce loro una potenzialità molto intuitiva.

---

(*)

1. **enattivo** (basato sull'azione)"l'apprendimento inizia con l'azione: toccare, manipolare, percepire, …".
   *Esempio*: manipolativi
2. **iconico** (basato sulle immagini)
   "rappresentare con immagini (su carta, col computer, mentalmente,…) le situazioni concrete attivate nel primo stadio".
   *Esempio:* l'immagine di una casa o di tre fragole
3. **simbolico** (basato sul linguaggio).
   *Esempio:* "casa", "3"

**Vi lascio due problemi su cui riflettere:**

- In quanti modi diversi posso scrivere numeri di tre cifre usando solo le cifre 1 e 2? (es.: 212,112,…)
- Immaginate una torre di dadi (3, 4,…dadi) , uno sopra l'altro: come li dovete mettere per ottenere il massimo/minimo numero di punti, sommando tutti quelli che si possono vedere sulla superficie della torre?

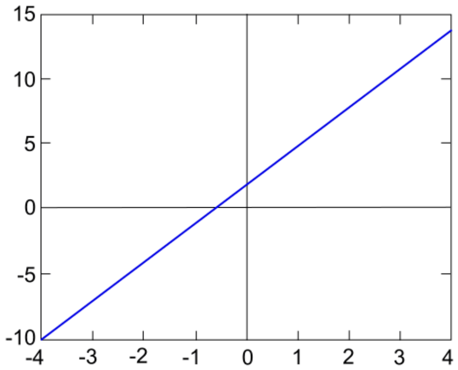
Quali rappresentazioni possono essere utili?

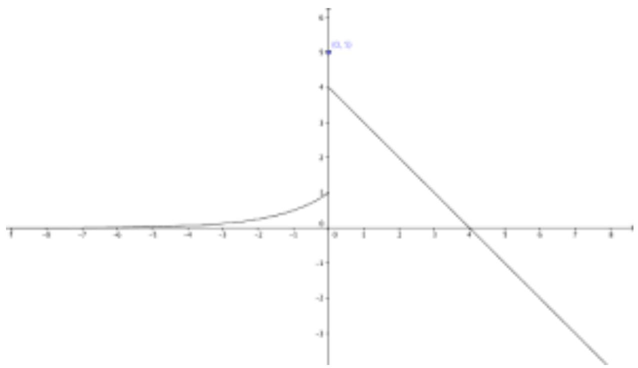
# Sommario

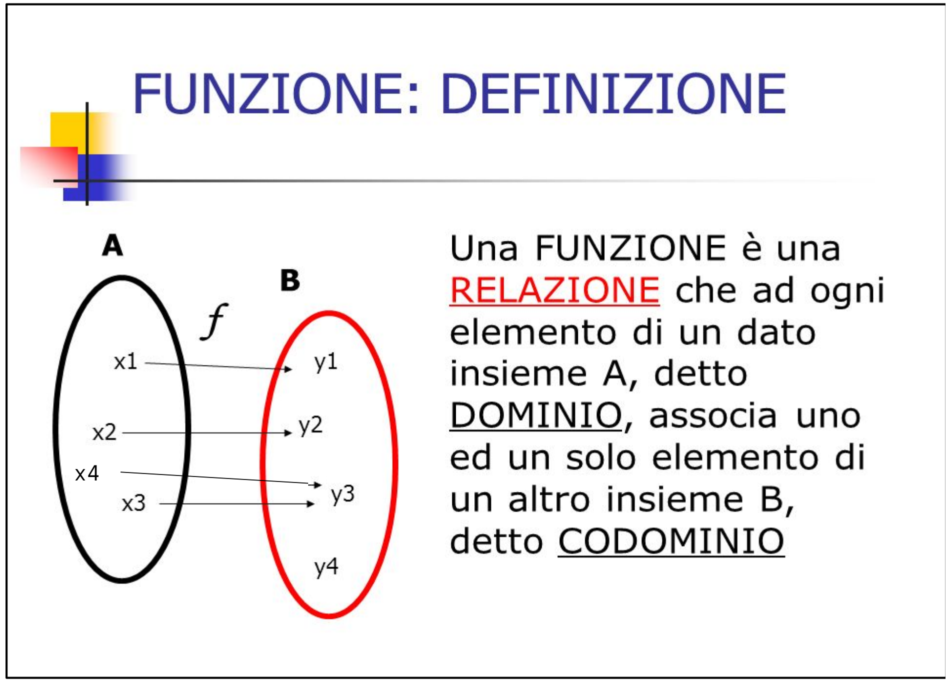
- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

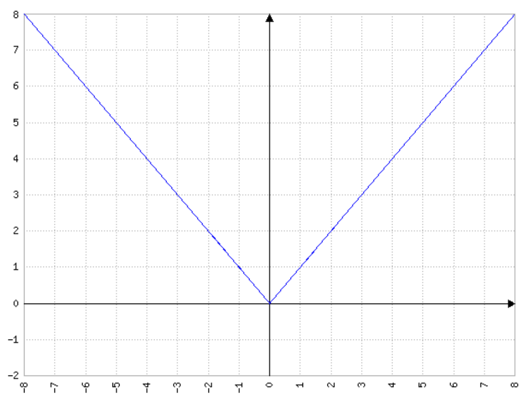
# Ora passiamo ad un tipo particolare di diagrammi: i grafici che rappresentano le funzioni.

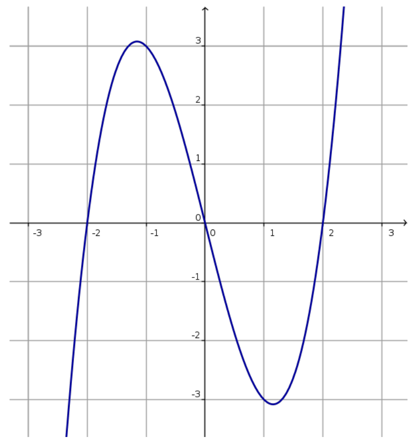
- Esempi:

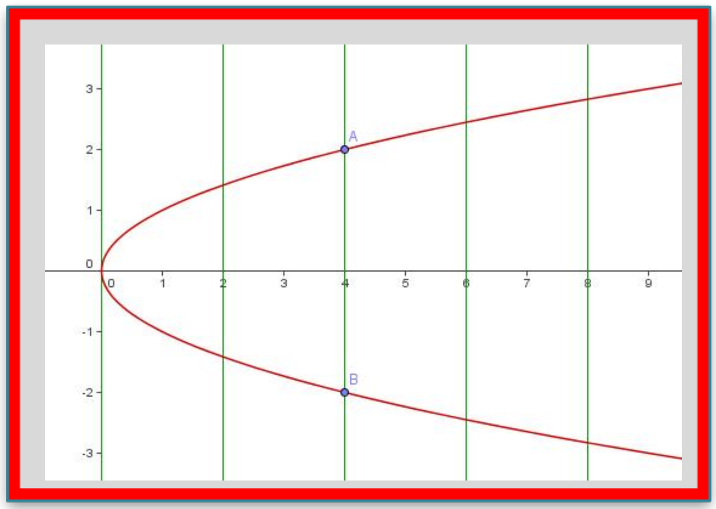




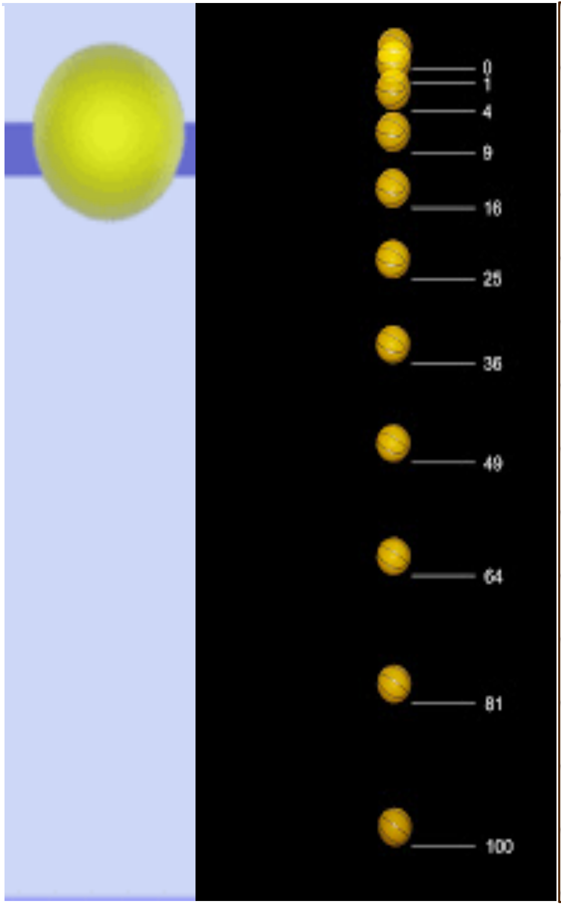





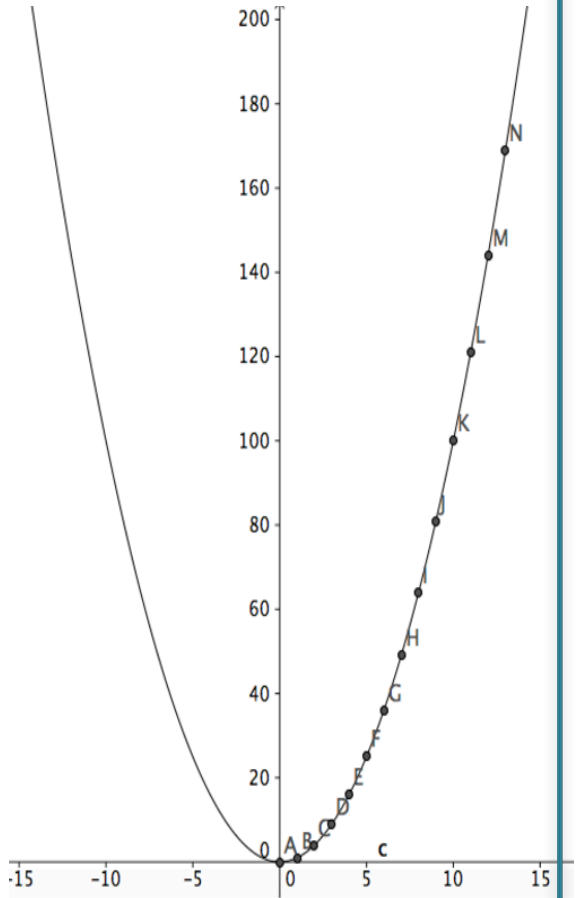


Anche nel caso delle funzioni, come generalmente nei diagrammi, la corrispondenza tra l'originale e il modello non è acquisita direttamente come effetto di una similitudine naturale (come avviene nelle analogie).

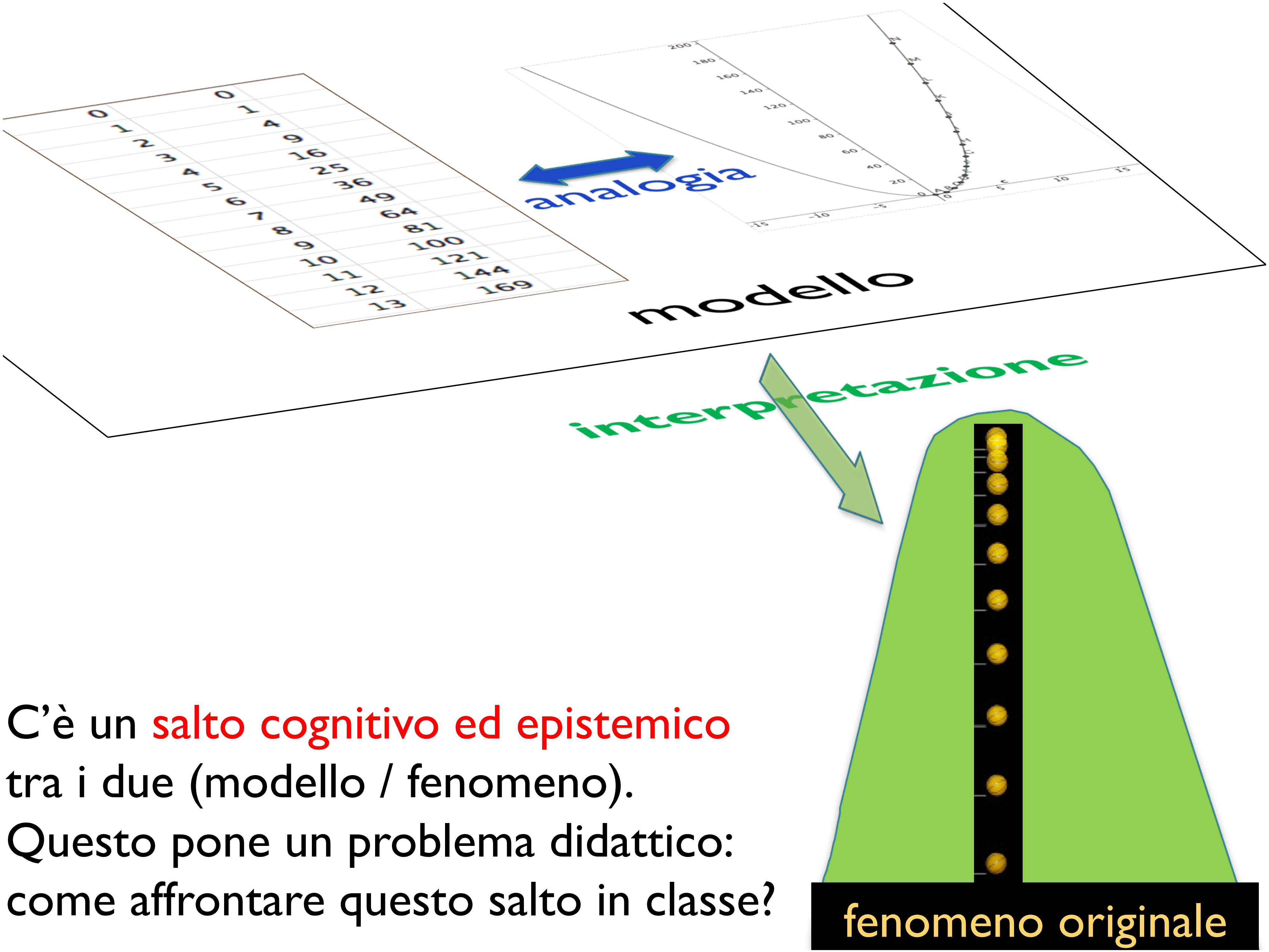
Se si considera, ad esempio, il grafico che rappresenta la relazione tra tempo e spazio nel caso della caduta dei gravi non esiste una somiglianza diretta e sensoriale tra il fenomeno della caduta e la forma del grafico.




| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 9 | 81 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| 12 | 144 |
| 13 | 169 |



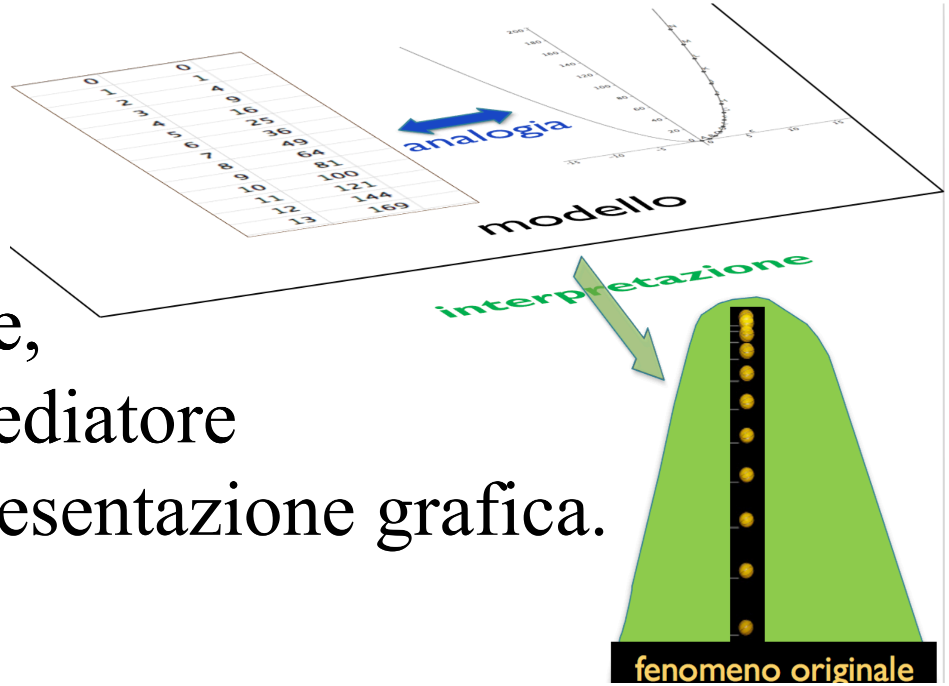

L'analogia è piuttosto tra l'espressione numerica del rispettivo fenomeno e la sua rappresentazione grafica (che è spaziale).

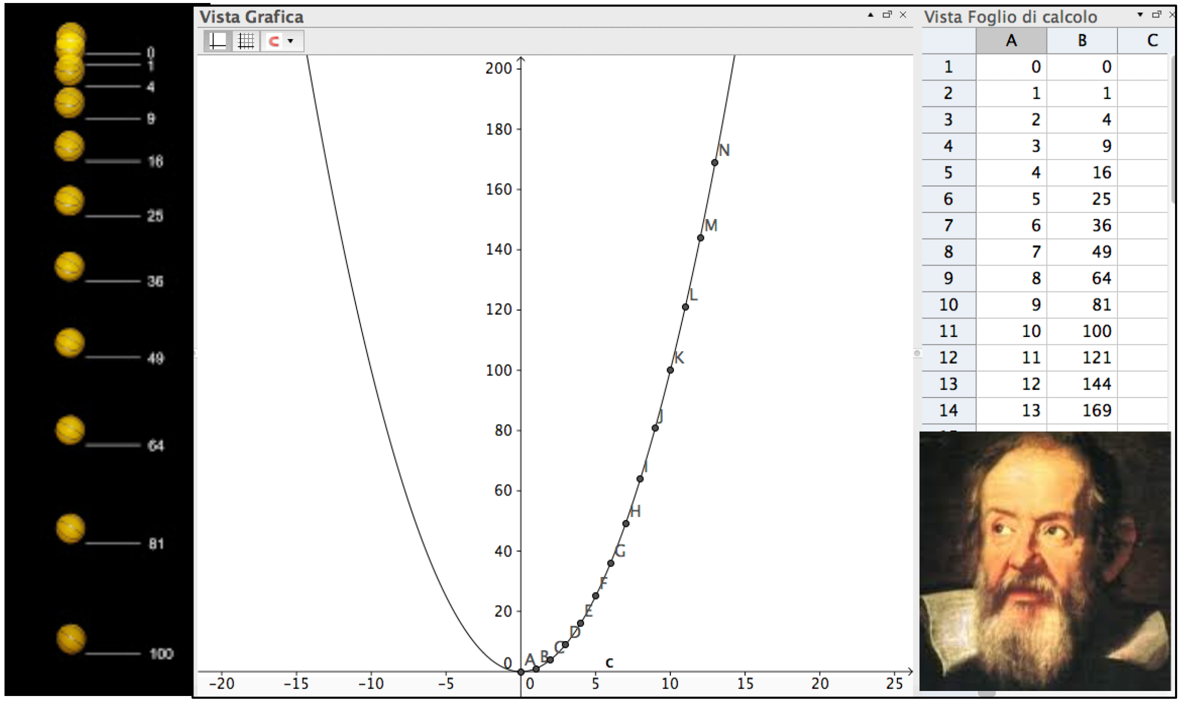



C’è un salto cognitivo ed epistemico tra i due (modello / fenomeno).
Questo pone un problema didattico: come affrontare questo salto in classe?

# Il problema didattico può essere così precisato:

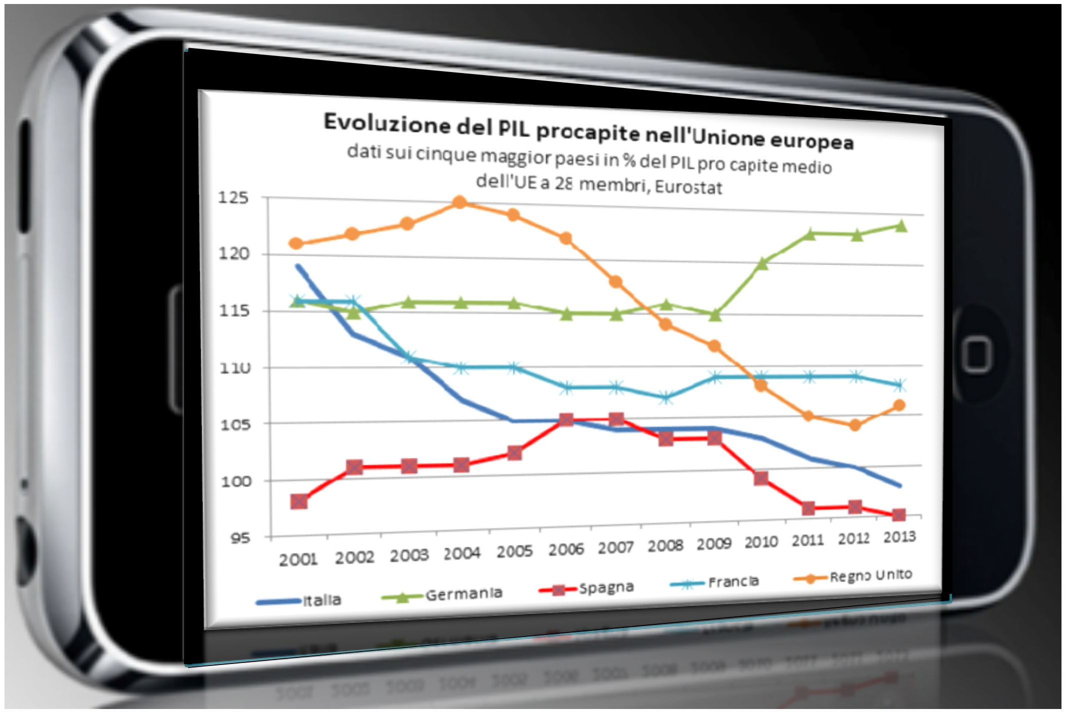
- Trovare un metodo didattico che renda il superamento del salto (epistemico e cognitivo) il più naturale possibile da un punto di vista cognitivo.
L'obiettivo è che il grafico diventi per gli allievi un dispositivo **intuitivo**: cioè che riescano a **fondere**, **interiorizzare** e **automatizzare**
il sistema delle
convenzioni relative
alla realtà
fenomenologica originale,
al sistema concettuale mediatore
(la funzione) e alla rappresentazione grafica.






# Modellizzare il cambiamento: le radici cognitive e culturali

## della matematica e della scienza




# Πάντα ρει

# Fenomeni di cambiamento

Il correlativo cognitivo del **cambiamento** è l'attenzione a ciò che cambia, a come cambia e a ciò che rimane invariante in una situazione.

Il correlativo matematico del cambiamento è l'attenzione non solo ai **valori** quantitativi, al modo di **rappresentarli e manipolarli** per ragionarci, ma anche a come cambiano le loro **differenze** ("fa caldo", "ora fa più caldo di prima", "fa sempre più caldo").

# Apprendistato all'interpretazione dei grafici di funzione

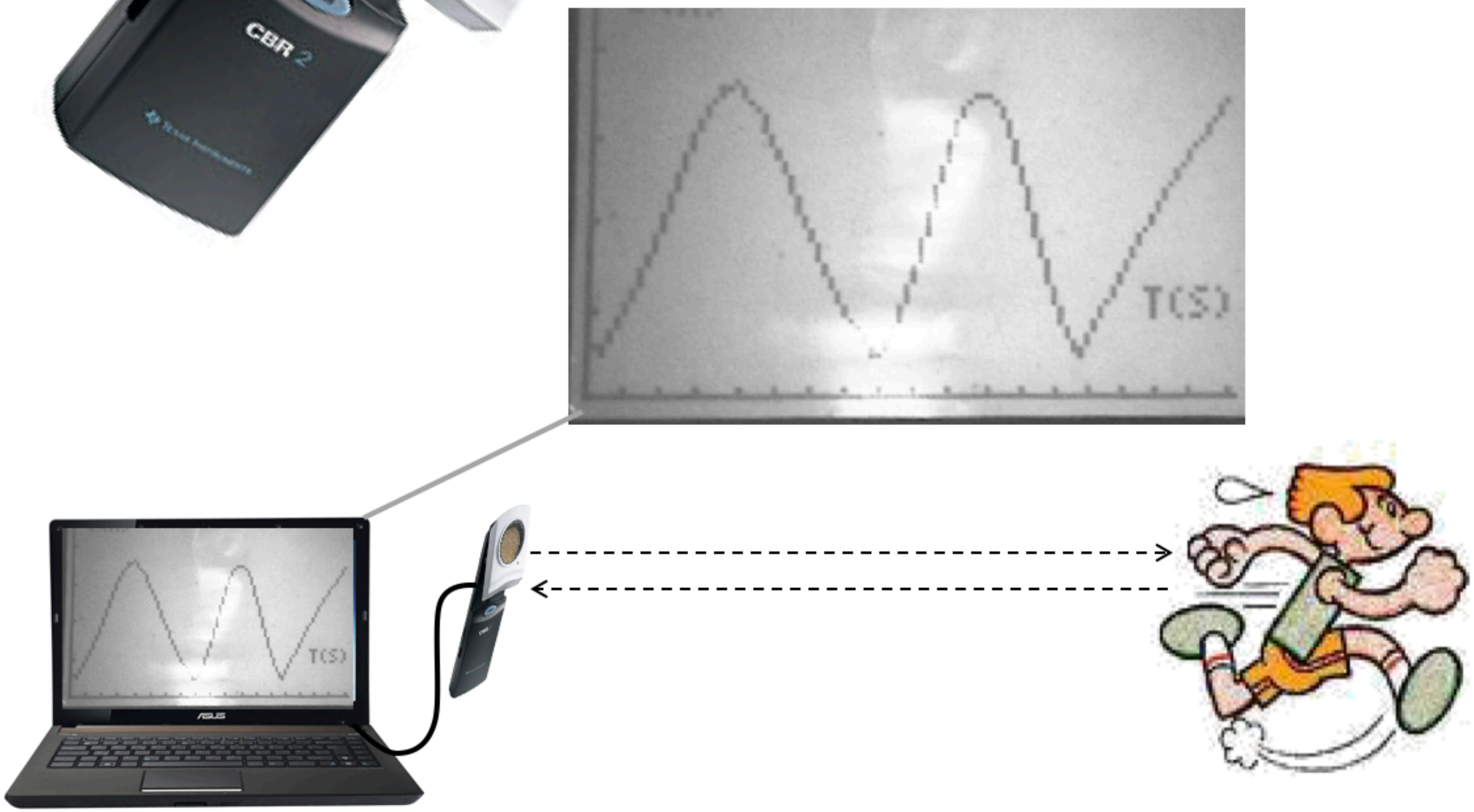
1

- Occorre che gli allievi siano introdotti a un apprendistato nell'interpretazione dei grafici in vari campi di esperienza in cui si esperiscano significativi fenomeni di **cambiamento**:
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie:
    - Piante
    - Persone
    - Temperatura
    - Prezzi
    - …

# Attività 4: il movimento

## Il CBR

(rivelatore sonico di movimento)

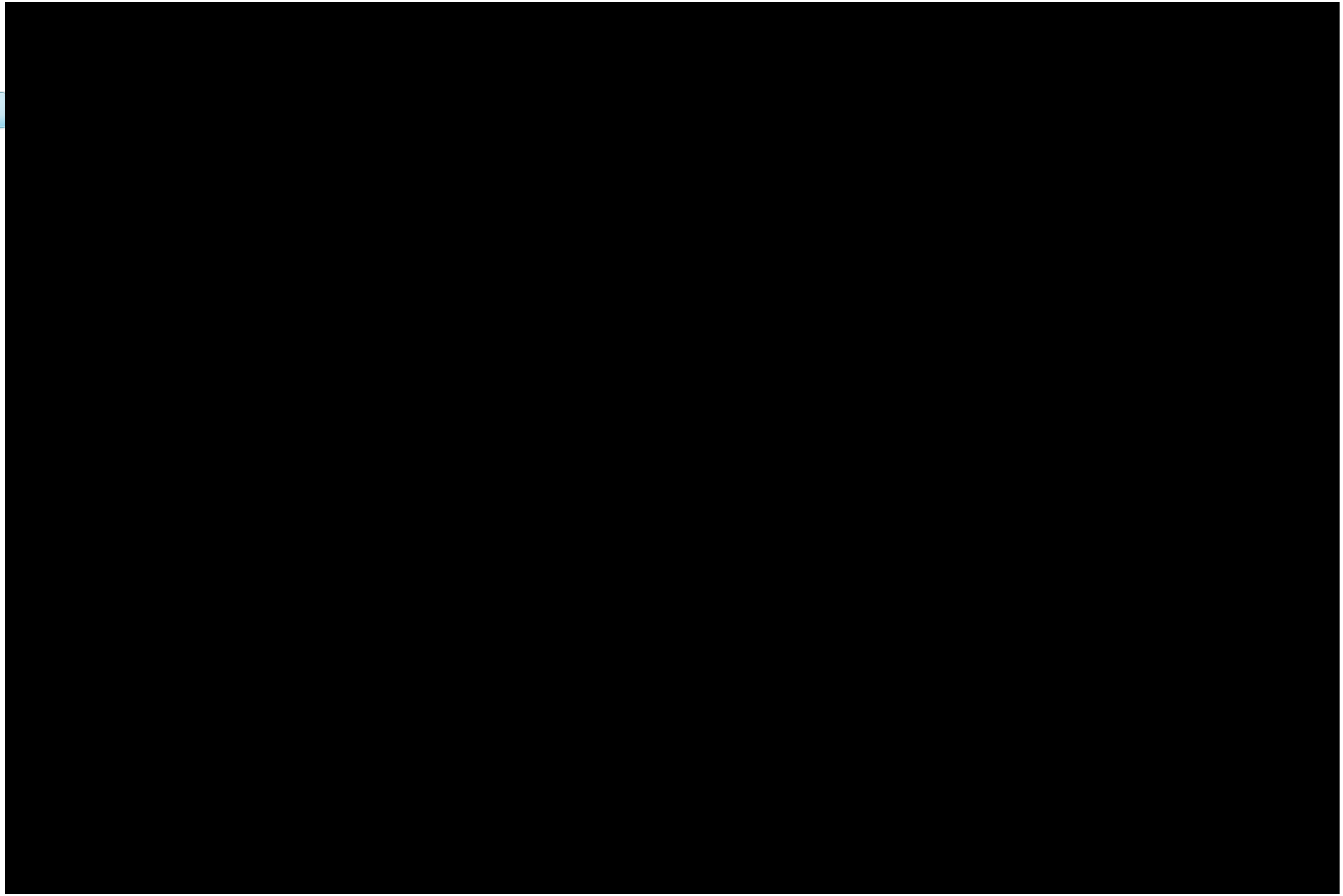



# Attività 4a:
# come rappresentare il movimento

Guardate i tre filmati e discutete:

a) se/come questo approccio ai grafici per rappresentare il movimento può aiutare per produrre un "dispositivo intuitivo": evidenziare i pro e i contro di questo metodo.
b) quali competenze media lo strumento CBR
c) il ruolo che può/deve avere l'insegnante nel supportare e provocare l'evoluzione delle intuizioni degli allievi verso la comprensione del grafico.

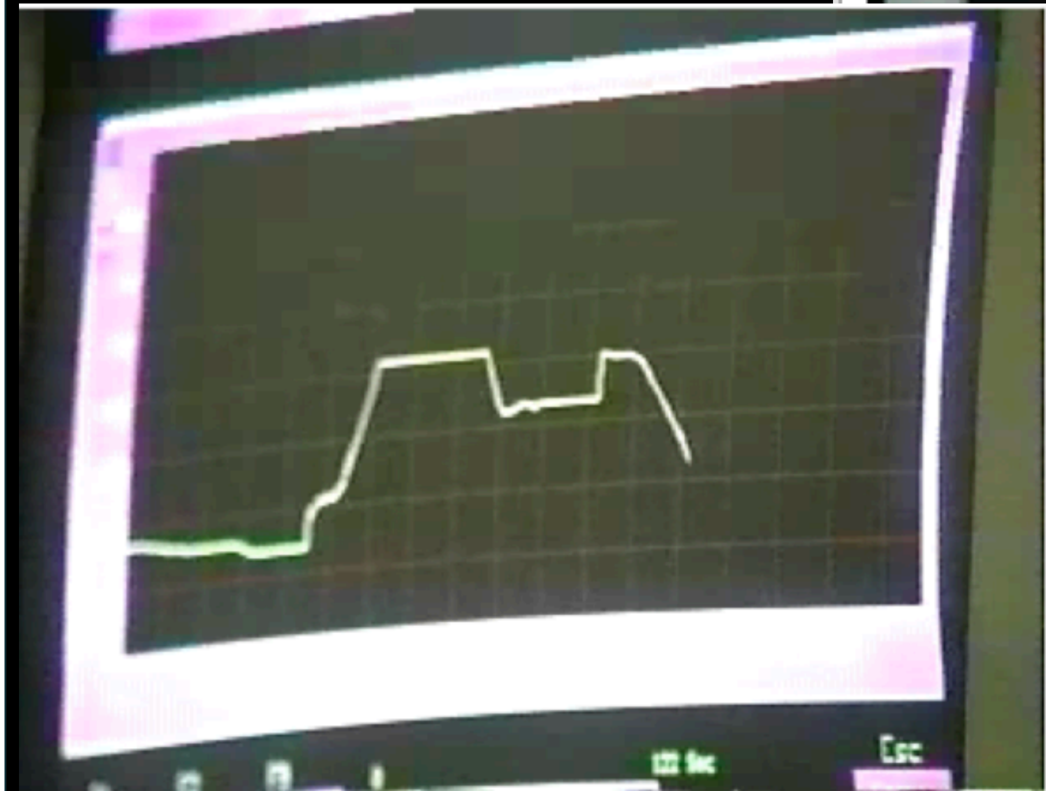
# Classe II, insegnante: K. Savioli, Ricercatrice: F. Ferrara



# Attività 4b:
# come rappresentare il movimento

Vediamo questo altro esempio.

Alla fine vi chiederò di commentare.

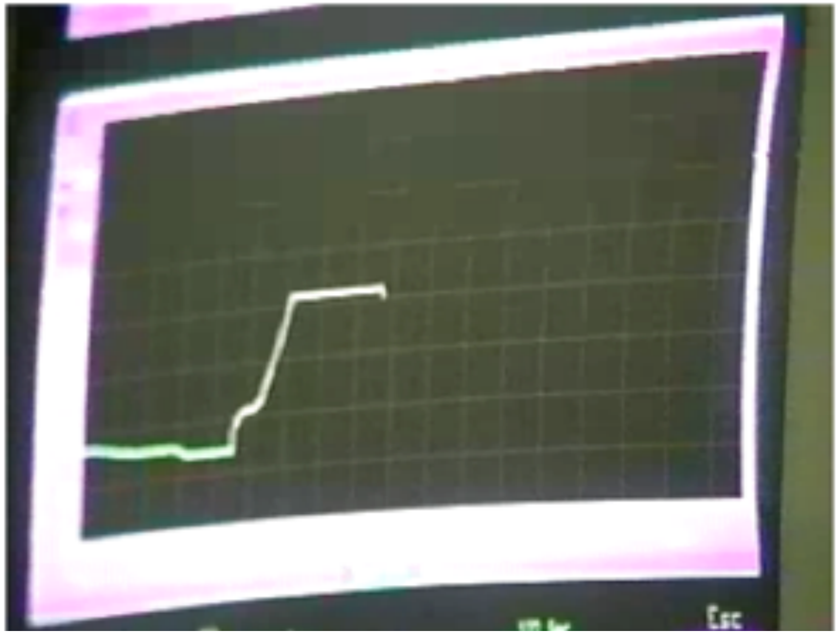


# Eleanor

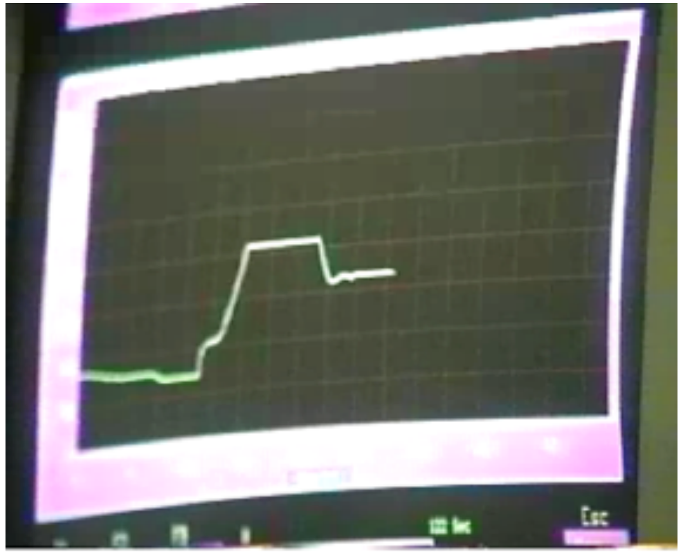
Nemirovski et al. (1998), Arzarello (2004)

# EPISODIO 1

1. Maestra: "Ecco come funziona. Clicco F1 per iniziare, e puoi spostarlo.
... E risponderà alla torre. Così..."
[Eleanor sposta il dispositivo con il braccio su, giù, a destra, a sinistra e osserva cosa succede sullo schermo]
2. E: "Ora mi allontano" [E si allontana lentamente guardando sempre allo schermo per vedere che cosa succede durante il suo movimento]
3. [Ad un certo punto il grafico blocca il suo aumento e si ha una linea orizzontale]

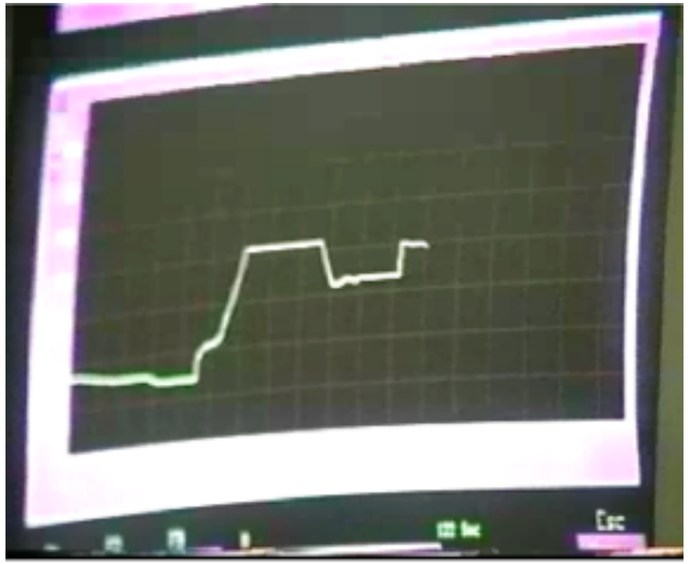


E: "Se lo sposto ... forse questo è il più lontano possibile"



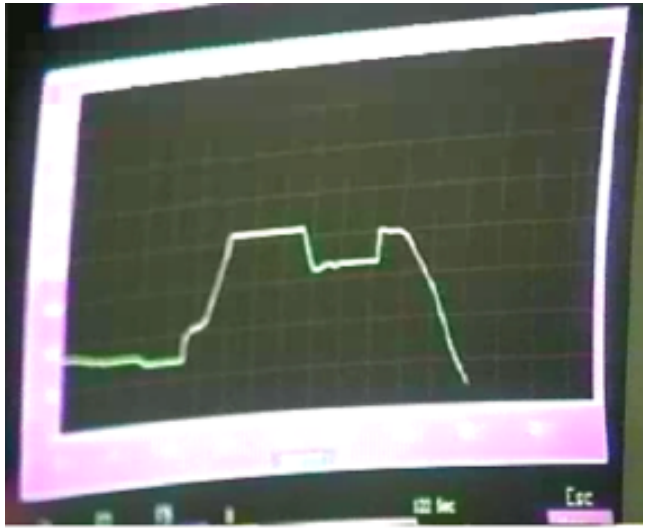
E: "Cosa succede se lo sposto più in alto?"

[E va un po 'in avanti poi solleva il dispositivo rimanendo ferma (la linea rimane orizzontale: figura).

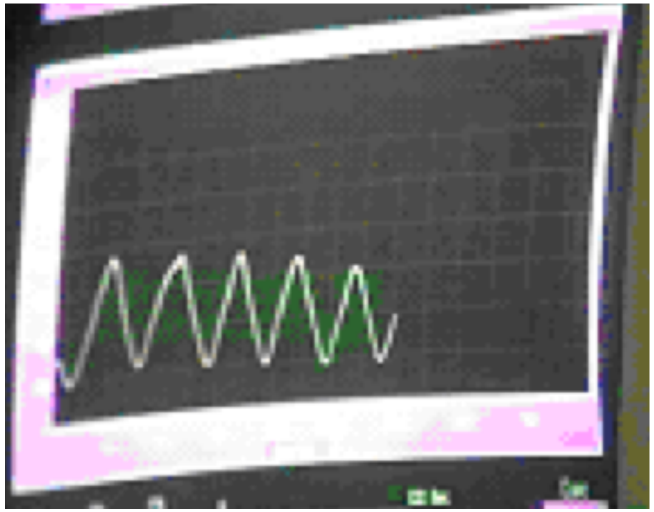


Va un po 'indietro e solleva ancora il dispositivo rimanendo immobile (figura);

Poi va verso la torre "Più si va vicino alla torre, più [la linea] è bassa, penso"
[E si allontana di nuovo lentamente guardando lo schermo: figura]
...

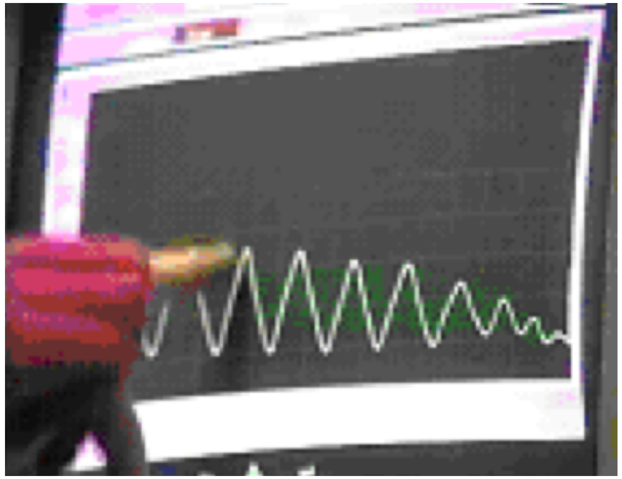


4. E: "OK, cercherò di fare un disegno regolare (pattern)".
[E va avanti e indietro regolarmente e produce il grafico della figura a fianco]
E: "In realtà questo non è esattamente sempre uguale".



# EPISODIO 2

5. M: "Fermiamoci e lo guardiamolo per un minuto". [E segue con attenzione il grafico sullo schermo con l'indice: figura]



6. M: "Cosa stava succedendo?"
7. E: "Beh, mi allontanavo: andavo più lontano, e poi più vicino e poi ancora ancora lontano".

[Ripete con il braccio avanti e indietro il movimento che aveva fatto con il suo corpo]
E: "stavo veramente andando così, ma un po' cambiavo".

8. M: "Allora la linea in su era quando stavi camminando ...?"
[M punta la linea sullo schermo]
9. E: "Quando stavo camminando all'indietro, e la linea in avanti era così".
10. M: "E poi tutto ... l'intera cosa ha anche una sorta di forma, vero?"
11. E: "Sì, è tutto ...
[E abbassa la testa per guardare di nuovo le diverse parti del grafico; segue di nuovo il grafico con l'indice]
... come degli zig-zag da quella parte, ma voglio dire che sono tutti ... si rassomigliano, tipo montagne o qualcosa del genere ".

# EPISODIO 3

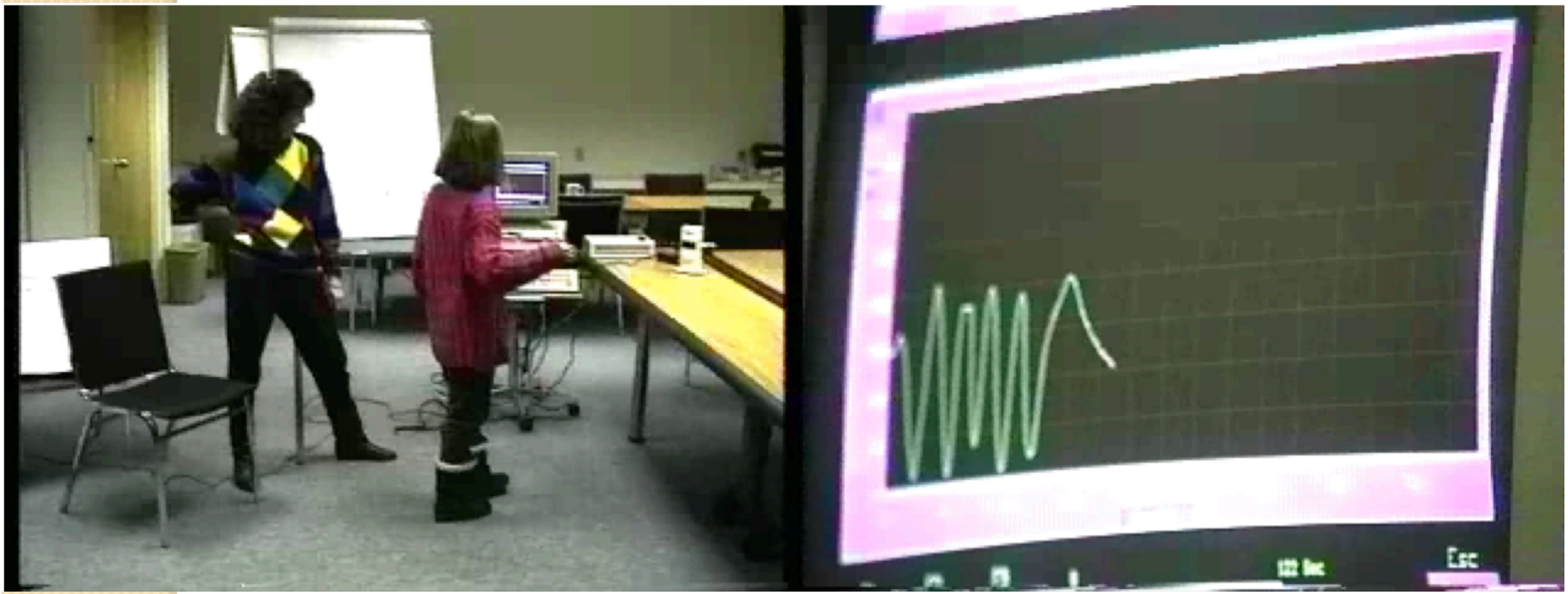
- 12. E: "Vediamo ... mi chiedo se si riesce a farla andare dritta in su?"
[Segue il grafico molto veloce con l'indice]
13. E: "Non in diagonale. Probabilmente non si può perché se dovesse andare dritto, dovrebbe essere nello stesso momento, perché si muove così [lei mette con la mano un movimento orizzontale sullo schermo attraverso il grafico], non importa quello che fai "

14. I: "D'accordo, ... si muove nel tempo?"
15. E: "Sì. Quindi dovresti fermare il tempo e andare così. [Con il braccio teso, E punta l'indice allo schermo e produce la forma del grafico sullo schermo]
E muoversi così. [E si muove all’indietro e accenna il movimento che aveva fatto in precedenza]
Perché, perché si muove in quella direzione [way] o in questa nello stesso tempo ".
16. E: "Sta andando in questo modo. Così va bene, invece di andare solo così ...[E fa un movimento verticale sullo schermo con l'indice]...va probabilmente in questo modo".
[E fa un movimento obliquo lento sullo schermo con l'indice]

# EPISODIO 4

17. I: "Pensi di poter fare una linea più inclinata di questa? Forse non puoi farla dritta in su ma forse puoi farla un po '... "
18. E: "Può essere, forse se lo faccio più veloce".
19. I: "Ok, lo proviamo?"

19. I: "Ok, lo proviamo?"
20. E: "Non mi preoccupo della forma..."
[Prima E corre due volte avanti e indietro, poi si ferma e continua a muovere solo il braccio avanti e indietro due volte ...]
"... e se ti muovi lentamente"
[Corre di nuovo ma molto lentamente ...]

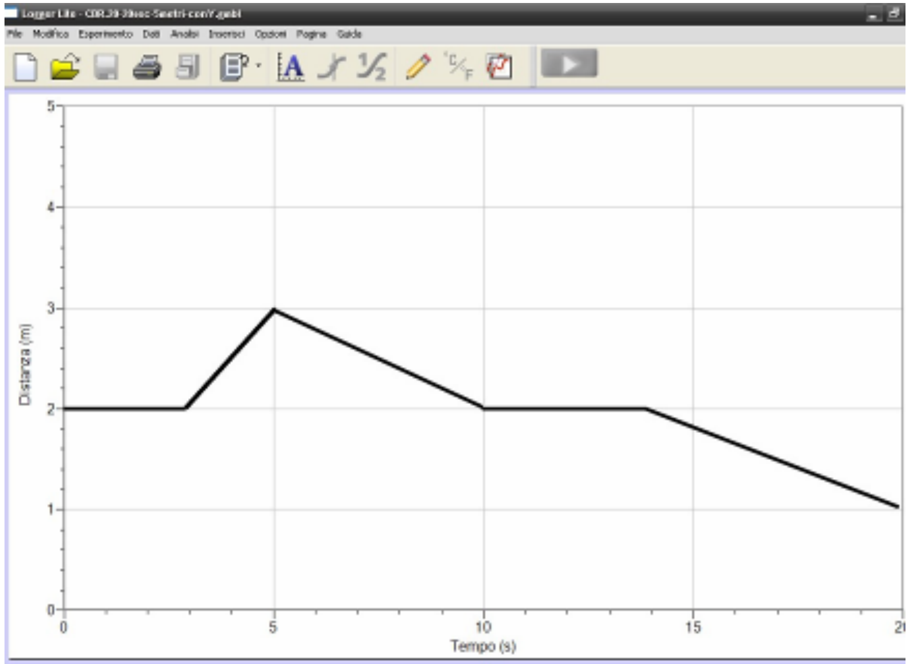


# Commenti …

R. Nemirovsky con altri (ad es. in Italia: F. Arzarello, F.Ferrara, O. Robutti, C. Sabena, K.Savioli) ha elaborato la nozione di **fusione** per spiegare come l’interazione degli allievi con opportuni strumenti e un’opportuna orchestrazione didattica nella conduzione da parte dell’insegnante può fare evolvere il parlato, le azioni e i gesti degli allievi stessi in modo che riescano a **fondere** le proprietà dei simboli e quelle degli eventi o situazioni che queste rappresentano: in altre parole come essi siano in grado di pianificare i loro movimenti in maniera tale da creare e interpretare i grafici con azioni cinestetiche.

# Esempio di Verifica in quinta

Utilizzando il CBR abbiamo ottenuto questo grafico mentre un ragazzo/a si muoveva sulla linea disegnata in terra di fronte al CBR

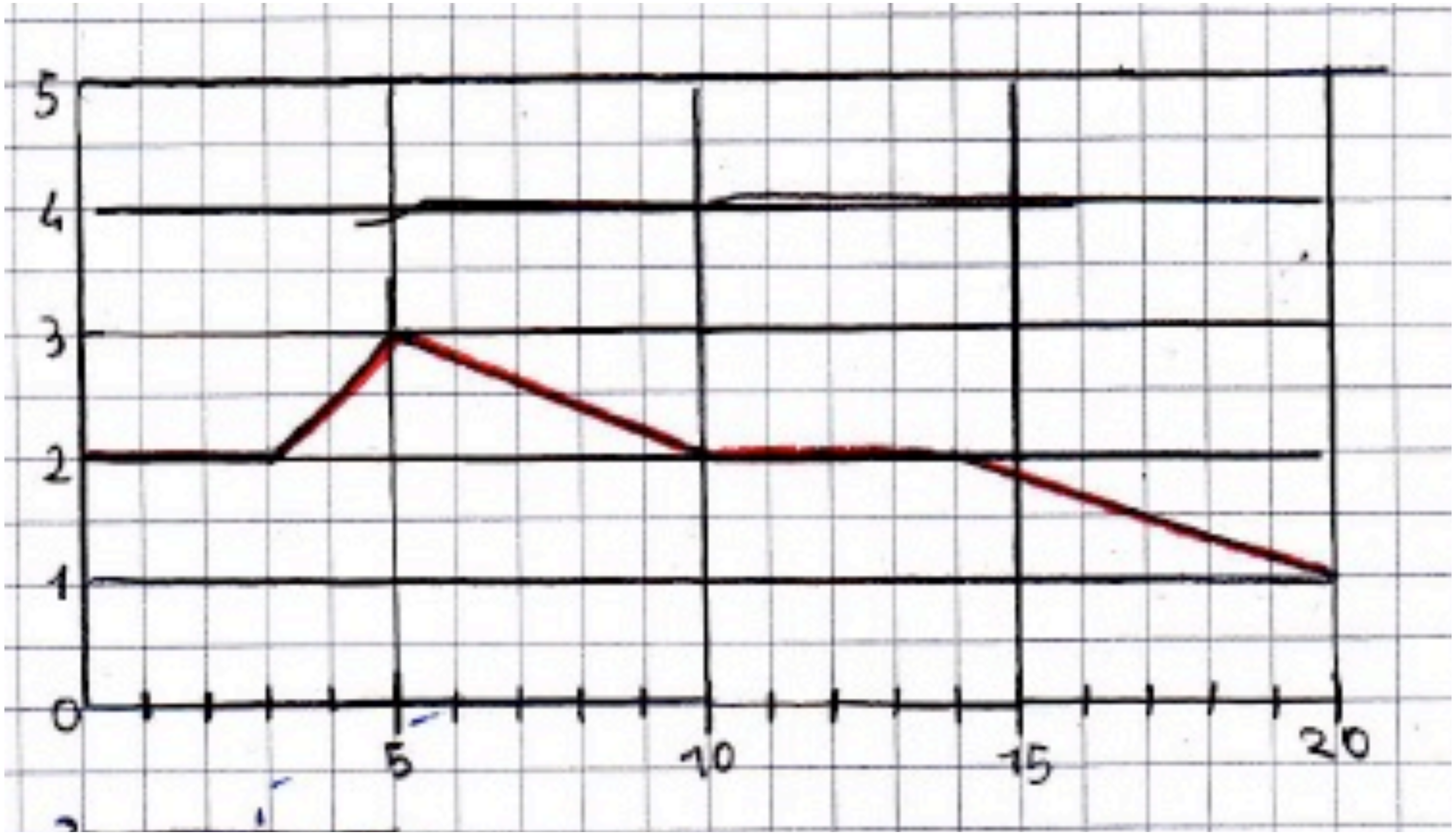



Descrivi *a parole* i movimenti del ragazzo/a

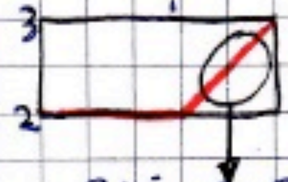
Quando si è mosso più velocemente?

Quando si è mosso più lentamente?

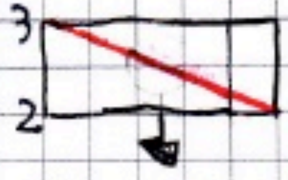
# Risposta di un alunno:



# Risposta di un alunno:




qui si è ~~allontanato/a più~~ allontanato/a più rapidamente.




qui si è ~~allontanato/a~~ avvicinato/a più lentamente


qui si è avvicinato/a più lentamente.

# Apprendistato all'interpretazione dei grafici di funzione

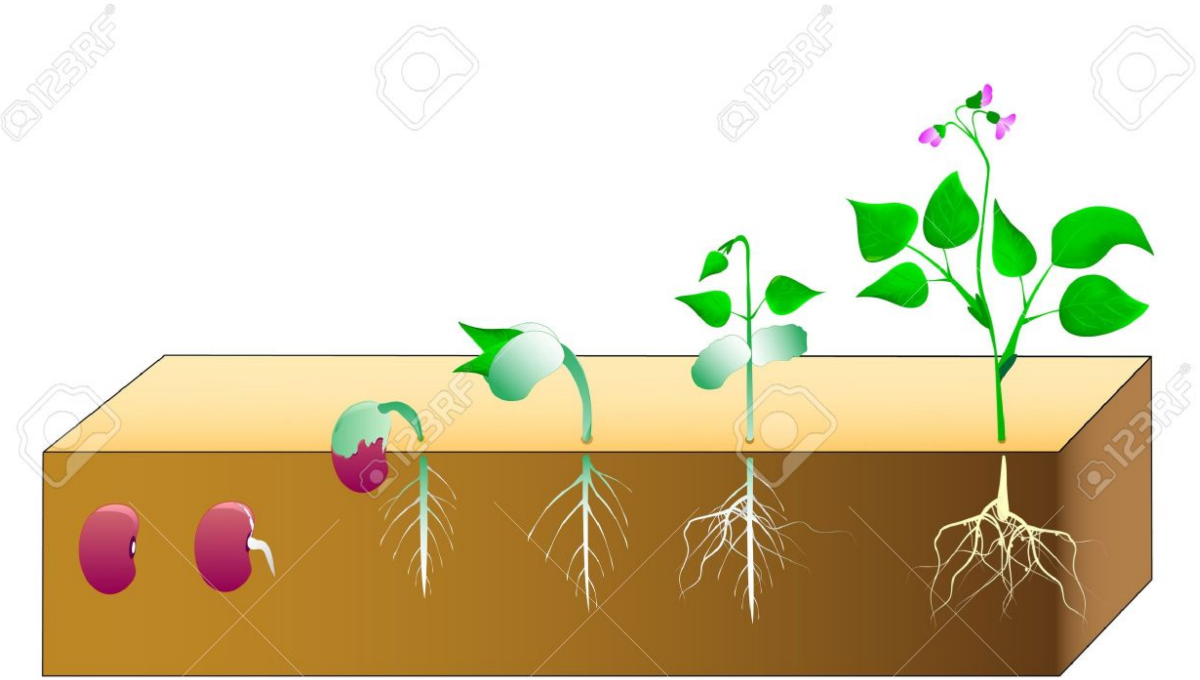
Occorre che gli allievi siano introdotti a un apprendistato nell'interpretazione dei grafici in vari campi di esperienza in cui si esperiscano significativi fenomeni di **cambiamento**:

- Movimento
- Crescita (decrescita) in situazioni varie:
  - Piante
  - Temperatura
  - Prezzi
  - Persone
  - …

2

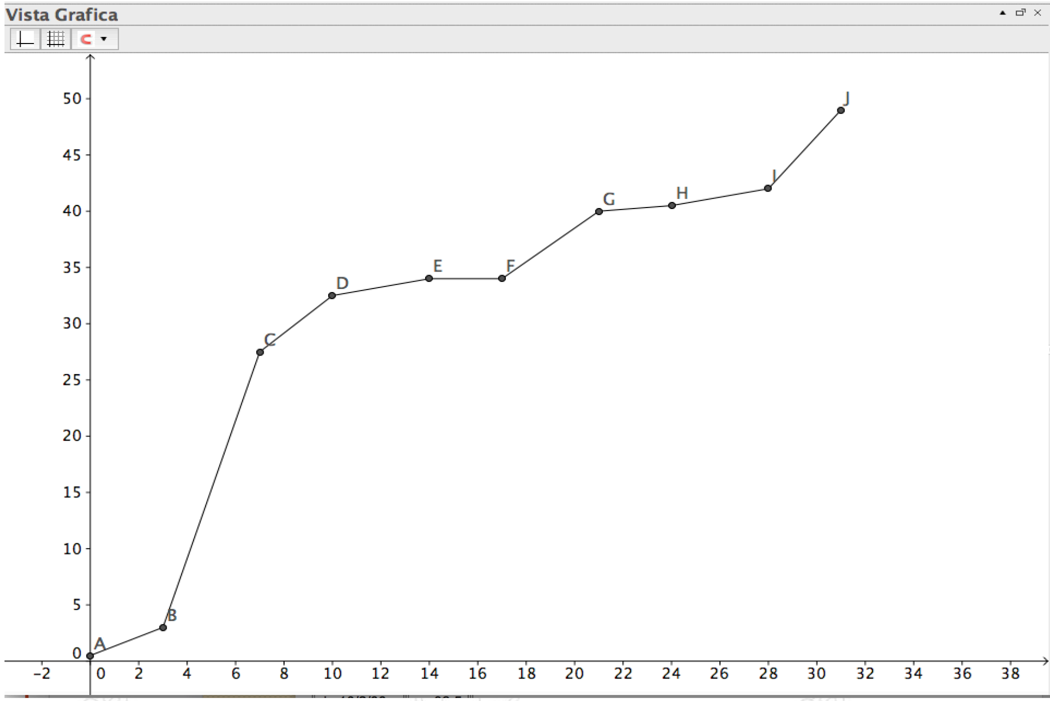
# Attività 5: crescita delle piante di fagioli

| | sabbia | t. |
|---|---|---|
| lun 31/1/00 | 0,5 | |
| gio 3/2/00 | 3 | |
| lun 7/2/00 | 27,5 | |
| gio 10/2/00 | 32,5 | |
| lun 14/2/00 | 34 | |
| gio 17/2/00 | 34 | |
| lun 21/2/00 | 40 | |
| gio 24/2/00 | 40,5 | |
| lun 28/2/00 | 42 | |
| gio 2/3/00 | 49 | |



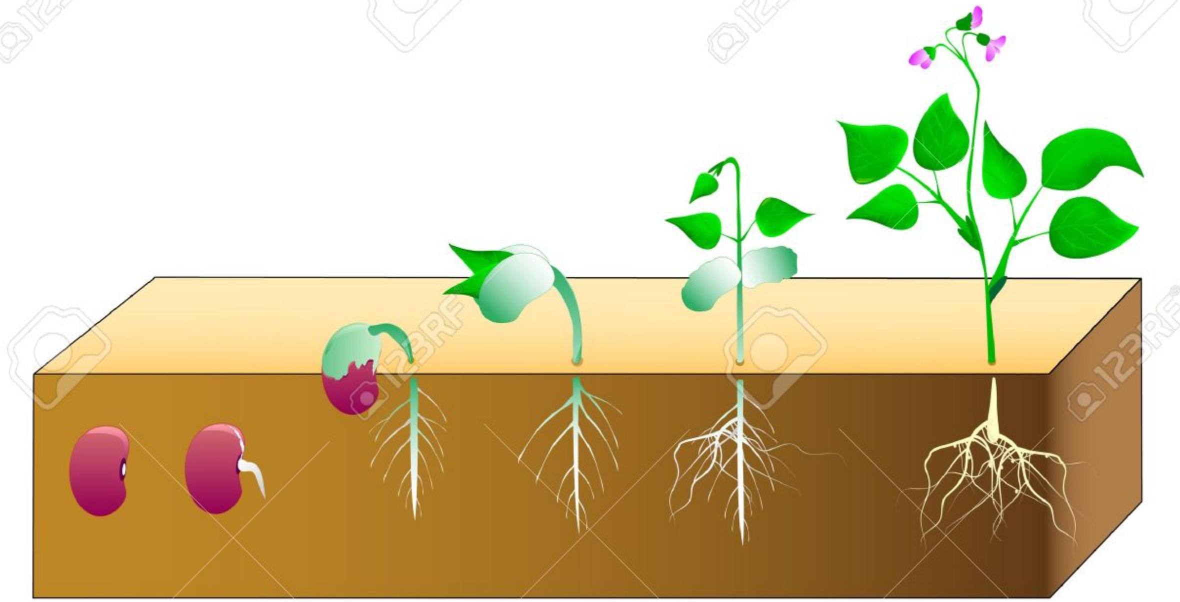
# Crescita delle piante di fagioli

| | sabbia | t. |
|---|---|---|
| lun 31/1/00 | 0,5 | |
| gio 3/2/00 | 3 | |
| lun 7/2/00 | 27,5 | |
| gio 10/2/00 | 32,5 | |
| lun 14/2/00 | 34 | |
| gio 17/2/00 | 34 | |
| lun 21/2/00 | 40 | |
| gio 24/2/00 | 40,5 | |
| lun 28/2/00 | 42 | |
| gio 2/3/00 | 49 | |

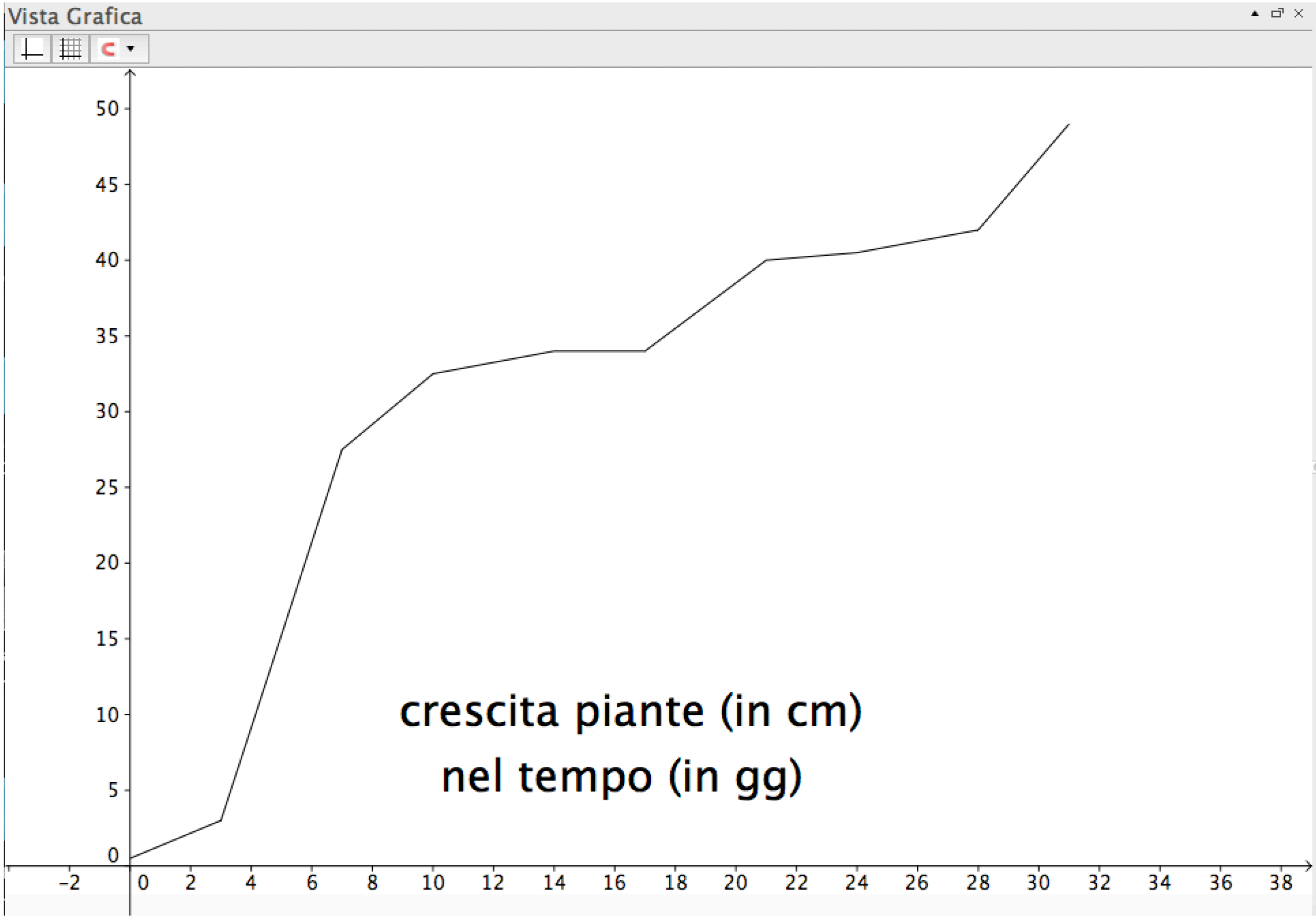



Vista Foglio di calcolo

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 27.5 |
| 4 | 10 | 32.5 |
| 5 | 14 | 34 |
| 6 | 17 | 34 |
| 7 | 21 | 40 |
| 8 | 24 | 40.5 |
| 9 | 28 | 42 |
| 10 | 31 | 49 |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |



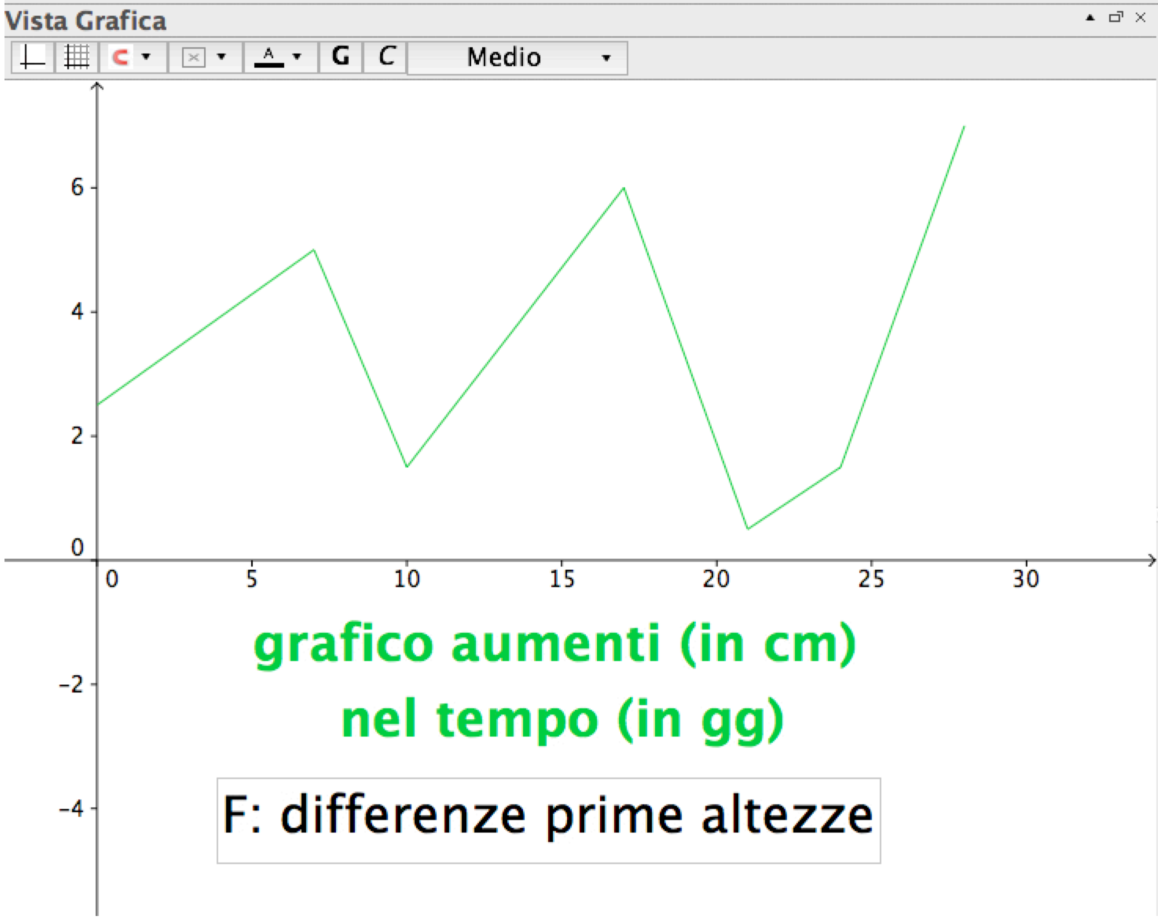
# Crescita delle piante di fagioli




Vista Foglio di calcolo

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 27.5 |
| 4 | 10 | 32.5 |
| 5 | 14 | 34 |
| 6 | 17 | 34 |
| 7 | 21 | 40 |
| 8 | 24 | 40.5 |
| 9 | 28 | 42 |
| 10 | 31 | 49 |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |

# Crescita delle piante di fagioli

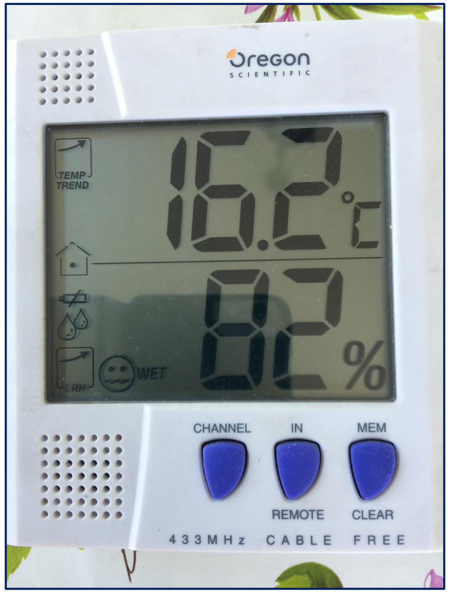



Vista Foglio di calcolo

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 | 2.5 | 3 | 0 | 2.5 |
| 2 | 3 | 3 | 24.5 | 4 | 3 | 24.5 |
| 3 | 7 | 27.5 | 5 | 3 | 7 | 5 |
| 4 | 10 | 32.5 | 1.5 | 4 | 10 | 1.5 |
| 5 | 14 | 34 | 0 | 3 | 14 | 0 |
| 6 | 17 | 34 | 6 | 4 | 17 | 6 |
| 7 | 21 | 40 | 0.5 | 3 | 21 | 0.5 |
| 8 | 24 | 40.5 | 1.5 | 4 | 24 | 1.5 |
| 9 | 28 | 42 | 7 | 3 | 28 | 7 |
| 10 | 31 | 49 | | | | |
| 11 | | 0 | | | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | | | | |
| 16 | | | | | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | | | | | |
| 20 | | | | | | |

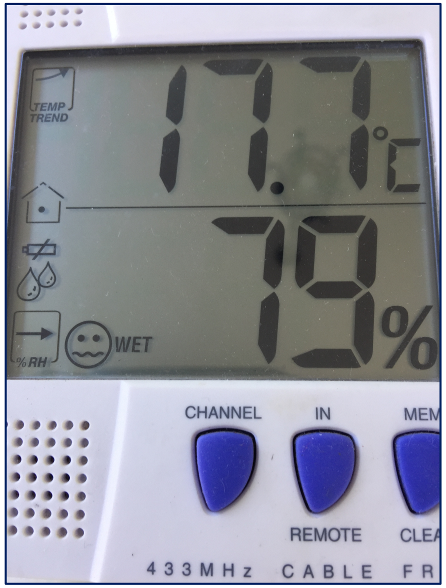
# Attività 6
# Temperature e umidità

Si veda a livello introduttivo: Il significato di grado sul termometro
(Mat. 2001, Argomentare)

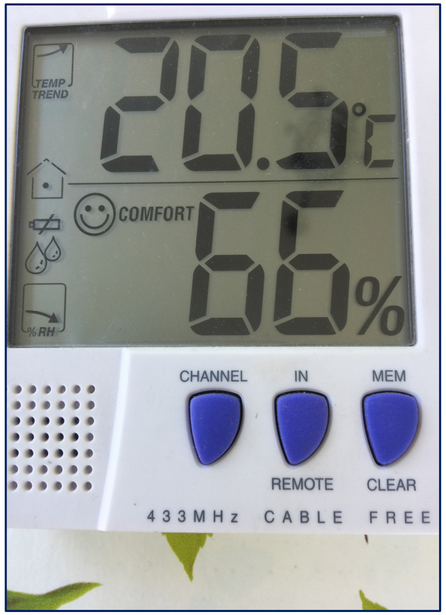


7:30

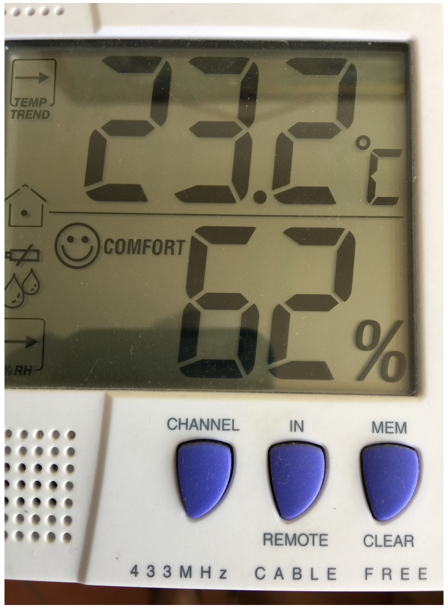
8:00



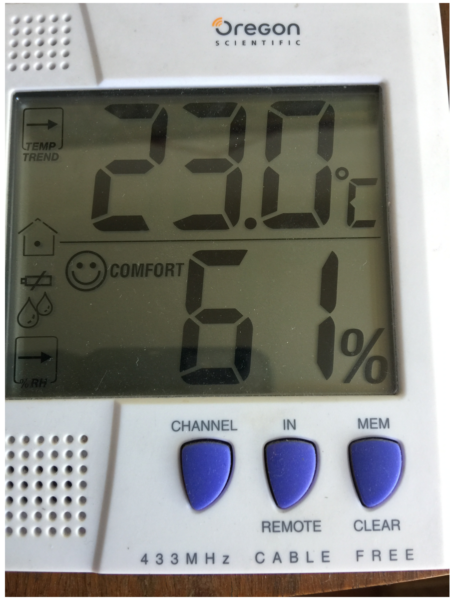
8:30



9:00



10:00

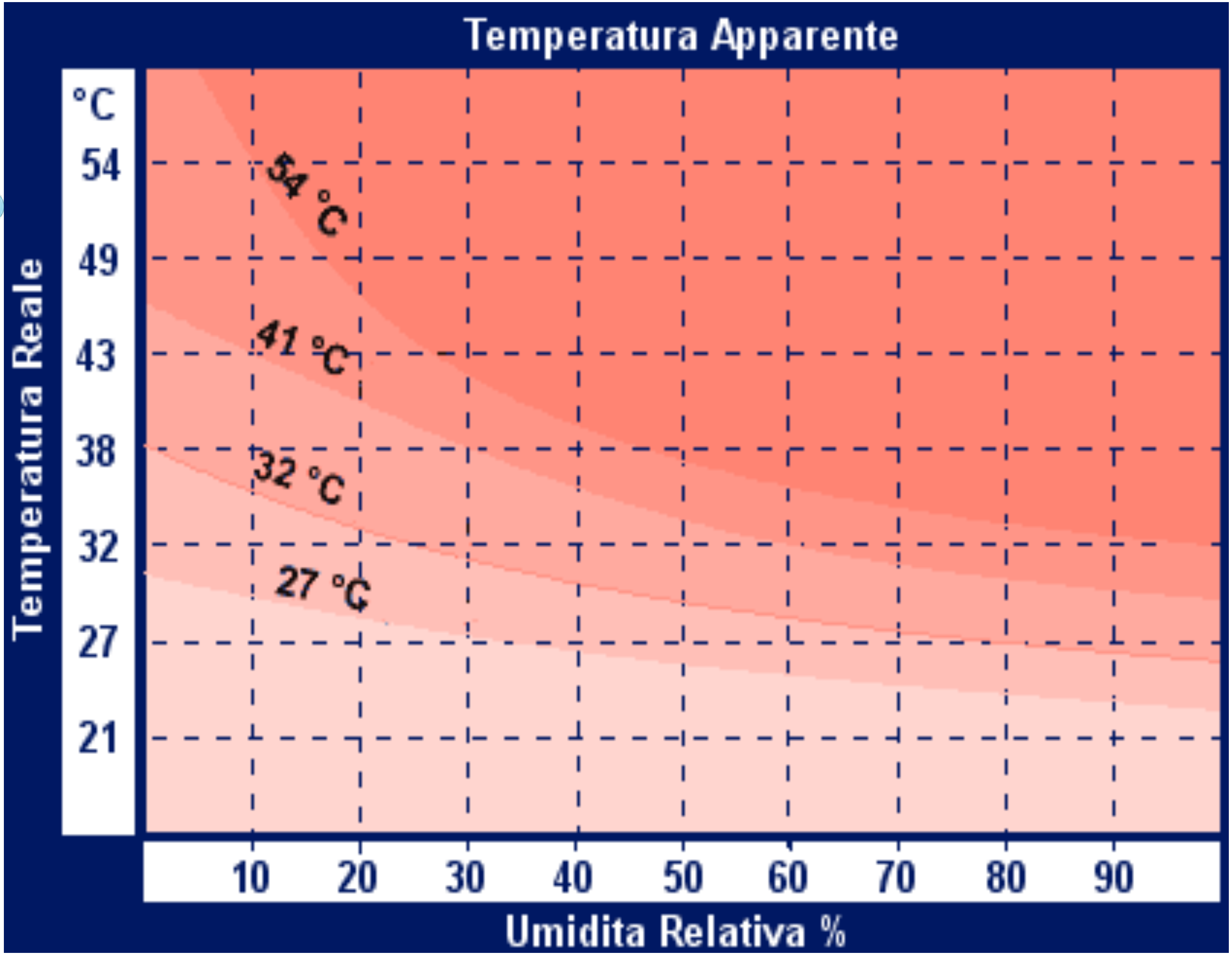


11:00

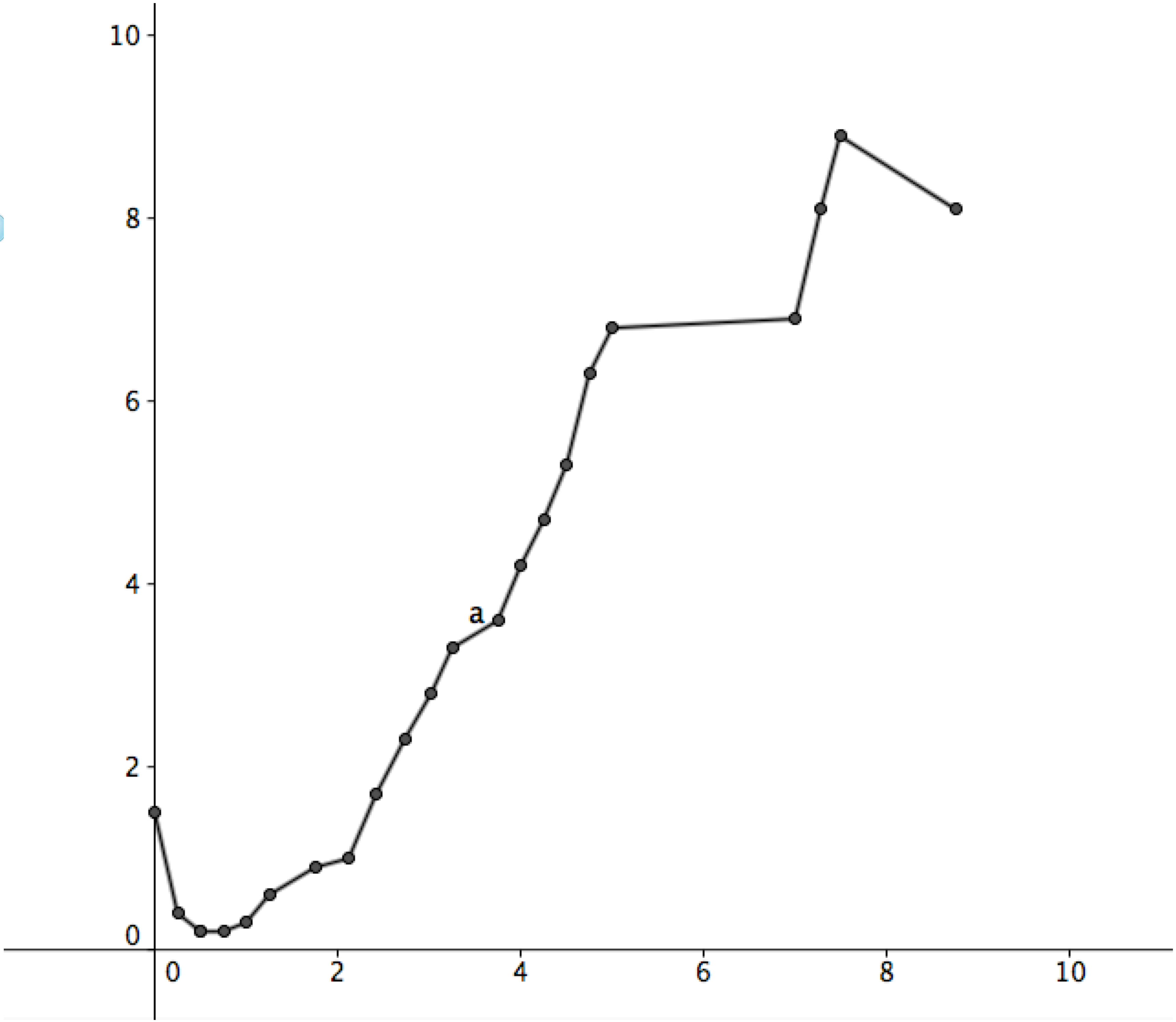
# Attività 6 Temperature e umidità

| ORA | Gradi Celsius C° | Umid. Relativa % | Indice Humidex | ORA | Gradi Celsius C° | Umid. Relativa % | Indice Humidex |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7:15 | 18,5 | 74 | | 7:15 | 21,3 | 64 | |
| 7:30 | 17,4 | 82 | | 7:30 | 19,1 | 71 | |
| 7:45 | 17,2 | 82 | | 7:45 | 18,4 | 77 | |
| 8:00 | 17,2 | 85 | | 8:00 | 18,3 | 80 | |
| 8:15 | 17,3 | 83 | | 8:15 | 18,6 | 81 | |
| 8:30 | 17,6 | 82 | | 8:40 | 19,2 | 81 | |
| 9:00 | 17,9 | 83 | | 9:05 | 20,2 | 82 | |
| 9:22 | 18,0 | 84 | | 9:15 | 20,6 | 81 | 27 |
| 9:40 | 18,7 | 84 | | 9:30 | 21,3 | 78 | 27 |
| 9:58 | 19,3 | 81 | | 9:45 | 22,2 | 72 | 27 |
| 10:16 | 19,8 | 81 | | 10:37 | 22,8 | 70 | 28 |
| 10:30 | 20,3 | 79 | | 10:00 | 24,8 | 62 | 30* |
| 11:00 | 20,6 | 74 | 26 | 11:10 | 26,4 | 54 | 31* |
| 11:15 | 21,2 | 74 | 26 | 11:45 | 26,3 | 55 | 31* |
| 11.30 | 21,7 | 71 | 27 | 16:45 | 27,7 | 38 | 28,5 |
| 11.45 | 22,3 | 64 | 26 | | | | |
| 12:00 | 23,3 | 64 | 28,5 | | | | |
| 12:15 | 23,8 | 63 | 28,5 | | | | |
| 14:15 | 23,9 | 59 | 28 | | | | |
| 14:32 | 25,1 | 50 | 30* | | | | |
| 14:44 | 25,9 | 52 | 30* | | | | |
| 18:00 | 25,1 | 54 | 28 | | | | |

| | 25% | 30% | 35% | 40% | 45% | 50% | 55% | 60% | 65% | 70% | 75% | 80% | 85% | 90% | 95% | 100% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42° | 48 | 50 | 52 | 55 | 57 | 59 | 62 | 64 | 66 | 68 | 71 | 73 | 75 | 77 | 80 | 82 |
| 41° | 46 | 48 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 79 |
| 40° | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 |
| 39° | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 66 | 68 | 70 | 72 |
| 38° | 42 | 44 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 67 | 69 |
| 37° | 40 | 42 | 44 | 45 | 47 | 49 | 51 | 52 | 54 | 56 | 58 | 59 | 61 | 63 | 65 | 66 |
| 36° | 39 | 40 | 42 | 44 | 45 | 47 | 49 | 50 | 52 | 54 | 55 | 57 | 59 | 60 | 62 | 63 |
| 35° | 37 | 39 | 40 | 42 | 44 | 45 | 47 | 48 | 50 | 51 | 53 | 54 | 56 | 58 | 59 | 61 |
| 34° | 36 | 37 | 39 | 40 | 42 | 43 | 45 | 46 | 48 | 49 | 51 | 52 | 54 | 55 | 57 | 58 |
| 33° | 34 | 36 | 37 | 39 | 40 | 41 | 43 | 44 | 46 | 47 | 48 | 50 | 51 | 53 | 54 | 55 |
| 32° | 33 | 34 | 36 | 37 | 38 | 40 | 41 | 42 | 44 | 45 | 46 | 48 | 49 | 50 | 52 | 53 |
| 31° | 32 | 33 | 34 | 35 | 37 | 38 | 39 | 40 | 42 | 43 | 44 | 45 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 30° | 30 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 29° | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 45 | 46 |
| 28° | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| 27° | 27 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
| 26° | 26 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 25° | 25 | 25 | 26 | 27 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 24° | 24 | 24 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 33 | 34 | 35 |
| 23° | 23 | 23 | 23 | 24 | 25 | 25 | 26 | 27 | 28 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 32 | 33 |
| 22° | 22 | 22 | 22 | 22 | 23 | 24 | 25 | 25 | 26 | 27 | 27 | 28 | 29 | 30 | 30 | 31 |

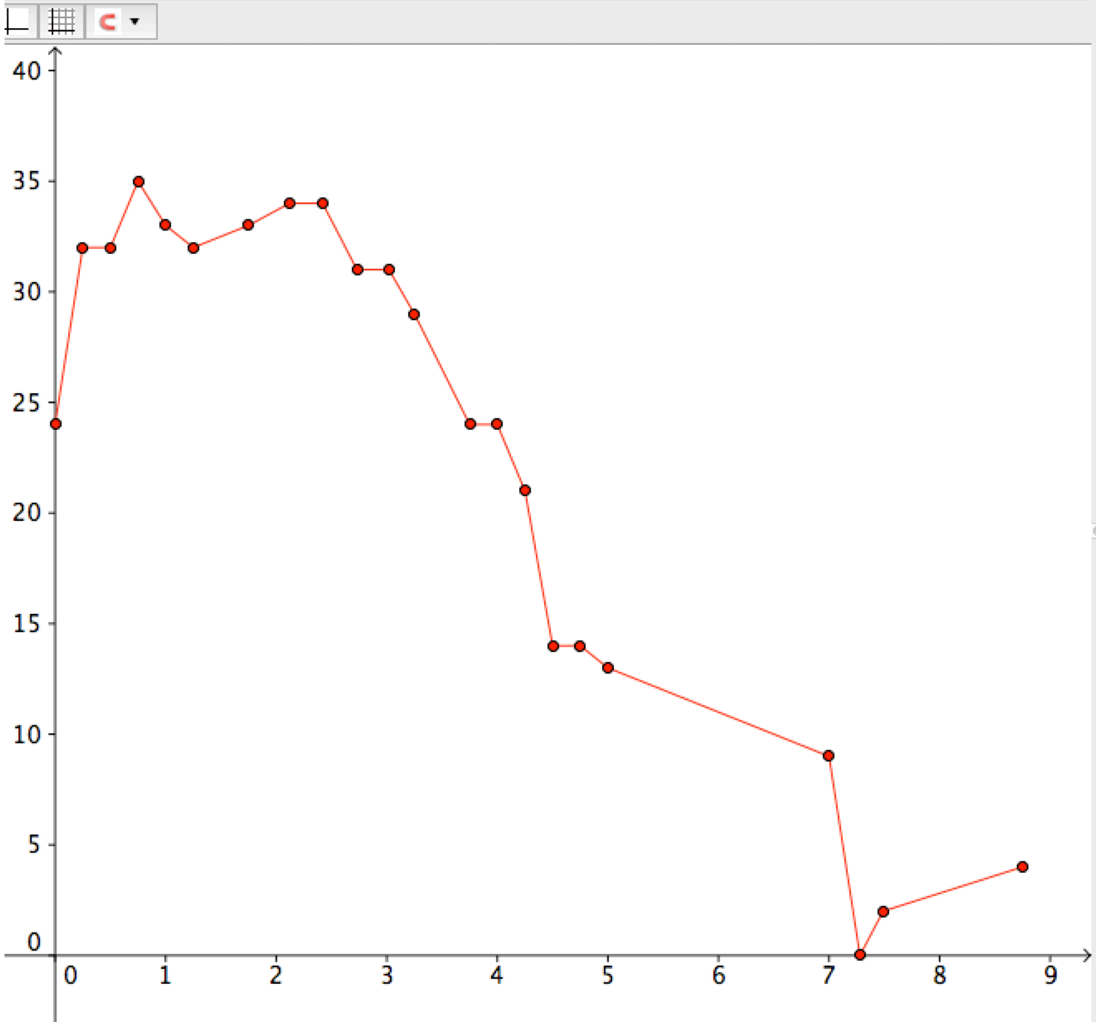


Temperatura Apparente
°C
54
49
43
38
32
27
21
Temperatura Reale
54 °C
41 °C
32 °C
27 °C
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Umidita Relativa %



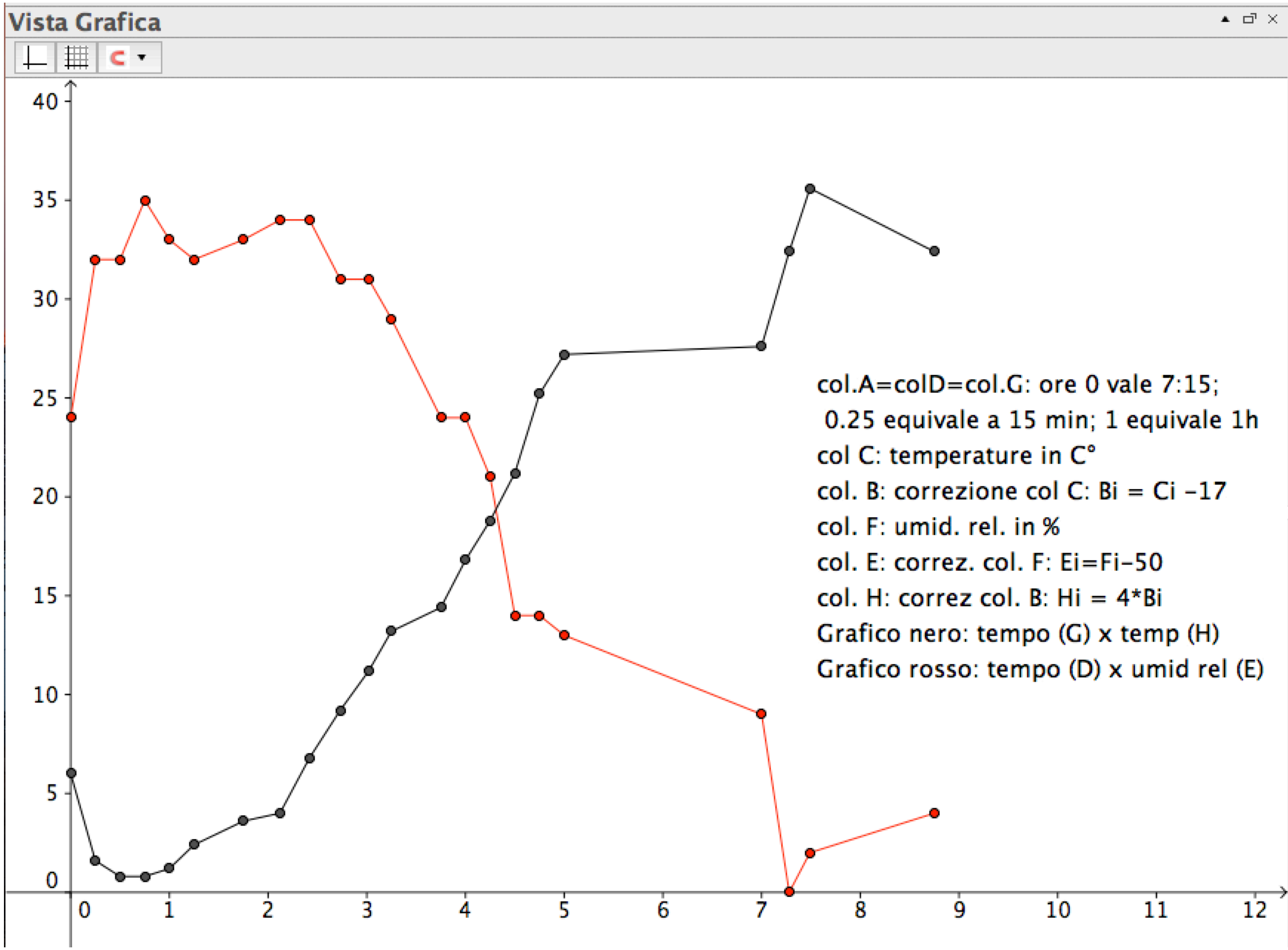
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
a

ista Grafica



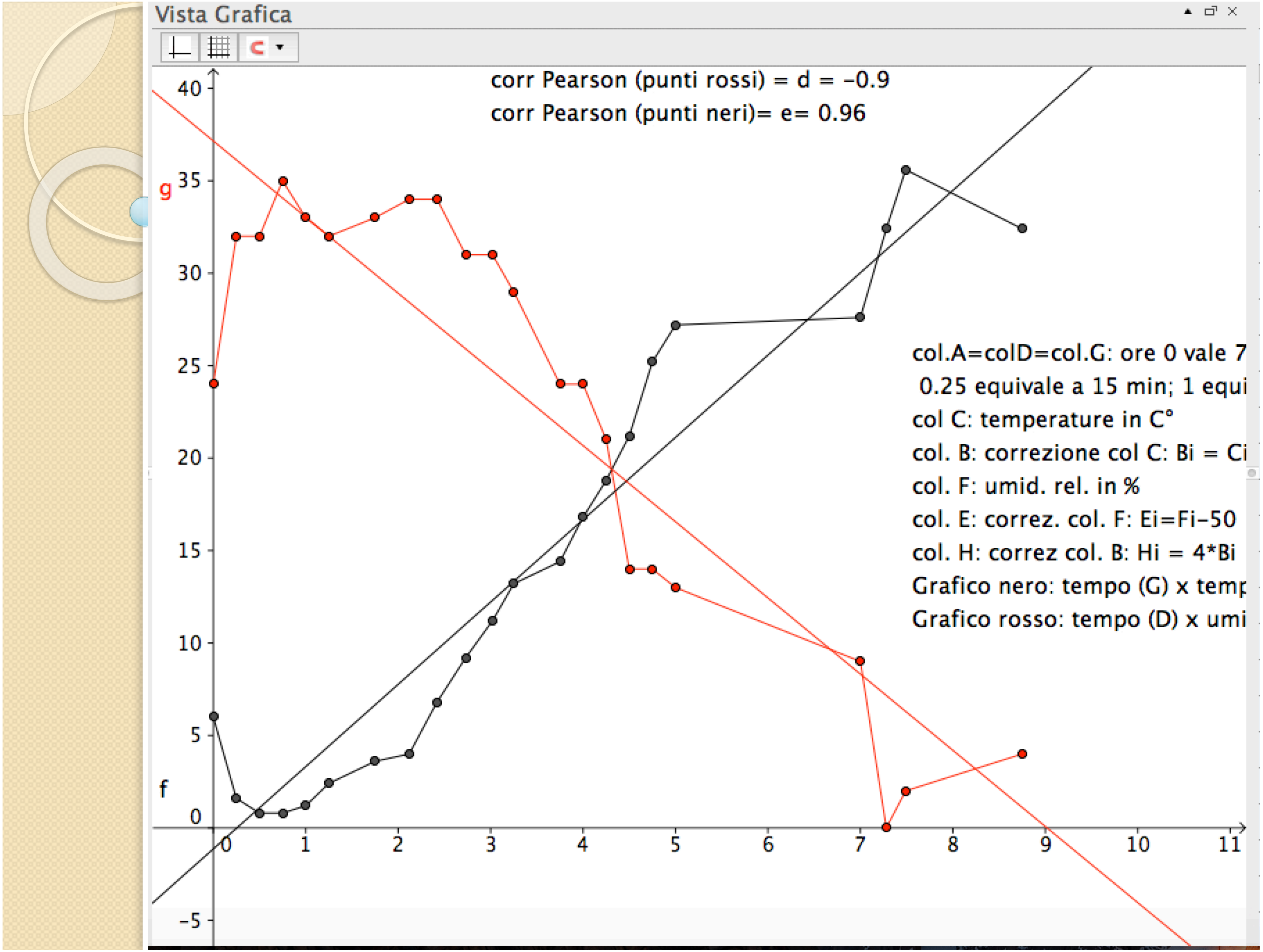

Vista Foglio di calcolo

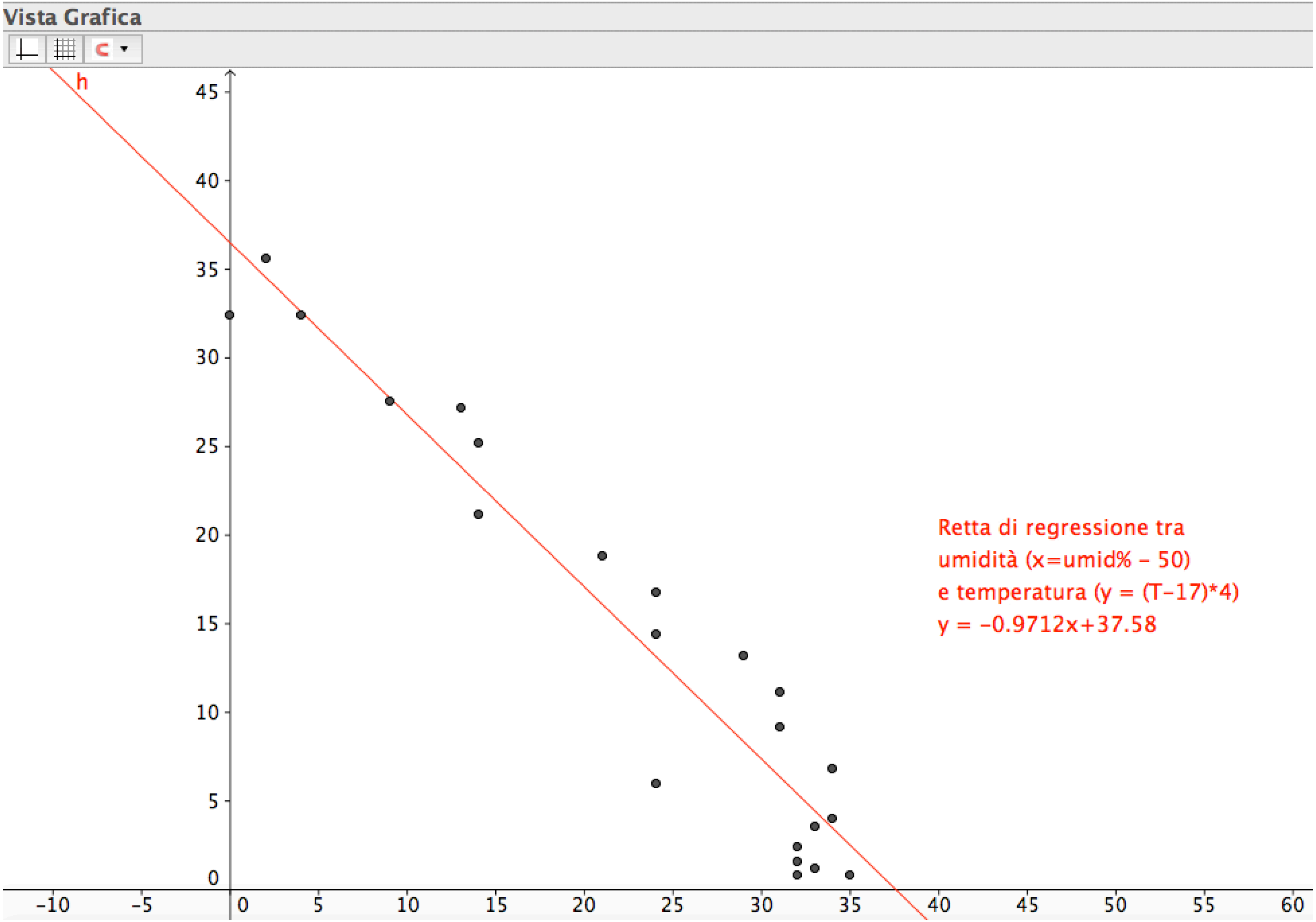
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.5 | 18.5 | 0 | 24 | 74 |
| 2 | 0.25 | 0.4 | 17.4 | 0.25 | 32 | 82 |
| 3 | 0.5 | 0.2 | 17.2 | 0.5 | 32 | 82 |
| 4 | 0.75 | 0.2 | 17.2 | 0.75 | 35 | 85 |
| 5 | 1 | 0.3 | 17.3 | 1 | 33 | 83 |
| 6 | 1.25 | 0.6 | 17.6 | 1.25 | 32 | 82 |
| 7 | 1.75 | 0.9 | 17.9 | 1.75 | 33 | 83 |
| 8 | 2.12 | 1 | 18 | 2.12 | 34 | 84 |
| 9 | 2.42 | 1.7 | 18.7 | 2.42 | 34 | 84 |
| 10 | 2.73 | 2.3 | 19.3 | 2.73 | 31 | 81 |
| 11 | 3.02 | 2.8 | 19.8 | 3.02 | 31 | 81 |
| 12 | 3.25 | 3.3 | 20.3 | 3.25 | 29 | 79 |
| 13 | 3.75 | 3.6 | 20.6 | 3.75 | 24 | 74 |
| 14 | 4 | 4.2 | 21.2 | 4 | 24 | 74 |
| 15 | 4.25 | 4.7 | 21.7 | 4.25 | 21 | 71 |
| 16 | 4.5 | 5.3 | 22.3 | 4.5 | 14 | 64 |
| 17 | 4.75 | 6.3 | 23.3 | 4.75 | 14 | 64 |
| 18 | 5 | 6.8 | 23.8 | 5 | 13 | 63 |
| 19 | 7 | 6.9 | 23.9 | 7 | 9 | 59 |
| 20 | 7.28 | 8.1 | 25.1 | 7.28 | 0 | 50 |
| 21 | 7.49 | 8.9 | 25.9 | 7.49 | 2 | 52 |
| 22 | 8.75 | 8.1 | 25.1 | 8.75 | 4 | 54 |
| 23 | | | | | | |



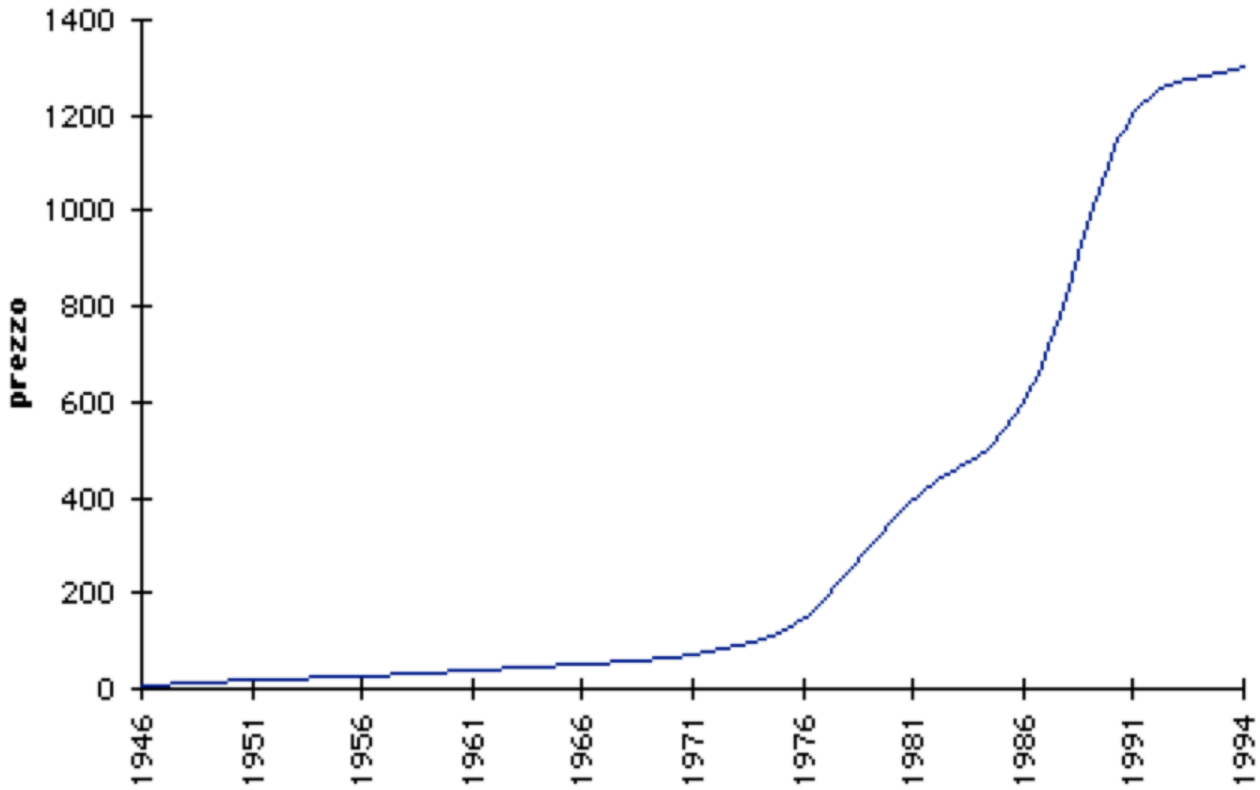

Vista Foglio di calcolo

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.5 | 18.5 |
| 2 | 0.25 | 0.4 | 17.4 |
| 3 | 0.5 | 0.2 | 17.2 |
| 4 | 0.75 | 0.2 | 17.2 |
| 5 | 1 | 0.3 | 17.3 |
| 6 | 1.25 | 0.6 | 17.6 |
| 7 | 1.75 | 0.9 | 17.9 |
| 8 | 2.12 | 1 | 18 |
| 9 | 2.42 | 1.7 | 18.7 |
| 10 | 2.73 | 2.3 | 19.3 |
| 11 | 3.02 | 2.8 | 19.8 |
| 12 | 3.25 | 3.3 | 20.3 |
| 13 | 3.75 | 3.6 | 20.6 |
| 14 | 4 | 4.2 | 21.2 |
| 15 | 4.25 | 4.7 | 21.7 |
| 16 | 4.5 | 5.3 | 22.3 |
| 17 | 4.75 | 6.3 | 23.3 |
| 18 | 5 | 6.8 | 23.8 |
| 19 | 7 | 6.9 | 23.9 |
| 20 | 7.28 | 8.1 | 25.1 |
| 21 | 7.49 | 8.9 | 25.9 |
| 22 | 8.75 | 8.1 | 25.1 |
| 23 | | | |

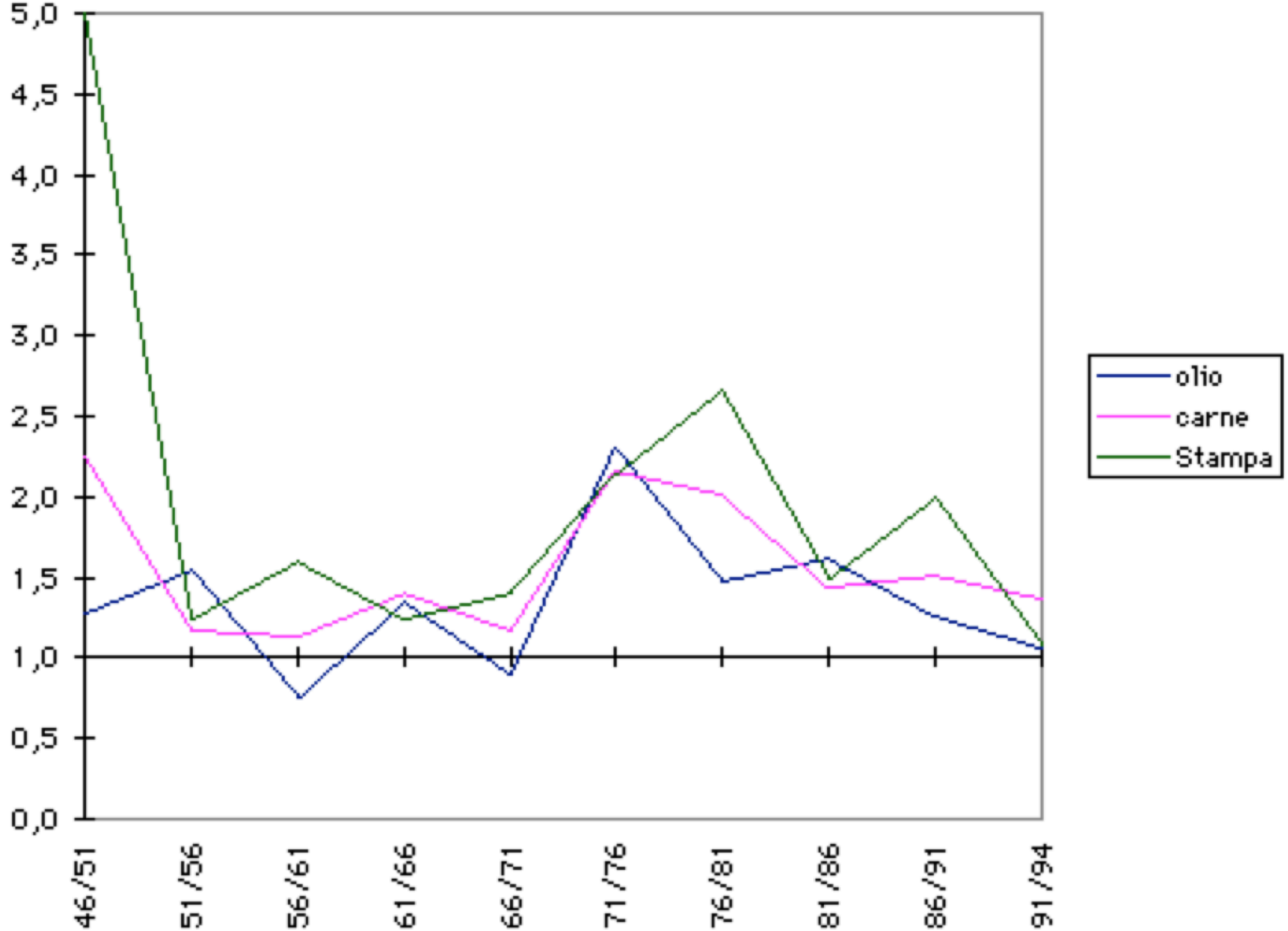

Vista Grafica
corr Pearson (punti rossi) = d = -0.9
corr Pearson (punti neri)= e= 0.96
col.A=colD=col.G: ore 0 vale 7
0.25 equivale a 15 min; 1 equi
col C: temperature in C°
col. B: correzione col C: Bi = Ci
col. F: umid. rel. in %
col. E: correz. col. F: Ei=Fi-50
col. H: correz col. B: Hi = 4*Bi
Grafico nero: tempo (G) x temp
Grafico rosso: tempo (D) x umi
g
f
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


Vista Grafica
h
Retta di regressione tra
umidità (x=umid% – 50)
e temperatura (y = (T–17)*4)
y = –0.9712x+37.58

# Attività 7. Il valore del denaro nel tempo




| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | +16 | | 5 | | 15 | | 10 | | 20 | | 80 | | 250 | | 200 | | 600 | | 100 | |
| 4 | | 20 | | 25 | | 40 | | 50 | | 70 | | 150 | | 400 | | 600 | | 120<br>0 | | 130<br>0 |
| | x 5 | | 1,25 | | 1,6 | | 1,25 | | 1,4 | | 2,14 | | 2,66 | | 1,5 | | 2 | | 1,08 | |



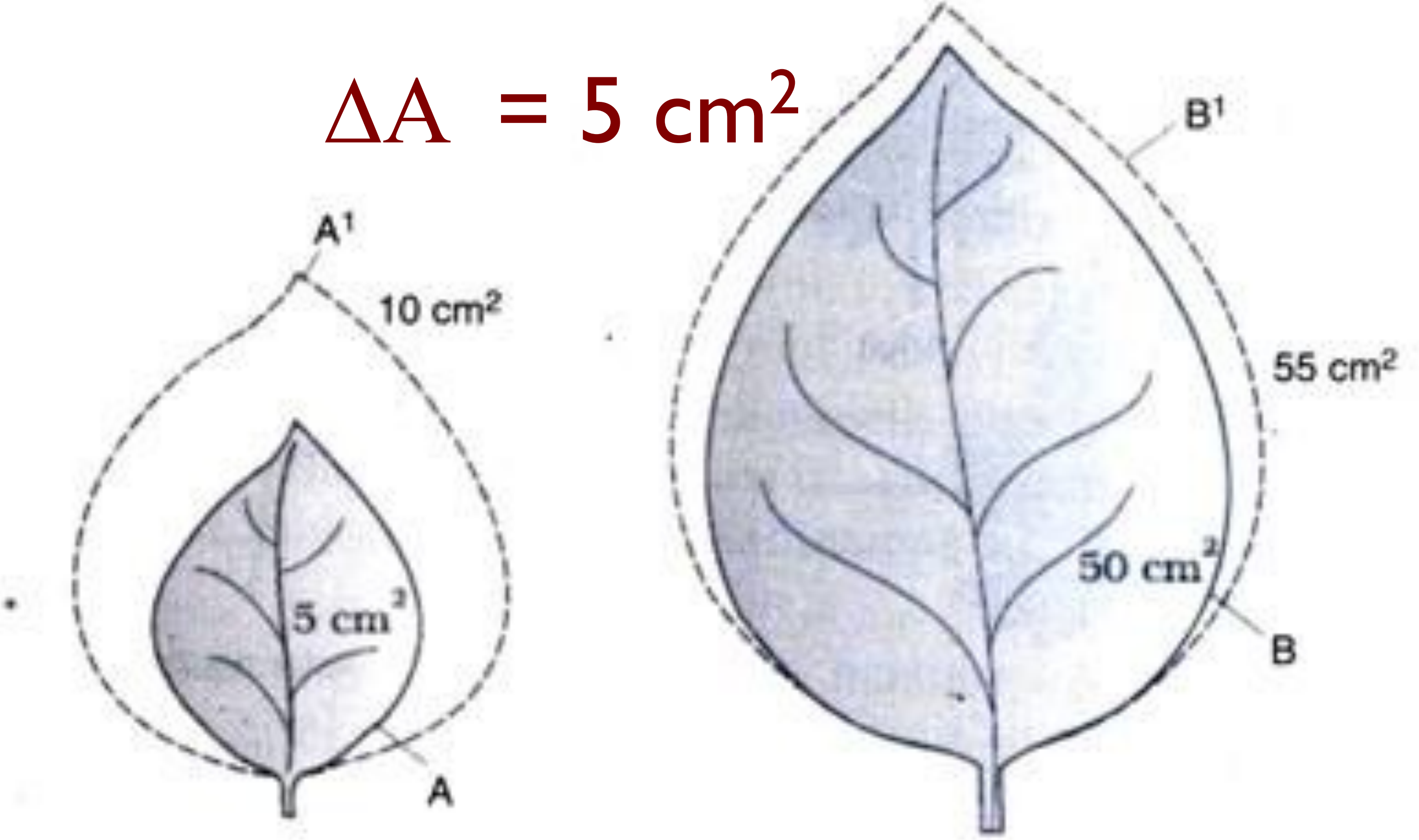
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
46/51
51/56
56/61
61/66
66/71
71/76
76/81
81/86
86/91
91/94
olio
carne
Stampa

# Sommario

- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie:
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

# Un'idea più fine del cambiamento

$\Delta A = 5\ cm^2$

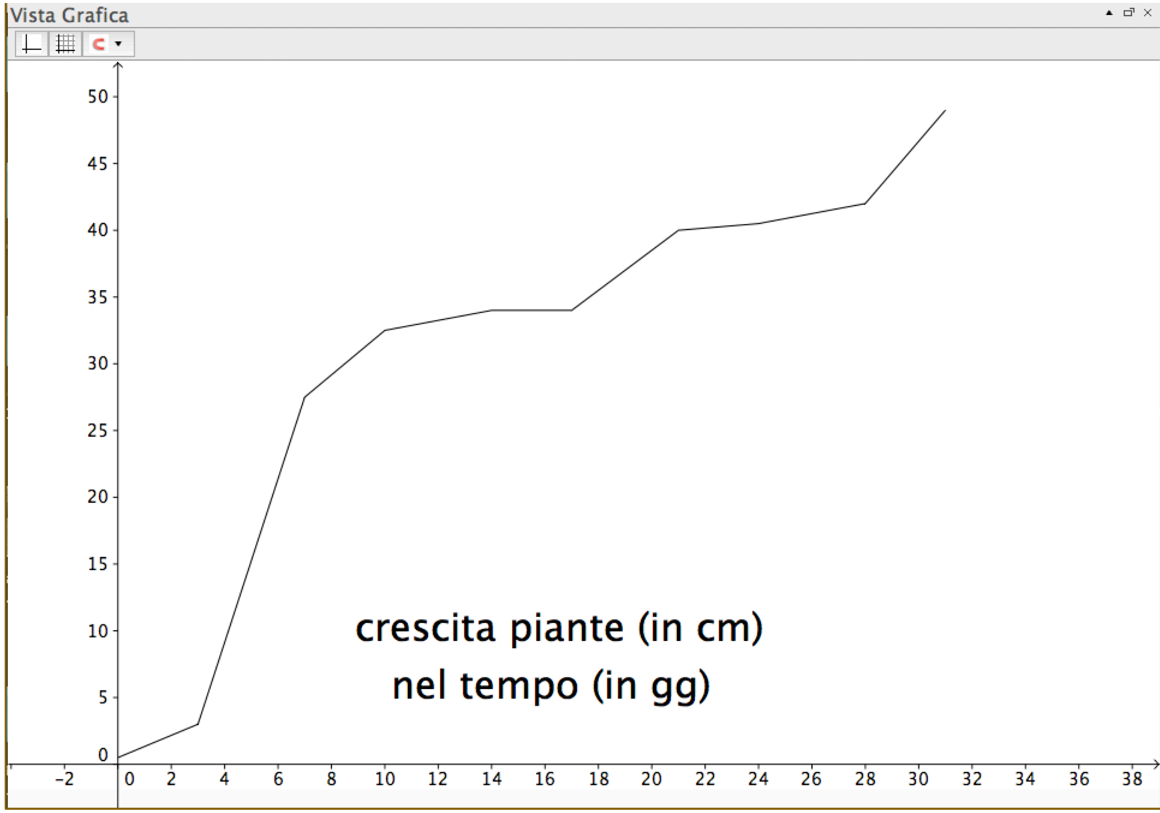



Il cambiamento relativo $\Delta_r A = \Delta A / A$

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 5\ cm^2$ 100%

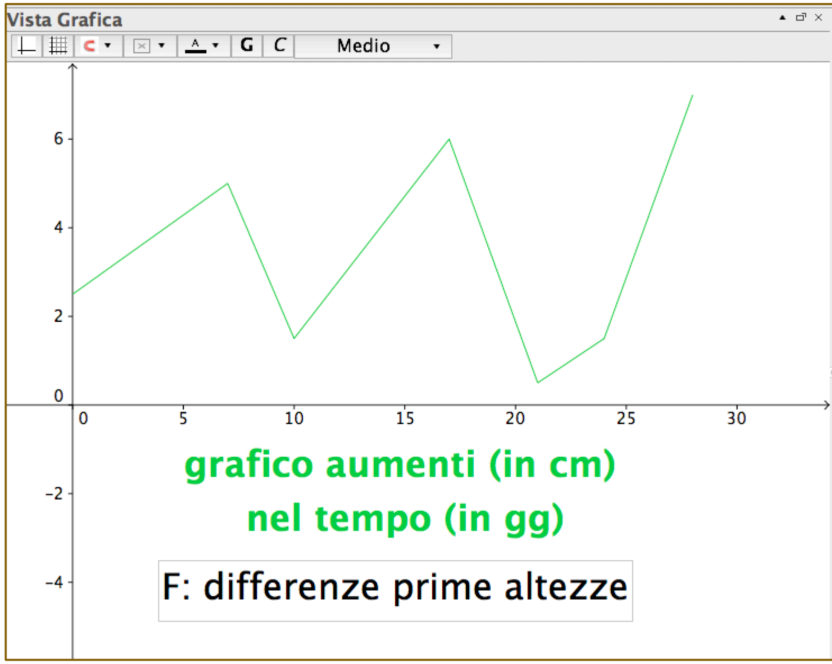
$\Delta_r = 5\ cm^2 / 50\ cm^2$ 10%

# Crescita fagioli



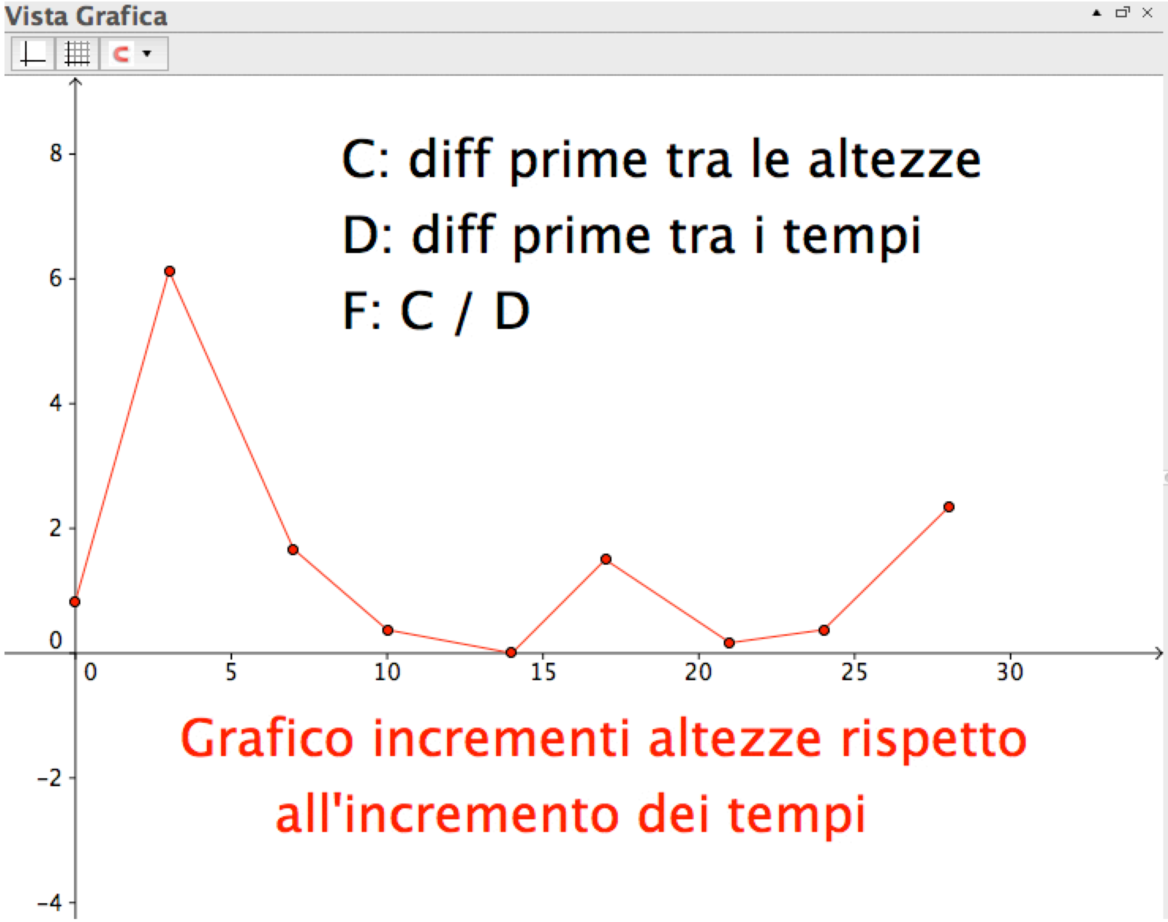

Vista Foglio di calcolo

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 27.5 |
| 4 | 10 | 32.5 |
| 5 | 14 | 34 |
| 6 | 17 | 34 |
| 7 | 21 | 40 |
| 8 | 24 | 40.5 |
| 9 | 28 | 42 |
| 10 | 31 | 49 |




Vista Foglio di calcolo

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 | 2.5 | 3 | 0 | 2.5 |
| 2 | 3 | 3 | 24.5 | 4 | 3 | 24.5 |
| 3 | 7 | 27.5 | 5 | 3 | 7 | 5 |
| 4 | 10 | 32.5 | 1.5 | 4 | 10 | 1.5 |
| 5 | 14 | 34 | 0 | 3 | 14 | 0 |
| 6 | 17 | 34 | 6 | 4 | 17 | 6 |
| 7 | 21 | 40 | 0.5 | 3 | 21 | 0.5 |
| 8 | 24 | 40.5 | 1.5 | 4 | 24 | 1.5 |
| 9 | 28 | 42 | 7 | 3 | 28 | 7 |
| 10 | 31 | 49 | | | | |
| 11 | | 0 | | | | |

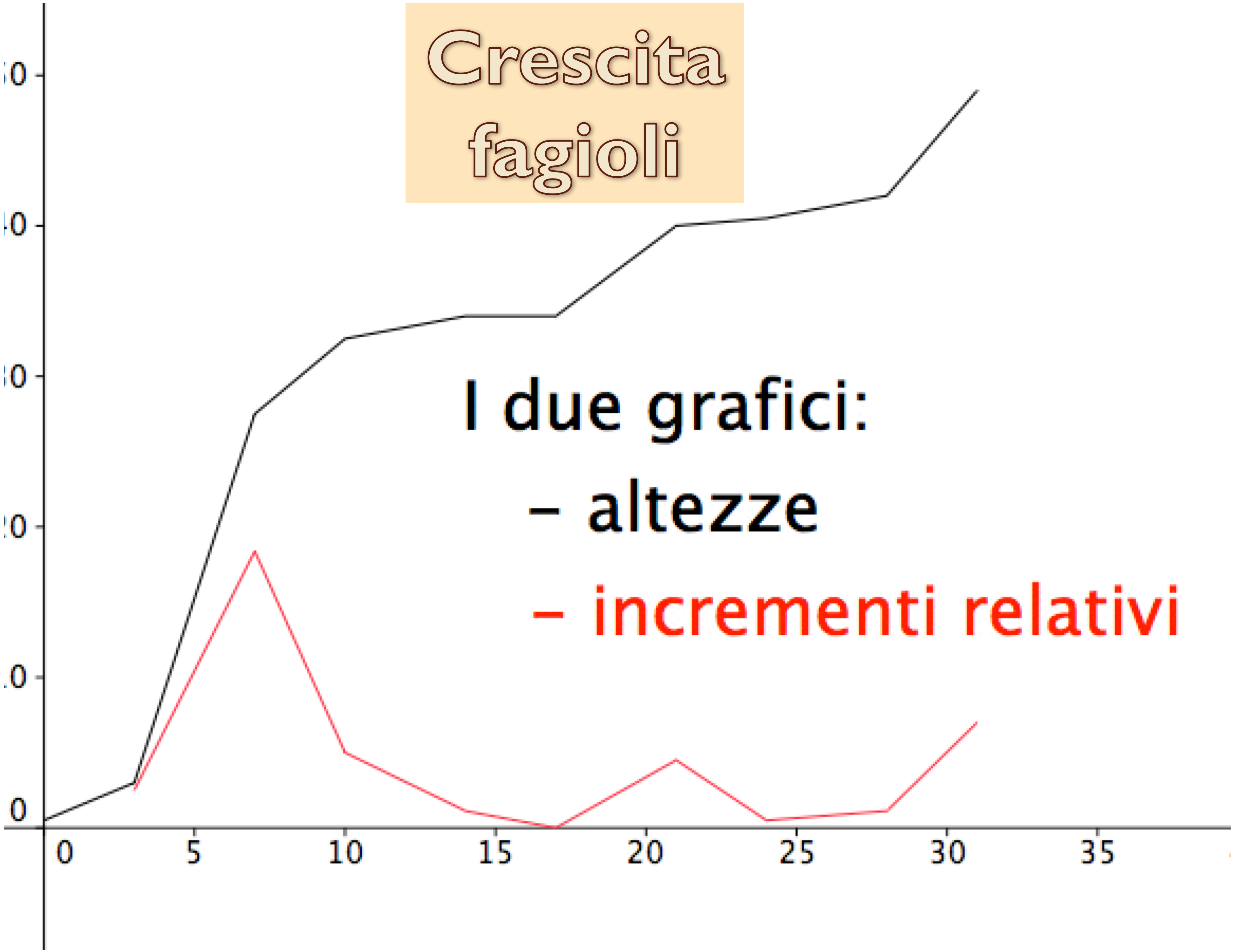



Vista Foglio di calcolo

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 | 2.5 | 3 | 0 | 0.83 |
| 2 | 3 | 3 | 24.5 | 4 | 3 | 6.13 |
| 3 | 7 | 27.5 | 5 | 3 | 7 | 1.67 |
| 4 | 10 | 32.5 | 1.5 | 4 | 10 | 0.38 |
| 5 | 14 | 34 | 0 | 3 | 14 | 0 |
| 6 | 17 | 34 | 6 | 4 | 17 | 1.5 |
| 7 | 21 | 40 | 0.5 | 3 | 21 | 0.17 |
| 8 | 24 | 40.5 | 1.5 | 4 | 24 | 0.38 |
| 9 | 28 | 42 | 7 | 3 | 28 | 2.33 |
| 10 | 31 | 49 | | | | |
| 11 | | 0 | | | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | | | | |
| 16 | | | | | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | | | | | |
| 20 | | | | | | |

# Crescita fagioli

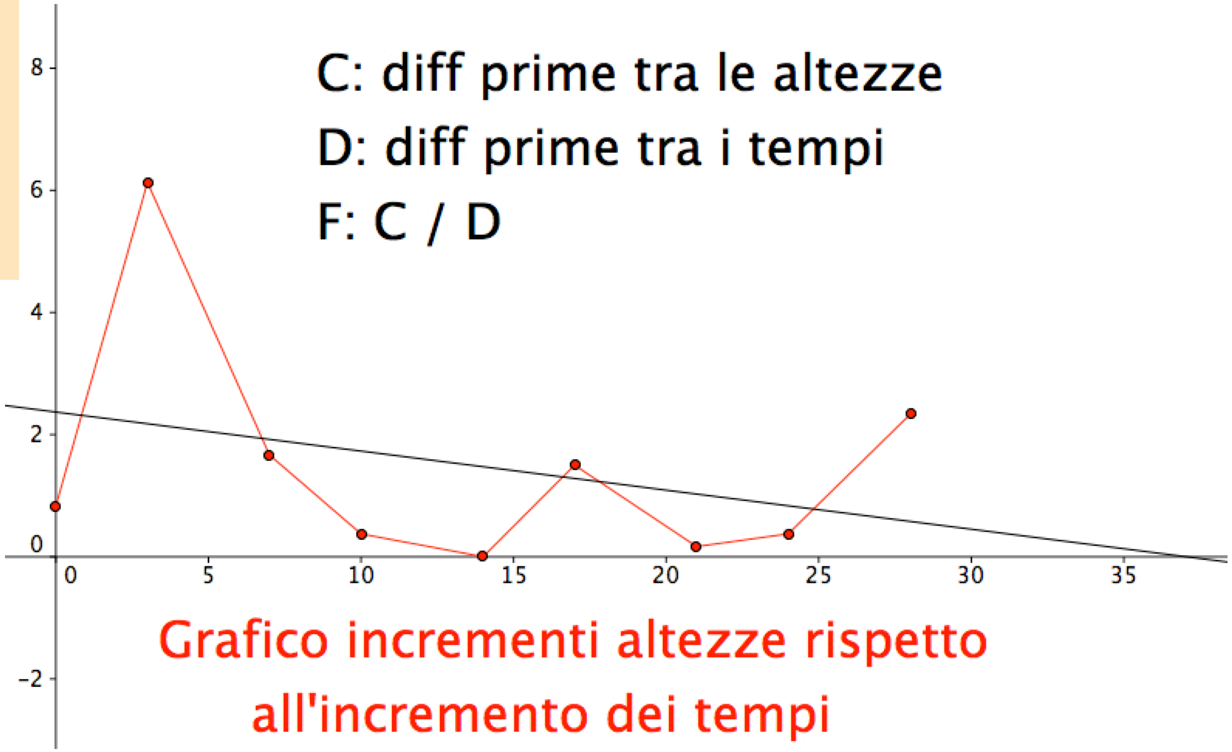
# Crescita fagioli




I due grafici:

- altezze
- incrementi relativi

# Crescita fagioli



C: diff prime tra le altezze

D: diff prime tra i tempi

F: C / D

Grafico incrementi altezze rispetto all'incremento dei tempi

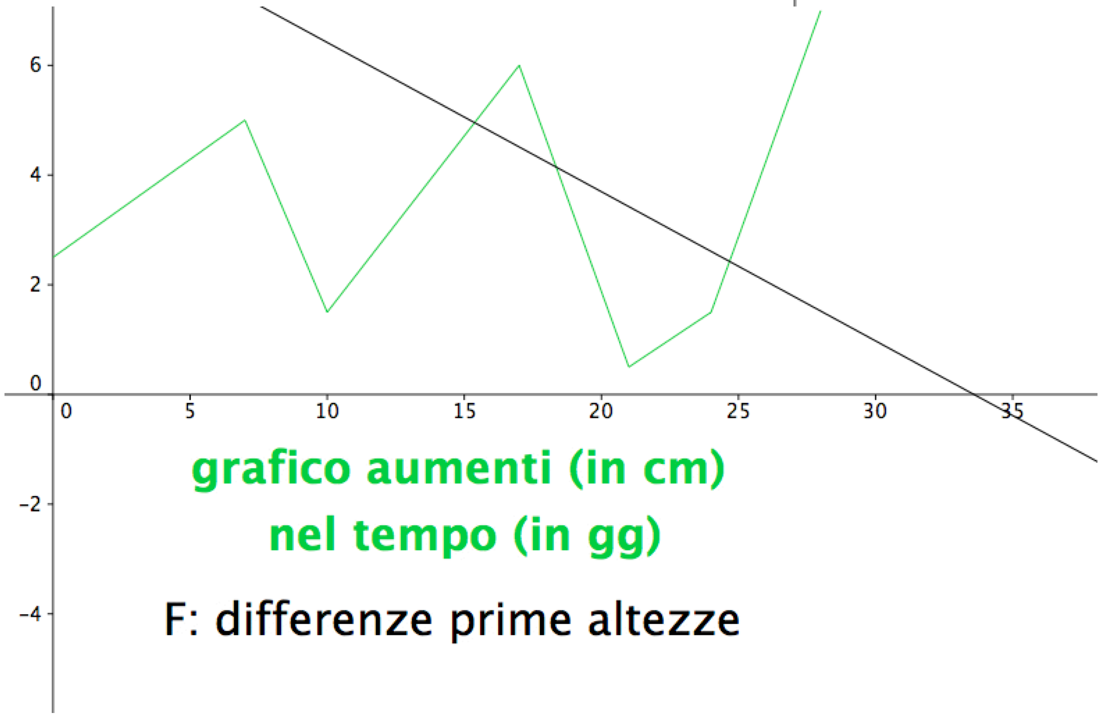
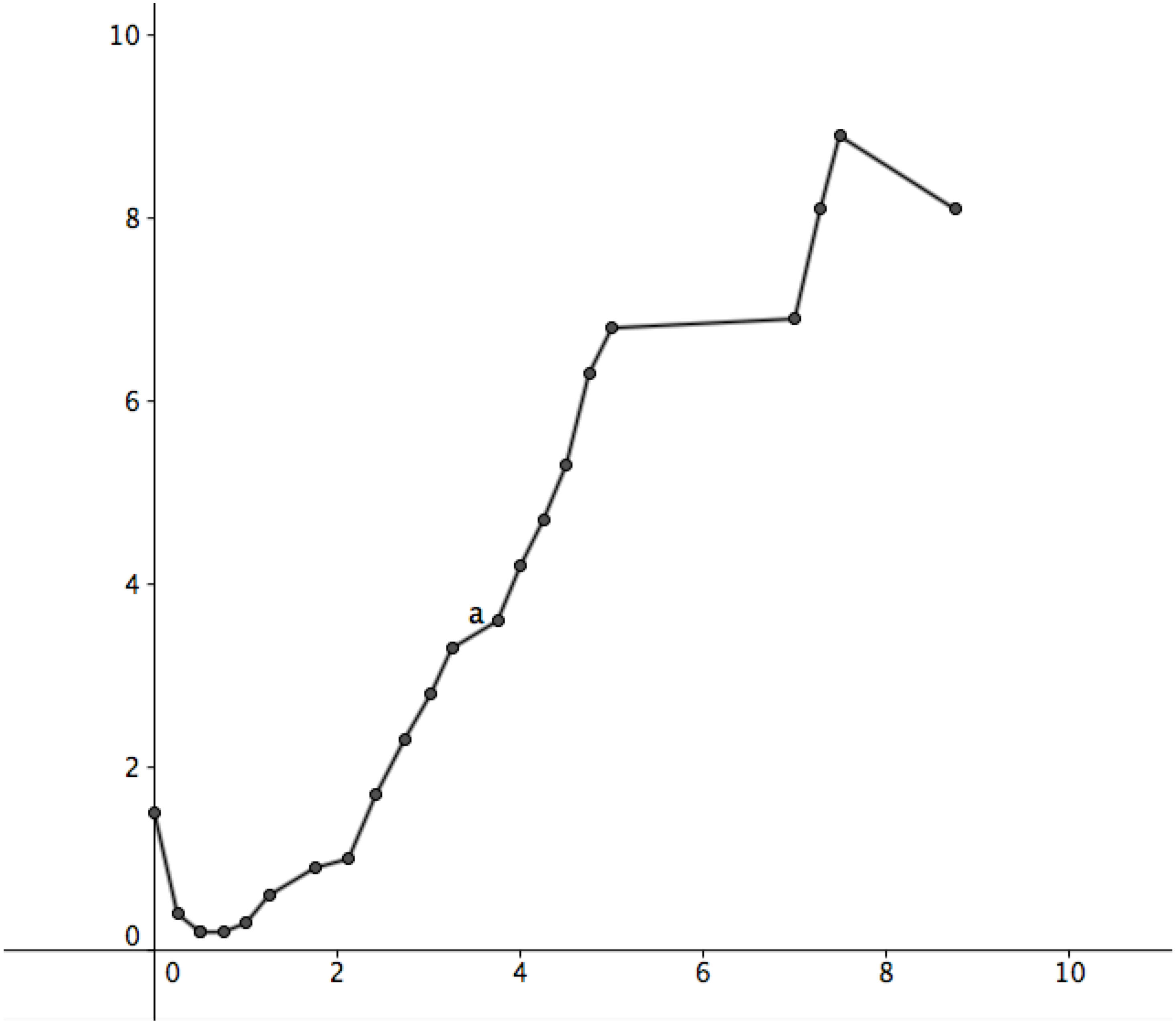


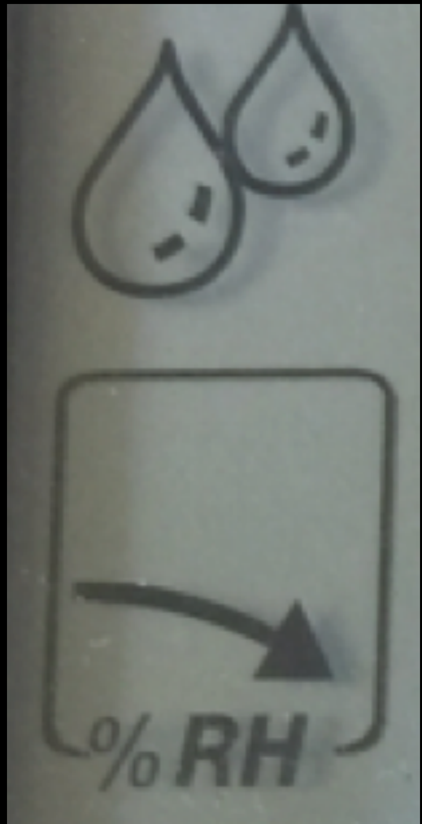
grafico aumenti (in cm) nel tempo (in gg)

F: differenze prime altezze

# Rette di regressione

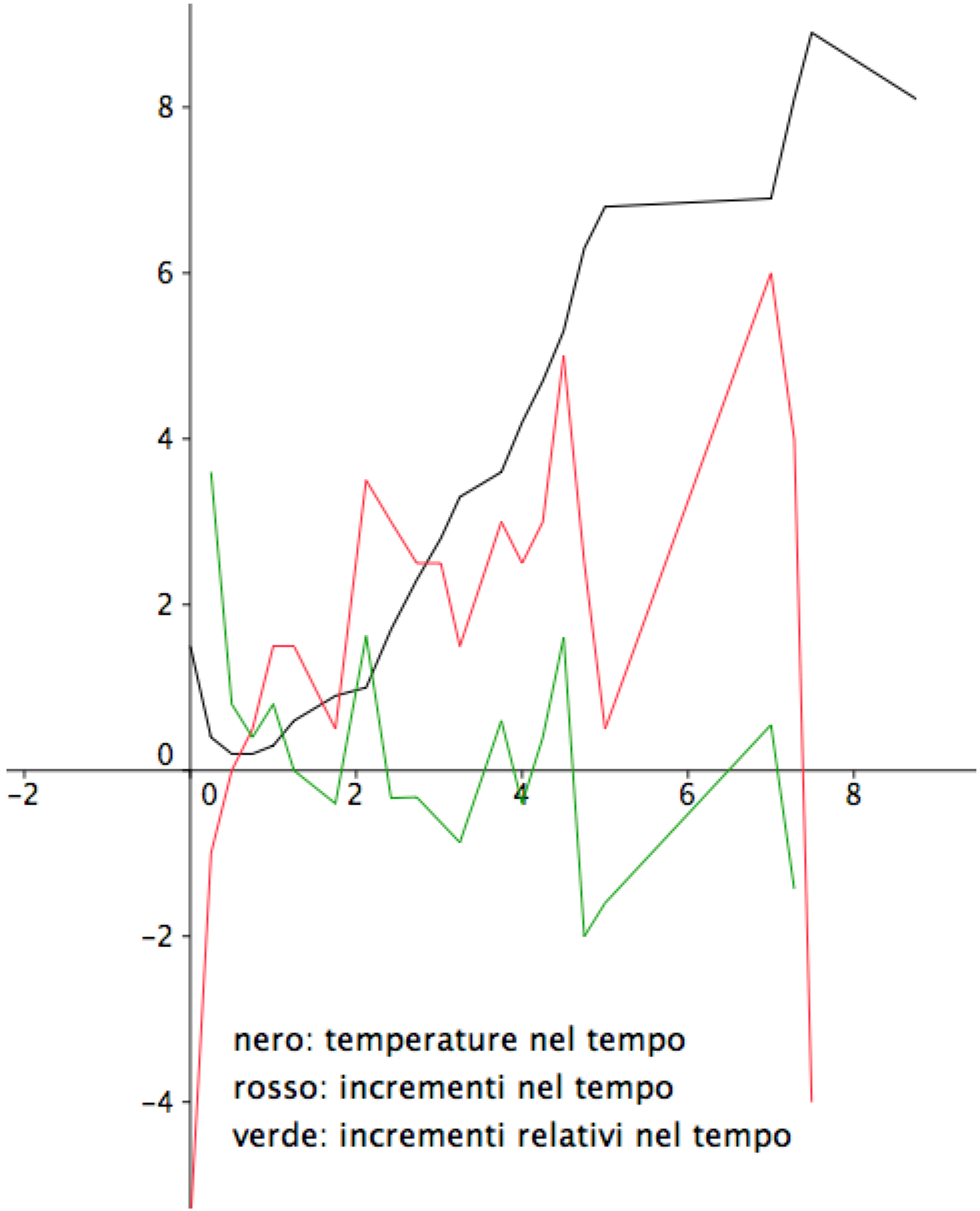
# Temperature





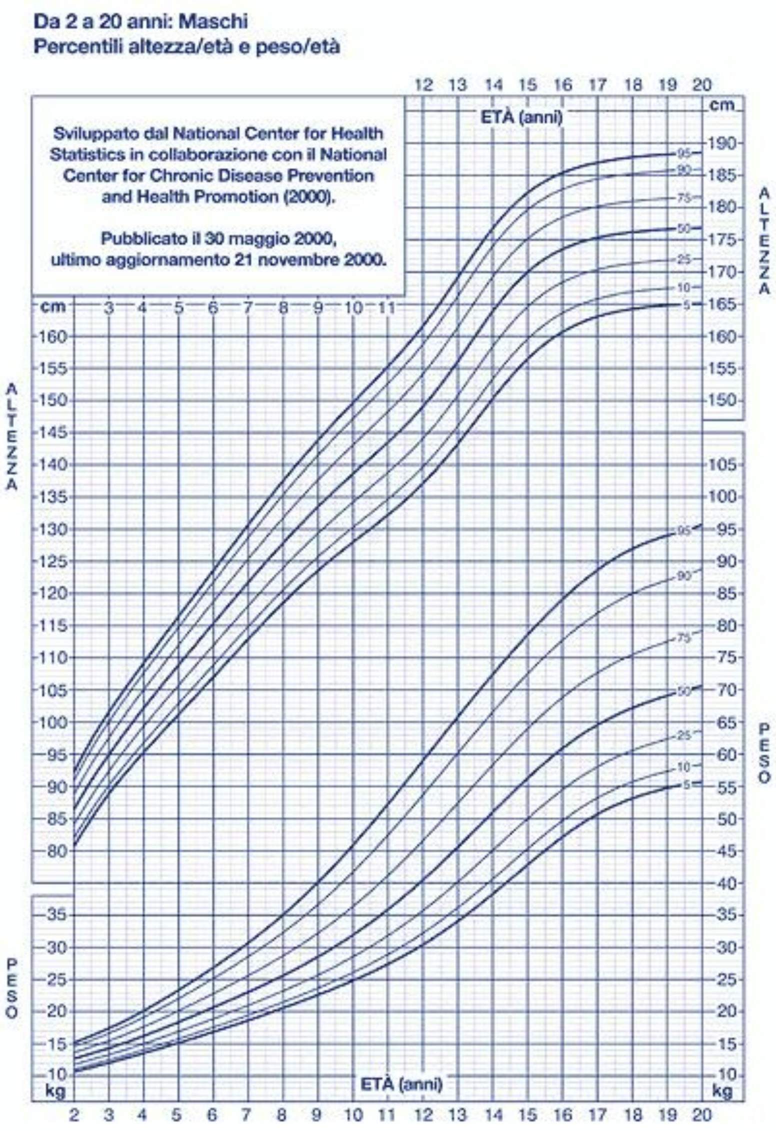
# Che cosa rappresentano le frecce?

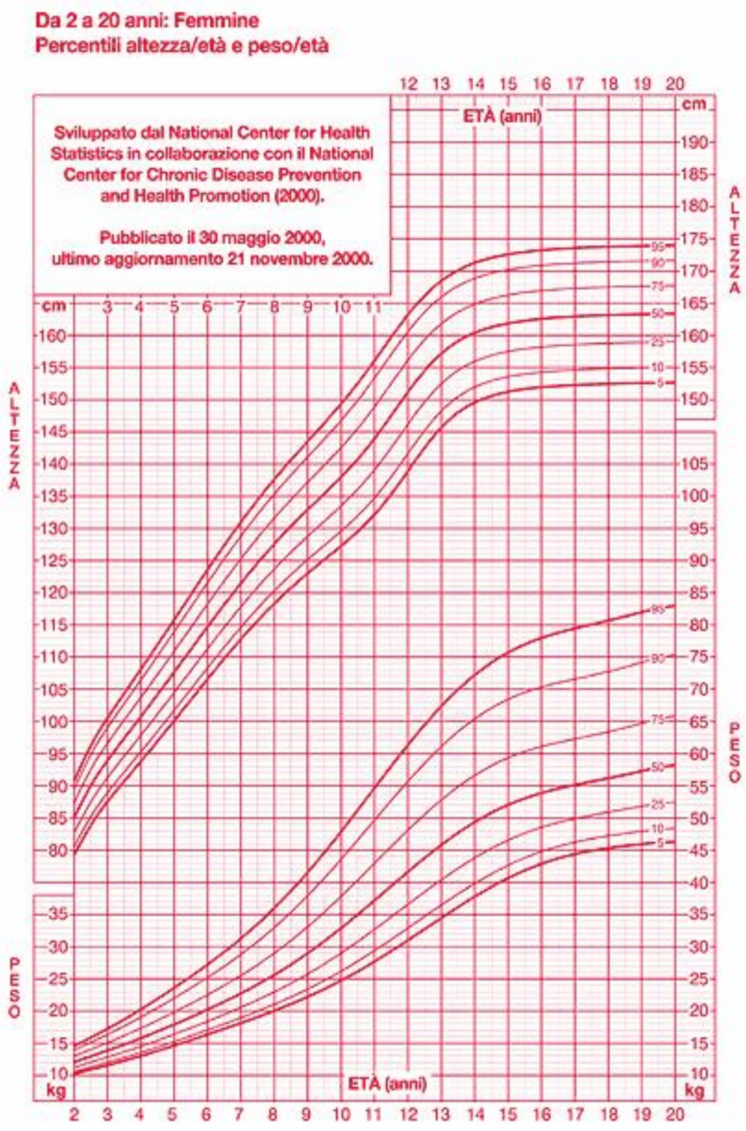


8
6
4
2
0
−2
−4
−2
0
2
4
6
8
nero: temperature nel tempo
rosso: incrementi nel tempo
verde: incrementi relativi nel tempo

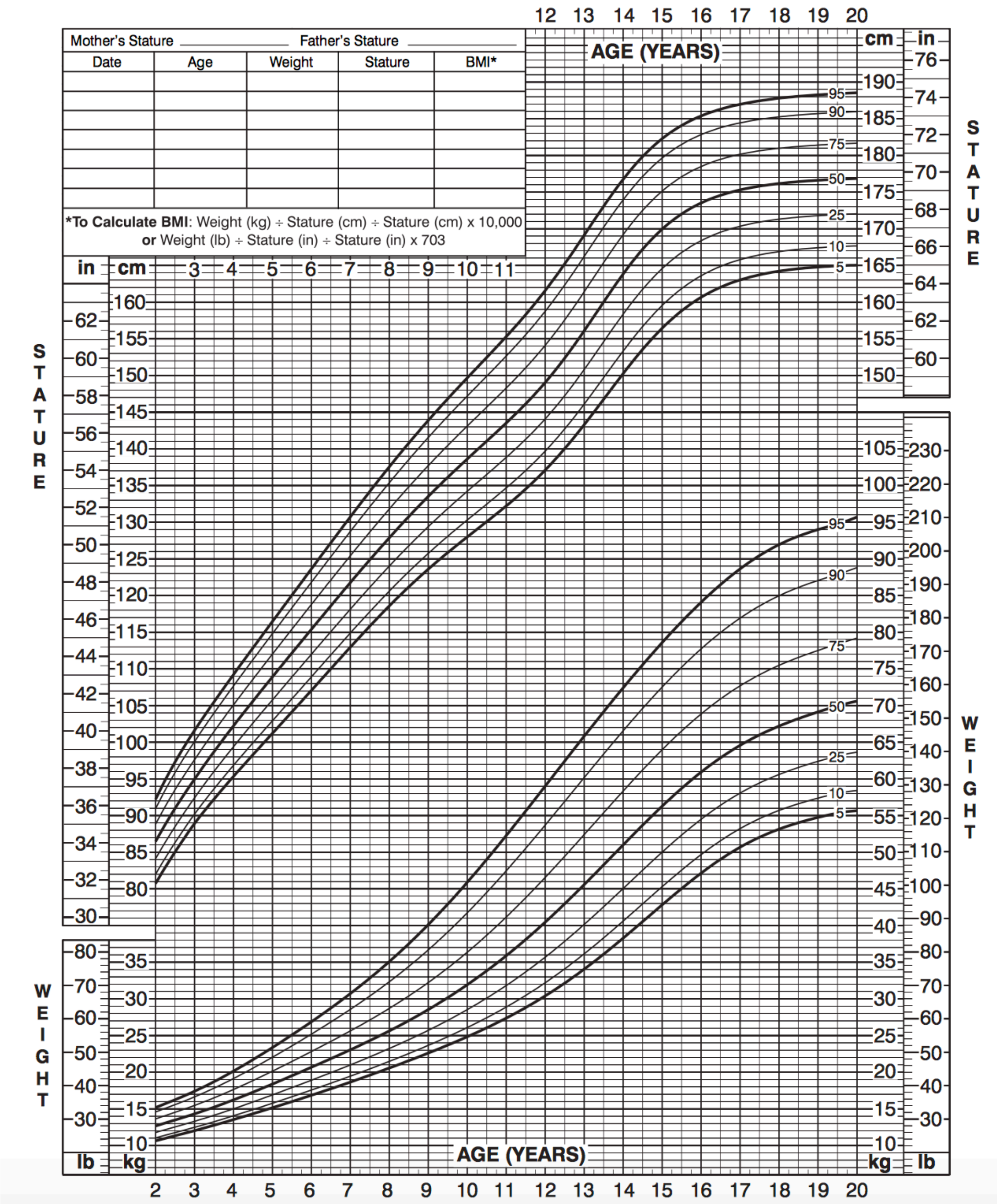
# Altri fenomeni di crescita

# Crescita media ragazze/i

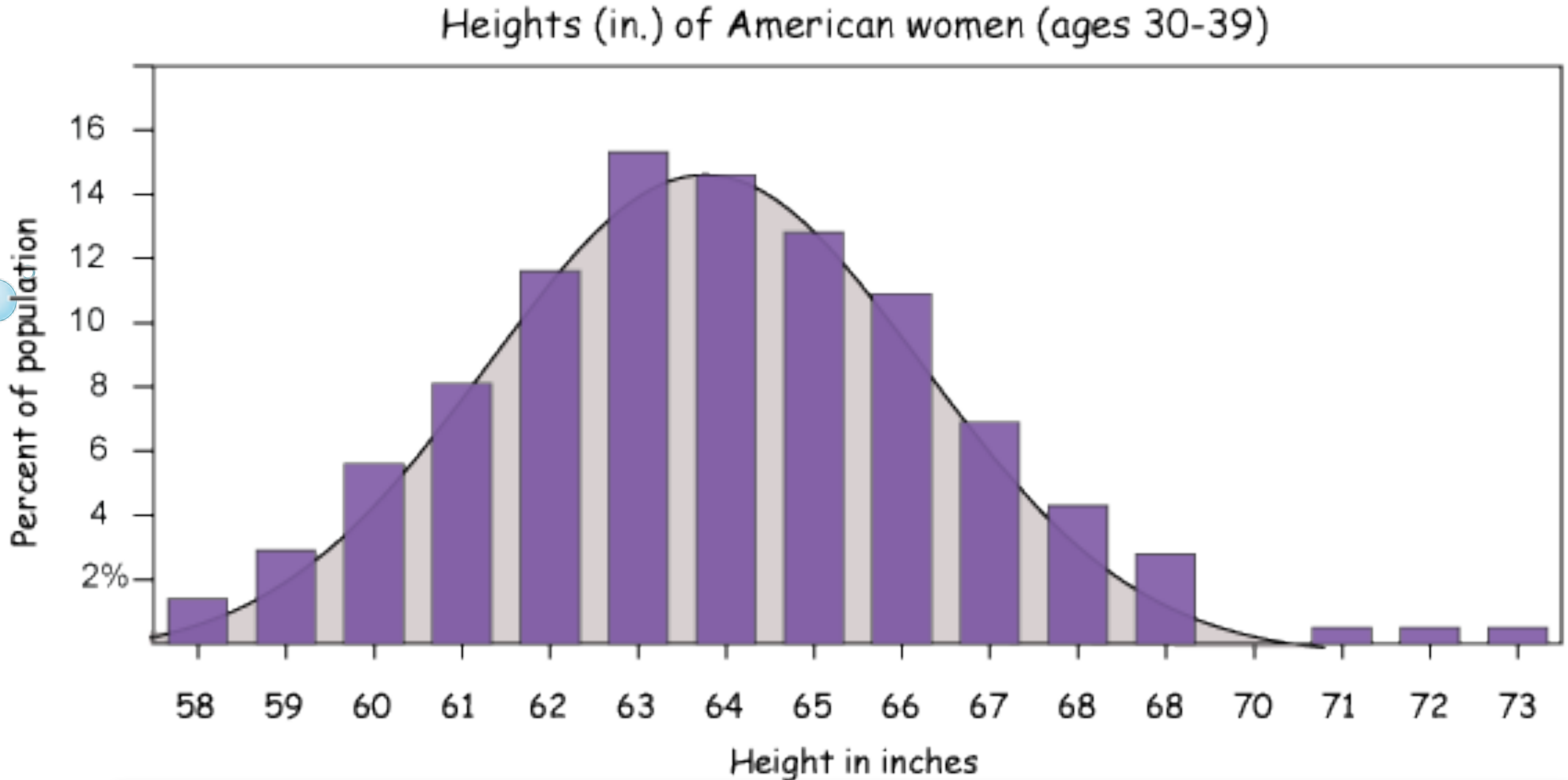


# Ragazzi

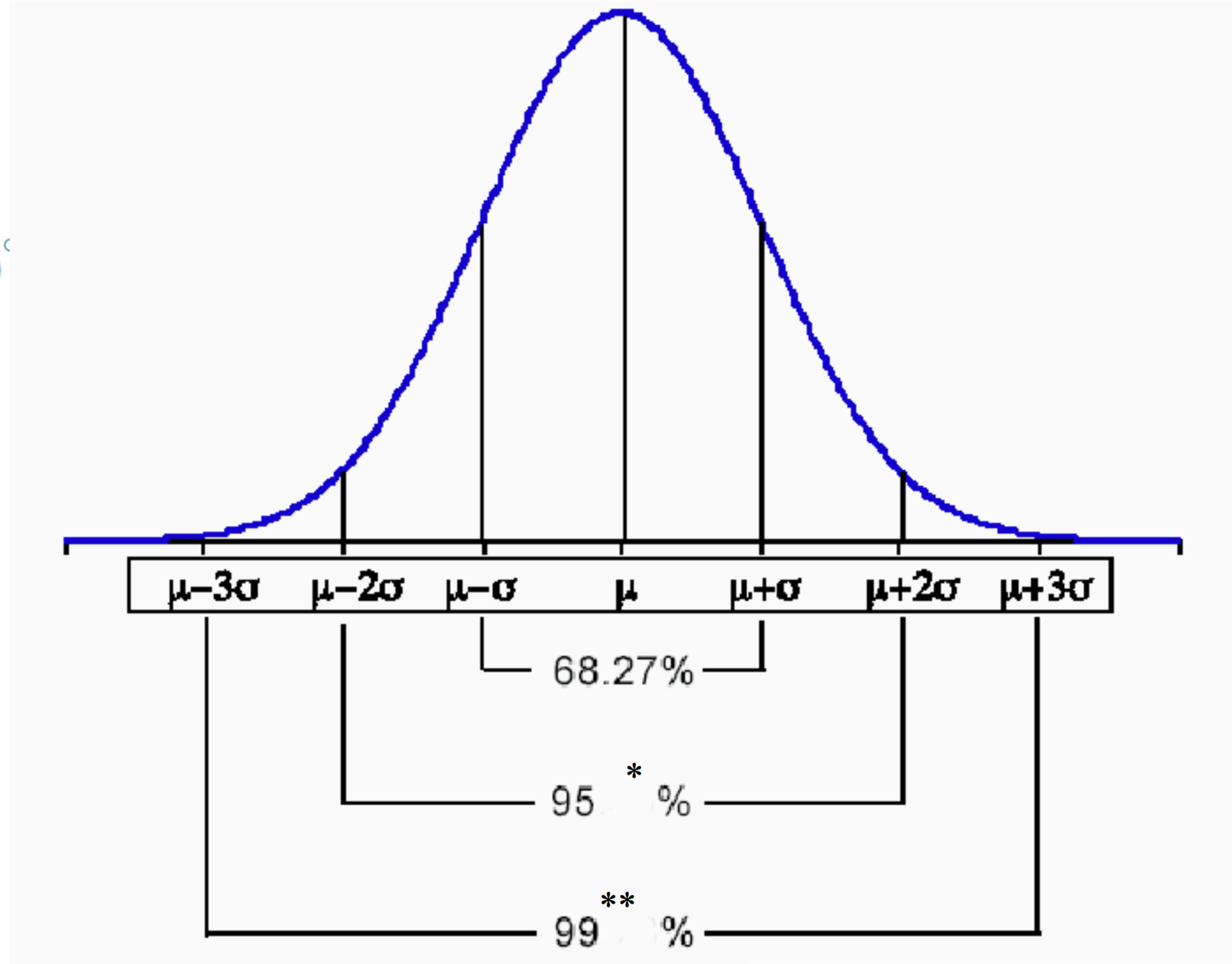

Mother's Stature
Father's Stature
Date
Age
Weight
Stature
BMI*
*To Calculate BMI: Weight (kg) ÷ Stature (cm) ÷ Stature (cm) x 10,000
or Weight (lb) ÷ Stature (in) ÷ Stature (in) x 703
AGE (YEARS)
STATURE
WEIGHT
in
cm
kg
lb

CDC




147 152 157 160 167 173 185

Altezza in cm

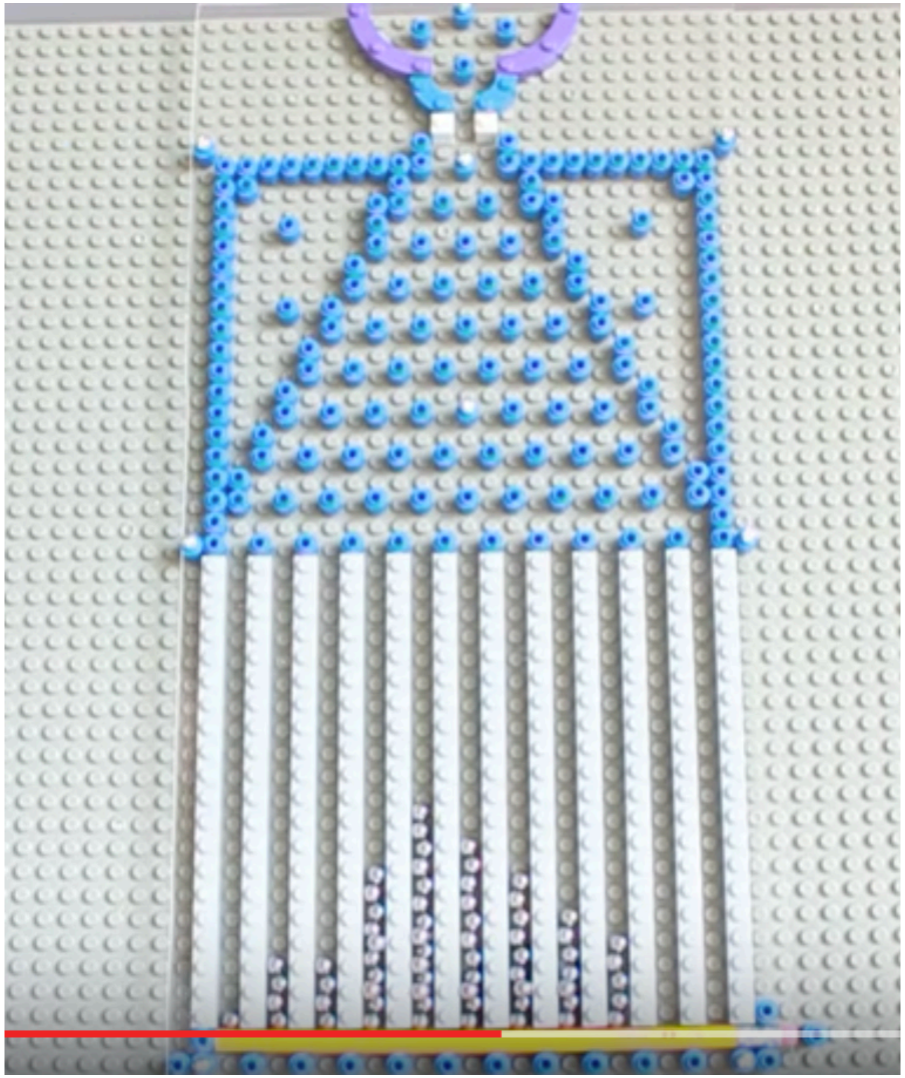



$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}},$$

μ indica la media aritmetica dei valori

dove $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ è la media aritmetica di $X$.

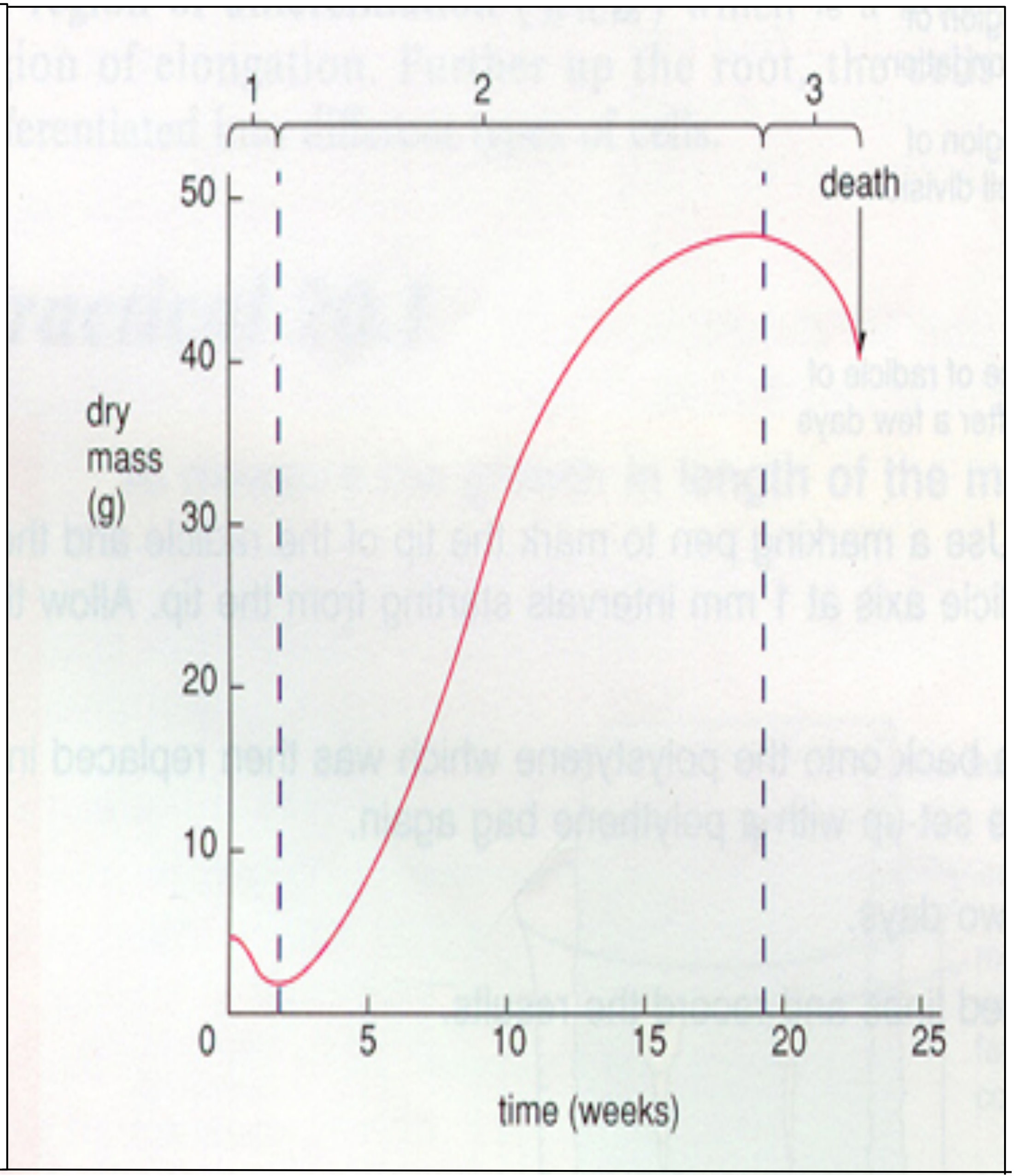
# Macchina di Galton

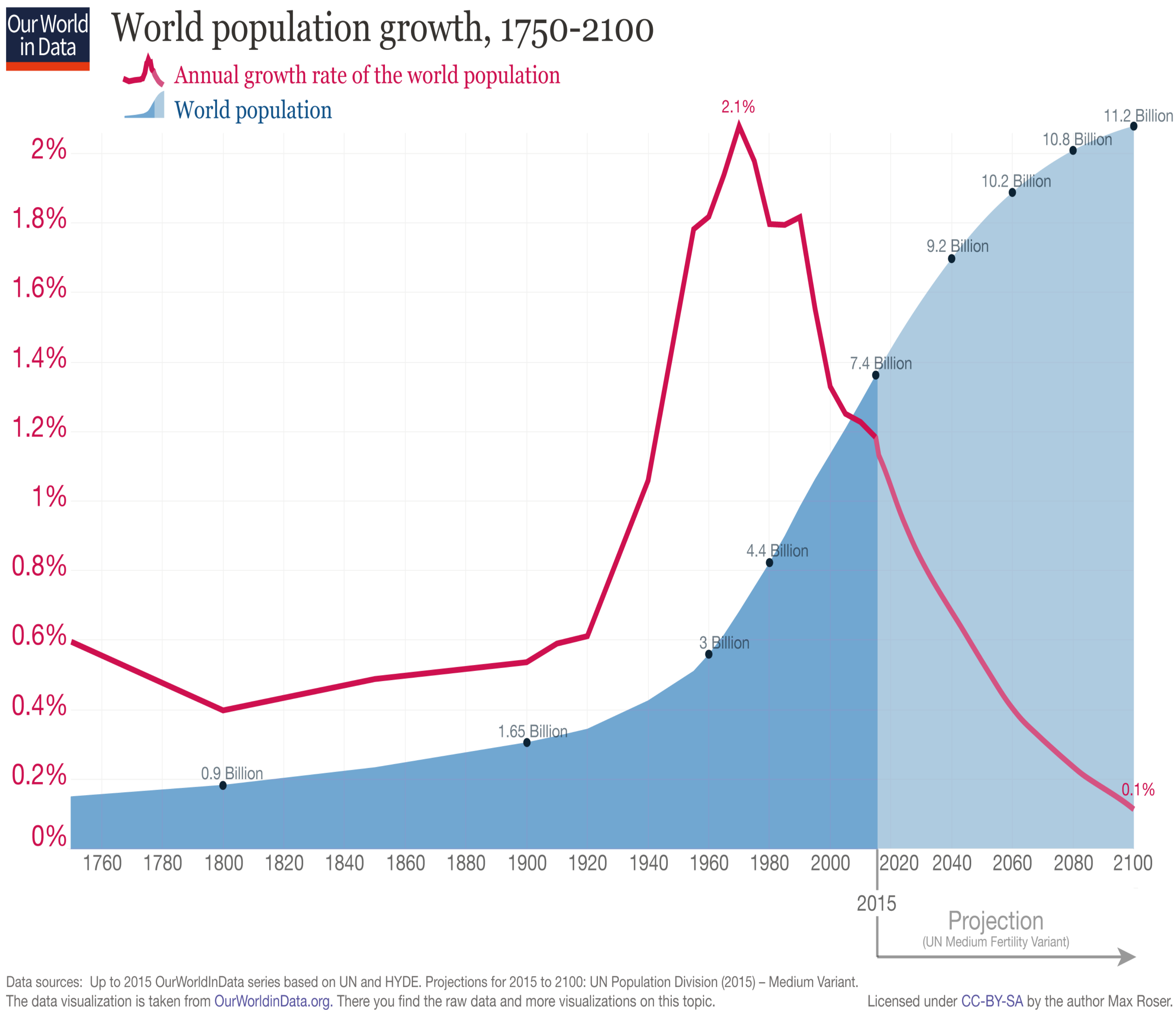


# La curva della crescita delle piante

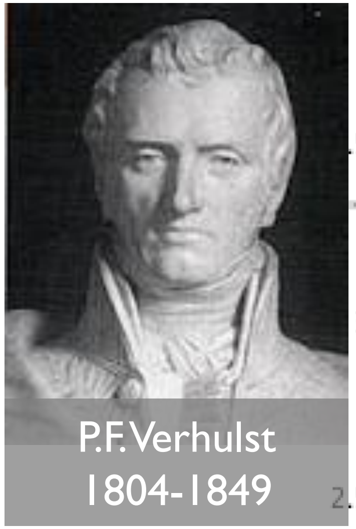
Le tre fasi nella crescita delle piante annuali:

1. La massa secca diminuisce durante la fase iniziale della germinazione perché la pianta consuma le riserve alimentari del seme
2. La massa cresce decisamente perché le foglie producono l'alimentazione necessaria con la fotosintesi
3. La massa decresce per la produzione dei semi o dei frutti

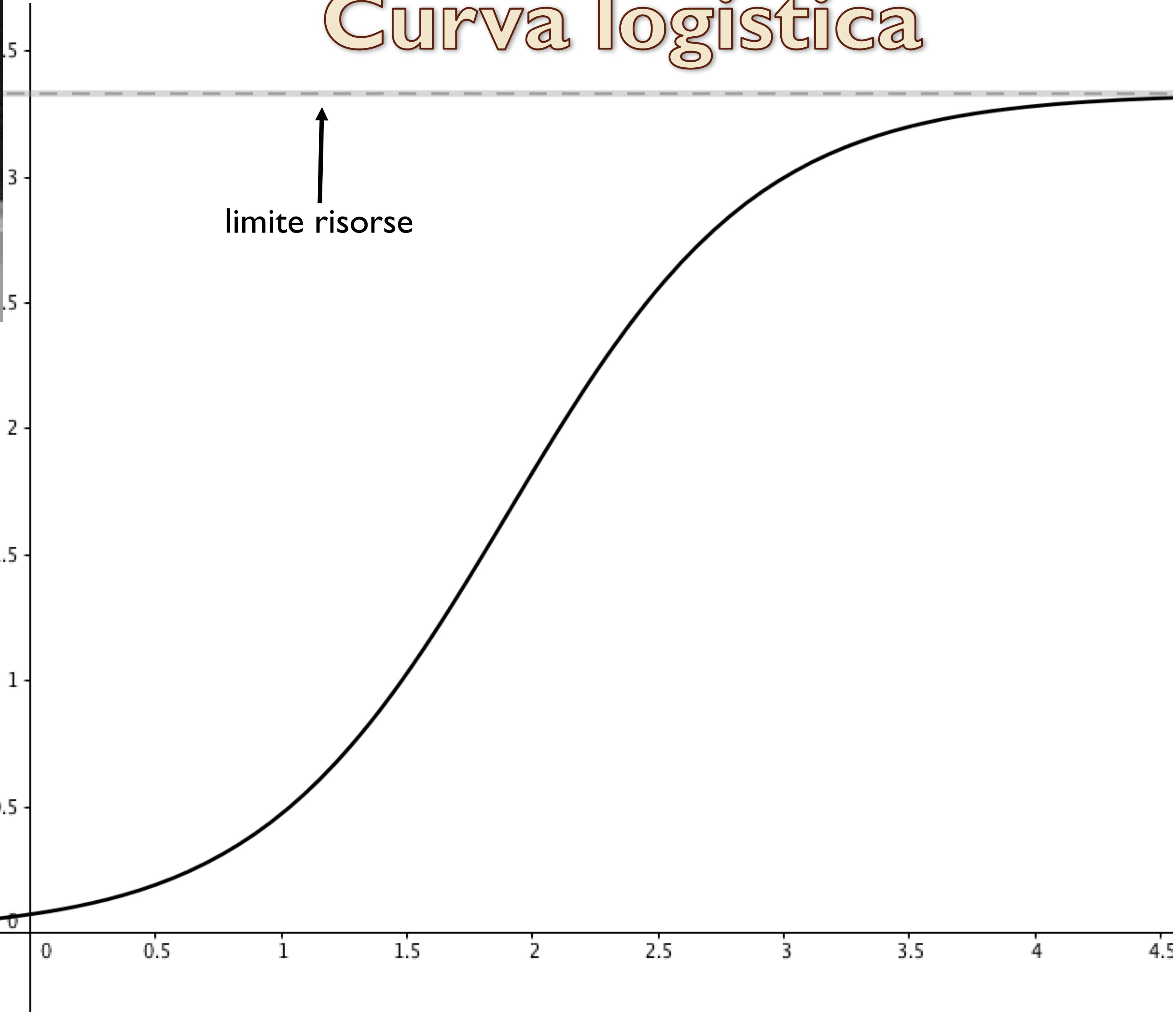


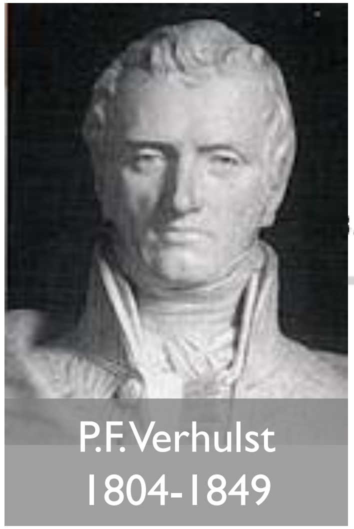

Our World in Data
World population growth, 1750-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2.1%
11.2 Billion
10.8 Billion
10.2 Billion
9.2 Billion
7.4 Billion
4.4 Billion
3 Billion
1.65 Billion
0.9 Billion
0.1%
2%
1.8%
1.6%
1.4%
1.2%
1%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0%
1760 1780 1800 1820 1840 1860 1880 1900 1920 1940 1960 1980 2000 2020 2040 2060 2080 2100
2015
Projection
(UN Medium Fertility Variant)
Data sources: Up to 2015 OurWorldInData series based on UN and HYDE. Projections for 2015 to 2100: UN Population Division (2015) – Medium Variant.
The data visualization is taken from OurWorldinData.org. There you find the raw data and more visualizations on this topic.
Licensed under CC-BY-SA by the author Max Roser.

# Curva logistica

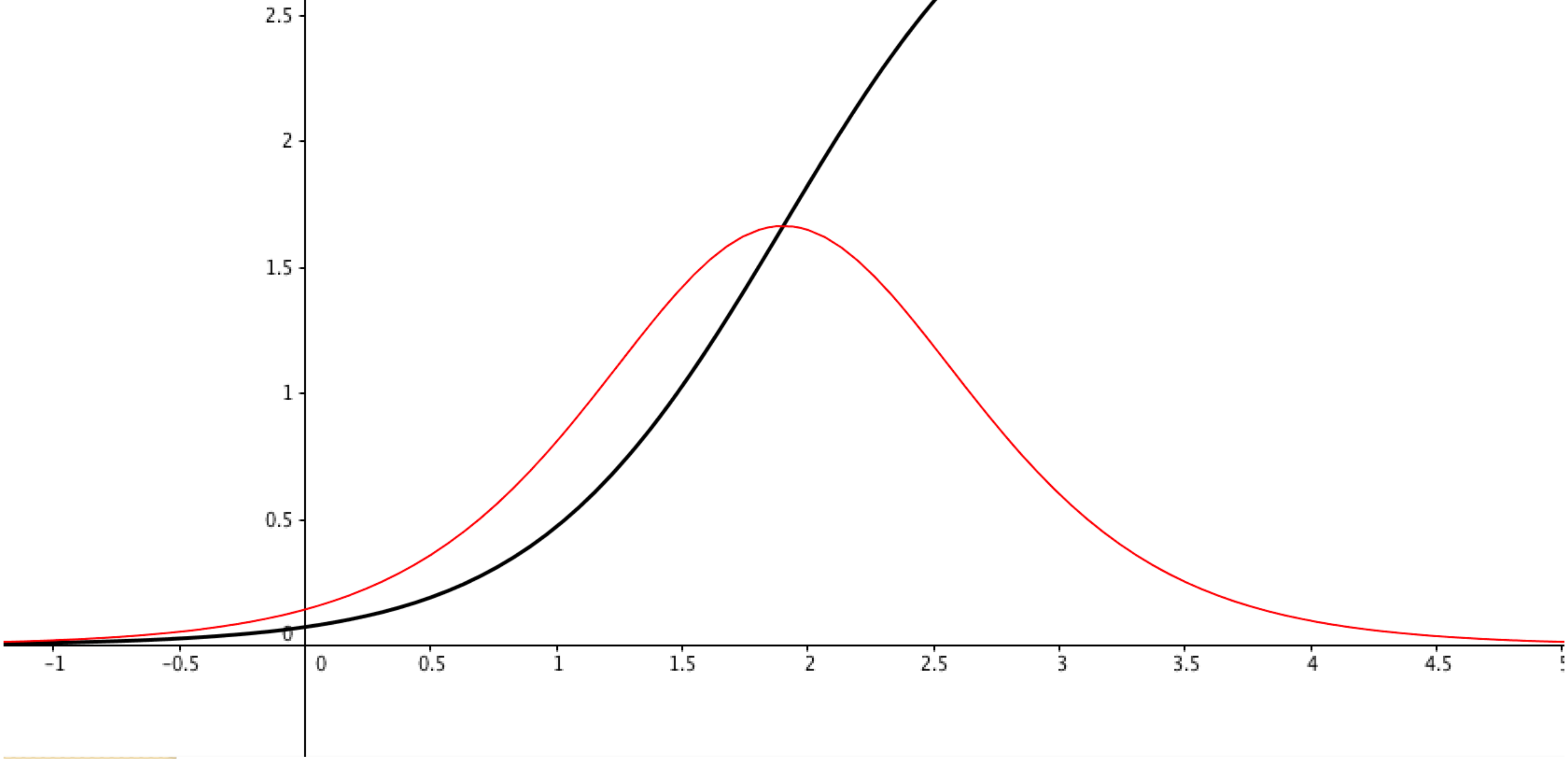


P.F. Verhulst
1804-1849

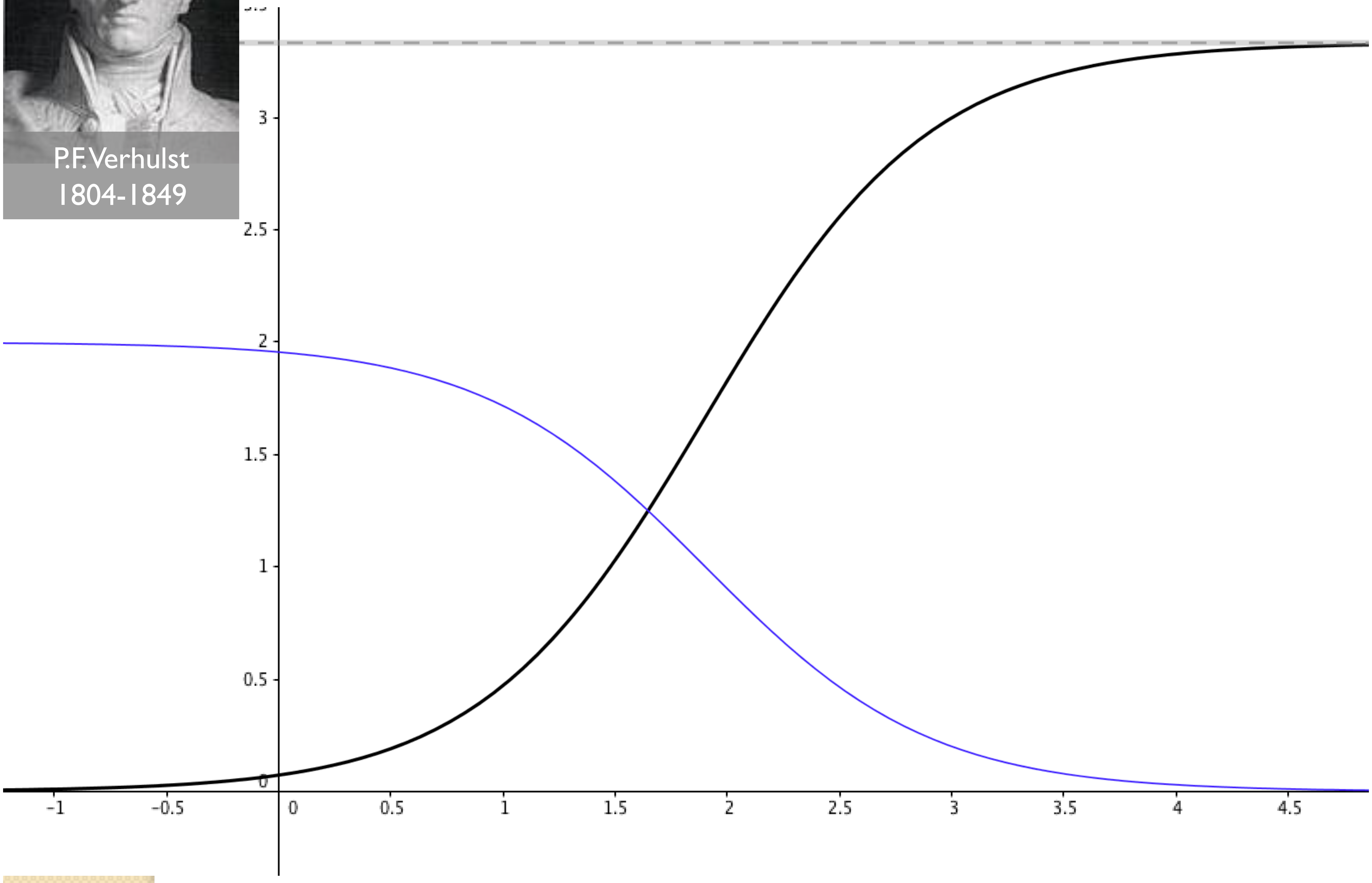


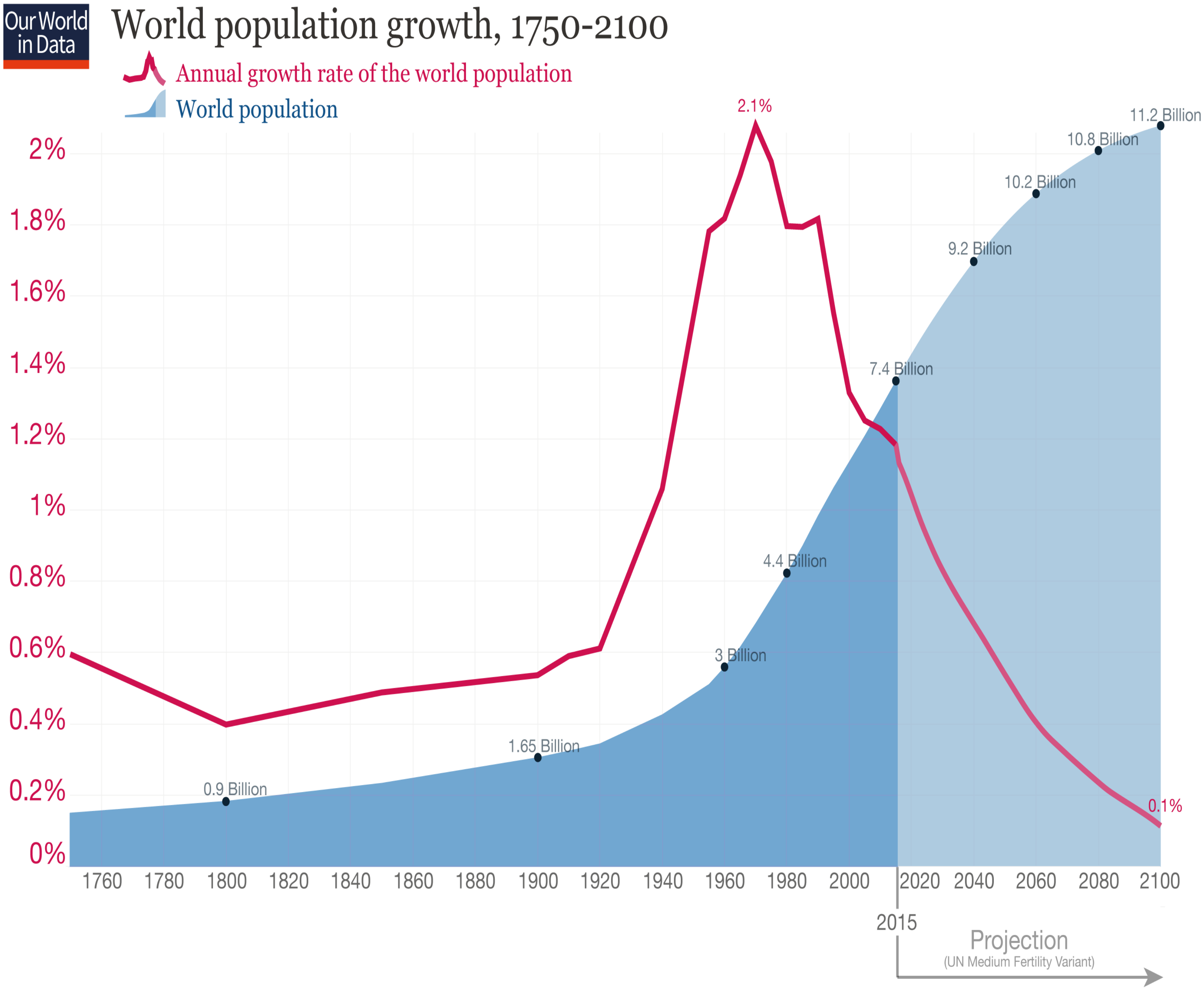


P.F. Verhulst
1804-1849

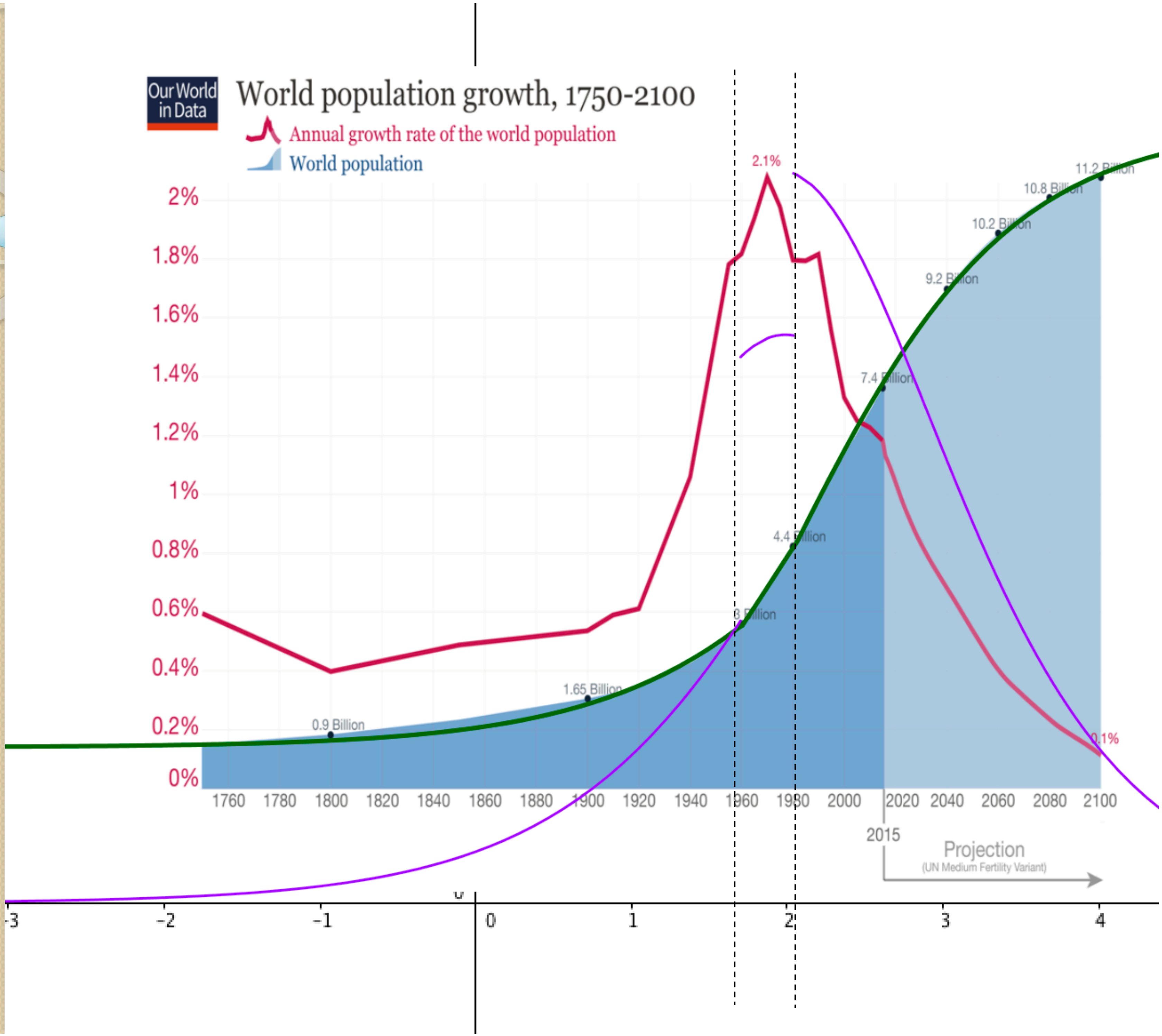


P.F. Verhulst
1804-1849






Data sources: Up to 2015 OurWorldInData series based on UN and HYDE. Projections for 2015 to 2100: UN Population Division (2015) – Medium Variant.
The data visualization is taken from OurWorldinData.org. There you find the raw data and more visualizations on this topic.



Our World in Data
World population growth, 1750-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2%
1.8%
1.6%
1.4%
1.2%
1%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0%
2.1%
0.1%
0.9 Billion
1.65 Billion
3 Billion
4.4 Billion
7.4 Billion
9.2 Billion
10.2 Billion
10.8 Billion
11.2 Billion
1760 1780 1800 1820 1840 1860 1880 1900 1920 1940 1960 1980 2000 2020 2040 2060 2080 2100
2015
Projection
(UN Medium Fertility Variant)
-3 -2 -1 0 1 2 3 4

# Sommario

- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

# Attività 9

Si consideri una scuola che ha il 60% di studenti maschi e il 40% di studentesse femmine.
Le studentesse indossano in egual numero gonne o pantaloni; gli studenti indossano tutti quanti i pantaloni.
Un osservatore, da lontano, nota un generico studente coi pantaloni. Qual è la probabilità che quello studente sia una femmina?

100 Studenti

60 maschi

40 femmine

60 pantaloni

0 gonne

20 pantaloni

20 gonne

La probabilità è 20/(60+20) = 25%

Vediamo un'altra rappresentazione del problema

# Tabella

| | MASCHI | FEMMINE |
|---|---|---|
| PANTALONI | (a) tutti | (b) 1/2 |
| GONNE | (c) nessuno | (d) 1/2 |

# Attività 10

## Un problema reale da formulare

# I test medici

Le persone, apparentemente sane, di una certa regione sono sottoposte a un test medico per una certa malattia. Si hanno 4 possibilità:

| Esito Test | MALATTIA SI | MALATTIA NO |
|---|---|---|
| POSITIVO | (a) sensibilità | (b) falsi positivi |
| NEGATIVO | (c) falsi negativi | (d) specificità |

Immaginiamo una persona che abbia avuto esito positivo al test.
Quanto si deve allarmare?
E se ha avuto esito negativo, quanto può stare tranquilla?

**Discutiamo insieme una formulazione comprensibile.**
**Esemplifichiamo su di un caso numerico.**

# Due formulazioni

A. Ogni 1000 persone in media 8 hanno la malattia. Fra queste 8 persone malate 7 avranno un esito positivo al test. Fra le 992 restanti (non malate), circa 70 saranno positive al test [false positive].

B. La probabilità che una persona abbia la malattia è dello 0,8%. Se una persona ha la malattia, la probabilità che il test medico abbia esito positivo è del 90%; se non ha la malattia c'è comunque una probabilità del 7% che il test risulti positivo [falsi positivi].

# Soluzione con A

1000 Persone

8 malate | 992 sane

7 positive | 1 negativa | 70 positive | 922 negative

La probabilità è 7/(7+70) ~ 0,09 = 9%

# Soluzione con B: occorre la formula di Bayes

Thomas Bayes diede una formulazione matematica di problemi di questo tipo, in cui si chiede di valutare la probabilità che si verifichi un certo fatto F, supposto che se ne sia verificato un altro, P.
Si usa scrivere: $p(\mathrm{F} \mid \mathrm{P})$

**Thomas Bayes**
**1702-1761**

Nei nostri esempi:

1. F= è una femmina; P= indossa i pantaloni
2. F= è malata/o; P= è positiva//o al test

# La formula di Bayes per il test medico:

$$p\left(F \mid \mathrm{P}\right) = \frac{p\left(P \mid \mathrm{F}\right) p(F)}{p(P)} =$$

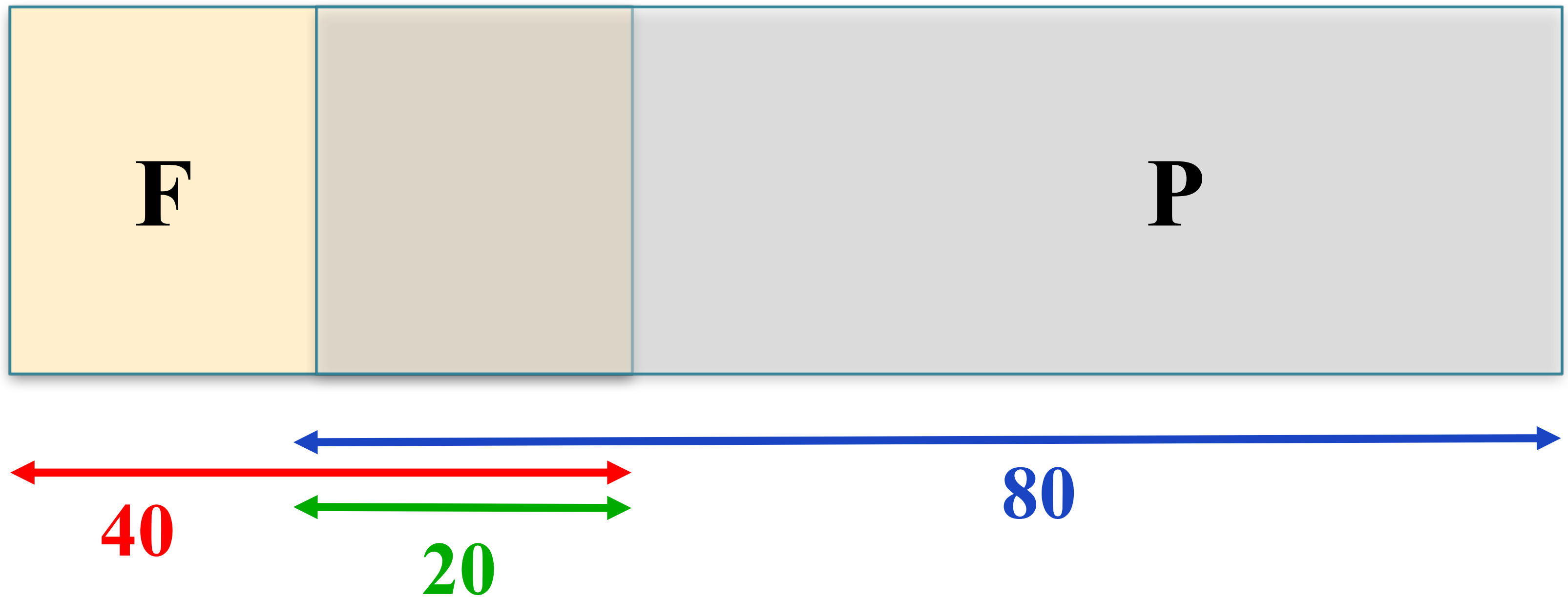
$$= \frac{p\left(P \mid \mathrm{F}\right) p(F)}{p\left(P \mid \mathrm{F}\right) p(F) + p\left(P \mid \mathrm{nonF}\right) p(nonF)}$$

$$p(F) = 8/1000 \qquad p\left(P \mid \mathrm{F}\right) = 9/10$$

$$p\left(P \mid \mathrm{nonF}\right) = 7/100$$

$$\frac{\frac{9}{10} \times \frac{8}{1000}}{\frac{9}{10} \times \frac{8}{1000} + \frac{992}{1000} \times \frac{7}{100}} \sim 0{,}0939$$

Spiegazione della formula di Bayes con l'esempio dei pantaloni (P: indossano i pantaloni; F: femmine; $p$(E) per probabilità che si verifichi l'evento E.




Si domanda la probabilità che, essendosi verificato P, si abbia anche F e si scrive: $p(F \mid P)$.

Usando le rappresentazioni insiemistiche, si ha che

$$p(F \mid P) = |F \cap P| \,/\, |P| = 20/80$$

dove scriviamo $|X|$ per indicare la cardinalità (misura) dell'insieme X.

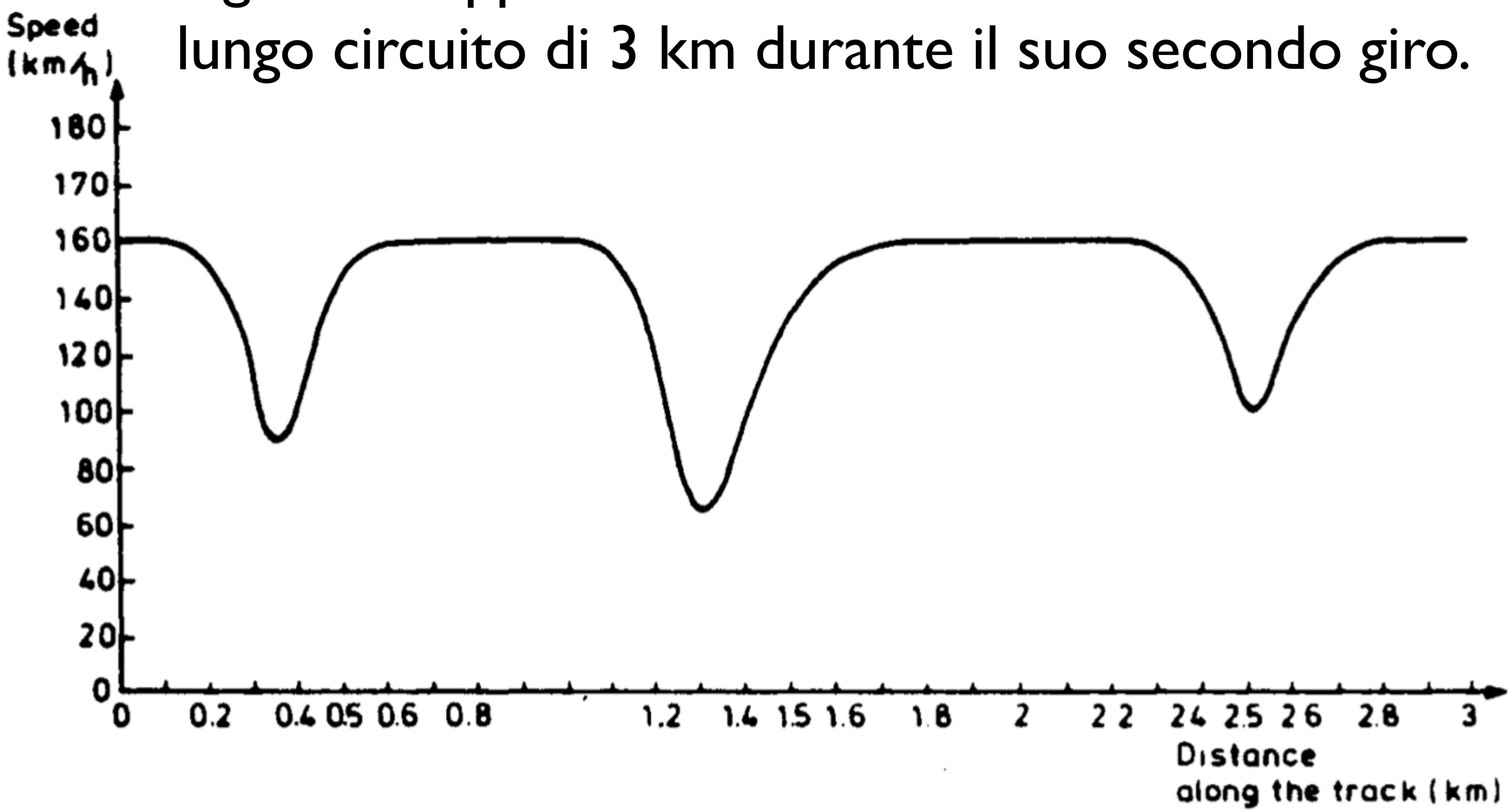
# Sommario

- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

Coloro che sono abituati al linguaggio dei grafici possono essere davvero aiutati a ottenere una visione intuitiva di un fenomeno.
D'altra parte le proprietà intrinseche intuitive di un grafico possono anche rappresentare una fonte di interpretazioni erronee perché il grafico costituisce un sistema figurale autosufficiente senza alcun appello naturale per un significato estrinseco.
Senza valenze aperte, l'impatto del grafico come Gestalt auto-consistente è molto forte e quindi può non fornire il messaggio che intende esprimere.

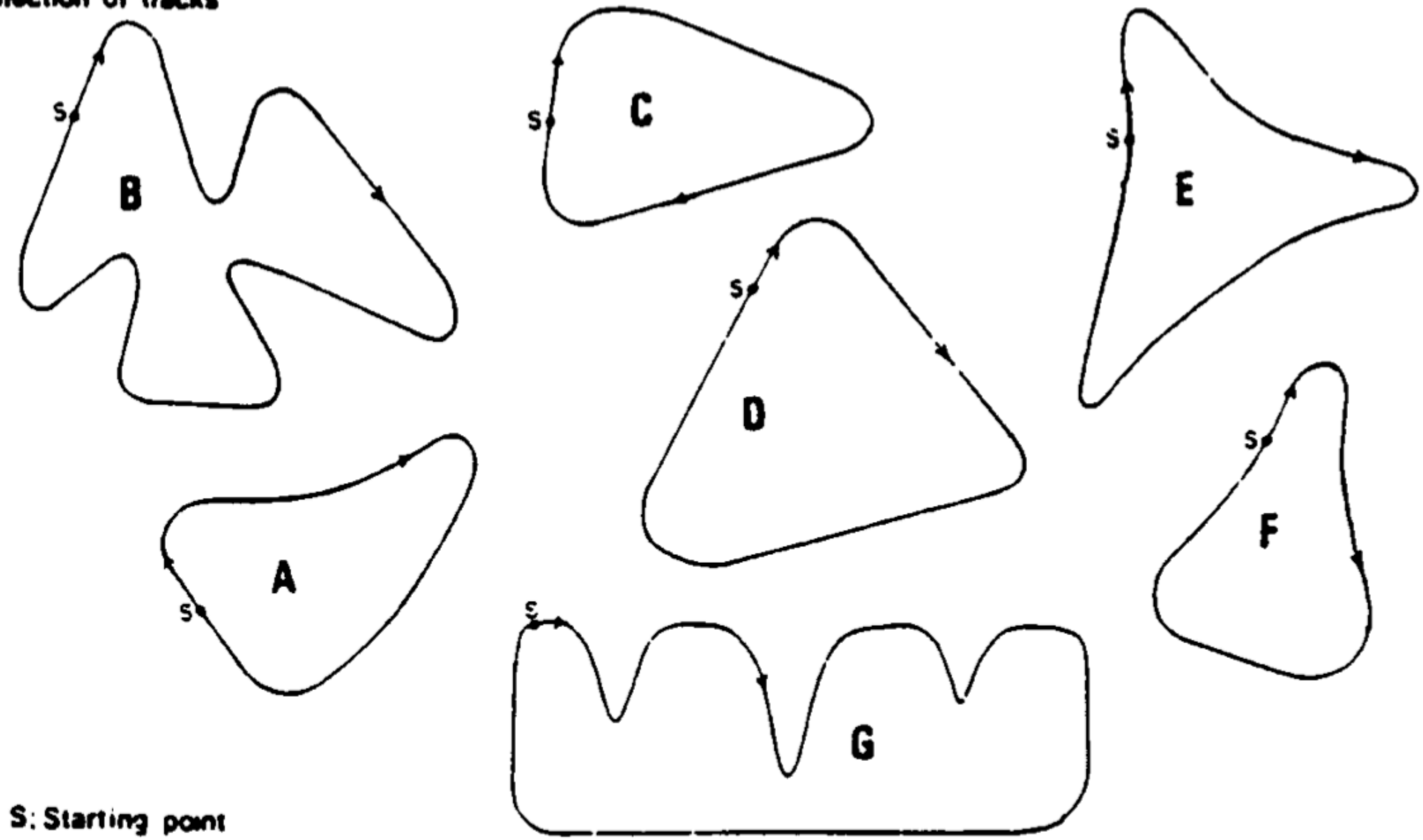
Le confusioni si hanno soprattutto quando i fenomeni originali da rappresentare sono anche di natura spaziale. Ecco un esempio.

Il grafico rappresenta la velocità di un'auto da corsa lungo circuito di 3 km durante il suo secondo giro.

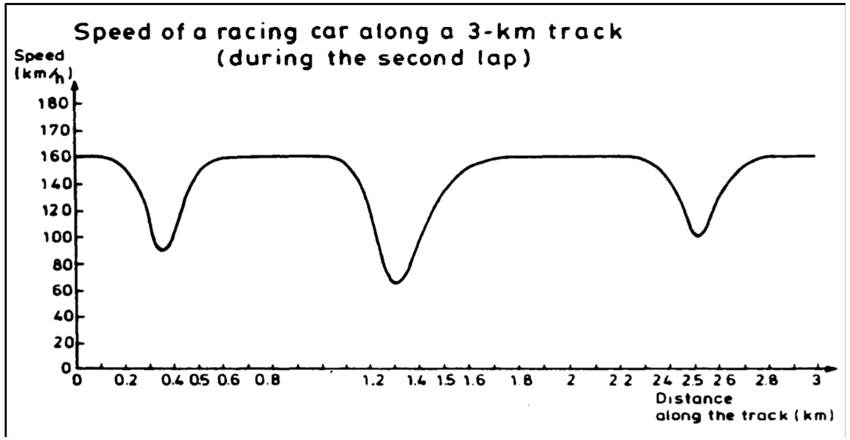



Janvier (1981)

Selection of tracks

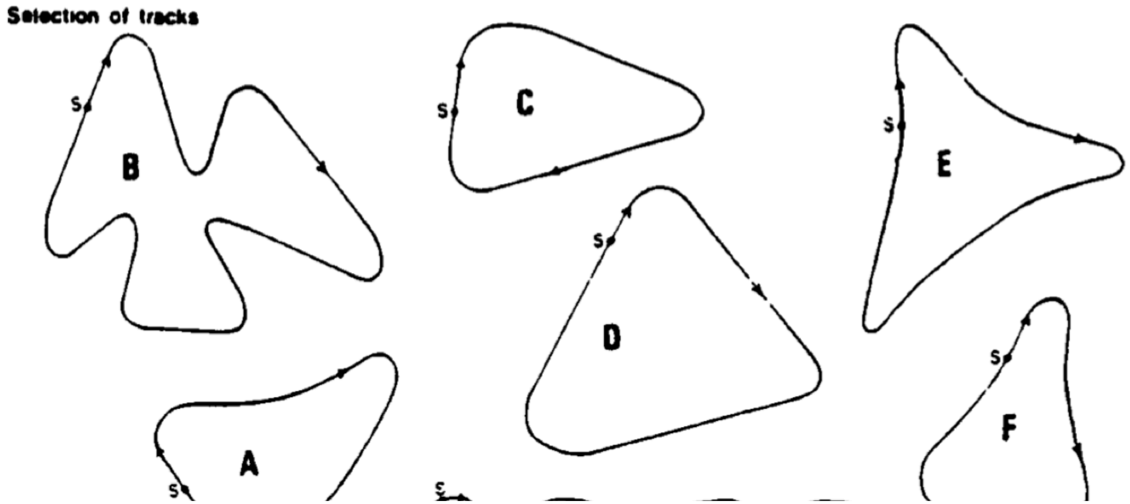



S: Starting point



Si è scoperto che alcuni soggetti (12 bambine su 24 e 2 bambini su 15) hanno potuto interpretare correttamente i rapporti tra velocità e punti del grafico - la velocità massima, minima - ma non erano in grado di determinare il numero di curve nel grafico.
In altre parole, sanno esattamente che cosa simboleggia ogni elemento del grafico, ma allo stesso tempo non sono in grado di interpretare il grafico nel suo complesso.
L'opacità del grafico non è dovuta in questo caso a un malinteso di come avviene la mappatura (tra il movimento della vettura e il grafico corrispondente). È la struttura del grafico e la sua somiglianza figurale con la struttura della traccia che inducono in errore.

Una seconda difficoltà. In questo caso i soggetti dovevano considerare quanto marcate erano le curve (non solo la loro esistenza) per poter distinguere tra i circuiti A, C e D, ad esempio, quello che corrisponde al grafico della prima figura.




Ad esempio, per decidere tra i circuiti C e D bisogna osservare che nel circuito C la terza curva è più accentuata della prima. Janvier commenta: "Abbiamo osservato che l'unica strategia di successo era dare delle etichette verbali agli elementi coinvolti e poi lavorare fondamentalmente da quelle etichette 'parlate' ". Janvier ha anche osservato che durante la loro analisi i soggetti sono spesso ingannati da somiglianze pittoriche (ad esempio l'associazione di un tratto diritto con una porzione retta del grafico).

Come dimostra l’esempio dei grafici del circuito, il saper interpretare i diagrammi, in particolare i grafici, richiede un apprendistato concettuale.

Ricordo qui due teorie complementari in merito all’elaborazione cognitiva delle immagini, che vanno oltre la “Gestalt”:

- la “dual-coding theory” di Allan Paivio
- l’ “aspect dawning” di Ludwig Wittgenstein

**Dual-coding theory (DCT)**.
Secondo Paivio, il processo di recupero delle informazioni codificate nella memoria è controllato da due mediatori: associazioni verbali e immagini visive.

Esempio: il problema dei circuiti.

**Aspect dawning (AD: il sorgere dell'aspetto)**.

Kohler aveva sostenuto che la percezione globale strutturata secondo le leggi della Gestalt (semplicità, simmetria, ecc.) è una condizione preliminare per l'esperienza di vedere. Al contrario, Wittgenstein ha riferito la natura di questi interi alle esperienze di vita di chi vede, ritenendo che la familiarità precedente sia la condizione essenziale per vedere.

L’interpretazione dei diagrammi avviene tra due estremi:

- ad un estremo si trova l'esperienza di "vedere come", in cui si può sperimentare lo stesso disegno come un'anatra o come coniglio e passare tra queste due diverse impressioni visive con facilità.
- all'altro estremo si trova l'esperienza di non essere in grado di interpretare un'immagine, vale a dire di vedere componenti individuali di un'immagine, ma di non essere in grado di dare un senso all'immagine nel suo complesso

Wittgenstein sottolinea la necessità di una base di esperienze e lo sviluppo di una tecnica per imparare a vedere oggetti e rappresentazioni.
È compito della scuola sviluppare tali esperienze.

Nel laboratorio vi ho perciò proposto di affrontare dei compiti che, trasposti in classe, hanno come obiettivo lo sviluppo delle competenze necessarie per interpretare i diagrammi.

Da un lato si sfrutta la DCT ampliata con i risultati delle più recenti ricerche dei legami tra “imagery” e gesticolazione (es.: esperienze col CBR).

Dall’altro ci si basa sulla AD: di fronte al problema di interpretare un diagramma uno studente è probabile che si situi in una posizione intermedia tra il “vedere come” e il “non vedere affatto”: potrebbe così riconoscere le somiglianze tra parti del diagramma e le cose viste prima. Questa esperienza intermedia è esemplificata nella descrizione di Wittgenstein: “Contemplo un volto, e poi improvvisamente noto la sua somiglianza con un altro. Vedo che non è cambiato; eppure lo vedo diversamente. Io chiamo questa esperienza "notare un aspetto”.

# Sommario

- Indicazioni Nazionali
- Rappresentazioni, analogie, esempi paradigmatici
- Funzioni e grafici
  - Movimento
  - Crescita (decrescita) in situazioni varie
  - Approfondimento
- Quando i grafici aiutano
- Quando i grafici ingannano
- Discussione finale

# Discussione finale

## *Le rappresentazioni: come e quando?*

Gli occhi del matematico sono stati educati culturalmente a organizzare la percezioni delle cose in specifiche modalità razionali. Sono così stati sottoposti a un lungo processo di addomesticazione
L’ addomesticazione dell’occhio è un lungo processo nel corso del quale veniamo a vedere e riconoscere le cose secondo mezzi culturalmente efficienti.

Ora, mentre gli insegnanti non possono instillare nei loro studenti direttamente la conoscenza, ciò che possono fare è di creare le condizioni perché i loro studenti possano trasformare un oggetto di conoscenza in un oggetto di coscienza.

(Luis Radford, 2010)

Grazie