UN "BUON PROBLEMA" DURA NEL TEMPO E APRE MOLTE STRADE

Maddalena Andreoletti, Caterina Scarpaci, Silvia Turlon Centro MatNet , Università di Bergamo.

Si può vivere senza Matematica?

«Non ho mai capito niente di matematica eppure...

ho fatto strada o sono diventato qualcuno»

Un danno che oggi non si riverbera nell'incapacità di risolvere i conteggi immediati-ci sono strumenti per farli- ma che si manifesta in maniera più sottile e profonda nelle difficoltà ad interpretare dati e situazioni, nell'incapacità di comprendere punti di vista diversi o di argomentare in maniera rigorosa.

[Prof. Paolo Lorenzi in Rosetta Zan «Matematica un problema da risolvere», 2008]

Tutti sanno che c'è qualcosa che non va

P.Lockart, Contro l'ora di matematica, Rizzoli 2010

Politici sentenziano: «Abbiamo bisogno di standard più elevati».

Le scuole ribattono...

Le indagini OCSE-PISA collocano i nostri studenti nelle ultime posizioni

Noi insegnanti cosa facciamo?

Breve scaletta dell'incontro di oggi

- Il punto di inizio, ovvero nulla nasce per caso
- Il cooperative learning come possibile metodologia
- Attività da svolgere in gruppi
- Riflessioni su un'esperienza condotta in classe

Laboratorio di accoglienza: il punto di partenza



Piano Nazionale Lauree Scientifiche





Centro per la didattica della matematica e delle sue applicazioni

PERCORSO DI MATEMATICA per il biennio della scuola secondaria di secondo grado

secondo gli obiettivi specifici di apprendimento previsti dalle Indicazioni Nazionali

MOTIVAZIONE DELLE SCELTE

All'inizio di un nuovo percorso scolastico gli insegnanti sentono la necessità di rivedere ed eventualmente approfondire concetti e procedure di calcolo già affrontate dagli studenti negli anni precedenti: il cosiddetto "ripasso".

Spesso, però, gli studenti hanno acquisito procedure di calcolo senza avere la consapevolezza dei concetti ad esse sottesi.

Il percorso individuato vuole aiutare gli studenti a riflettere sui concetti di base e a rimettere in gioco le loro risorse avvicinandoli allo studio della matematica.

Il progetto ha costretto noi insegnanti a riflettere sulla disciplina individuando i concetti fondamentali per la costruzione di un sapere di senso.

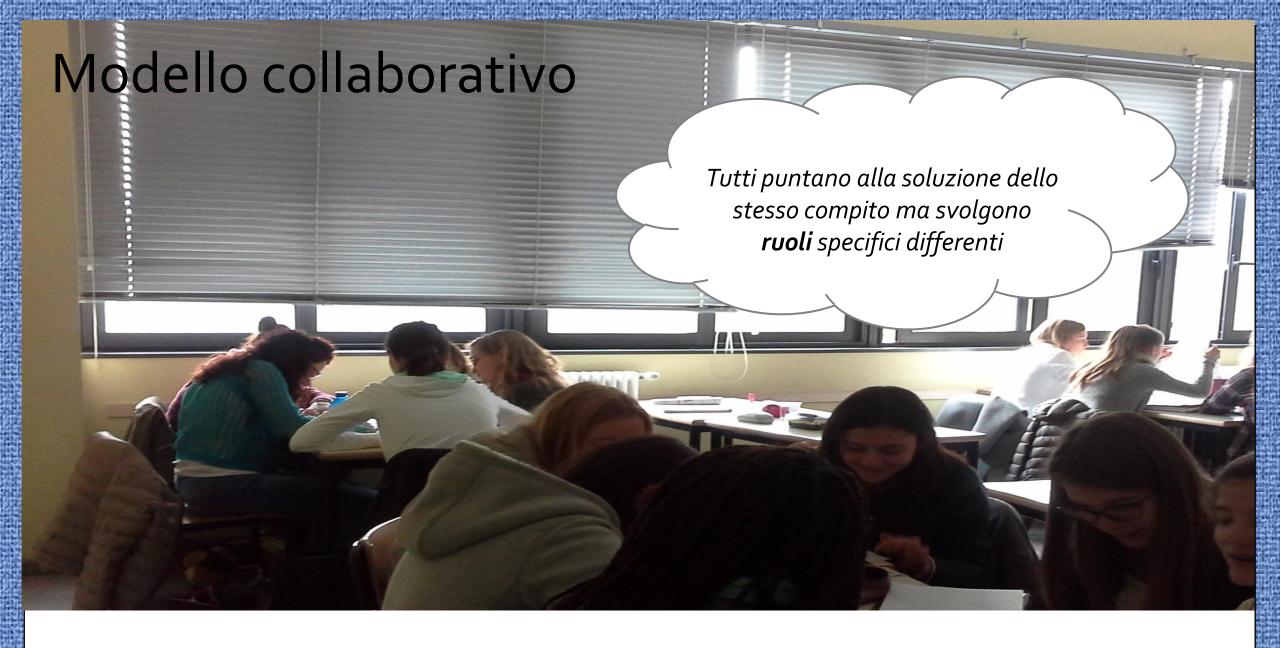
Struttura del progetto

- Il progetto ha coinvolto scuole di ordine diverso, la struttura è unica per tutti gli ordini di scuola, le attività sono invece differenziate una per il percorso "base" e l'altra per il percorso "avanzato".
- Per ogni tappa del percorso sono forniti i materiali così suddivisi:
- Attività (da usare per i lavori di gruppo)
- Scheda attività (per il lavoro individuale a casa)
- PPT come guida per la sintesi e la sistematizzazione.

Come procedere?

1º fase	iatoro ai Brabbo por la ricorda delle	presentazione da parte di ciascun gruppo delle soluzioni e discussione collettiva.	ad ogni studente viene data una scheda con quesiti di approfondimento e di riflessione sugli argomenti dell'Attività da risolvere individualmente a casa.	をおりのからのではCTESをあるののかののできたがことにあるよ
2° fase	Correzione e condivisione in gruppo del lavoro svolto a casa.	Ogni gruppo relaziona sul lavoro svolto.	Discussione e condivisione collettiva del lavoro svolto.	おけのかであると無いないある。 日本ののからあるのと無いないる
3°fase	Sintesi dell'insegnante sui concetti fondamentali	PPT come guida per la sintesi e la sistematizzazione.	8	は、日本の日の日本のに関する日本名は、日本の日本の日本では、 日本日本の日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本日本





[L.Vianello, 1995; A. Pesci, I suggerimenti della ricerca in didattica della Matematica per la pratica scolastica, a.a.2011-2012]

Perché assegnare ruoli?

Il riconoscimento di un ruolo specifico ad una persona da parte degli altri [....] permette di sviluppare la propria autonomia nel prendere decisioni, valutare e controllare, sentendosi autorizzati a svolgere determinati compiti, tutti funzionali al raggiungimento dell'obiettivo comune.

Perché assegnare i ruoli? La parola agli studenti

[Gennaio2014]

Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?

Bene, importante perché grazie ai ruoli ognuno deve svolgere qualcosa, portare a termine un suo obbiettivo.

Cosa ti è piaciuto di più dell'esperienza compiuta? Perché?

..mi è piaciuta l'idea dei ruoli che ognuno aveva per non essere lasciato a parte e quindi ognuno aveva qualcosa da fare.

I ruoli

[Febbraio 2016]

1. ORIENTATO AL COMPITO (PER LA RETTA VIA)

Fa sì che TUTTE le parti del problema siano analizzate e discusse

Fa sì che il gruppo NON SI DISPERDA su aspetti secondari del problema

2. ORIENTATO AL GRUPPO (UNO PER TUTTI, TUTTI PER UNO)

Fa sì che i contributi di tutti siano EQUILIBRATI nel tempo e nel modo

3. OSSERVATORE (TUTTI SOTTO CONTROLLO)

AUTOESCLUSIONE di alcuni membri

4. RELATORE (VOCE AL GRUPPO)

5. MEMORIA (ORECCHIE OCCHI MANO)

INTERDIPENDENZA POSITIVA





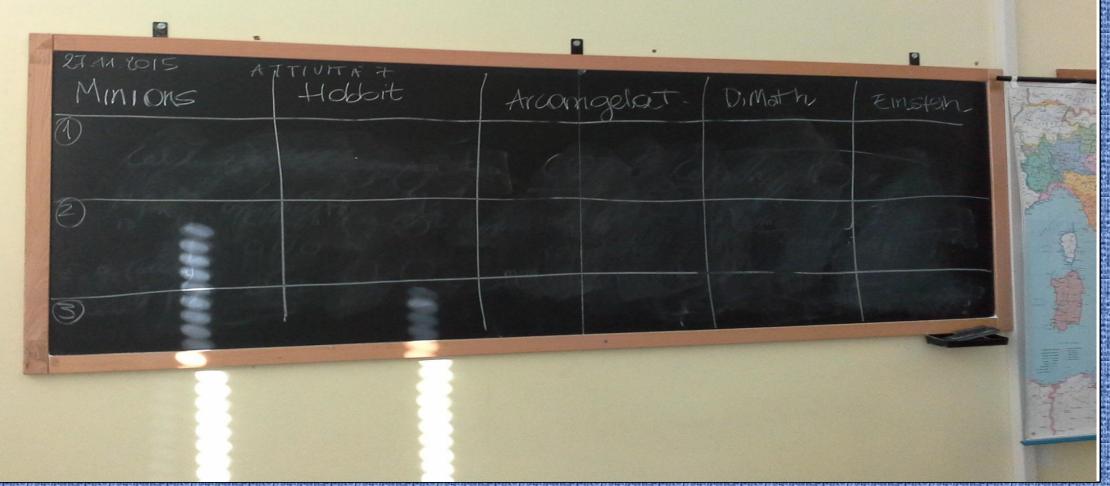
COME SI COSTRUISCE?





Fase preparatoria: gli alunni si dividono nei gruppi stabiliti; l'insegnante distribuisce il materiale, fornisce eventuali istruzioni e prepara la raccolta dei percorsi

Fase di gruppo: 2 minuti per leggere individualmente la consegna, attività proposta (tempo complessivo 20 minuti)





Ruolo dell'insegnante

- Prima di cominciare
 - > Fase di motivazione (es. perché sono necessari i gruppi?)
 - > Scelta dell'attività da proporre
 - > Scelta dei criteri di costituzione dei gruppi
 - > Preparazione del *materiale didattico*
- Durante il lavoro di gruppo

Non deve dare suggerimenti relativi alla soluzione del compito disciplinare ma essere particolarmente attento ai processi interrelazionali.

[A. Pesci 2003]

Ruolo dell'insegnante

- Durante la discussione
 - ✓ Dirigere i diversi contributi senza fornire immediatamente la/le soluzione/i corretta/e
 - ✓ Cercare di controllare anche la comunicazione indiretta (espressività naturale e spontanea)
 - ✓ Accogliere in modo positivo tutti i contributi
 - ✓ Prende decisioni in merito a cosa focalizzare (tutti i problemi, relazione osservatori...)

Ruolo dell'insegnante: L'errore fa orrore???







Esempio

Scena 6: Marco

Marco, quarta liceo scientifico, deve moltiplicare x + 1 per x + 2. Scrive così:

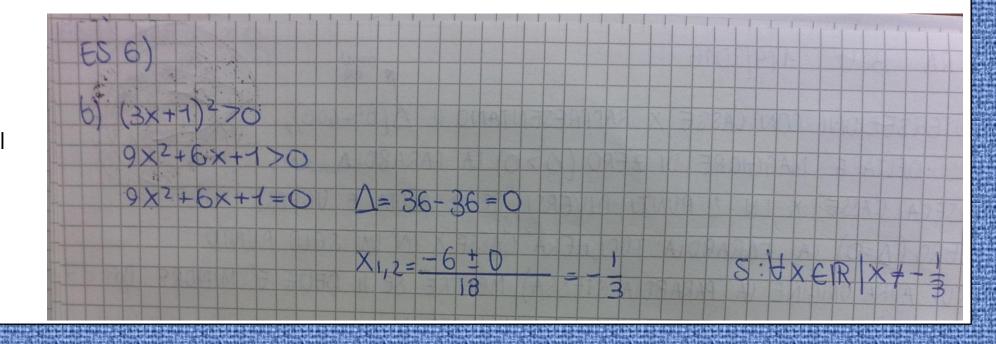
$$x + 1(x+2)$$

Ma esegue così:

$$X + 1(X+2) = X^2 + 2X + X + 2 = X^2 + 3X + 2$$

Rosetta Zan Difficoltà in matematica, Springer, 2007

Verifica sospensione del giudizio



Errore

"Ma se lo studente sbaglia, lei cosa fa?

"Spiego un'altra volta così capisce"

Rosetta Zan Difficoltà in matematica, Springer, 2007

"Questa accortezza didattica consiste nella scelta, da parte del professore abile, delle difficoltà che l'allievo incontrerà sulle vie del ragionamento in modo che l'occasione di commettere errori sia minima"

"Quello che è oscuro nel cervello dell'alunno rimane oscuro benchè il segnale "errore" non si accenda"

Zofia Krygowska, (1957)

Allenarsi serve??

Di fronte a certi errori viene forte la tentazione di far risolvere un gran numero di esercizi dello stesso tipo...

Siamo sicuri che l'errore dipenda da una non comprensione del concetto matematico?

Allenarsi sulle stesse cose, porta automatismi e memorizzazione e

"Insegnanti e studenti [...] non sono disposti ad assumersi i rischi del compromesso e si accontentano dei più sicuri *compromessi delle risposte corrette"*

[Howard Gardner (1991)]

La resistenza a mettere gli alunni davanti a problemi di giusta complessità è secondo me strettamente legata all'ossessione del valutare (e dell'essere valutati...). Così da un lato bambini e ragazzi si sentono sempre sotto valutazione e quindi non esplorano, non osano: sono ingessati nella ricerca della risposta corretta. Dall'altro lato l'insegnante per paura di ottenere brutti risultati semplifica le richieste.

Rosetta Zan ,La vita scolastica, 11/02/2016

ATTIVITA' DI GRUPPO

DESCRIZIONE DEL LAVORO

Riflettere sui problemi assegnati, focalizzando l'attenzione sui seguenti aspetti:

- a) Collocazione del problema all'interno di un curricolo scolastico
- b) Eventuali errori o difficoltà degli studenti
- c) Percorsi suggeriti.

TEMPO: 20 MINUTI

Il Problema

Cinque persone si incontrano e ognuna stringe la mano a ciascun'altra.

Quante strette di mano sono avvenute?

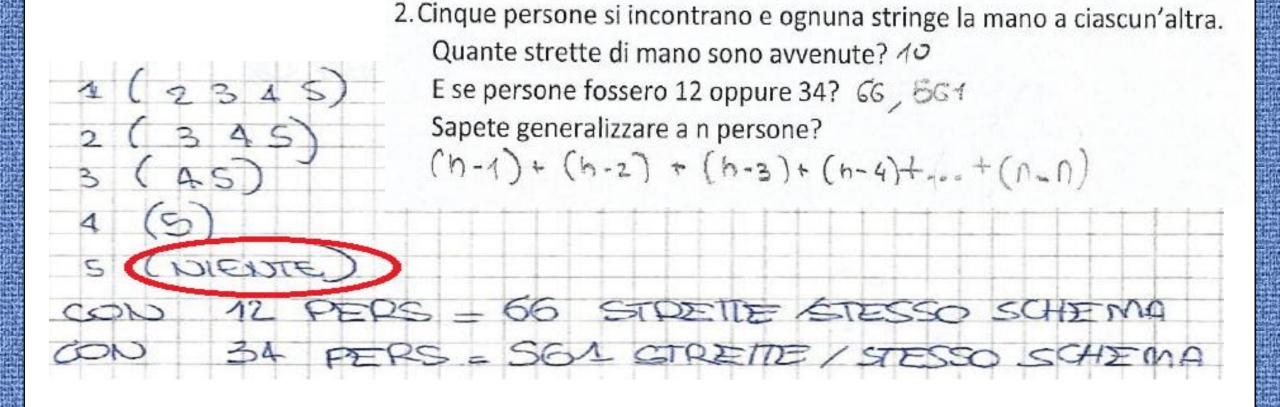
E se le persone fossero 12, oppure 34? Sapreste generalizzare a n persone?

Gli strumenti tecnici a disposizione sono particolarmente ridotti e non ancora codificati in formule (ad es. la risoluzione delle equazioni di secondo grado) ma gli studenti possono arrivare alla soluzione con strategie diverse.

Modellizzare, congetturare

- Si inizia esplorando il problema con i numeri
- Si generalizza utilizzando le lettere al posto dei numeri
- Si costruisce il *modello matematico*

Il modello costruito viene ripreso più volte nel corso del biennio utilizzando diversi linguaggi e diversi contesti



$$(n-1)+(n-2)+....+2+1$$
A1 A2 A3 A4 A5

2. Cinque persone si incontrano e ognuna stringe la mano a ciascun'altra.

Quante strette di mano sono avvenute? 10

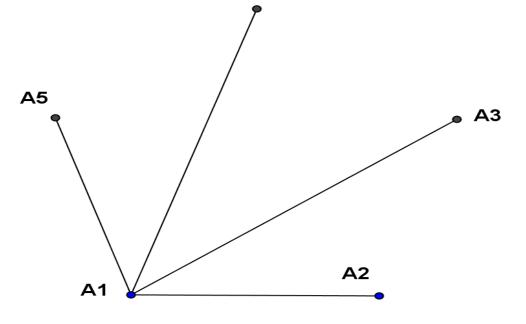
E se persone fossero 12 oppure 34?12 = 66 atrotte 34 = 561

Sapete generalizzare a n persone? 1 = 1 . (N-1)

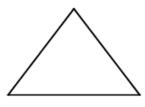
inizialmente (on 5 persone abbiamo rappresentato 2 trovate una formula 1 . (n-1) e dobi strette di mano graficamente poi siamo riusciti à trovate una formula 2 . (n-1) e dobi mo risolto gli altri 2 (asi

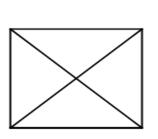
2. Somo auvenute la strette di mano Se possero 12 persone, sarebbero 66 strette où mano. se gossero 34 persone, sociebbero 561 strette di mano. La generalit tatione e il numero delle persone moltiplicato per il numero oulle persone meno 1 (perche non a si stringe la mano da soli) diviso il tutto per 2. Oppur il numero delle persone moltiplicato per le numero delle persone mens il numero delle sersone e il tutto oliviso 2. m.m.

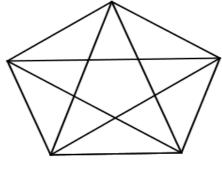
$$x_{(n)} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$



Α4







2 persone

3 persone

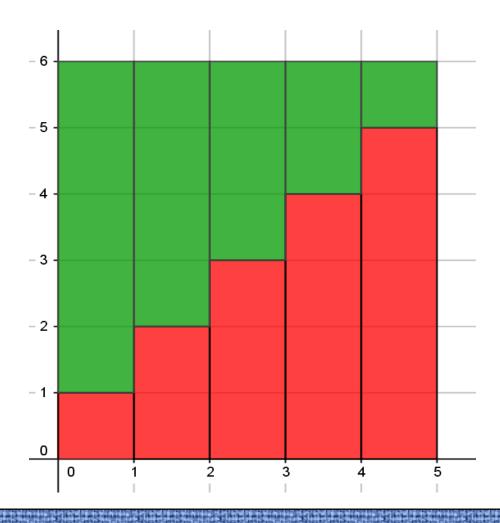
4 persone

5 persone

Numero delle strette di mano fra n persone

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Una semplice immagine



Legge iterativa

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{(n+1)} = x_{(n)} + n \end{cases}$$

Formula

$$x_{(n)} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{n \cdot (n-1) + 2 \cdot n}{2}$$
$$x_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Legge iterativa

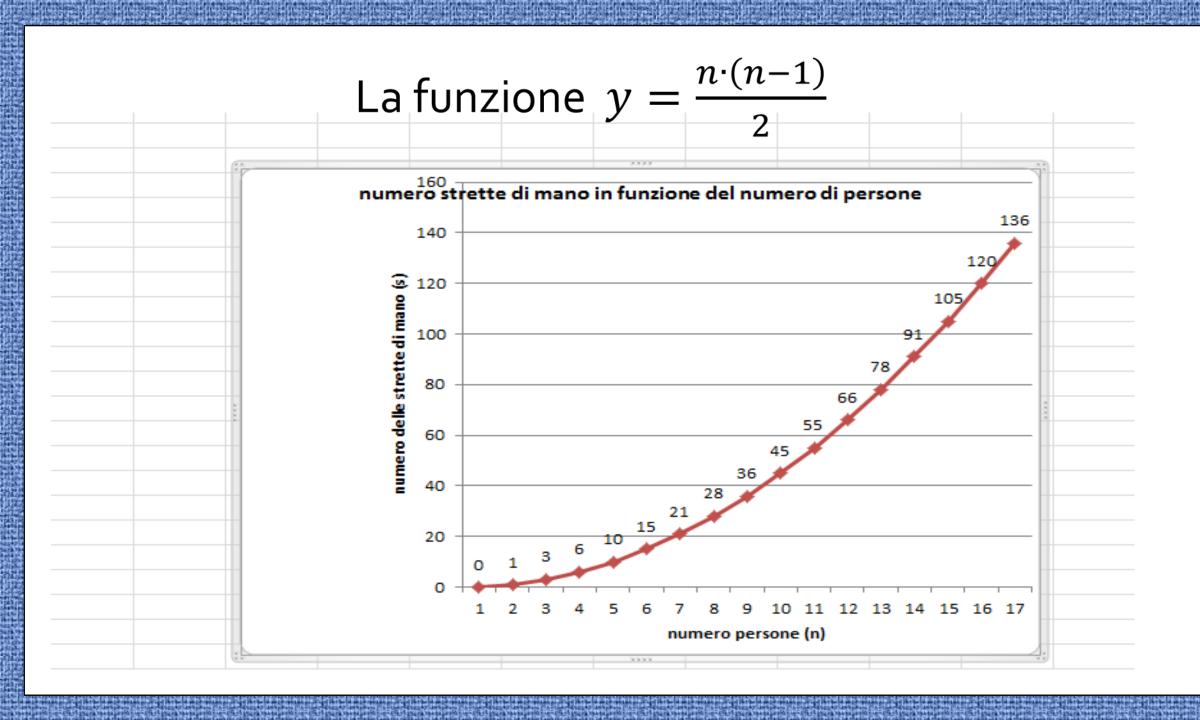
Formula

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{(n+1)} = x + n \end{cases}$$

$$x_{\cdot} = \frac{n \cdot (n-1)}{n}$$

funzione algoritmica e funzione simbolica del linguaggio dell'algebra.

$$x_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

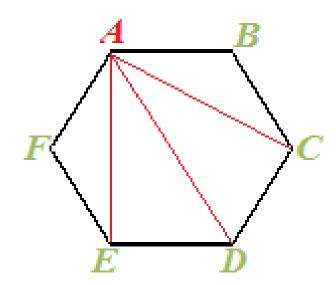


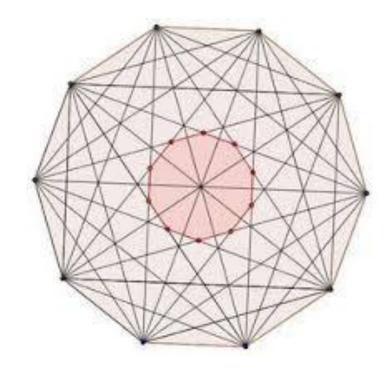
Α	В	С	D	E	F	G	Н	1	J	K	L	N
	LΔ FLINZ	ZIONE E I	I F VΔRIΔ	ZIONI								
	LAT ON2		LL VAINIA	VZIOIVI								
	n n-1		S			differenze prime			differenze seconde			
	1	0		0		1			1			
	2	1		1		2			1			
	3	2		3		3			1			
	4	3		6		4			1			
	5	4		10		5			1			
	6	5		15		6			1			
	7	6		21		7			1			
	8	7		28		8			1			
	9	8		36		9			1			
	10	9		45		10			1			
	11	10		55		11			1			
	12	11		66		12			1			
	13 14	12 13		78 91		13 14			1			-
	15	14		105		15			1			
	16	15		120		16			1			
	17			136		10						
	17	10		130								
				ed to a second state of								

Problemi

Si vuol fare un torneo di ping pong in cui ogni partecipante incontri tutti gli altri. Quante partite si dovranno giocare in funzione del numero di partecipanti?

Quante sono le diagonali di un poligono di n lati?





Combinazioni semplici

In una classe di 12 studenti Claudio e Francesco sono molto amici. Qual è la probabilità che, dovendo scegliere a caso due rappresentanti della classe, vengano eletti proprio loro due?



$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Una domanda

Per ogni numero naturale ${\it n}$ assegnato, il risultato $(x_{(n)})$ è sempre un numero naturale?

$$x_{(n)} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

funzione simbolica (semantica) del linguaggio dell'algebra.

Problemi

È possibile che un poligono abbia 54 diagonali?

Si vuol fare un torneo di ping pong in cui ogni partecipante incontri tutti gli altri. Quanti partecipanti si potranno accettare se il torneo non può durare più di 10 serate e non si possono giocare più di quattro partite ogni sera?

Un quotidiano affida ad una ditta la manutenzione della rete locale che collega tra loro tutte le redazioni, pagando a tale ditta un compenso annuo fisso di 50000 euro. La ditta spende per la manutenzione di una linea circa 250 euro annue.

Oltre quante redazioni locali la ditta andrebbe in perdita?

Se la ditta intende guadagnare almeno 10000 euro l'anno, quante redazioni locali potrebbe collegare al massimo?

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = k \Leftrightarrow n^2 - n - 2k = 0 \quad \operatorname{con} k > 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k}}{2}$$

$$1 + 8k$$

Riconoscere il diverso statuto delle lettere in una formula

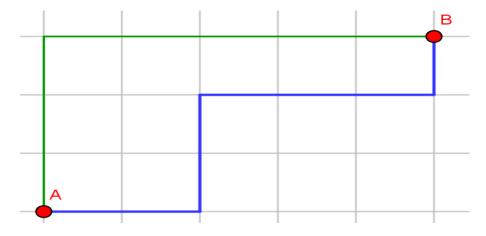
k	$\Delta=1+8k$	n-1	n	S	
0	1.	0	1	0	
1	9	1		1	
2	17	2	3	3	
3	25	3	4	6	
4	33	4	5	10	
5	41	5	6	15	
6	49	6	7	21	
7	57	7	8	28	
8	65	8	9	36	
9	73	9	10	45	
10	81	10	11	55	
11	89	11	12	66	
12	97	12	13	78	
13	105	13	14	91	
14	113	14	15	105	
15	121	15	16	120	
16	129	16	17	136	
17	137	17	18	153	
18	145	18	19	171	
19	153	19	20	190	
20	161	20	21	210	
21	169	21	22	231	
22	177				
23	185				
24	193				

- Due società hanno operato una fusione dando luogo ad una nuova società. Le due società avevano l'una n e l'altra m filiali, tutte collegate tra loro da una rete locale.
- Quante linee locali dovrà avere la nuova società affinché tutte le m + n filiali siano in comunicazione tra loro? Quante nuove linee occorre attivare?

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{m \cdot (m-1)}{2} = \frac{n^2 + m^2 - (n+m)}{2}$$

$$\frac{(n+m)\cdot(n+m-1)}{2} = \frac{(n+m)^2 - (n+m)}{2}$$

- La geometria del taxi misura le distanze sommando tratti perpendicolari tra due punti.
- Quanti sono i cammini minimi
- Che congiungono A e B?



RELAZIONE ABBIAMO PROVATO A CONTARE / PERCORSI POSSIBILI IN UN ESEMPIO FACILE, POI ABBIAMO PROVATO AD USARE LA RORMULA CHE AVEUMA. I ROVATO CON IL PROBLEMO DELLE STRUTTE DI MANO (M²-M = HUMBRO STRETTE DI MANO). POI ABBIAMO TODOMBRO PROVATO A DERE ZAD M UN DATO DEL RETTANGOLO

$$\frac{A}{H_{B}} = \frac{1}{2} = \frac{36M1969214157920}{2} = \frac{1^{2}-1}{2} = 6$$

$$\frac{A}{1}$$

$$\frac{5^2 - 5}{2} = 10$$

Relovaione liam Postorelli, Monto Grisa Metadi utili rash. Ondrea Doglio, andrea Poglion, Corero Cucchi 1) for verticare la formella m (n-1) ablians provats su d'un rellangal 2) Obliano at langli la finala nel cond perfect: Z 3) No 12 de che abliano o regiolo 10 rellangos per verficas se la pruha é conselho. 4) a rank accost le la former in più d'un cosa é erroto: _ anado l lato del quendo to « 1 (1) 2(2-3) = 1 ma son e cos pach a some due stade possibili) - grounds - olere pent sons sulla stassa I were del ref. what (A B)

Bibliografia

• GIUSTO O SBAGLIATO? QUESTO È IL PROBLEMA

M. Dedò, L. Sferch, Pubblicato originariamente col titolo "*Right or Wrong?That is the Question*", in Notices of the Amer.Math. Soc. , vol. **59**, n.ro 7 (Agosto 2012), pagg. 924-932

(<u>http://www.ams.org/notices/201207/rtx120700924p.pdf</u>).

- D.W. Johnson, R.T Johnson E. J. Holubec "Apprendimento cooperative in classe" Erickson, 1996 (seconda edizione marzo 2015)
- Maria Dedò Simonetta Di Sieno, *Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuti e metodologie* 9/11/2012 htpp://arXiv.org/abs/1211.2159
- S.Locatello, G. Meloni , *Apprendimento collaborativo in Matematica*, ed. Pitagora 2003, (con la prefazione di Lino Vianello)
- P. Lockart, Contro l'ora di Matematica, Rizzoli, 2010
- M. Comoglio, M.A. Cardoso, Insegnare e apprendere in gruppo, LAS Roma, 1996

Bibliografia

- http://www.quadernoaquadretti.it/scuola/riflessioni/spirito_o8.pdf
- R. Zan, Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire, Springer, 2007
- Contro l'ora di matematica, Rizzoli, 2010; originariamente come A mathematician's lament. ttp://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf.
- A. Pesci, M. Andreolettti, M. Sgrignoli, C. Scarpaci, S. Turlon: "Aspetti metodologico-didattici nell'apprendimento collaborativo della matematica e sperimentazione di percorsi disciplinari" pubblicato in Aisberg http://hdl.handle.net/10446/36451; 2015
- A. Pesci, *Insegnanti di Matematica e studenti: come migliorare il lato umano delle loro relazioni?* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, VOL. 26B n^4, 521-545
- Prof. Paolo Lorenzi in Rosetta Zan *«Matematica un problema da risolvere»*, Quaderni di Rassegna 3, edizioni Junior, 2008

Sitografia

• Giuliano Spirito

http://www.cidi.it/cms/doc/open/item/filename/334/asse-matematico.pdf

- http://www.indicazioninazionali.it/
- http://nuovilicei.indire.it/
- http://nuovitecnici.indire.it/
- http://nuoviprofessionali.indire.it/
- http://archivio.pubblica.istruzione.it

VALUTAZIONE

Molteplici prospettive

E' una caratteristica peculiare del Cooperative Learning che il lavoro di gruppo si concluda sempre con una valutazione individuale dell'apprendimento.

[M. Comoglio, M.A. Cardoso, Insegnare e apprendere in gruppo, LAS Roma, 1996]

Bisogna tenere presente la *dimensione soggettiva* della valutazione, ovvero

ci si può riferire a forme di autovalutazione, attraverso cui coinvolgere il soggetto nella ricostruzione della propria esperienza di apprendimento e nell'accertamento della propria competenza

[M. Castoldi, Valutare e certificare le competenze, Carocci Editore, 2016]

Valutare la situazione in ingresso: Il tema di Matematica

lo e la Matematica: il mio rapporto con la Matematica (dalle elementari ad oggi)

Rosetta Zan: Difficoltà in Matematica

https://www.youtube.com/watch?v=oLomkX8TxyU

Un esempio: Il tema di Matematica

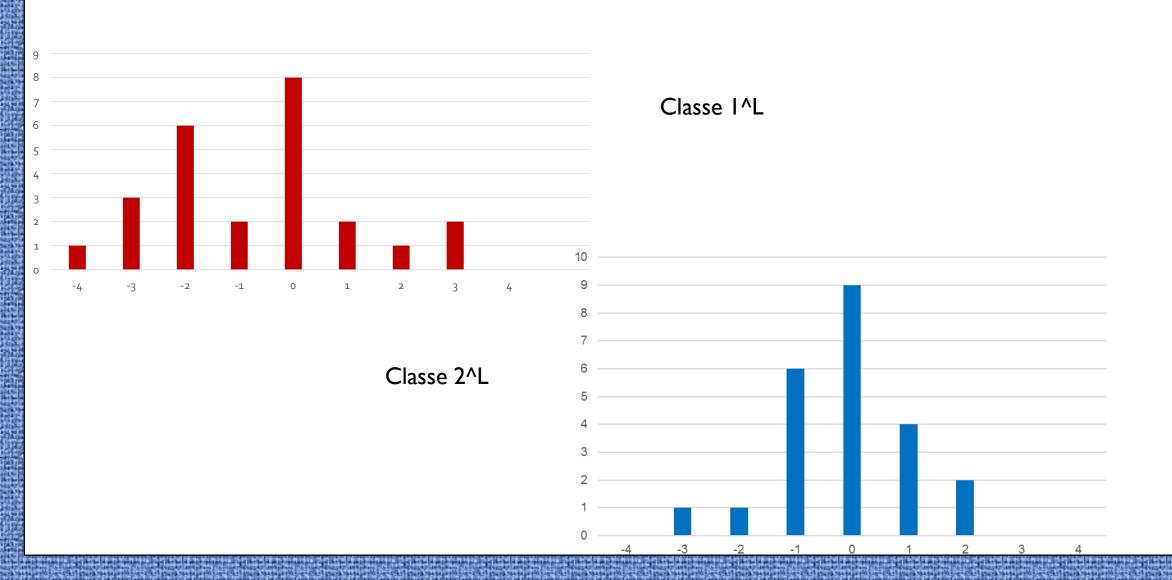
Io non ho mai amato la matematica, penso perché sia basata sulla logica cosa che io non ho perché ho sempre trovato difficoltà a risolvere i problemi(non quelli di geometria che studiavo le formule e più o meno riuscivo).

Autovalutazione: il modello ATC21 [M. Sgrignoli]

Seminario del 9/02/2015 coordinato da A. Pesci presso il Dipartimento di Matematica dell' Università di Pavia

"La valutazione nell'apprendimento collaborativo: il modello ATC21 (Assessment & Teaching of 21st Century Skills)"

Abilità strategiche classe 1^L-2^L Gennaio 2016



Questionario individuale [classe 1^L 2013-2014]

Cosa pensi della discussione di classe a conclusione dei lavori di gruppo? Come ti sei sentito durante le varie discussioni?

- E' una delle cose che ho reputato più utile, in questo modo ognuna di noi poteva imparare a considerare anche le opinioni e considerazioni degli altri
- Penso che siano state discussioni utili perché ognuno poteva esprimere la propria opinione e capire perché fosse giusta o sbagliata (4)
- Le discussioni erano interessanti in modo tale che puoi vedere metodi diversi dai tuoi magari più semplici e che potrai applicare in futuro (3)
- E' utile perché si capiscono gli errori, è una fonte di miglioramento e confronto (5). E' più bello e coinvolgente se si partecipa alle discussioni perché capisci meglio e si è un componente attivo, quindi ti senti integro e comunque importante perché la tua opinione vale molto, non solo quella della profe, che poi ti aiuta a capire ed è sempre disponibile all'ascolto
- Mi sono sentita bene. Durante le discussioni la cosa più bella è che parlavamo solo tra studenti e se qualcuno diceva qualcosa di sbagliato erano le compagne che lo correggevano. Era molto divertente e dava tanta soddisfazione arrivare alla soluzione corretta senza l'aiuto dell'insegnante
- Le discussioni in classe mi fanno capire che anche chi ha dei problemi in matematica può chiedere spiegazioni e finché non si è capito non si va avanti