Fare geometria con l'origami: i poliedri

da fogli A4 all'inclusione di un tetraedro regolare in un cubo.

Antonio Criscuolo Centro MatNet – CQIA Università di Bergamo

Ilaria Criscuolo IC "Carducci" Dalmine (BG)

UMI - CIIM

XXXIII Convegno UMI-CIIM

Criticità per l'insegnamento della matematica nella scuola di oggi

Pavia, 7-9 ottobre 2016

Prima di avviare il laboratorio, una premessa

Questo laboratorio nasce come un laboratorio ludico-matematico:
Un attività per scoprire e/o riscoprire proprietà e concetti geometrici piuttosto che applicativa di conoscenze e abilità.

Il laboratorio propone agli studenti

- di mettere in gioco le loro capacità di osservazione, il loro intuito spaziale, alcune fondamentali abilità di geometria dello spazio;
- Di esplorare le proprietà geometriche di un oggetto origami costruito dagli stessi studenti;
- di affrontare significative questioni di geometria dello spazio scoprendo anche proprietà inaspettate.

Pensiamo quindi che il modo migliore per presentare il laboratorio sia quello di creare qui un'atmosfera di classe.

Perciò vi chiediamo di svolgere il ruolo di giovani studenti mentre noi svolgeremo quello di insegnanti.

Introduzione al primo laboratorio di geometria origami di una classe

Cerchiamo di rispondere alla domanda: perché piegando la carta si fa geometria?

Per rispondere, iniziamo a piegare

Foglio di carta e pieghe

Foglio di carta, ente fondamentale della geometria della piegatura della carta :
pensato illimitato, trasparente, sottile, ma abbastanza robusto, di spessore uniforme.

Perché le pieghe della carta sono rettilinee ?

Perché la carta aderisce perfettamente, senza grinze, a superfici cilindriche e non, simultaneamente, a base e collo di una bottiglia ?

Foglio di carta sottile è “quasi” rigido alla trazione, non offre “quasi” resistenza alla flessione:
si flette, ma non si dilata. Flessione massima ➔ Piega: retta

Un consiglio operativo: utilizzare un pennarello ad alcool per sfruttare la semitrasparenza.

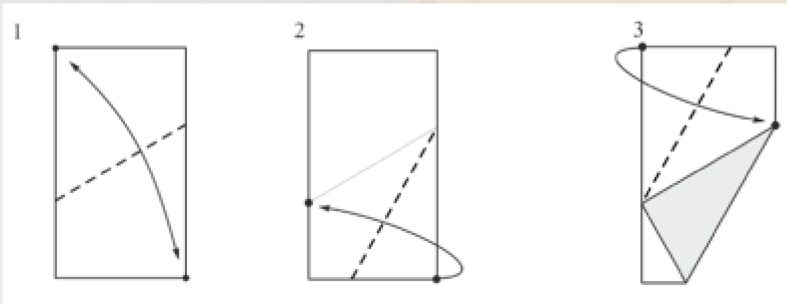
Un’osservazione: *ogni piegatura del foglio realizza una **simmetria assiale***

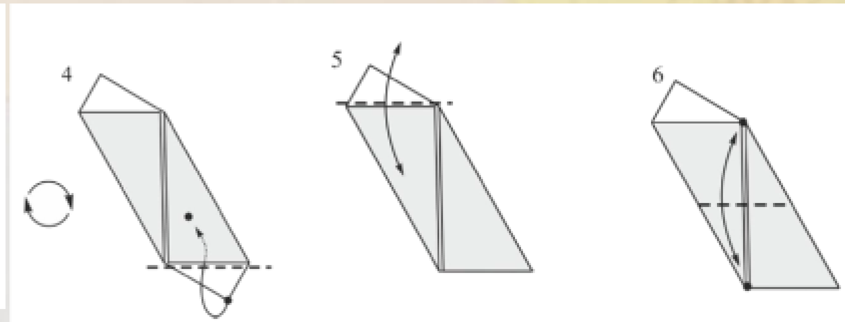
Due postulati incorporati nel foglio di carta

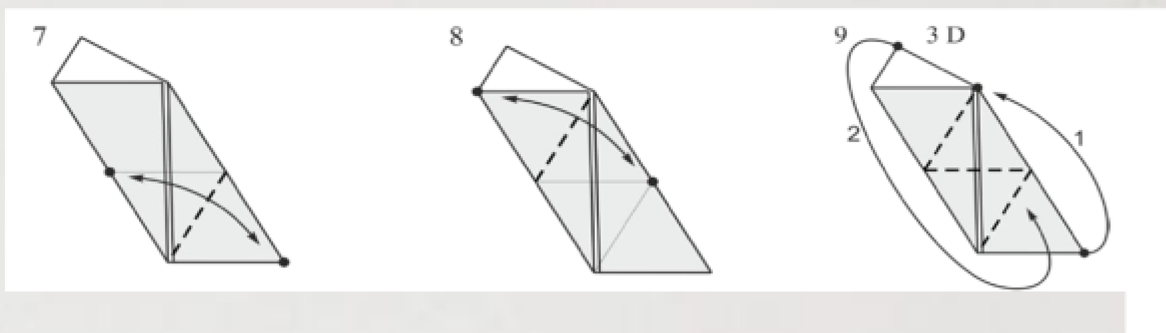
1. *La traccia di una piega è un segmento rettilineo (limitatamente al foglio).*
   Il punto risulta essere l'intersezione di due pieghe.
2. Data un piega, è possibile sovrapporre la piega a se stessa. La superficie è allora divisa in quattro angoli uguali attorno al punto di intersezione. *Chiamiamo retto ciascuno di questi angoli.*
3. ……

Da un foglio rettangolare un primo origami geometrico

Lo schema: un origami geometrico a foglio unico: lo schema

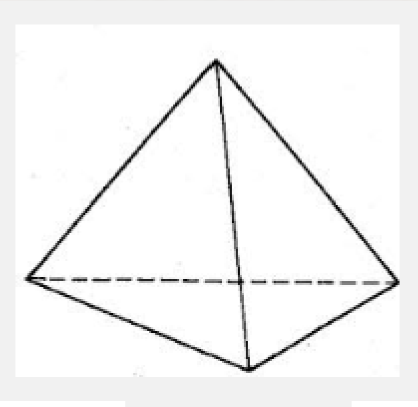






Disegni di Francesco Decio

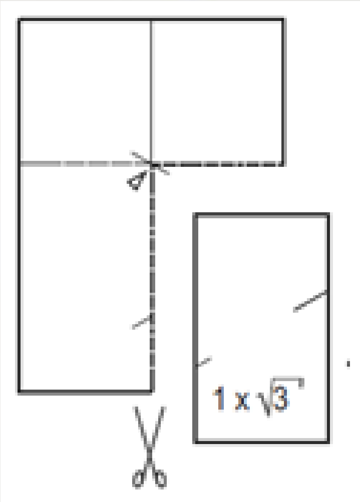
Che tipo di foglio è necessario per costruire un tetraedro origami?



- E' possibile costruire un tetraedro partendo da un foglio rettangolare di qualsiasi formato?
  Ad esempio piegando un foglio A4 è possibile ottenere i triangoli equilateri facce del tetraedro?

- Il foglio rettangolare che abbiamo usato è un foglio speciale……

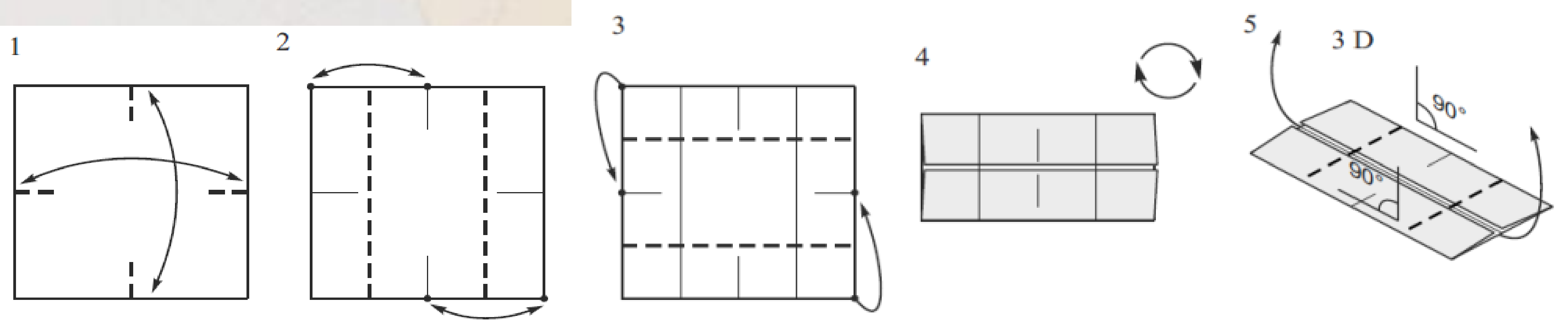
- ……….si ottiene tagliando a metà il lato corto di un foglio A4 e tagliando poi, una delle strisce così ottenute, in modo che il lato lungo risulti $\sqrt{3} \approx= 1{,}73$ volte quello corto (182mm   x 105 mm).

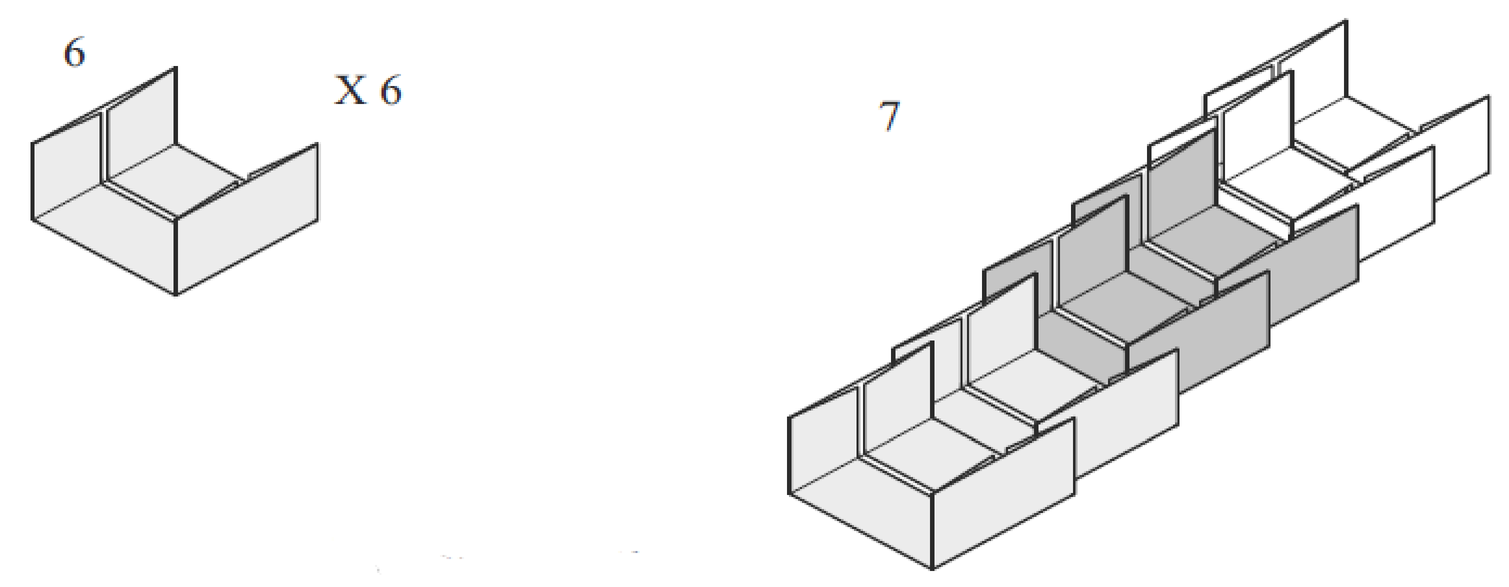


Foglio A4

Da sei fogli quadrati la costruzione di un altro poliedro

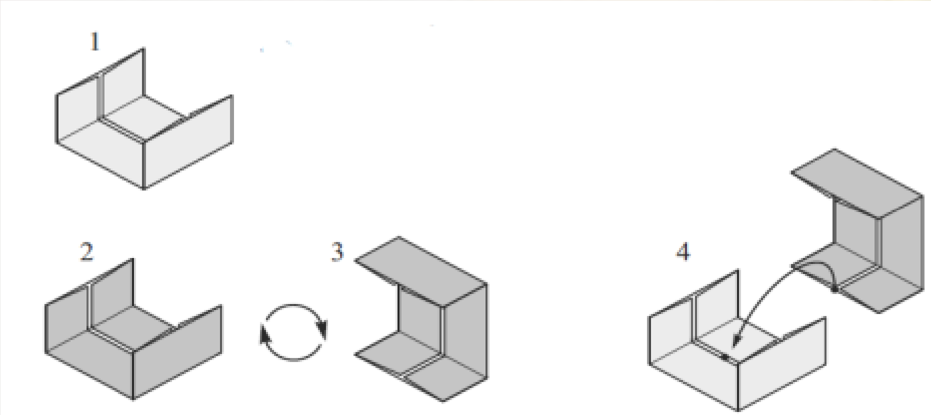
Il cubo con 6 moduli: piegatura del modulo

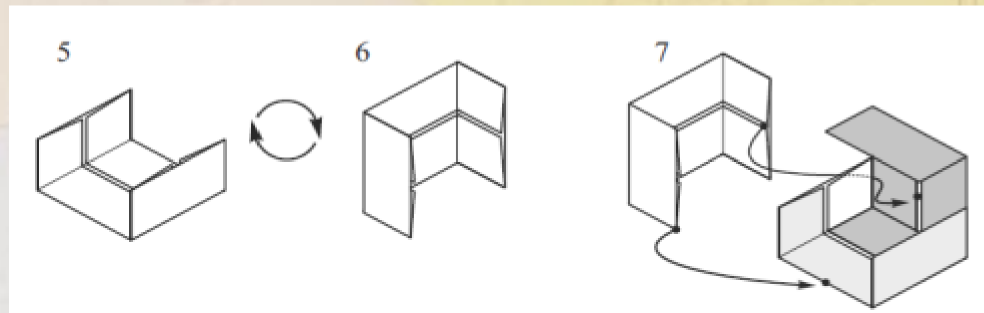


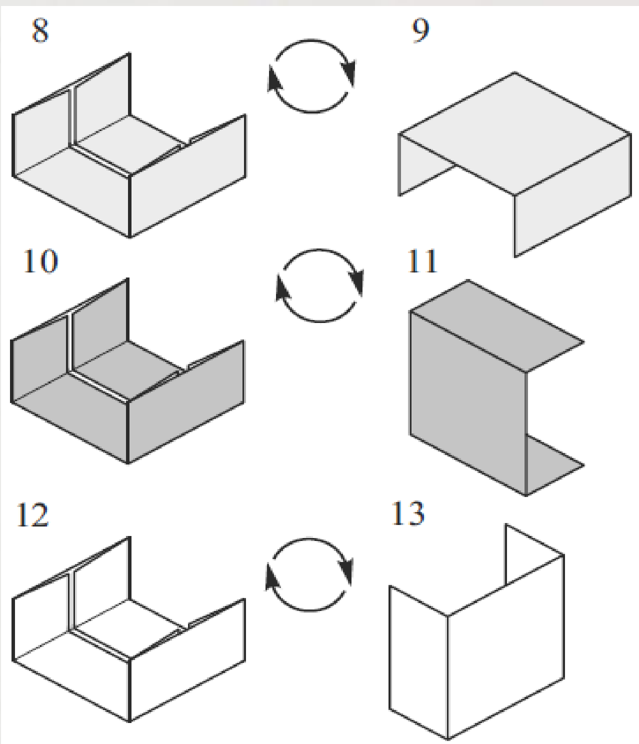


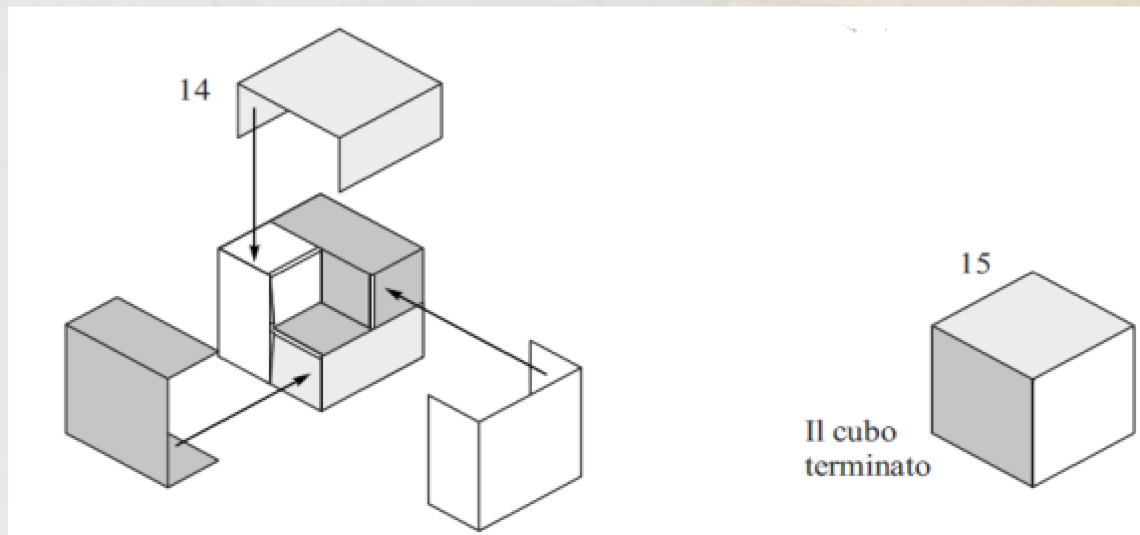
Modello di Paul Jackson
Disegni di Francesco Decio

Il cubo: montaggio dei moduli





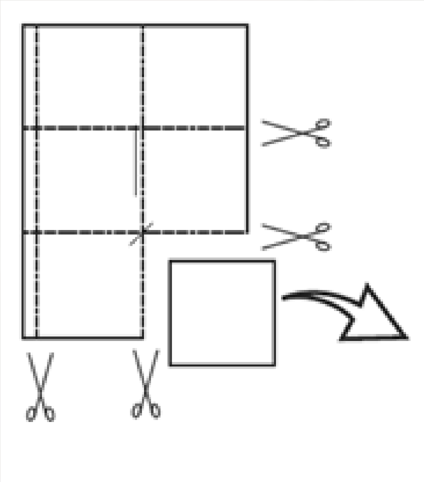


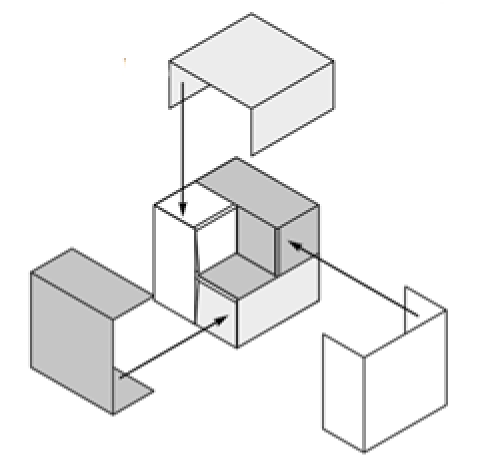


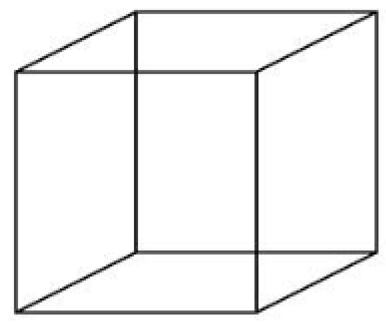
Modello di Paul Jackson
Disegni di Francesco Decio

Dal foglio A4 ai sei fogli quadrati per la costruzione di un cubo

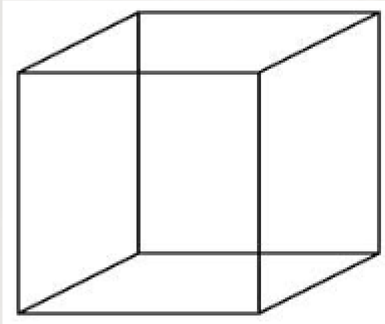
I quadrati con i quali si realizza il cubo hanno il lato pari ad un terzo del lato lungo del foglio A4 cioè 9,9 cm

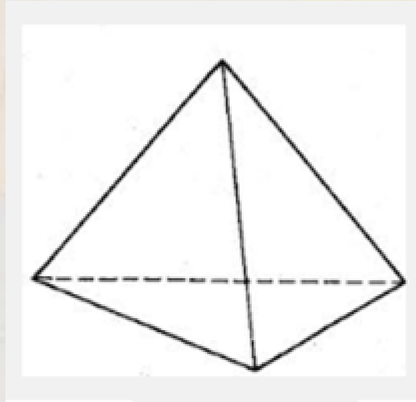






Confronto tra cubo e tetraedro





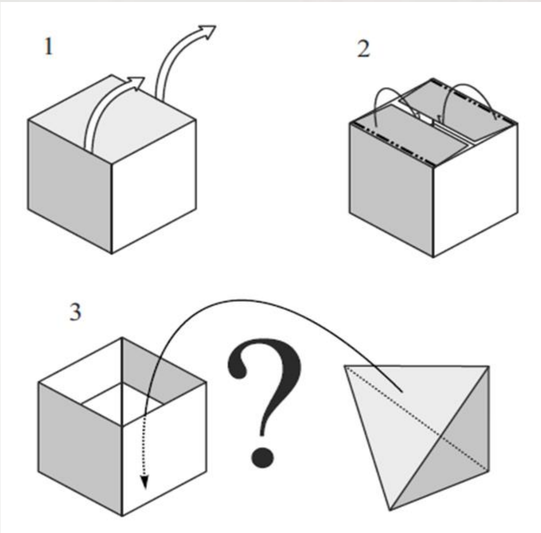
- Confrontiamo ora il tetraedro e il cubo che abbiamo realizzato…...

- Quante facce hanno? Quanti i vertici? Quanti gli spigoli? Sono poliedri regolari?
- Qual è il più alto dei due? Quale dei due ha lo spigolo più lungo?

  Quale dei due ha il volume maggiore?
- Il cubo che volume ha?
  - ……circa $5^3 cm^5 = 125\ cm^3$
- Il tetraedro che volume potrebbe avere, la metà?
  - Meno della metà?
  - Di più della metà?
  - Quasi uguale?

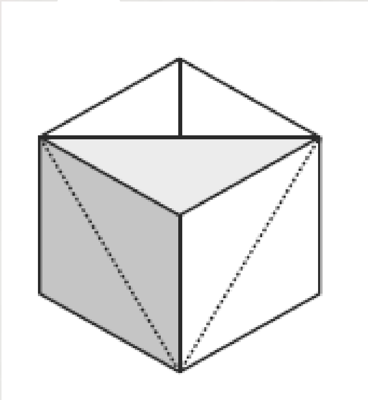
Una domanda speciale…….

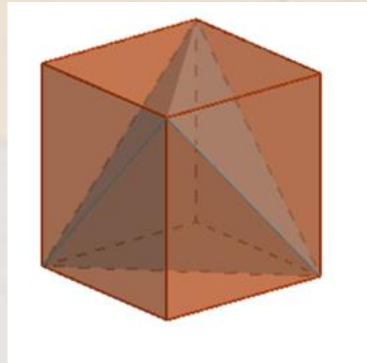
……. Il volume del tetraedro è minore di quello del cubo, è possibile includerlo nel cubo?



Provare per credere ………….

Il tetraedro inscritto nel cubo





LIBER QVARTVS. 459

hoc est, trinâ dimensione constat, nempè inter corpora, primum esse, CVBVS evincitur.

Explica primatum Tetraedri inter sectas & modum sectionis è cubo, & spe-ciem?

Diminutis corporibus, ut existat MINVS, solent existere figuræ solidæ aliæ, quarum prima esse censenda est illa, quæ existit si prima ex genitis, sc. cubus, simplicissimè & æqualissimè sectus fuerit. Non est autem sectio (earum quidem, quæ novam figuram planam designant) æquabilior, vel simplicior, quam si quatuor cubi angulos præcidas radicitus: totidem enim præcidis Tetraëdra, singula angulo solido recto *b*. basi triangulari æquilatera *a. c. d.* Relinquitur veluti quidam venter cubi, scilicet Tetraëdron quintum, undique sibi ipsi simile, quatuor nimirum triangulis æquilateris contentum. At si sectione illa vtaris cubi, de qua libro primo: non quinque sed sex irregularia fient Tetraëdra. Ex diminutis igitur, Tetraëdron est figura prima: est autem tertia pars de corpore cubi secti, & quilibet abscectus angulus *ut b a c d* est ejusdem totius pars sexta.

Problema, affrontato da Keplero nell'Epitomes Astronomiae

Lo spigolo del tetraedro è uguale alla diagonale della faccia del cubo

$$Spigolo_{Tetraedro} = \sqrt{2} \cdot Spigolo_{Cubo}$$

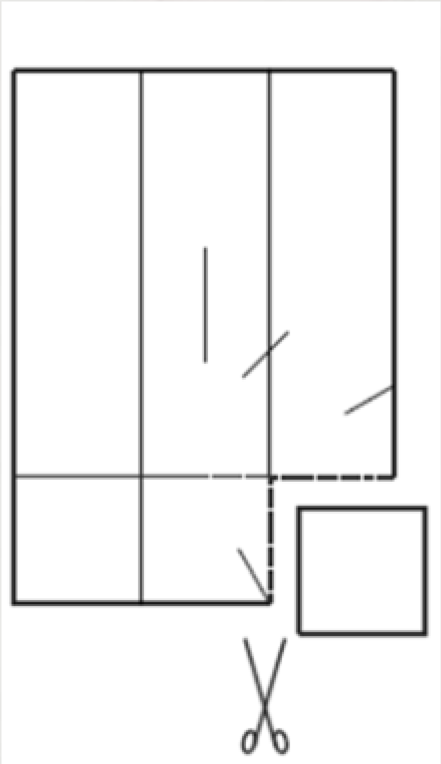
Ancora una domanda sul tetraedro: qual è la distanza tra due spigoli opposti del tetraedro?

Riempiamo gli spazi vuoti del cubo non occupati dal tetraedro.

- Quanti sono gli spazi vuoti tra la superficie del cubo e il tetraedro? Che forma hanno? Sono tutti uguali?

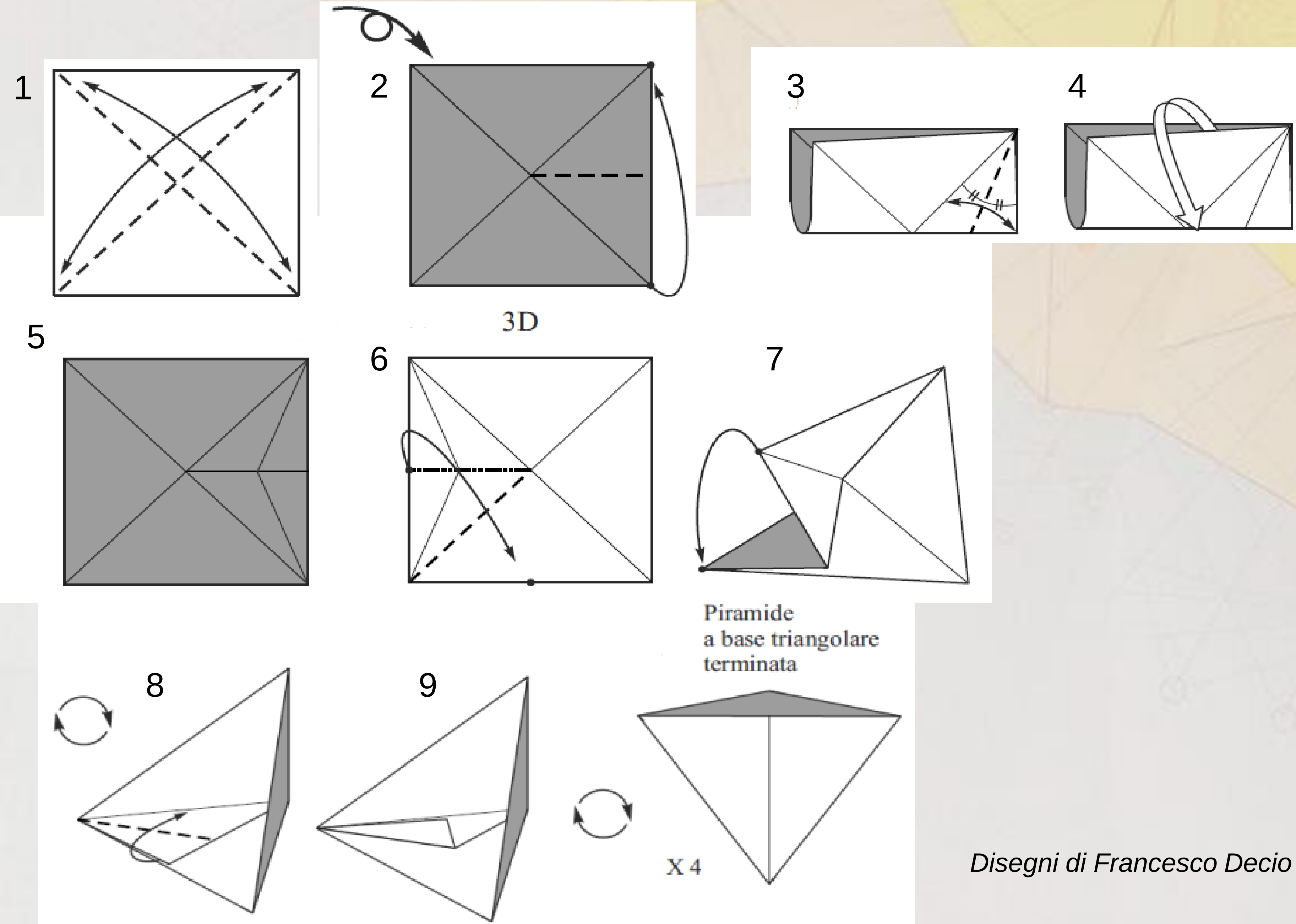
Sono quattro piramidi a facce triangolari che hanno per base la faccia del tetraedro e per spigoli tre spigoli del cubo.

Dal foglio A4 ai fogli quadrati per realizzare le piramidi angolari



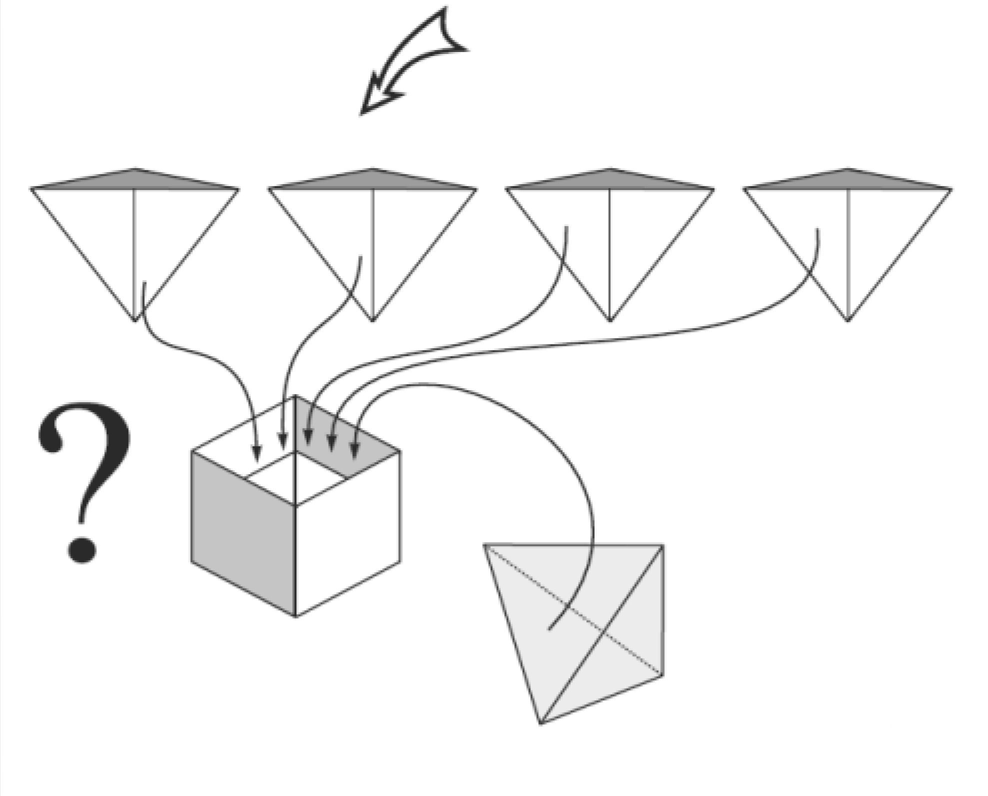
I quadrati con i quali si realizzano le piramidi angolari hanno per lato un terzo del lato corto di un foglio A4, cioè un lato di 70 mm

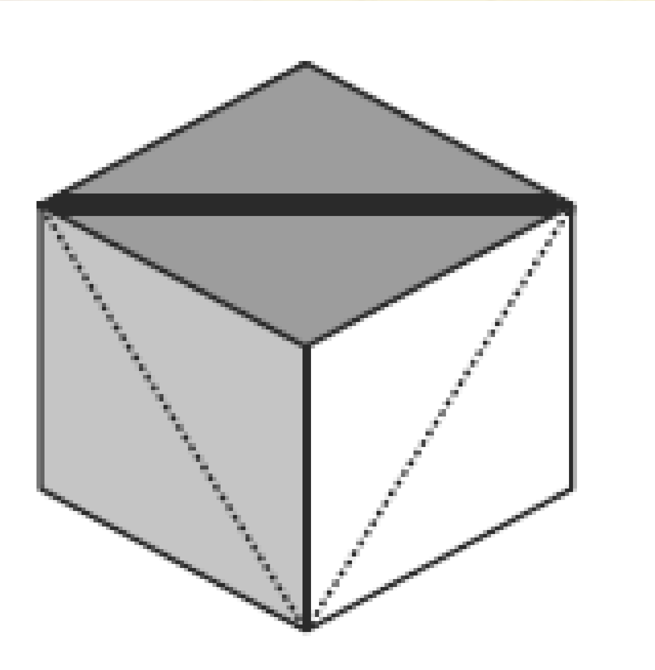
Costruzione delle quattro piramidi che riempiono gli spazi vuoti del cubo



Disegni di Francesco Decio

Le quattro piramidi angolari differenza tra cubo e tetraedro inscritto





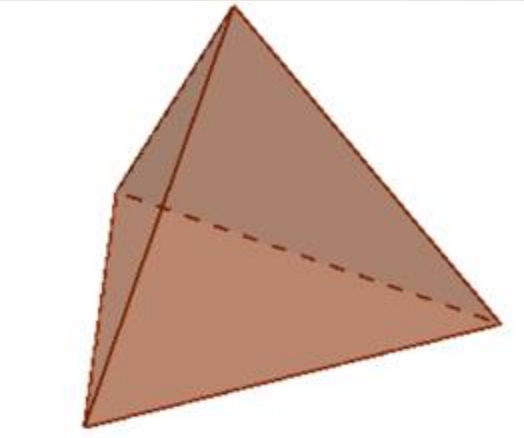
Le quattro piramidi, a base triangolare equilatera, hanno per spigoli di base gli spigoli del tetraedro e per spigoli laterali quelli del cubo.

Il volume del tetraedro che parte è del cubo in cui è incluso?

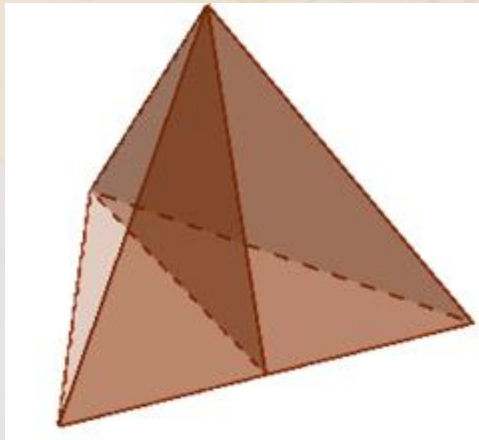
Il volume del cubo è uguale a quello del tetraedro incluso aumentato del volume delle quattro piramidi angolari.

- E se volessimo dividere il tetraedro in due piramidi uguali?
- Come dovremmo tagliarlo ? …… Dovremmo sezionarlo con quale piano?

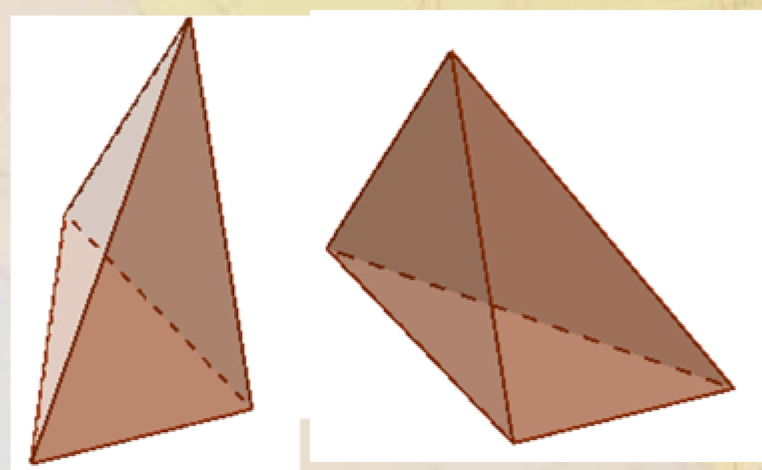
Il volume del tetraedro che parte è del cubo in cui è incluso?



Tetraedro

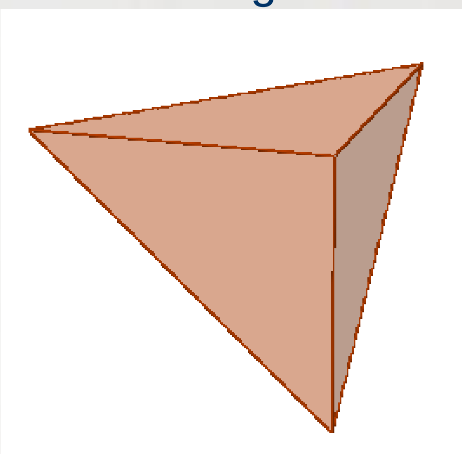


Tetraedro sezionato



Tetraedro diviso in due piramidi

Dividendo il tetraedro con un piano passante per uno spigolo e il punto medio dello spigolo ad esso sghembo si ottengono due piramidi aventi per base facce del tetraedro

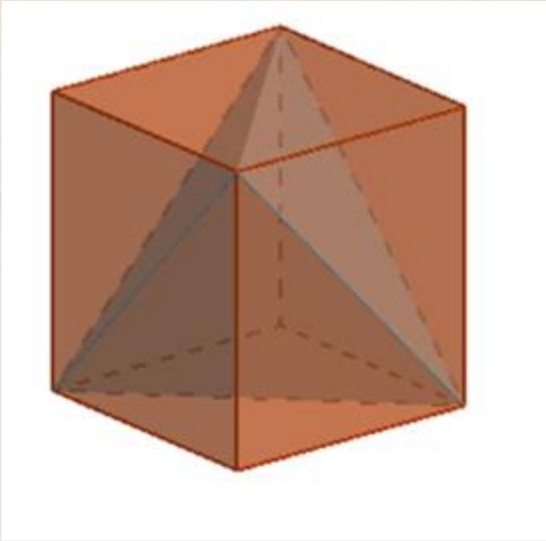


Le due piramidi in cui è diviso il tetraedro sono equivalenti alle quattro piramidi angolari:
basi uguali alla faccia del tetraedro e uguali altezze.

Il cubo è quindi costituito da sei piramidi equivalenti mentre il tetraedro da due di esse

Il volume del tetraedro è $\frac{1}{3}$ del volume del cubo in cui è incluso

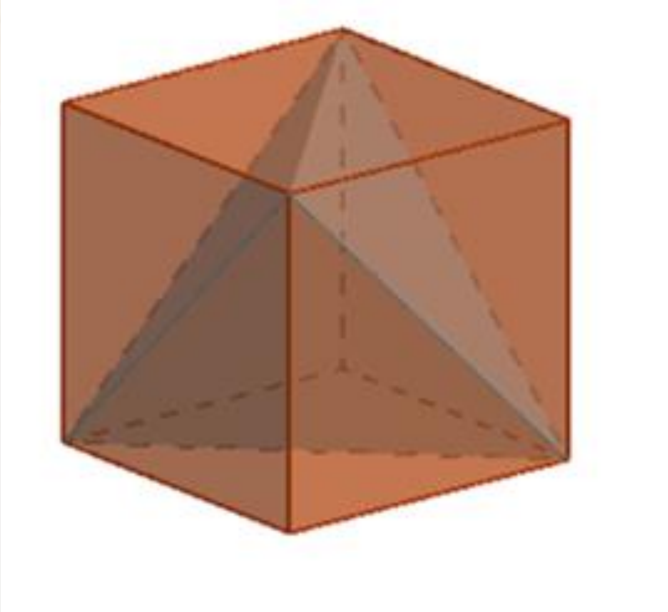
Il volume del tetraedro che parte è del cubo in cui è incluso?



Il volume del tetraedro è $\frac{1}{3}$ del volume del cubo in cui è inscritto

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{3} Volume_{Cubo}$$

Tetraedro incluso in un cubo



I sei spigoli del tetraedro coincidono con le diagonali delle sei facce del cubo.

$$l_{Tetraedro} = \sqrt{2} \cdot l_{Cubo}$$

Il percorso del laboratorio e alcune questioni in sospeso

- Da un ''*particolare*'' foglio rettangolare costruire ….quattro triangoli equilateri uguali, (un tetraedro regolare)

  Questioni lasciate in sospeso:

  Alla scoperta delle particolari dimensioni del foglio (1:$\sqrt{3}$)

  Dal foglio A4 ad un foglio 1:$\sqrt{3}$

- Da sei fogli quadrati costruire un cubo

  Il lato dei sei fogli quadrati è un terzo del lato lungo di un foglio A4 (formato 1:$\sqrt{2}$)

- Confronto tra cubo e tetraedro
  - sono entrambi poliedri regolari, confronto tra le lunghezze degli spigoli, confronto delle altezze, stima del rapporto tra i volumi.
  - Topic question: è possibile includere il tetraedro nel cubo? Verifica: provare per credere !!
  - Risultato della verifica: lo spigolo del tetraedro è $\sqrt{2}$ volte lo spigolo del cubo.

  Questioni lasciate in sospeso:

  Come si è fato ad ottenere, partendo da fogli A4, proprio un rapporto $\sqrt{2}$?

- Riempimento del cubo
  - Includendo il tetraedro nel cubo restano quattro spazi vuoti come riempirli?
  - Si tratta di quattro piramidi aventi per base la faccia del tetraedro e per spigoli laterali gli spigoli del cubo.

- Calcolo del rapporto tra il volume del cubo e quello del tetraedro incluso
- **L'esperienza dei laboratori di Geometria Origami**
- **Considerazioni didattiche**
- **La scelta e il rapporto tra i formati**

L’esperienza dei laboratori di Geometria Origami

Origami e Geometria a BergamoScienza

Origami: gioco delle mani, degli occhi e della mente. Un gioco accattivante che, attraverso l'osservazione e la manipolazione, stimola la concentrazione e la riflessione ma anche un gioco che può condurre alla scoperta (o riscoperta) di proprietà e concetti geometrici in modo diretto, intuitivo e divertente.

3 ..... 19 OTTOBRE 2014

Antonio Criscuolo MatNet

Francesco Decio BergamOrigami

BERGAMOSCIENZA 2014

MatNet-CQIA
Centro per la qualità
insegnamento – apprendimento
Università di Bergamo

BergamOrigami
oltre la piega

Geometria tra le pieghe: poliedri in origami

Mostra e Laboratorio
3 – 19 ottobre 2014

Red Temporary Lab

Galleria S. Marta
Via Crispi
Bergamo

- 42 classi partecipanti:
  9 elementari, 18 medie, 15 superiori
- 1000 studenti, 70 insegnanti
- 300 partecipanti nei weekend

Il contesto: dai laboratori ''evento'' ai laboratori itineranti Lab GO

L'idea dei laboratori itineranti nasce della partecipazione di **BergamOrigami** e del **Centro MatNet dell'Università di Bergamo** al festival Bergamoscienza nel 2013 e nel 2014 con le mostre-laboratorio:

Geometria tra le pieghe: costruire e stupirsi con l'origami

Geometria tra le pieghe: poliedri in origami

MatNet-CQIA
Centro per la qualità insegnamento – apprendimento
Università di Bergamo

Lab GO

Laboratori itineranti di Geometria origami

Dai laboratori "evento" ai laboratori itineranti

2013/2014

5 scuole, 15 laboratori: 2 classi Primaria; 7 classi Secondaria I° Grado; 6 classi Secondaria II° Grado

2014/2015

9 scuole, 37 laboratori:

12 classi Primaria; 23 classi Secondaria I° Grado; 2 classi Secondaria II° Grado

2015/2016

10 scuole, 43 laboratori: 4 classi Primaria; 39 classi Secondaria I° Grado

Discussione didattica sul laboratorio

Metodologia didattica

Cornice teorica e metodologica

Costruttivismo

L'apprendimento è il prodotto di una costruzione attiva del soggetto connessa alla situazione concreta in cui avviene e nasce dalla collaborazione sociale.

Teoria della «mente incorporata» (embodied) Lakoff (2000)

Nel creare e nell'elaborare categorie astratte partiamo da strutture senso motorie concrete.
Anche in matematica le emozioni e l'apparato sensomotorio innescano i processi che portano all'astrazione.

Metodologie didattiche, attive e interattive, utilizzate.

- Laboratorio operativo con esecuzione diretta da parte di tutti gli studenti.
- Attività di apprendistato/ modellamento (lo studente apprende imitando l'approccio dell'insegnante).
- Attività di scoperta di proprietà ''incorporate'' in oggetti matematici.
- Attività di problem solving nel gruppo classe.
- Discussione di classe (presentazione e discussione di problemi/questioni).

Modalità di conduzione

Conduzione

Primaria – Classi prime Sec. I° grado: due conduttori, l’esperto di Origami e l’insegnante di Matematica
Sec. I° grado (Classi seconde e terze) e Sec. II°: un conduttore insegnante di matematica

Spesso l’insegnante di classe e/o gli insegnanti di sostegno assistono gli studenti in difficoltà nella piegatura della carta.

Durata: 90’ - 120’

Setting e dotazioni degli studenti:

- banchi disposti a ferro di cavallo e liberi da ogni oggetto
- piccolo righello, matita, fogli di carta A4
- formati speciali di carta forniti dai conduttori

Riscontri ottenuti e elementi caratterizzanti l’esperienza

- Tutti gli **studenti partecipano attivamente al laboratorio** sorprendendo i loro i insegnanti per il coinvolgimento mostrato.

- Si crea un **ambiente d’apprendimento** che produce **incremento della motivazione e dell’interesse nel ‘’fare matematica’’.**

- Accade spesso che **studenti scarsamente interessati alla matematica intervengano** nella discussione di **classe in modo pertinente e brillante manifestando competenze visuospaziali non emerse in precedenza**

- **Gli studenti più competenti in matematica assumono un ruolo guida** nella discussione di classe.

- **Gli studenti con disabilità**, nella maggior parte dei casi, **svolgono l’attività al pari dei compagni.**

Coinvolgimento degli insegnanti

- **Scelta delle attività e dei temi** da sviluppare nei laboratori.

- **Incontri di formazione/aggiornamento**: uno o due incontri in occasione dello svolgimento dei laboratori.

- Consegna di **schede e documentazione** per prepararsi a svolgere in autonomia i laboratori.

Selezione e progettazione delle attività e dei modelli

Pieghe e modelli

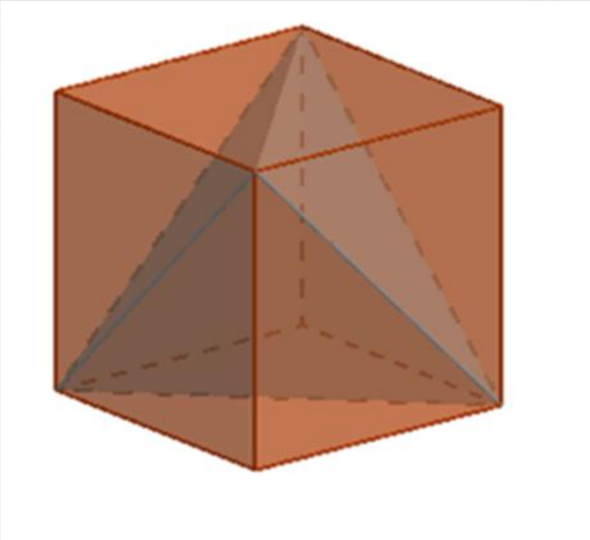
Prima valutazione in collaborazione tra esperto di origami e insegnante di matematica.

- Pieghe di **semplice esecuzione** per realizzare **figure geometriche sulla carta** come si potrebbe fare con riga e compasso o con le squadrette.
- **Modelli origami noti** di semplice esecuzione ma **ricchi di implicazioni geometriche e aritmetiche.**
- **Modelli originali** pensati per sviluppare alcuni temi geometrici.

Criteri di scelta:

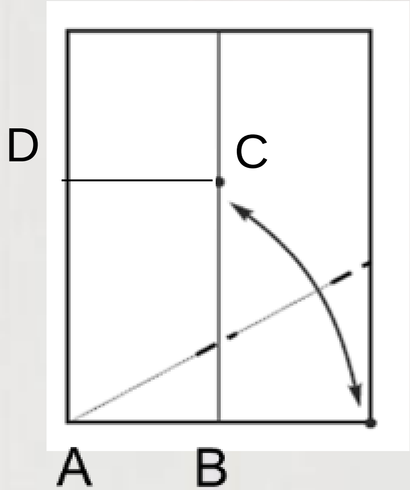
- **Semplicità** di esecuzione.
- **Ricchezza** di proprietà geometriche coinvolte.
- Presenza di **aspetti anti intuitivi** o comunque **inaspettati**.
- **Significatività per lo studente.**
- **Caratteristiche ludiche** del modello realizzato.

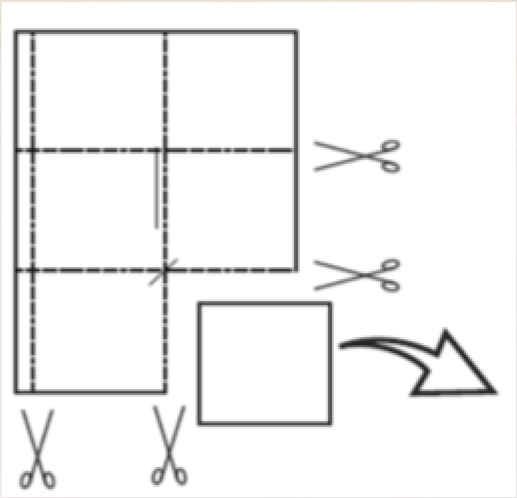
I formati della carta per costruire tetraedro, cubo e piramidi angolari

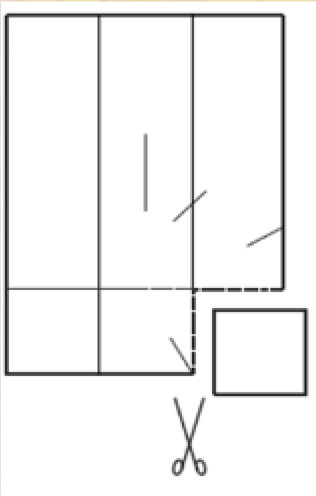


Da tre fogli A4 i modelli per l'inclusione del tetraedro nel cubo e il suo riempimento con quattro piramidi.

Foglio A4: Formato $1 \times \sqrt{2}$ 210 mm x 297 mm







Per la costruzione
del tetraedro incluso

Foglio $1 \times \sqrt{3}$

105 mm x 182 mm

Per la costruzione
del cubo

Sei fogli quadrati

99 mm x 99 mm

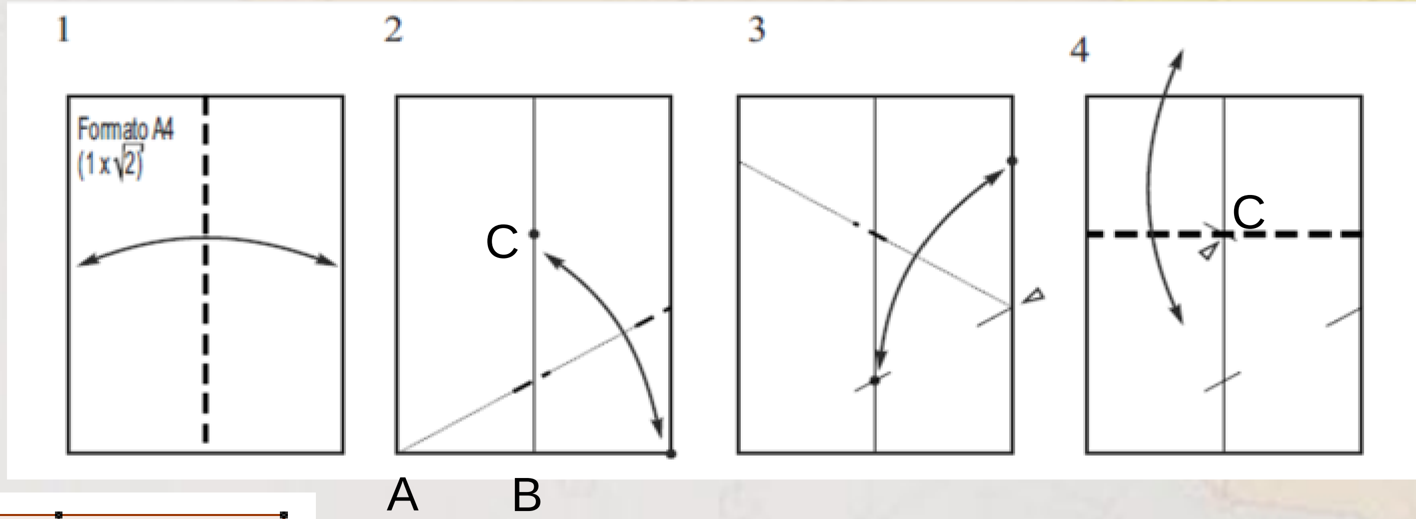
Per la costruzione
delle quattro piramidi incluse

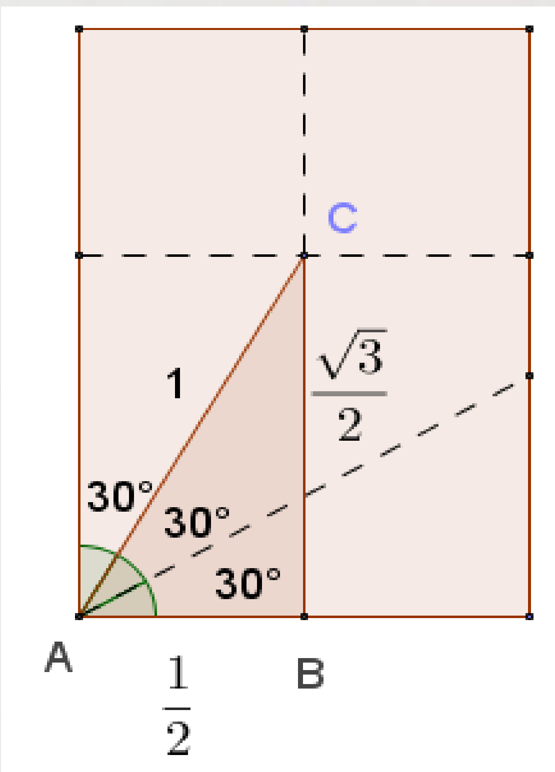
Quattro fogli quadrati

70mm x 70 mm

Come mai queste misure consentono una perfetta inclusione ?

Dal foglio A4 al formato $1:\sqrt{3}$ per costruire il tetraedro





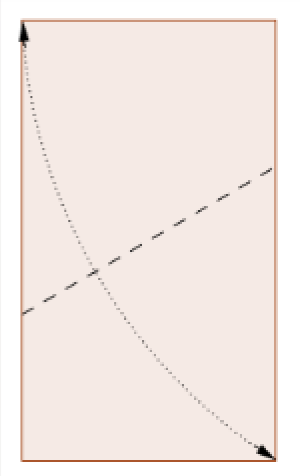
Triangolo ABC: metà triangolo equilatero

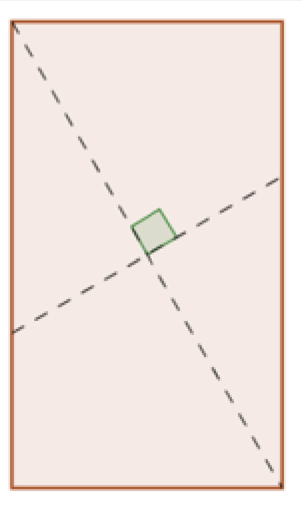
$$\frac{CB}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

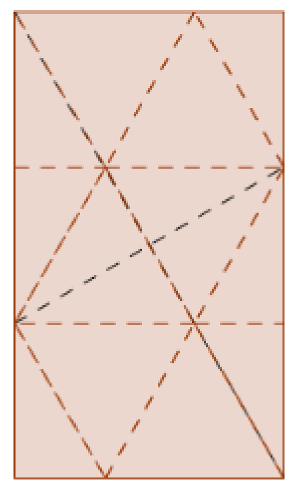
Lo studio dello schema delle pieghe: proprietà del formato $1 \times \sqrt{3}$

La piega che porta a sovrapporre vertice a vertice opposto («piega madre»):

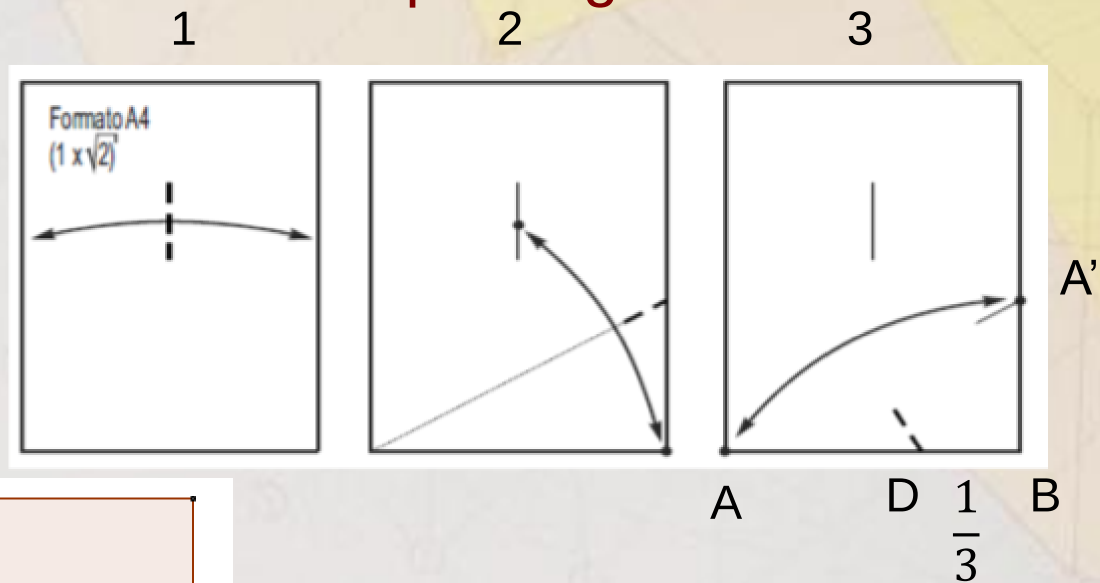
- divide il foglio in due trapezi rettangoli uguali di angoli 60° e 120°
- divide i lato lungo del rettangolo in due parti di cui una è il doppio dell'altra
- la piega che porta la «piega madre» a sovrapporsi a se stessa (diagonale del rettangolo) divide il foglio in due triangoli rettangoli 30° - 60° metà del triangolo equilatero di lato doppio del lato corto del foglio e di altezza pari al lato lungo del foglio
- a partire da essa, le pieghe suddividono il foglio in 6 triangoli equilateri e 6 triangoli rettangoli 30° - 60° metà dei triangoli equilateri, il tutto pari a 9 triangoli equilateri (gli stessi in cui resta diviso un triangolo equilatero equivalente al foglio rettangolare)
- il lato dei triangoli equilateri che si formano è pari ai $\frac{2}{3}$ del lato corto del foglio
- l'altezza dei triangoli equilateri che si formano è pari ad $\frac{1}{3}$ del lato lungo del foglio

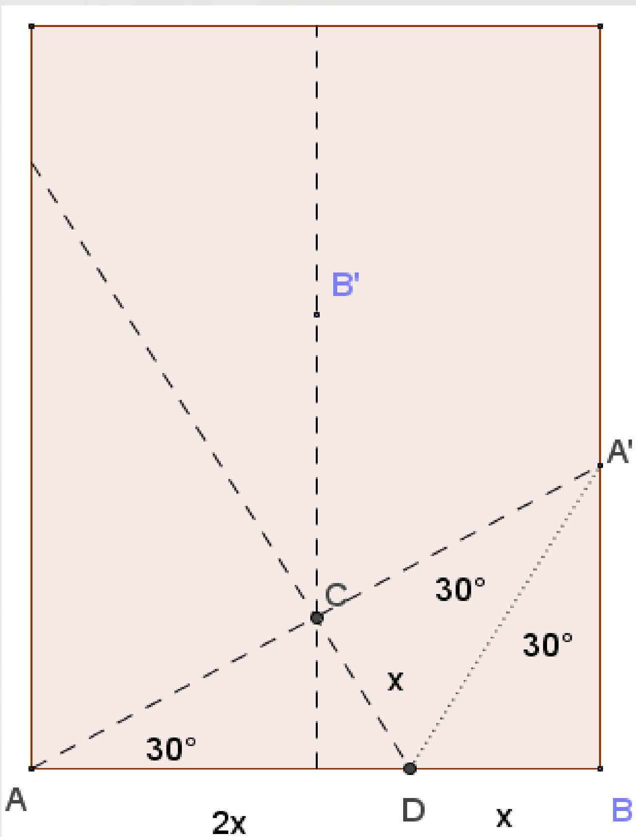






La divisione in tre parti uguali del lato corto A4



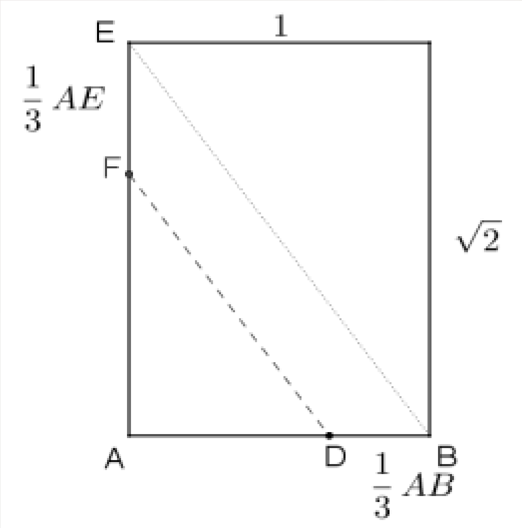


ACD = A'CD = A'BD triangoli rettangoli 30°-60°

AD = A'D = 2 CD = 2 DB

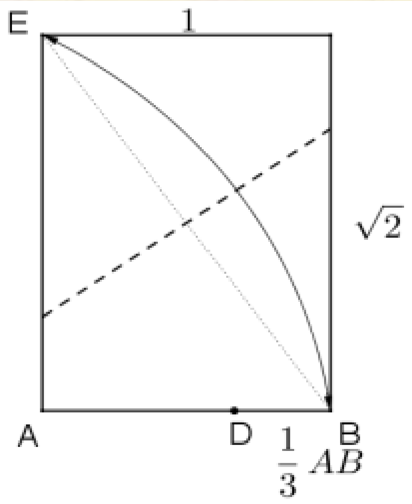
$$DB = \frac{1}{3}AB$$

Dalla divisione in tre parti uguali del lato corto A4 a quella del lato lungo

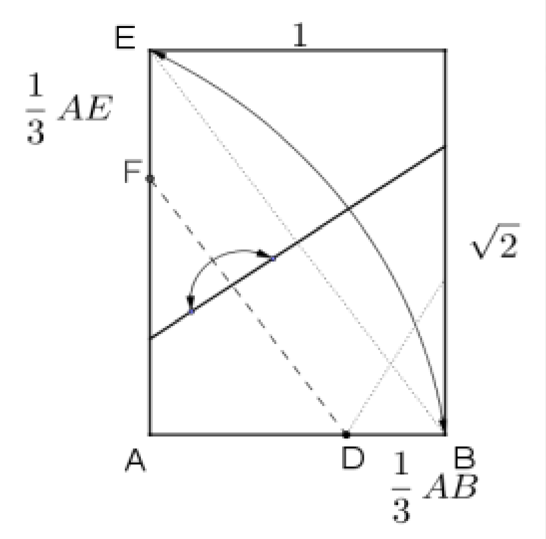


Si può utilizzare il teorema di Talete tracciando la parallela alla diagonale EB passante per D

Nella geometria della piegatura della carta la parallela ad una retta si traccia come perpendicolare alla perpendicolare



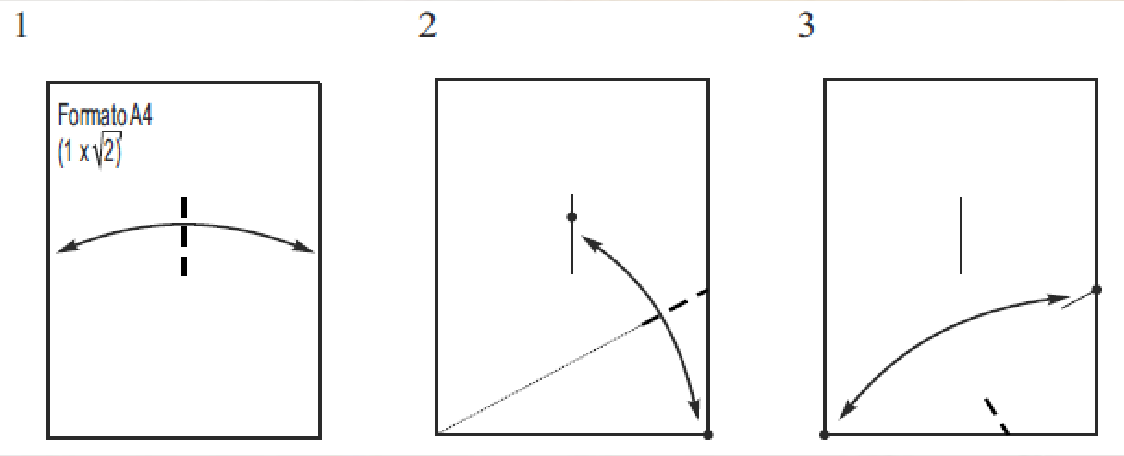
1. Sovrapporre B ad E per ottenere una piega perpendicolare alla diagonale EB



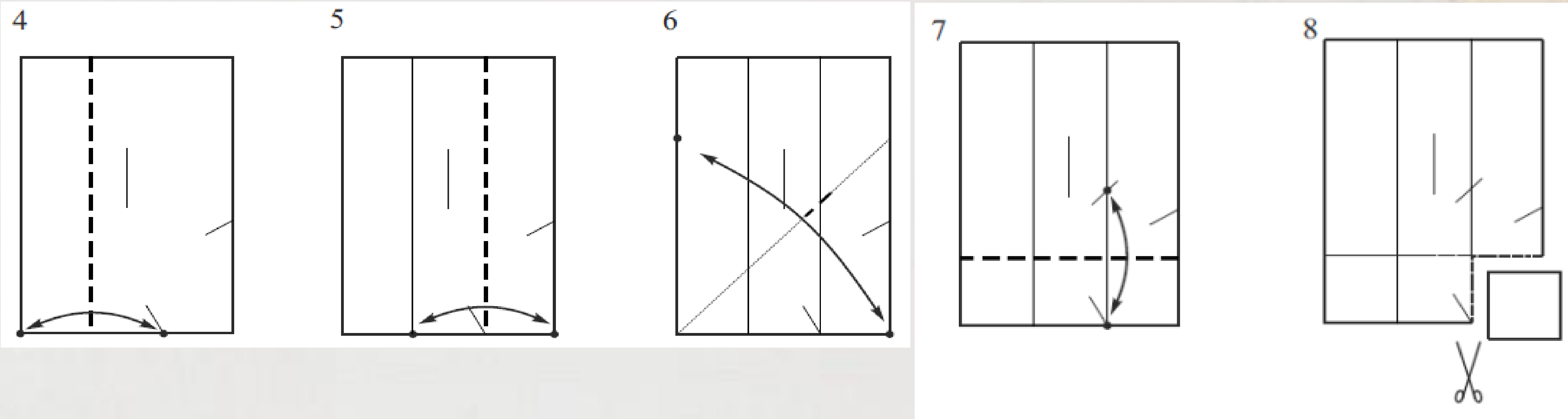
2. Sovrapporre la piega ottenuta a se stessa tenendo fisso il punto D

$$EF = \frac{1}{3}EA$$

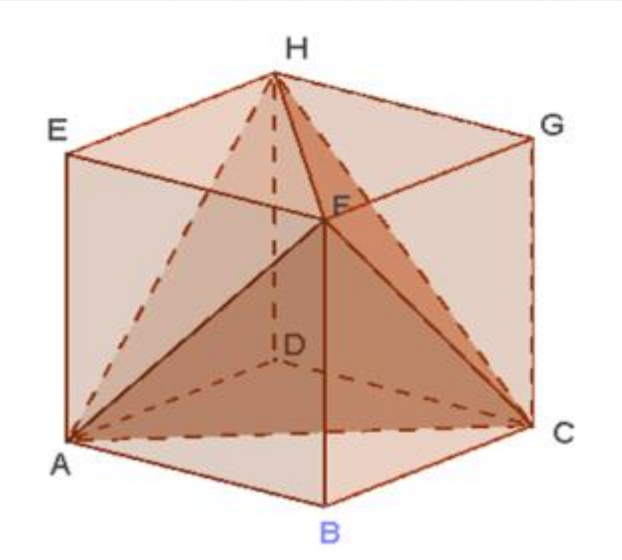
Il foglio per le quattro piramidi che riempiono gli spazi vuoti differenza tra cubo e tetraedro inscritto

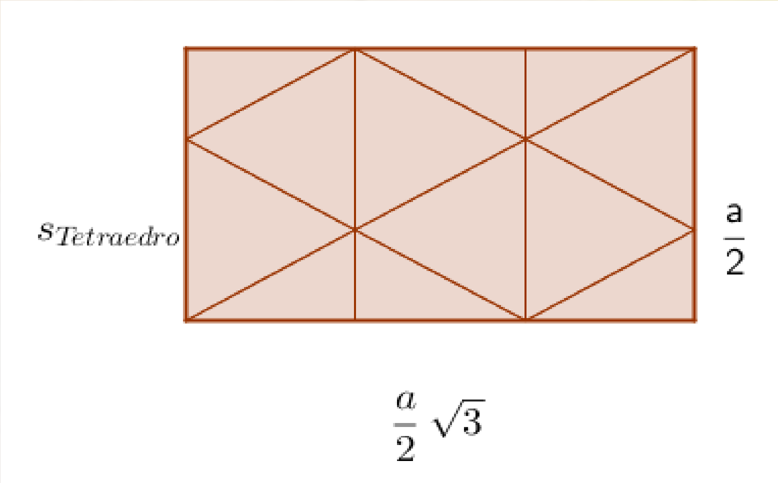


4 quadrati di lato $\frac{1}{3}$ del latocorto A4



Relazioni tra le dimensioni del foglio e lo spigolo del tetraedro

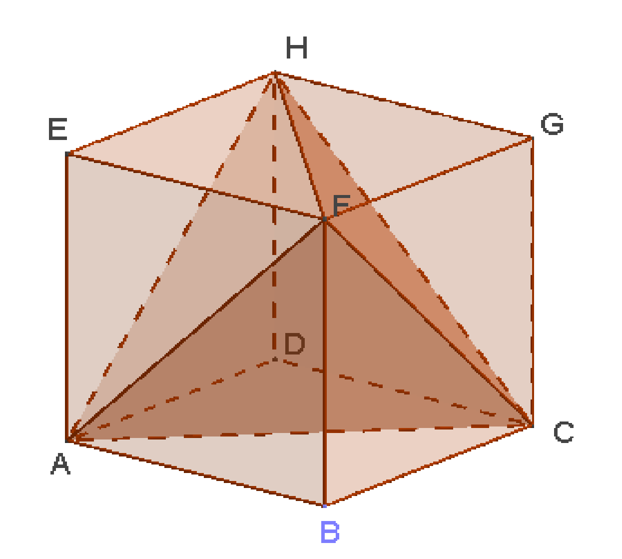


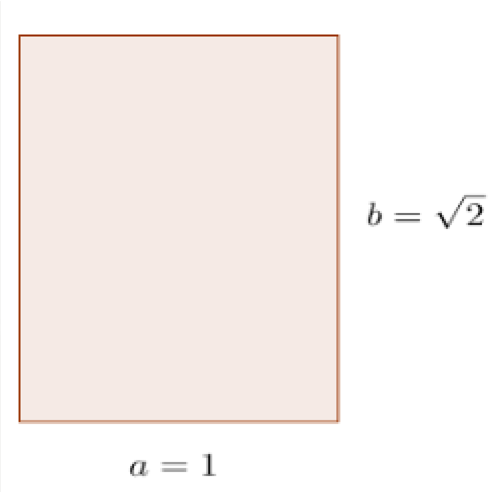


Lo spigolo del tetraedro è i $\frac{2}{3}$ della metà del lato corto del foglio A4:

$$S_{Tetraedro} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\, a = \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} 210 = 70\ mm$$

Relazioni tra le dimensioni del foglio e lo spigolo del cubo



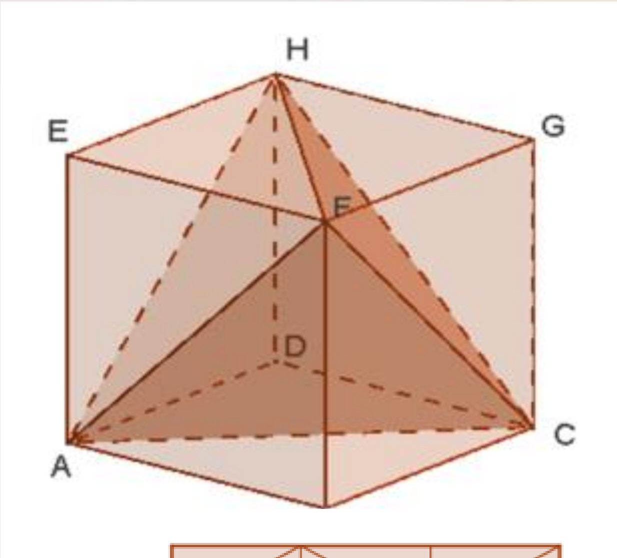


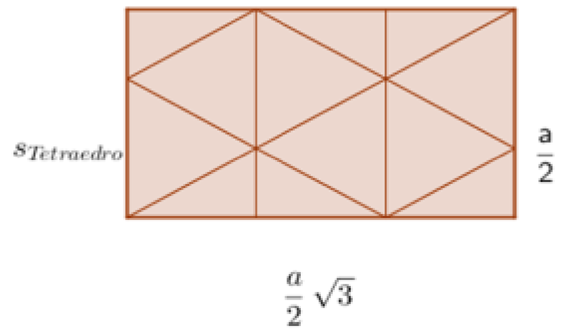
Lato lungo del foglio A4: $b = 297\ mm$

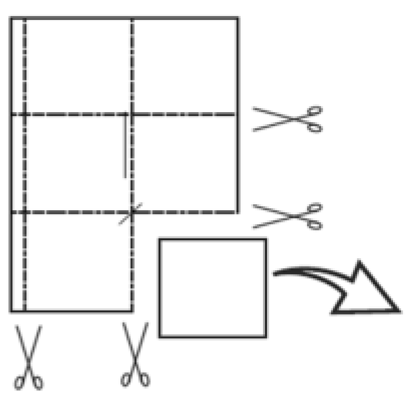
Lo spigolo del cubo è la metà del lato del foglio quadrato ottenuto dividendo in tre parti il lato lungo del foglio A4

$$S_{Cubo} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\, a = \frac{\sqrt{2}}{6} a = 0{,}236a = 49{,}5\ mm\ \approx 5\ cm$$

Rapporto tra lo spigolo del tetraedro e quello del cubo in cui è incluso





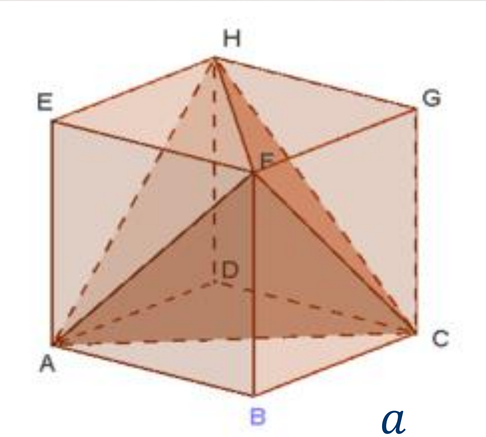


Formato A4

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

$$\frac{s_{Tetraedro}}{s_{Cubo}} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}b} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{6}\sqrt{2}a} = \sqrt{2}$$

Relazioni tra le dimensioni del foglio A4 e gli spigoli delle piramidi angolari



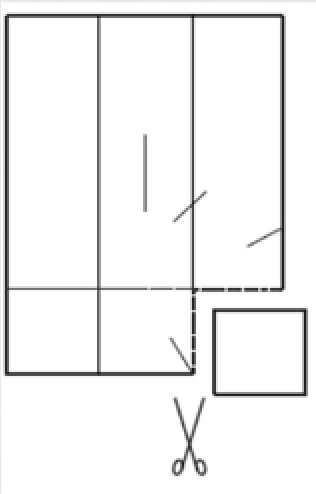
Le piramidi angolari hanno come spigolo di base lo spigolo del tetraedro e come spigoli laterali gli spigoli del cubo quindi:

$$s_{base\ Piramidi} = \frac{a}{3}$$

Un terzo lato corto del foglio A4, spigolo del tetraedro 70 mm

$$s_{laterali\ Piramidi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot b = \frac{\sqrt{2}a}{6}$$

Un sesto del lato lungo A4, spigolo del cubo 49,5 mm

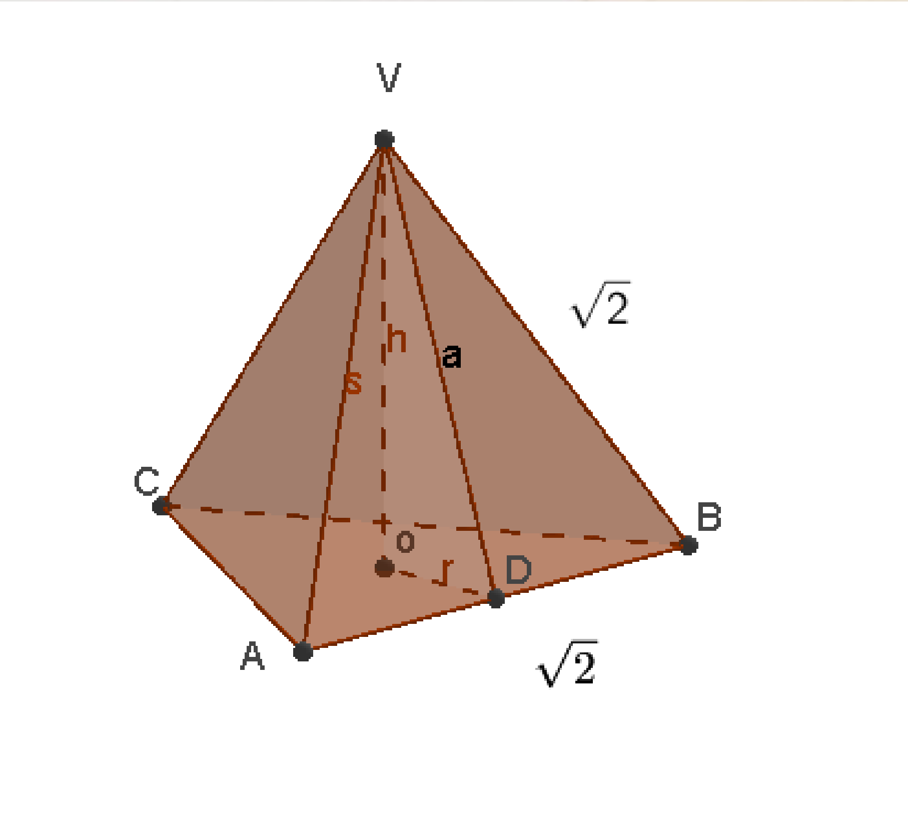


Quattro fogli quadrati

70mm x 70 mm

$$\frac{70}{49{,}5} = \frac{140}{99} = 1,\overline{41} \cong \sqrt{2}$$

Calcolo del volume del tetraedro di spigolo $\sqrt{2}$



$$\overline{CD} = \overline{VD} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\overline{VO} = \sqrt{\overline{VD}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'altezza del tetraedro è cateto del triangolo rettangolo che essa forma con l'apotema e il raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero base del tetraedro.

$$V = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3}$$

Il volume del tetraedro inscritto nel cubo è un terzo di quello del cubo

GRAZIE

antonio.criscuolo@unibg.it

ilaria.criscuolo@virgilio.it