

XXXIII convegno UMI-CIIM - Pavia (7-9 ottobre 2016)

"Criticità per l'insegnamento della matematica nella scuola di oggi"

Matematica accessibile e inclusiva: esempi di attività





S. Abbati, B. Baldi, S. Beltramino, A. Berra, E. Calemma, A. Cena, P. Curletti, M. Dalè,

A. Drivet, S. Fratti, L. Genoni, A. Ghersi, P. Gulino, C. Idrofano, M. Mattei, D. Pavarino,

F. Raina, A. Rongoni, D. Sasso, C. Soldera, G. Trinchero

Progetto di ricerca

«Metodologie, tecnologie, materiali e attività per un apprendimento della matematica accessibile e inclusivo»

Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Torino Fondazione CRT

Responsabile: Prof. ssa Ornella Robutti

Partecipante al progetto: Prof. Ferdinando Arzarello

Insegnanti che hanno collaborato: S. Abbati, B. Baldi, S. Beltramino, A. Berra, E. Calemma, A. Cena, P. Curletti, M. Dalè, A. Drivet, S. Fratti, L. Genoni, A. Ghersi, P. Gulino, C. Idrofano, D.Pavarino, F. Raina, A. Rongoni, D.Sasso, C. Soldera, G.Trinchero

Partecipanti ad altri aspetti del progetto: Prof.ssa Capietto, Prof.ssa Pavone e Dott.ssa Armano

Obiettivo del progetto

Trasformare la didattica dei Bisogni Educativi Speciali nella Didattica di TUTTI, tenendo conto delle difficoltà a ogni passo

Le attività create sono inclusive sotto tutti i punti di vista:

- progettazione
- sperimentazione in classe
- analisi dei risultati
- valutazione

Il Sistema Scolastico italiano

- All'avanguardia rispetto al tema dell'inclusione
- Mette in atto procedure, metodologie, pratiche quotidiane e organizzative per:
 - migliorare sempre più la qualità dell'inclusione
 - permettere a ciascuno di partecipare alla vita di classe ed all'apprendimento, nella maniera più attiva, autonoma ed utile possibile
- L'inclusione si articola in accoglienza, solidarietà, equità,
 valorizzazione delle diversità e delle potenzialità di ciascuno

Perché?

Tutti possono incontrare difficoltà

«Nell'esercizio dell'autonomia didattica le istituzioni scolastiche [...] possono adottare tutte le forme di flessibilità che ritengono opportune e tra l'altro: l'attivazione di percorsi didattici individualizzati, nel rispetto del principio generale dell'integrazione degli alunni nella classe e nel gruppo...»

(DPR 275/99, art.4)

- Laboratorio di matematica (UMI CIIM SIS)
- Attivismo pedagogico (Dewey)
- Apprendimento naturale (Freinet)
- Intelligenze multiple (Gardner)
- Apprendimento percettivo-motorio (Antinucci)
- Embodiment (Lakoff Nunez)

John Dewey (1859-1952)

«Il pensiero non connesso con un aumento di efficienza per l'azione, e con l'imparare un po' di più su noi stessi e sul mondo nel quale viviamo, zoppica proprio in quanto pensiero»

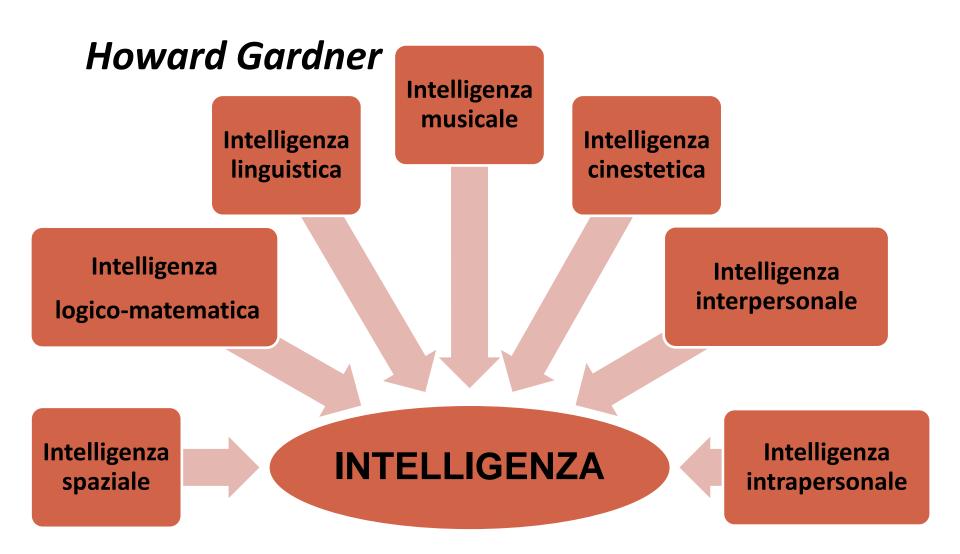
Didattica basata su:

- esperienza
- problemi reali
- uso materiali quotidiani

Apprendimento democratico

Célestin Freinet (1896-1966)

- Lo studente e le sue esigenze sono al centro del sistema
- Apprendimento per tentativi
- Apprendimento basato sulla realtà
- Scuola laboratorio
- Ambiente cooperativo



Francesco Antinucci

Apprendimento percettivo – motorio:

- percezione e azione motoria sulla realtà
- modalità di apprendimento per «tentativi ed errori»
- la conoscenza emerge gradualmente
- condizione necessaria: poter fare esperienza del reale

George Lakoff & Rafael Nunez

«Teoria dell'embodiment»:

la costruzione di significato parte dall'esperienza corporea

La scuola deve favorire:

- approcci basati sugli aspetti percettivi ed empirici
- ambienti di apprendimento che stimolino l'interazione

Spunti utili dal Laboratorio di Matematica (UMI-CIIM-SIS)

- metodologia di lavoro e non luogo fisico
- utilizzo di strumenti manipolativi
- lavorare su una ricaduta nel lungo periodo
- attenzione alle dimensioni sociale ed emotiva

Inclusione... nella progettazione

- Favorire l'uso di diversi canali di apprendimento (cinestetico, percettivo-motorio, visivo-non verbale, ...)
- Redazione dei materiali di lavoro:
 - font accessibile
 - sintassi semplice
 - frasi brevi
 - parole appartenenti al lessico noto
 - le domande non devono essere a loro volta un ostacolo

Inclusione... nella progettazione

- Attenzione all'aspetto grafico dei materiali:
 - evidenziare in grassetto le parole chiave
 - utilizzare immagini (con didascalie se necessario)
 - utilizzare (se possibile) i colori
 - CARATTERI GRANDI e interlinea grande

L'obiettivo curricolare non viene semplificato, ma reso accessibile.

Se l'allievo incontra una difficoltà essa è intrinseca all'argomento, non al modo in cui viene proposto.

Inclusione... nella pratica didattica

- Adattamento dell'aula all'attività e non il contrario
- Lavoro a coppie/piccoli gruppi eterogenei
- Apprendimento tra pari
- Collaborazione per costruire il sapere
- Discussione nei gruppi e collettiva
- Nuovo ruolo del docente: mediatore, non dispensatore di saperi

Inclusione... nell'analisi dell'attività

Riferimento teorico

Quadro di riferimento semiotico – culturale: analisi dei gesti, delle parole e dei segni

Strumenti per l'analisi qualitativa e quantitativa:

- Test prima e dopo l'attività
- Schede di lavoro
- «Questionario di gradimento»
- Filmati

I numeri del progetto

- Insegnanti coinvolti: 19
- Classi coinvolte: 20
- Studenti coinvolti: 427
 (di cui 61 BES)
- Tesi di Laurea in Matematica: 3

Attività sperimentate

Scuola secondaria di primo grado

- L'albero maestro
- Lo scaffale

Scuola secondaria di secondo grado

- L'orologio
- La diagonale
- Derivata: incremento dal discreto al continuo
- Massimi, minimi e funzioni a due variabili con modelli di stampa 3D

Attività sperimentate

Scuola secondaria di primo grado

- L'albero maestro
- Lo scaffale

Scuola secondaria di secondo grado

- L'orologio
- La diagonale
- Derivata: incremento dal discreto al continuo
- Massimi, minimi e funzioni a due variabili con modelli di stampa 3D

(adattamento dell'attività M@t.abel «L'albero maestro»)

Destinatari: classe prima di scuola secondaria di I grado

Nucleo: geometria

Nodi concettuali: distanza e altezza

Obiettivi:

- costruire il significato di distanza, perpendicolare e altezza
- tracciare l'altezza delle figure piane
- sviluppare capacità espressive

Destinatari: classe terza di scuola secondaria di I grado

Nucleo: geometria

Nodo concettuale: altezza e perpendicolarità nello spazio

Obiettivi:

- visualizzare spazialmente le caratteristiche dei poliedri
- individuare piani paralleli
- riconoscere condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra rette e piani nello spazio

Attività «Diagonale»

Destinatari: primo anno scuola secondaria di II grado

Nucleo prevalente: numeri

Nodo concettuale: numeri naturali e numeri primi tra loro Obiettivi:

- porsi e risolvere problemi
- generalizzare a partire da casi particolari
- formulare congetture e validarle
- giustificare le congetture tramite dimostrazione (Competenze trasversali a lungo termine: processo 6 del QdR Invalsi per il II ciclo)

Attività «Modelli 3D»

Destinatari: secondo biennio, in particolare quinta liceo economico sociale

Nucleo: geometria, relazioni e funzioni

Nodo concettuale: geometria solida, funzioni a due

variabili e matematica per l'economia

Obiettivi:

- sviluppare la capacità di formulare congetture ragionando su un modello 3D e verificarle
- riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi di modellizzazione
- riconoscere le funzioni a due variabili necessarie per l'economia

E ora... al lavoro!

- Scegliete l'attività che volete sperimentare
- Dividetevi in gruppi di 3 4 persone
- Lavorate come studenti

20 minuti di tempo

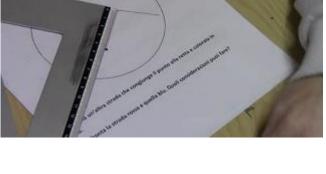
Attività realizzate

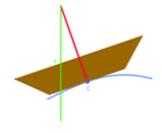
- Costruzione della perpendicolare in palestra, con i nastri.
- Realizzazione di modellini di carta.
- Utilizzo di software di geometria dinamica (GeoGebra).
- Utilizzo degli strumenti da disegno per la costruzione della perpendicolare.

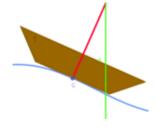


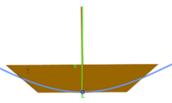
Esempi di attività manipolative

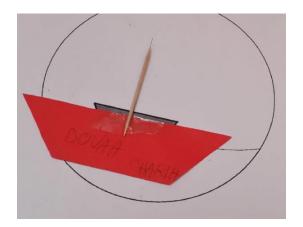


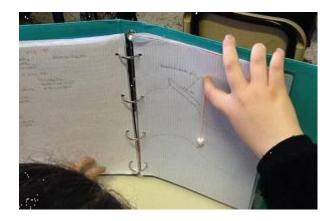




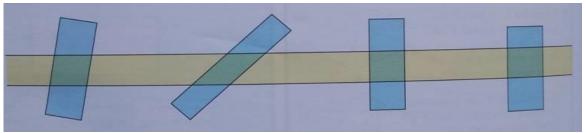












Fase 1: consegna di un foglio rettangolare con un cerchio contenente la barca sulla quale disegnare l'albero maestro. In un secondo tempo si realizzerà un modellino di cartoncino della barca sulla quale si posizionerà uno stuzzicadenti come albero maestro e si confronterà con il disegno.

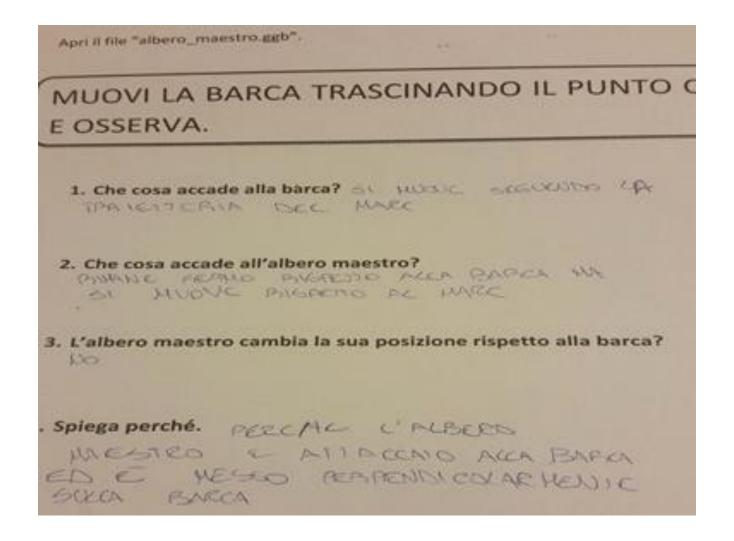
Fase 2: utilizzo del software GeoGebra con la LIM per evidenziare se lo spostamento della barca determini o meno variazioni della posizione dell'albero maestro.

Fase 3: si prevede l'uso del corpo; la consegna è quella di trovare il tragitto più breve per raggiungere il muro da un punto assegnato e di scoprirne le caratteristiche.

Fasi 4 e 5: si propongono due semplici situazioni dove si richiede di disegnare la distanza fra un punto ed una retta in ambiti contestualizzati.

Fase 6: si procurano strisce di carta e con le modalità della piegatura e del disegno si evidenzia la distanza fra le due rette che delimitano le strisce.

L'attività costituisce il raccordo fra il concetto di distanza e altezza delle figure piane. Infatti dopo aver definito l'altezza delle due strisce (di carta velina o da lucido), con la loro sovrapposizione si evidenziano le altezze del quadrilatero che si viene a formare.

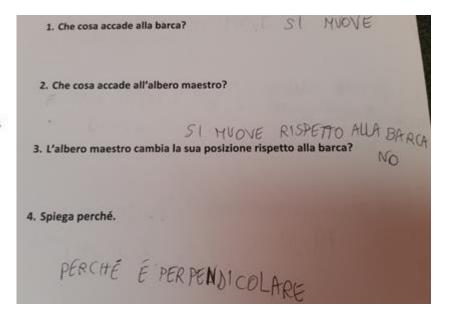


- 1. Che cosa accade alla barca? SI HUOVE E L'ALBERO RIMANE
 PERRENDICOLARE
- 2. Che cosa accade all'albero maestro? BIHANE PERFENDICOLARE

L'albero maestro cambia la sua posizione rispetto alla barca?

No RIMANE UGUANE

4. Spiega perché. PERCHÉ LA BARCA SI MUNE MA L'ALBERO NO.



Gradimento dell'attività

L'attività è stata gradita da tutti i ragazzi, compresi gli alunni con DSA e i più fragili dal punto di vista relazionale.

Emanuele: «... c'era aiuto reciproco e così è più facile capire»

Natalie: «... se qualcuno non capisce qualcosa il compagno lo aiuta... è bello aiutarsi a vicenda»

Momi: «... perché così si avevano due menti e ci si poteva confrontare"»

Il lavoro si inserisce in un percorso più articolato, ideato per affrontare il passaggio dalla geometria nel piano a quella nello spazio. Precedentemente gli allievi hanno già affrontato la lettura del libro "Flatlandia" di E. A. Abbott (1993) e visionato il cortometraggio realizzato da M. Emmer sul medesimo testo. Inoltre i ragazzi si sono già avvicinati al mondo tridimensionale sia utilizzando il software dinamico SketchUp per condurre attività di tipo esplorativo, sia costruendo loro stessi dei modelli in carta di solidi, partendo da descrizioni verbali delle loro caratteristiche.

Fase 1: presentazione della situazione problematica

Gianni sta riordinando camera sua.

Non ha ancora trovato dove sistemare gli oggetti che vedi fotografati qui di seguito.

Vorrebbe disporli su uno scaffale che ha i piani posizionati a 35 cm l'uno dall'altro.

Riuscirà a metterli sullo scaffale?

Utilizzando le immagini, spiega come faresti per aiutarlo a rispondere.

Fase 2: discussione collettiva sulle diverse ipotesi di soluzione.

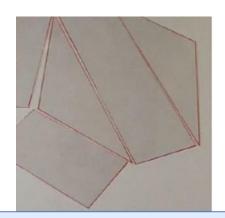


Fase 3: divisione della classe in piccoli gruppi eterogenei, strutturazione del setting d'aula e consegna dello sviluppo piano di un solido che andrà costruito

Fase 4, 5: individuazione delle altezze e loro "materializzazione"

Fase 6: formalizzazione del concetto di altezza

Fase 7: ridistribuzione della scheda iniziale



"Ti immagini se questa fosse le base?"



Dal piano allo spazio: un vero problema!



"Ma non saranno due i solidi?"

"Ma così non si chiude..."



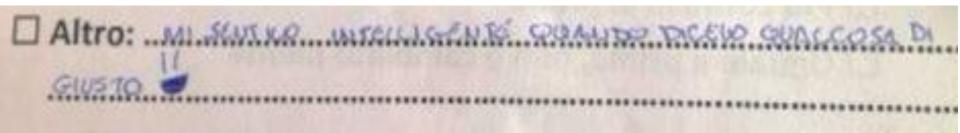


Apprendimento cinestetico: il punto di forza



Impossibile distinguere gli allievi con difficoltà dai compagni

Questionario di gradimento



Charce 266 and di altre component. del supper mi sono stati.
d'ainte mel capire i caracette che vai erano più diffichi da comprende

"..Grazie all'aiuto di altri componenti del gruppo i quali mi sono stati d'aiuto nel capire i concetti che mi erano più difficili da comprendere.."

"Siamo dei geni!!"

DI PENDE DALLE DIMESIONI DELLE ALTE ZE

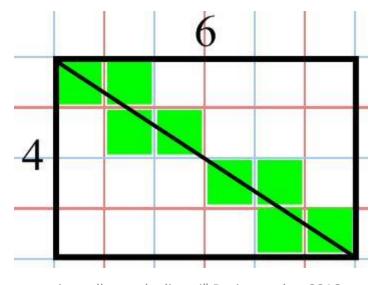
la missione é ambito perhé se misuri shopré la alterra delle saufole e della systeto, che perché ost saé sé la resfole é quello giurts les quello baglioto la mise risporta é directata si.

"la mia opinione è cambiata perchè se misuri sempre l'altezza dello scaffale e dell'oggetto, perchè così sai se lo scaffale è quello giusto ho quello sbagliato la mia risposta è diventata si"

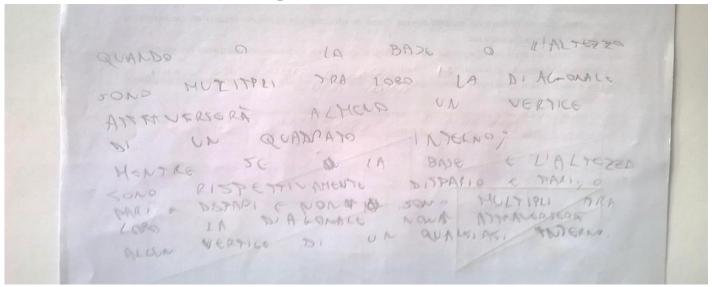
Il ruolo di GeoGebra

- Supporto nell'esplorazione
- Stimolo per la formulazione di congetture e la loro validazione
- Collegamento tra registri diversi

b	h	n
1	5	5
2	15	16
9	8	16
22	9	30
45	28	?
225	128	?



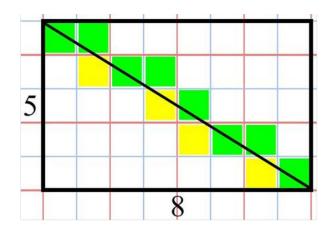
Formulare una congettura

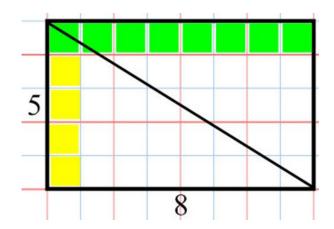


«Quando o la base o l'altezza sono multipli tra loro la diagonale attraverserà almeno un vertice di un quadrato intero; mentre se la base e l'altezza sono rispettivamente dispari e pari, o pari e dispari e non sono multipli tra loro la diagonale non attraverserà alcun vertice di un qualsiasi interno»

Generalizzare, giustificare, dimostrare

- Quale formula hanno utilizzato Bea e Alberto per compilare le ultime righe della tabella?
- Puoi spiegare perché la formula funziona?
- E se *b* e *h* non sono primi fra loro? Sapresti scrivere una formula che ti permetta di calcolare *n*?

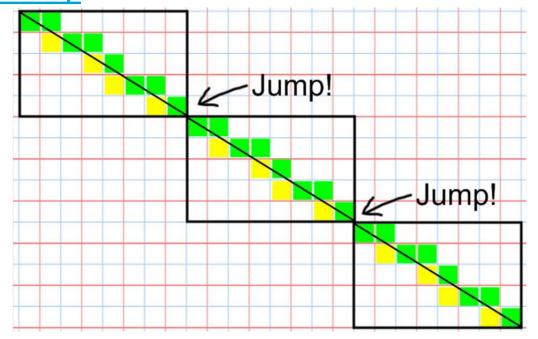




Generalizzare, giustificare, dimostrare

Una dimostrazione visuale:

http://www.mickybullock.com/blog/2010/06/the-diagonal-problem/

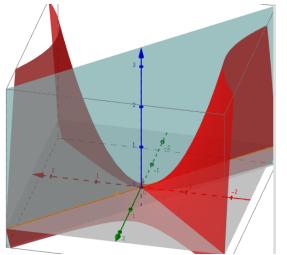


Gli strumenti

Modelli 3D



GeoGebra



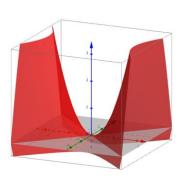
Il ruolo dei modelli 3D

Manipolativo

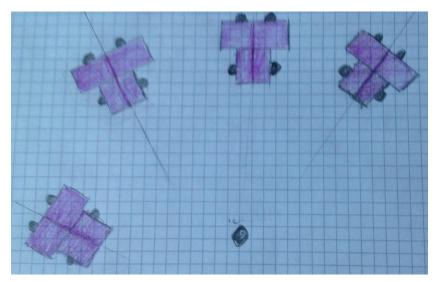


Il ruolo di GeoGebra

- Supporto nell'esplorazione
- Stimolo per la formulazione di congetture e la loro validazione
- Collegamento tra registri diversi



Disposizione della classe





Funzioni utilizzate

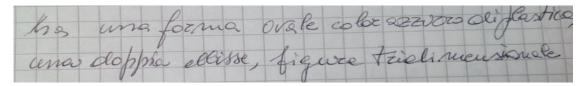
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{18}y^2$$
$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

 $f(x,y) = -6x^2 - 1.5y^2 + 9xy$ (funzione domanda, dove x è il prezzo del bene e y è il reddito del consumatore)

Punti critici:

- ambiguità nel concetto di "stabilità" (intesa relativamente all'oggetto stesso, richiamo fisico)
- concetto di sezione: spesso la figura tridimensionale viene descritta tramite una sua sezione.



"... ha una forma ovale color azzurro di plastica, una doppia ellisse, figura tridimensionale"

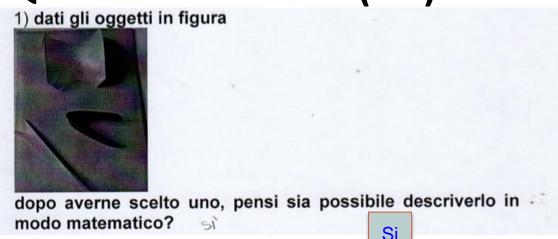
Spunti di riflessione

- Il modellino concreto risulta essere un ostacolo nel percepire la superficie come illimitata?
- Tale difficoltà prescinde dal modellino?

Lavoro di gruppo

- È stato giudicato positivamente e la "peer instruction" è stata utile per capire meglio alcuni concetti e superare delle difficoltà
- Più liberi di esprimersi come meglio ritenevano senza sentirsi giudicati
- Disagio e difficoltà superati grazie alla discussione con gli altri

Questionario finale (DA)



2)se ritieni possa essere un oggetto matematico di che tipo potrebbe essere l'espressione che lo rappresenta? indicate se stai considerando l' intero oggetto o una sezione di esso

FUNZIONI A 2 VARIABILI _ TUTTO P'aggetto_

Funzioni a due variabili tutto l'oggetto

3)Ci sono dei punti stazionari? Su come è possibile trovarli matematicamente? perché? Devo Juovare il punto + alto i

& variabile e pai trouve quello

Derivate passiale

Devo trovare il punto + alto rispetto ad entrambe le variabili e poi triovare quello + basso rispetto alle variabili

1) dati gli oggetti in figura

può descrivere in modo maternatico



L'oggetto che ho scelto è il numero 2; si può descrivere in modo matematico

dopo averne scelto uno, pensi sia possibile descriverlo in modo matematico? l'aggetto che ho scelto é il numero e descriverlo in

2)se ritieni possa essere un oggetto matematico di che tipo potrebbe essere l'espressione che lo rappresenta? indicate se stai considerando l' intero oggetto o una sezione di esso

42 But dell'aggetto possiono essere rappresentati con e'es

Cal Per ciasan purto calcol

2 lati dell'oggetto possono essere rappresentati con l'espressione $y = ax^2 + bx + c$

3)Ci sono dei punti stazionari? Si come è possibile trovarli matematicamente? perché?

Calcolare le derivate; risolviamo il sistema di derivate parziali poste uguale a 0; dopo aver ottenuto I 4 punti stazionari. Per ciascun punto calcolo il Hessiano

Che cosa ha reso davvero inclusive le attività proposte?

- Attenzione agli stili cognitivi
- Cura del linguaggio
- Utilizzo di materiali da manipolare
- «Peer instruction»
- Coinvolgimento attivo di tutti
- Insegnante mediatore

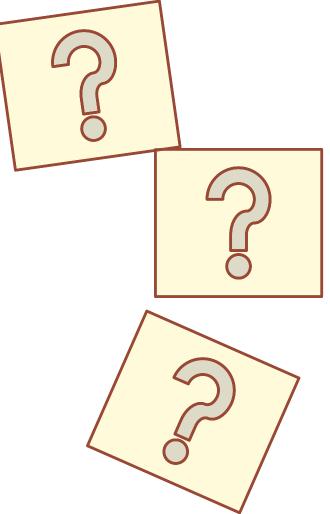
Sviluppi del progetto di ricerca

Valutazione

- Di che cosa?
 - Competenze trasversali
 - Competenze disciplinari

• Come?

A breve o a lungo termine?



Grazie per l'attenzione!

Bibliografia e sitografia

- •Antinucci, F. (2001). La scuola si è rotta: Perché cambiano i modi di apprendere. GLF editori Laterza.
- •Arzarello, F., Bazzini, L., Ferrara, F., Sabena, C., Andrà, C., Merlo, D., & Villa, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe* (Vol. 11). Edizioni Erickson.
- •Céléstin, F. (1969). La scuola del popolo, Roma: Editori Riuniti.
- •Giacardi, L. (2011). L'emergere dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. Atti del Convegno Di. Fi. Ma.
- •Paola, D. (2004). Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di Laboratorio di Matematica. Progetto Alice, 5(13), 103-121.
- •Pellai, A., Rinaldin, V., & Tamborini, B. (2002). *Educazione tra pari: manuale teorico-pratico di empowered peer education* (Vol. 56). Edizioni Erickson.
- •Stella, G. & Grandi, L. (2011). La dislessia ei DSA. Firenze: Giunti Scuola.
- •http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/lalbero-maestro/
- http://nrich.maths.org/737