Giochiamo sul serio

La matematica del pensiero strategico

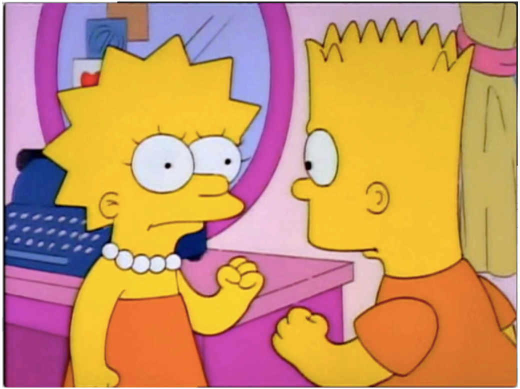
Marco LiCalzi

Dipartimento di Management
Università Ca' Foscari Venezia

Convegno UMI-CIIM
Pavia, 7–9 ottobre 2016

http://virgo.unive.it/licalzi/gss.pdf

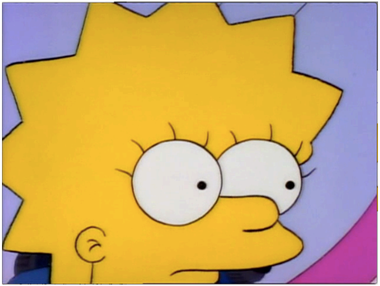
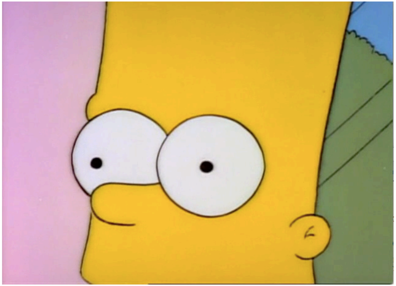
Sasso-carta-forbici



Lisa:
"C'è solo un modo per risolvere questa cosa: sasso, carta, forbici."

Tratto da *I Simpsons* (stagione 4, episodio 19)

Il pensiero strategico

Lisa:
"Povero prevedibile Bart: sceglie sempre il sasso."

Bart:
"Caro vecchio sasso: niente ti batte!"

Come giocheranno Bart e Lisa?

Il pensiero strategico

Bart gioca sasso e Lisa gioca carta.

Teoria dei giochi

La teoria dei giochi studia l'interazione strategica.

La data di nascita ufficiale è il 1944, quando esce la prima edizione di *Theory of Games and Economic Behavior*, scritto da John von Neumann e Oskar Morgenstern.

Premi Nobel per l'Economia:

- 1994 Harsanyi, Nash e Selten.
- 1996 Mirrlees e Vickrey.
- 2001 Akerlof, Spence e Stiglitz.
- 2005 Aumann e Schelling.
- 2007 Hurwicz, Maskin e Myerson.
- 2012 Roth e Shapley.

Un calcio al pallone

Tratto da *Linus and Lucy* (1983)

Come giocheranno Charlie Brown e Lucy?

Un calcio al pallone

Tratto dalla striscia del 23 ottobre 1988

Un calcio al pallone

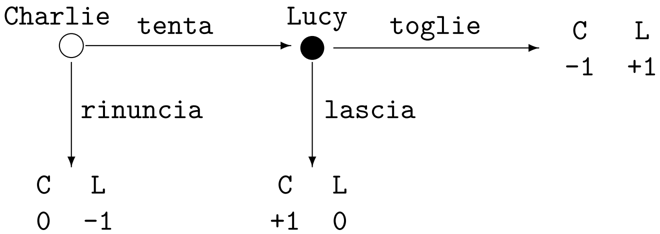
Lucy promette a Charlie Brown che non tirerà via il pallone.

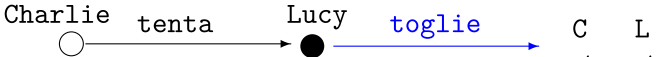
Charlie Brown può tentare il calcio o rinunciare.

Lucy può tenere fermo il pallone o tirarlo via.

Ciascuno valuta diversamente gli esiti:

$+1$	0	-1

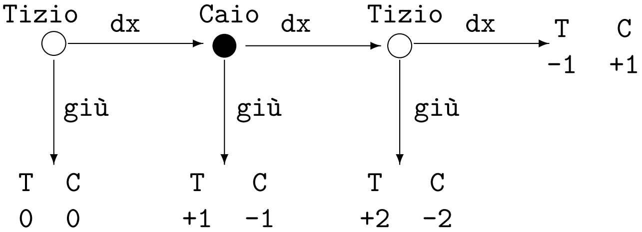


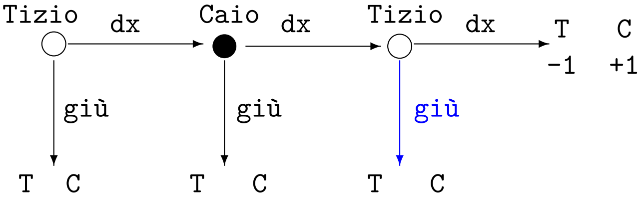


Alberi di gioco

Tizio e Caio giocano a turno: Tizio gioca due volte e Caio una.

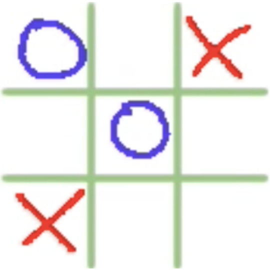
Gli importi sono somme di denaro che l'uno paga all'altro.





La strategia perfetta

Una strategia perfetta conduce al miglior risultato possibile contro avversari che pensano strategicamente.



Nel tris, una strategia perfetta garantisce la patta.

1) Una strategia perfetta non garantisce di vincere:
   se si gioca a tris in modo perfetto, finisce patta.

2) Una strategia perfetta sa approfittare degli errori altrui:
   se l'avversario gioca male, potete batterlo (anche a tris).

Il gioco del tris

Sintesi di una partita:

X		
	O	
X		

X		
O	O	
X		

X		
O	O	X
X		

...

X	O	X
O	O	X
X	X	O

Se tutti giocano perfettamente, la partita finisce patta.

Un'altra partita:

X		

X	O	

X	O	
X		

...

X	O	
X	X	O
O		X

Se "O" sbaglia, "X" vince la partita.

Giochi di pura abilità

Il tris è un gioco di pura abilità, come dama, scacchi, go, hex, etc.

Teorema di Zermelo (1913):
Per ogni gioco di pura abilità esiste una strategia perfetta.

> *come l'araba fenice:*
> *che vi sia, ciascun lo sa;*
> *dove sia, nessun lo dice.*
>
> P. Metastasio, *Demetrio* (1731), II.3

$\boxed{\text{La strategia perfetta esiste, ma come si trova?}}$

La strategia perfetta si calcola partendo dal fondo e ragionando all'indietro (induzione retrograda).

La corsa a 20 di Brousseau

1. Ci sono 21 bandiere.
2. A turno, una delle due squadre prende da 1 a 3 bandiere.
3. Vince chi prende l'ultima bandiera.

Tratto da *Survivor Thailand: Episode 6*, in onda nel 2002 in USA.

Regole

1. Ci sono 21 monete.
2. A turno, uno dei due giocatori scarta da 1 a 3 monete.
3. Vince (e si prende tutte le monete) chi scarta l'ultima moneta.

Domanda

Come si trova la strategia perfetta?

Come si trova la strategia perfetta?

Partiamo dal fondo. (Ovvero: facciamo *induzione retrograda*!)

Se al tuo turno restano 1/2/3 monete, hai vinto: 1 2 3

"Primo, non prenderle!": non lasciar mai giù 1/2/3 monete.

Se ci sono 4 monete e tocca a te muovere, hai perso: 4

Se ci sono 5 monete e tocca a te muovere, che fai? 5

Se ci sono 6/7 monete, che fai? 6 7

Se ci sono 8 monete, hai perso. 8

Se ci sono 9/10/11 monete, che fai? 9 10 11

Se sono 12? 12

Quali sono le posizioni da evitare? 16 20

Chi inizia il gioco vince: basta mandare l'avversario in "rosso".

Il Piccolo Mago

Il Piccolo Mago: La scommessa

Trucco n. 19

Materiale occorrente: 20 monete

La scommessa

Con questo segreto potrai vincere molte scommesse. Disponi in una fila tutte le 20 monete. Scegli uno spettatore e, alternandovi, togliete sempre 1, 2 oppure 3 monete. Perde chi toglie l'ultima moneta.

Il Piccolo Mago: La soluzione

Trucco n. 19

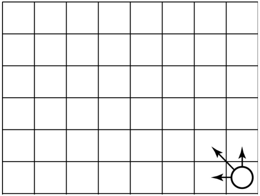
Materiale occorrente: 20 monete

La scommessa

Con questo segreto potrai vincere molte scommesse. Disponi in una fila tutte le 20 monete. Scegli uno spettatore e, alternandovi, togliete sempre 1, 2 oppure 3 monete. Perde chi toglie l'ultima moneta. Se cominci tu, dovrai togliere 3 monete. Poi, lo svolgimento è semplicissimo: se il tuo spettatore toglie 1 moneta, tu dovrai toglierne di seguito 3. Se l'altro toglie 2 monete, anche tu ne toglierai egualmente 2. Se dovesse toglierne 3, tu togli solo una moneta. Proseguendo in questo modo toccherà a lui togliere l'ultima moneta e vincerai sempre tu. Se comincia lo spettatore dovrai cercare di arrivare a una situazione di partenza di 17, 13, 9 oppure 5 per continuare nella maniera descritta sopra.

Prova da solo questo gioco, facendo anche la parte dello spettatore, in modo da provare tutte le possibili situazioni. Non sfidare nessuno se non sei perfettamente allenato!

1. Piazzate un fagiolo in basso a destra in una griglia $m \times n$.
2. A turno, ciascun giocatore muove il fagiolo di un quadratino: sono ammesse tre direzioni: nord, ovest, nord-ovest.
3. Non si può uscire dalla griglia.
4. Perde chi sposta il fagiolo nella cella in alto a sinistra.



Esiste una strategia perfetta?

Chi vince? (Qual è una strategia perfetta?)

Come dipendono le risposte da m ed n?

Varianti

1. Ci sono 20 bastoncini sul tavolo.
2. A turno, uno dei due giocatori scarta da 1 a 3 bastoncini.
3. Perde chi scarta l'ultimo bastoncino.

Tratto dal programma *Fort Boyard*, in onda in Francia dal 1990.

1. Ci sono due scatole: una contiene m palline rosse, l'altra n blu.
2. A turno, ciascun giocatore scarta una pallina da una scatola.
3. Perde chi rimuove l'ultima pallina.

Marienbad

2. A turno, ciascun giocatore scarta quante palline vuole, purché siano tutte dello stesso colore. (Deve scartarne almeno una.)

Nelle scuole dove si gioca a scacchi: studiate i finali di partita.

Uno contro tutti

Regole (gioco di pura abilità)

1. Si gioca in due.
2. Ciascuno scrive un numero intero (segreto) fra 0 e 100.
3. Io gioco in simultanea contro ciascuno dei partecipanti:
   il mio numero è uno solo e vale per qualsiasi avversario.
4. Si scoprono i due numeri selezionati.
5. Vince chi si avvicina di più alla metà del numero scritto dall'avversario.
6. La partita è patta se le distanze sono uguali.

Regole (gioco di pura fortuna)

1. Il premio è unico ed è un libro di divulgazione matematica.
2. Vince chi fa il compleanno oggi (con tanti auguri!).
3. In caso di pareggio, vince chi è nato più lontano da Pavia.
4. in caso di ulteriore pareggio, vince il più giovane.
5. In caso di ulteriore pareggio, faccio un sorteggio.

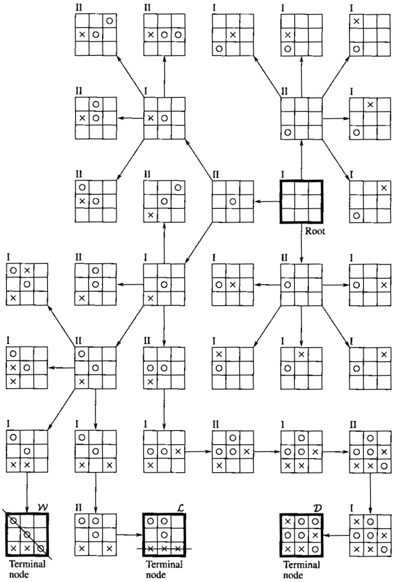
L'appuntamento (documenti alla mano!) con gli interessati per l'assegnazione del premio è al termine della lezione successiva.

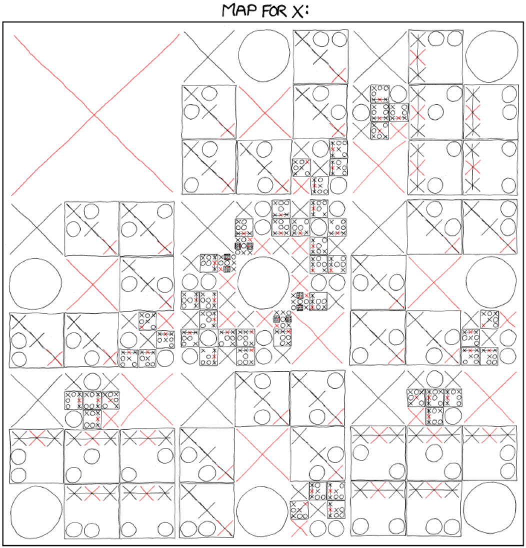
Molti giochi sono complessi

I migliori programmi di scacchi o di go non riescono a calcolare la strategia perfetta, anche se giocano meglio dei grandi maestri umani.

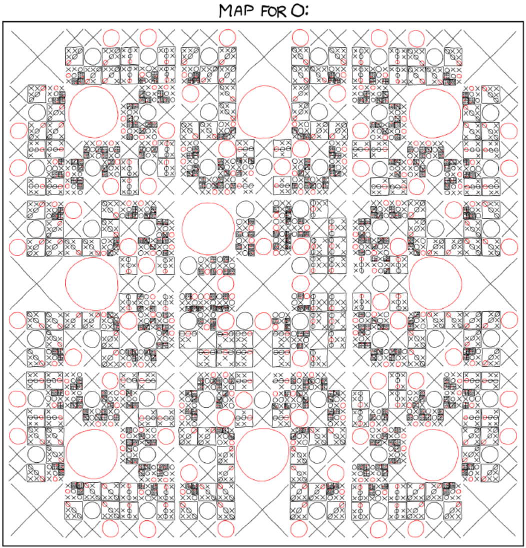
Alcuni giochi sono completamente risolti, o quasi: per esempio, mini-dama o i mini-scacchi.

A me piace molto stimolare gli studenti a cercare una rappresentazione alternativa all'albero per il gioco del tris.





Tratto da `http://xkcd.com/832/`



Tratto da `http://xkcd.com/832/`

La corsa a 15

Regole

1. Si gioca in due.
2. Ci sono nove carte scoperte, numerate da 1 a 9.
3. A turno, ciascun giocatore si prende una carta dal mazzo.
4. Vince chi per primo raccoglie tre carte che sommano a 15.
5. La partita è patta se il mazzo si esaurisce e nessuno ottiene 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	
3		

X	O	
X		

X	O	
X		
O		

X	O	
X	X	
O		

8	1	
3	5	
4		

Leggete (e fate di conto) prima di firmare

Nel 1958, il trattato di Roma dà vita alla Comunità Economica Europea, antesignana dell'Unione Europea.

Il primo allargamento arriva nel 1973 (UK, DK, IRL), dopo 15 anni.

I paesi fondatori sono sei: F, G, I, B, NL, L.

Il *quorum* necessario per prendere una decisione è 12 voti su 17.

La distribuzione dei voti è: F (4), G(4), I (4), B (2), NL (2), L (1).

Il quorum è pari.

Tutti i paesi tranne il Lussemburgo hanno un numero di voti pari.

Il voto del Lussemburgo non è necessario per avere il quorum.
In altre parole, il Lussemburgo ha potere nullo!

Giochi da senatori

Plinio il Giovane (Epistolario, libro 8, lettera 14) racconta una sua esperienza da Presidente del Senato Romano, nel 100 a.C. circa.

Il Senato deve decidere la sorte dei liberti accusati dell'omicidio del console Afranio Destro.

Le mozioni sono tre: rilascio (45%), esilio (35%), pena di morte (20%).

Di prassi si vota in modo binario un'agenda scelta dal Presidente.

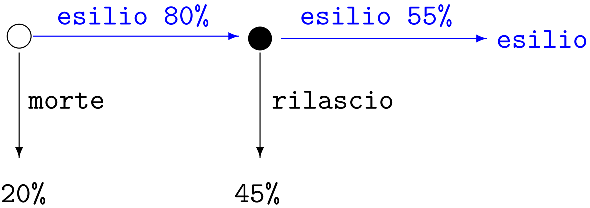
Ad esempio: il Senato sceglie prima fra esilio e condanna a morte, e poi fra l'opzione vincente e il rilascio.

Plinio propugna il rilascio, ma non ha modo di volgere l'esito delle votazioni a suo favore.

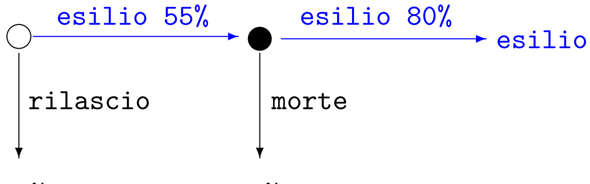
Giochi da senatori

Ci sono tre mozioni: rilascio (45%), esilio (35%), morte (20%).

Se si vota prima fra esilio e pena di morte, e poi sul rilascio:



Se si vota prima fra esilio e rilascio, e poi sulla pena di morte:



Giochi da senatori

Ci sono tre mozioni: rilascio (45%), esilio (35%), morte (20%).

Se Plinio adotta una votazione binaria, vince "esilio".

Idea: la mozione per il "rilascio" ha la maggioranza relativa!

Fra molti malumori, Plinio cambia la procedura di voto:

ciascun senatore andrà a sedersi vicino a chi ha proposto la mozione per la quale intende votare.

Pensa prima di votare:

il senatore che propone la mozione di morte va a sedersi accanto a chi propone l'esilio, portandosi dietro i suoi. Si approva l'esilio.

Grazie per la vostra attenzione!

Riferimenti

- K. Binmore, *Game theory: A very short introduction*, OUP, 2007.
- E-Y. Gura e M. Maschler, *Insights into game theory*, CUP 2008.
- A. Dixit e B. Nalebuff, *Io vinco, tu perdi*, Il Sole 24 Ore Pirola, 2004.
- J. Harrington, *Games, strategies, and decision making*, Worth 2009.
- R. Lucchetti, *Di duelli, scacchi e dilemmi*, Bruno Mondadori 2001.
- F. Patrone, *Decisori (razionali) interagenti*, Edizioni Plus 2006.
- S. Schecter e H. Gintis, *Game theory in action*, PUP 2016.
- A.D. Taylor e A. Pacelli, *Mathematics and politics*, Springer 2008^2.
- J.D. Williams, *The compleat strategyst*, Dover 1966.

Siti (un clic sul link fornisce accesso diretto)

- `http://gametheory.net/students.html`
- `http://virgo.unive.it/licalzi/publications.html`
- `http://www.la7.it/dimartedi/video/`
  `lintervista-al-professor-marco-li-calzi-sul-suo-ultimo-libr`